

**UNIVERSTE SAAD DAHLEB DE BLIDA**

**Faculté des Sciences de l'Ingénieur**  
Département d'Electronique

# **MEMOIRE DE MAGISTER**

Spécialité : contrôle

**COMMANDE A STRUCTURE VARIABLE PAR MODE DE  
GLISSEMENT DANS LE DOMAINE CONTINU ET DISCRET  
APPLIQUEE A UN ROBOT SCARA**

Par

**Mme KHALAL Ouafia**

Devant le jury composé de :

A.GUESSOUM	Professeur, U. Blida	Président
H. SALHI	Maître de conférences, U. Blida	Examineur
B.KAZED	Chargé de cours, U. Blida	Examineur
M.HAMELAIN	Directeur de recherche, CDTA, Alger	Examineur
M.BELHOCINE	Chargé de recherche, CDTA, Alger	Rapporteur

Blida, Décembre 2005

## RESUME

Le but de notre travail est d'analyser et de résoudre des problèmes de commande pour les systèmes dynamiques décrits par les modèles mathématiques.

Deux types de commande ont été élaborées et testées sur le modèle dynamique du robot SCARA RP41 en mode de régulation ainsi qu'en mode de poursuite de trajectoire.

La Commande à Structure Variable (CSV) par Mode de Glissement (MG), des différentes extensions de ce type de commande ont été implémentés et testés sur le modèle dynamique du robot SCARA.

Les performances de cette technique telles que la rapidité, la simplicité et la robustesse face aux variations paramétriques, la charge transportée et les signaux de perturbation externes, ont bien été mises en évidence.

D'autre part, afin de réduire les broutements qui sont dues à la commutation de la commande, l'insertion de la fonction de saturation au niveau de la composante discontinue de la commande permet également de les réduire.

Pour la Commande à Structure Variable Discrète (CSVD) par Mode de Quasi Glissement (MQG), plusieurs approches sont présentées; dans ce cas de nouvelles conditions pour l'existence et la convergence d'un mode de quasi glissement sont définies, par la suite nous avons choisi l'approche de SARPTURK et celle de la Loi de La Convergence pour la mise en œuvre d'une CSVD sur le modèle dynamique linéarisé et discrétisé du robot SACRA et puis sur son modèle dynamique. Les résultats de la simulation montrent l'effet de la période d'échantillonnage sur les systèmes physiques, tandis que la robustesse vis-à-vis des variations paramétriques, la charge transportée et les signaux de perturbations externes est garantie.

### **Mots clés**

Robot manipulateur, Modèle dynamique, Commande à Structure Variable (CSV), Mode de Glissement (MG), Phénomène de broutement, Commande à Structure Variable Discrète (CSVD), Mode de Quasi Glissement (MQG).

## **Abstract**

The goal of our work is to analyze and solve problems of the control for the dynamic systems described by the mathematical models.

Two types of control were worked out and tested on the dynamic model of robot SCARA RP41 in regulation mode like in continuation of trajectory mode.

The Variable Structure Control (VSC) by Sliding Mode (SM), the various extensions of this type of control were implemented and tested on the dynamic model of robot SCARA.

The performances of this technique such as the speed, simplicity and the robustness opposite the parametric variations, the transported load and the external signals of disturbance, were indeed highlighted.

In addition, in order to reduce the chattering which is caused by the commutation of the control, the insertion of the saturation function on the level of the discontinuous component of the control also makes it possible to reduce them.

For the Discrete Variable Structure Control (DVSC) by Quasi Sliding Mode (QSM), several approaches are presented; in this case a new conditions for the existence and the convergence of quasi sliding mode are defined, thereafter we chose the SARPTURK approach and the Law of Convergence approach for the implementation of a DVSC on the dynamic model linearized and discretized of SCARA robot and then on its dynamic model. The results of simulation show the effect of the sampling period on the physical systems, while the robustness opposite the parametric variations, the transported load and the external signals of disturbances are guaranteed.

### **Key words**

Manipulator robot, Dynamic model, Variable Structure Control (VSC), Sliding Mode (SM), Chattering phenomena, Discrete Variable Structure Control (DVSC), Quasi Sliding Mode (QSM).

## ملخص

الهدف من هذا العمل هو تحليل و حل مشاكل التحكم لأنظمة الدينامكية الممثلة بنماذج رياضية. تم تجسيد وتجريب نوعان من أنظمة التحكم على النموذج الديناميكي للذراع المسمى سكارا. مختلف أنظمة التحكم ذات البنية المتغيرة بطريقة طور الانزلاق المستمر تم تجسيدها وتطبيقها على هذا النموذج الديناميكي للربو سكارا في ميدان التنظيم و متابعة المسار. كما تم التأكد من مزايا هذا النوع من التحكم و المتمثل في السرعة, السهولة و الصلابة اتجاه التغيرات الوسطية الحمولة و كذا التأثيرات الخارجية. ومن جهة أخرى, تم تخفيض الاصطكاك الناتج عن التغيير في بنية التحكم وذلك باستعمال دالة التشبع على مستوى المركبة المتقطعة لنظام التحكم. أما بالنسبة لأنظمة التحكم ذات البنية المتغيرة بطريقة طور الانزلاق المتقطع, فقد تم تقديم عدة اقتراحات وذلك من أجل إيجاد شروط و تعاريف جديدة للتقارب حيث تم اختيار طريقة ساربيترك و طريقة القانون التقريبي من أجل تطبيق نظام التحكم المتقطع على النموذج الخطي و المتقطع للربو سكارا ثم على نموذج الديناميكي. نتائج التمثيل البياني تبين مدى تأثير مدة الدور الزمني للتقطيع على الأنظمة الفيزيائية مع ضمان الاستقرار و الصلابة اتجاه الحمولة و المؤثرات الخارجية.

### كلمات مفتاحية

الذراع الآلي, النموذج الديناميكي, التحكم ذات البنية المتغيرة, طور الانزلاق, ظاهرة الانزلاق و التحكم ذات البنية المتغيرة المتقطعة, طور الشبه المنزلق.

## **REMERCIEMENTS**

Ce mémoire représente un travail développé et mis en œuvre au département d'électronique de l'université de Blida. Ce travail a été mené à terme grâce à l'appui, l'aide et les encouragements que j'ai reçus de la part de plusieurs personnes.

Je tiens à exprimer mes remerciements les plus sincères à Monsieur M. BELHOCINE, chargé de recherche au Centre de Développement des Technologies Avancées (CDTA), qui m'a confié cette étude et a contribué à son bon déroulement, je lui suis très reconnaissante pour l'attention constante avec laquelle il a suivi ce travail.

Je remercie Monsieur le professeur A. GUESSOUM d'avoir accepté de juger et de présider le jury de ce mémoire.

Je voudrais remercier les membres de jury: Monsieur H. SALHI, Maître de conférence, président du conseil scientifique et Monsieur B. KAZED, chef département d'électronique, d'avoir accepté d'analyser ce travail, pour leurs conseils, leurs remarques constructives et pour leurs indications.

Je présente mes vifs remerciements à Monsieur M. HAMERLAIN, Maître de recherche (CDTA), qui a bien voulu me faire l'honneur d'être membre de ce jury.

Mes sincères remerciements s'adressent également à Monsieur O. NEDJMI, responsable du PGRS au sein de notre département, d'avoir mis à notre disposition les moyens nécessaires pour la réalisation de ce travail.

Je voudrais exprimer ma gratitude envers tous mes professeurs, qui m'ont fait confiance et j'espère que l'aboutissement de ce mémoire récompense une partie de leur travail.

Un grand merci pour mon époux Mohamed RAHIM, pour son soutien moral et pour sa patience pendant toute cette période.

Sans oublier toutes mes amies qui m'ont encouragé et soutenue jusqu'au bout, en particulier Rafika BOUZID.

## TABLE DES MATIERES

<b>RESUME</b> .....	1
<b>REMERCIEMENTS</b> .....	4
<b>TABLE DES MATIERES</b> .....	5
<b>LISTES DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX</b> .....	9
<b>INTRODUCTION</b> .....	12
<b>1. MODELISATION DU ROBOT SCARA RP41</b>	
1.1 Introduction .....	16
1.2 Description geometrique d'un bras manipulateur .....	16
1.2.1 Espace articulation ou espace de configuration.....	17
1.2.2 Espace opérationnel.....	17
1.2.3 Description de la situation d'un solide dans l'espace.....	18
1.2.3.1 Description de la position d'un solide .....	18
1.2.3.2 Description de l'orientation d'un solide .....	19
1.2.4 Transformation homogène.....	20
1.2.5 L'espace de travail d'un robot manipulateur .....	20
1.3 Modélisation .....	20
1.3.1 Modélisation géométrique .....	21
1.3.1.1 Modèle géométrique direct.....	21
1.3.1.2 Modèle géométrique inverse .....	22
1.3.2 Modélisation différentielle .....	22
1.3.2.1 La matrice JACOBIENNE d'un robot manipulateur .....	23
1.3.2.2 Matrice JACOBIENNE inverse d'un robot manipulateur.....	23
1.3.2.3 Modèle cinématique direct .....	23
1.3.2.4 Modèle cinématique inverse.....	23
1.3.3 Modélisation dynamique .....	24
1.4 Modélisation du robot SCARA (RP41).....	26
1.4.1 Description du robot .....	26
1.4.2 Espace de travail.....	27
1.4.3 Modèle géométrique .....	27
1.4.4 Modèle géométrique inverse .....	29
1.4.5 Le modèle cinématique.....	30
1.4.6 Modèle cinématique inverse.....	31
1.4.7 Modélisation dynamique .....	32
1.4.8 Modèle dynamique inverse.....	37
1.5 Conclusion.....	38

## 2. COMMANDE A STRUCTURE VARIABLE CONTINUE PAR MODE DE GLISSEMENT

2.1	Introduction .....	39
2.2	Systèmes à structure variable .....	40
2.3	Mode de glissement .....	41
2.3.1	Régime glissant idéal.....	42
2.3.2	Régime glissant réel .....	42
2.3.3	Description du mode de glissement.....	43
2.4	Formalisation classique du regime glissant.....	44
2.4.1	Condition de glissement .....	45
2.4.2	Commande équivalente en régime glissant.....	45
2.5	Détermination du domaine de glissement dans le contexte de la geometrie differentielle .....	48
2.6	Determination du domaine de glissement par les fonction de LYAPUNOV.....	55
2.6.1	Domaine de glissement.....	56
2.6.2	Détermination de la condition de glissement par la fonction de LYAPUNOV ...	58
2.7	Conception d'une commande a structure variable par mode de glissement.....	58
2.7.1	Choix de la surface de glissement : .....	59
2.7.2	Condition de la convergence .....	59
2.7.3	Loi de commande à structure variable par mode de glissement.....	60
2.7.4	Réduction du phénomène de broutement .....	60
2.7.4.1	Commande continue par bande de surface .....	61
2.8	Synthèse des correcteurs a structure variable par mode de glissement appliquees au robot SCARA RP41 .....	63
2.8.1	Une commande de type $U = -M.sign(S)$ .....	64
2.8.2	Une commande de type $U = U_{eq} + \Delta U$ .....	64
2.9	Simulation.....	69
2.10	Conclusion.....	88

## 3. LE MODE GLISSANT DISCRET DES SYSTEMES A STRUCTURE VARIABLE

3.1	Introduction .....	89
3.2	Commande à structure variaile discrete par mode de quasi glissement .....	89
3.3	Approche de la convergence.....	90
3.4	Approche de FURUTA.....	96
3.5	Approche de SARPTURK, ISTEFAPOULOS ET KAYNAK.....	99
3.5.1	Définition de la condition de glissement .....	99
3.5.2	Détermination des bornes de la commande .....	100
3.6	Précision de KOTTA .....	101
3.7	Approche de CHAN .....	102
3.7.1	Estimation des perturbations .....	102
3.8	Approche de SIRA-RAMIREZ .....	104
3.9	Approche de YON-PING .....	105
3.10	Implantation d'une commande glissante discrète pour le robot SCARA RP41 selon l'approche de SARPTURK .....	107
3.10.1	Linéarisation du système .....	107
	Bouclage linéarisant du robot SCARA.....	108
3.10.2	Echantillonnage des systèmes .....	109
3.10.3	Détermination de la commande glissante discrète pour SCARA.....	110
3.11	Simulation.....	112
3.12	Conclusion.....	128

## **4. MISE EN ŒUVRE D'UNE COMMANDE GLISSANTE DISCRETE SELON L'APPROCHE DE LA LOI DE CONVERGENCE POUR LE ROBOT SCARA RP41**

4.1	Introduction .....	129
4.2	Description de la commande du systeme échantillonné.....	130
4.3	Synthese d'un correcteur a structure variable discret par l'approche de la loi de la convergence .....	130
4.3.1	Détermination de la fonction de commutation .....	130
4.3.2	Etablissement de la loi de commande.....	131
4.4	Cas d'un système linéaire .....	131
4.4.1	Détermination de la surface de glissement .....	131
4.4.2	Détermination de la loi de convergence .....	132
4.4.3	Détermination de la largeur de la bande.....	132
4.5	Cas du robot SCARA RP41 .....	133
4.5.1	Modèle discret du robot SCARA RP41 .....	134
4.5.2	Détermination de la surface de glissement .....	135
4.5.3	Détermination de la loi de la convergence pour le robot SCARA .....	136
4.6	Simulation.....	137
4.7	CONCLUSION .....	155
	<b>CONCLUSION .....</b>	<b>156</b>
	<b>ANNEXE.....</b>	<b>159</b>
	<b>APPENDICE.....</b>	<b>166</b>
	<b>A. Liste des symboles.....</b>	<b>166</b>
	<b>REFERENCES.....</b>	<b>168</b>



## LISTE DES ILLUSTRATIONS, FIGURES ET TABLEAUX

Figure 1.1 : Robot manipulateur à structure ouverte simple.....	17
Figure 1.2: Représentation de DENAVITT-HATENBERG .....	21
Figure 1.3 : Modèle dynamique direct.....	25
Figure 1.4 : Modèle dynamique inverse .....	25
Figure 1.5 : Robot SCARA RP 41 .....	26
Figure 1.6 : Volume du travail de SCARA RP41 .....	27
Figure 1.7 : Description géométrique du robot SCARA .....	27
Figure 1.8 : Représentation du robot SCARA dans le plan .....	30
Figure 2.1 : Système à structure variable.....	41
Figure 2.2 : Différentes phases du trajectoire dans le plan de phase .....	42
Figure 2.3 : Glissement idéal .....	42
Figure 2.4: Glissement réel .....	43
Figure 2.5 : Phénomène de glissement réel .....	43
Figure 2.6: Commutation de champs de vecteurs sur la variété $S$ .....	49
Figure 2.7: Domaine de glissement .....	57
Figure 2.8 : Construction de la bande $B(t)$ .....	61
Figure 2.9 : Composante $\Delta U$ par bande continue de saturation au voisinage de la surface	62
Figure 2.10 : Composante $\Delta U$ par bande continue de lissage au voisinage de la surface .	62
Figure 2.11 : Schéma de principe d'une commande à structure variable pour le robot SCARA .....	63
Figure 2.12 : Correcteur de type $U = -M.sign(S)$ en mode de régulation .....	75
Figure 2.13 : Correcteur de type $U = U_{eq} - (\alpha e  + \beta \dot{e}  + \gamma).sign(S)$ en mode de régulation .....	78

Figure 2.14 : Correcteur de type $U = U_{eq} - k.sat(S)$ en mode de régulation .....	80
Figure 2.15 : Correcteur de type $U = U_{eq} - K.sign(S)$ en mode de poursuite de trajectoire .....	83
Figure 2.16 : Correcteur de type $U = U_{eq} - (\alpha e  + \beta \dot{e}  + \gamma).sign(S)$ en mode de poursuite de trajectoire .....	86
Figure 2.17 : Correcteur de type $U = U_{eq} + (\alpha e  + \beta \dot{e}  + \gamma).sat(S)$ en mode de poursuite de trajectoire .....	87
Figure 3.1 : Trajectoires des systèmes CSVD .....	91
Figure 3.2 : Boucle de linéarisation .....	108
Figure 3.3 : Correcteur à structure variable discrète dans le cas l'inégalité $(S(k+1) - S(k)).sign(S(k))$ n'est pas vérifié (la divergence) .....	115
Figure 3.4 : Correcteur de type $U(k) = -M(k).sign(S(k))$ avec une période ..... d'échantillonnage de 0.035 et $\lambda = [7.5, 7.6, 7.7]$ .....	116
Figure 3.5 : Correcteur de type $U(k) = U_{eq}(k) - K(k).sign(S(k))$ en mode de régulation .....	118
Figure 3.6 : Correcteur de type $U = -M(k).sign(S(k))$ en mode de poursuite de trajectoire .....	119
Figure 3.7 : Correcteur de type $U(k) = U_{eq}(k) - k.sign(S(k))$ en mode de poursuite de trajectoire .....	121
Figure 3.8 : Mode de régulation avec TE=0.1 .....	122
Figure 3.9 : Mode de poursuite de trajectoire avec TE=0.1 .....	124
Figure 3.10 : Mode de régulation avec une charge transportée et des perturbations.....	125
Figure 3.11 : Mode de poursuite de trajectoire avec une charge transportée et des perturbations .....	127
Figure 4.1 : Synoptique de la commande .....	130
Figure 4.2: Mode de régulation pour le système linéaire et T=0.01 .....	141
Figure 4.3: Mode de régulation pour le système linéaire et T=0.025 .....	142
Figure 4.4: Mode de poursuite de trajectoire système linéaire et T=0.01 .....	144

Figure 4.5: Mode de poursuite de trajectoire système linéaire et $T=0.058$ .....	145
Figure 4.6 : Mode de régulation pour le robot SCARA avec $R=10$ .....	147
Figure 4.7 : Mode de régulation pour le robot SCARA avec $R=90$ .....	148
Figure 4.8 : Mode de poursuite de trajectoire pour le robot SCARA avec $R=10$ .....	150
Figure 4.9 : Mode de poursuite pour le robot SCARA $R=100$ .....	151
Figure 4.10 : Mode de poursuite pour SCARA avec $R=200$ .....	152
Figure 4.11 : Mode de régulation pour SCARA avec $R=1$ (segment 1).....	152
Figure 4.12 : Mode de régulation pour SCARA avec $R=1$ (segment 1).....	153
Figure 4.13 : Robustesse du robot SCARA vis-à-vis la charge transportée et les signaux de perturbation externes.....	154
Tableau 1.1 : Description de la position d'un bras rigide.....	18
Tableau 1.2 : Description de l'orientation d'un solide .....	19
Tableau 1.3 : Les paramètres de DENAVITT-HARTEMBERG.....	28
Tableau 2.1 : Synthèse d'un correcteur CVS avec une commande de type $U = -M.sign(S)$ .....	64
Tableau 2.2 : Synthèse d'un correcteur CVS avec une commande de type $U = U_{eq} - K.sign(S)$ .....	66
Tableau 2.3 : Synthèse d'un correcteur CVS avec une commande de type .....	68
Tableau 2.5 : Cas d'un correcteur de type $U = -M.sign(S)$ .....	70
Tableau 2.6 : cas d'un correcteur de type $U = U_{eq} - K.sign(S)$ .....	70
Tableau 2.7 : Un correcteur de type $U = U_{eq} + (\alpha e  + \beta \dot{e}  + \gamma).sign(S)$ .....	70
Tableau 3.1 : synthèse d'un correcteur par mode de glissement pour $V = -M(k).sign(S(k))$ .....	111
Tableau 3.2 : synthèse d'un correcteur par mode de glissement de type $U(k) = U_{eq}(k) - K(k).sign(S(k))$ .....	111
Tableau 4.1 : synthèse de CSVD pour un système linéaire.....	133

Tableau 4.2: Synthèse de CSVD pour le mode robot SCARA RP41.....	136
Tableau 4.3 : Les paramètres de la commande pour le système linéaire.....	137
Tableau 4.4 : Les paramètres de la commande pour le robot SCARA.....	137

## INTRODUCTION GENERALE

Ces dernières années, le monde de l'industrie a connu un développement technologique sans précédent dans le domaine de la robotique et du contrôle. Ce développement a permis aux chercheurs de concevoir de nouvelles méthodes de contrôle pour les processus industriels très complexes, ces méthodes sont basées sur les concepts de systèmes à structure variable, de la logique floue, des réseaux de neurone...etc.

Les robots manipulateurs sont largement utilisés dans les systèmes manufacturiers où ils jouent l'un des rôles les plus importants, pour augmenter la productivité, réduire les coûts de production et améliorer la qualité de la production. Nous trouvons également l'utilisation des bras manipulateurs dans les hôpitaux où ils assistent dans de difficiles procédures chirurgicales. Ainsi dans les milieux hostiles à l'homme, telles que les hautes températures et la radioactivité, les bras manipulateurs exécutent de dangereuses tâches de manipulation.

Commander un robot manipulateur consiste à lui permettre d'atteindre un état désiré ou de réaliser une tâche bien spécifique dans un environnement réel, cette opération est délicate à cause des perturbations dues à l'environnement, à la structure complexe du robot qui mène à des équations dynamiques non linéaires, où aux paramètres d'inertie qui dépendent de la charge transportée et qui est souvent inconnue. Pour toutes ces raisons, il est important d'envisager l'application de techniques de commande robustes.

Les techniques classiques telles que les PID (PI, DI, PD) sont largement utilisées pour la commande des systèmes, en raison de leur simplicité, facilité de réglage et d'implémentation et de leurs bonnes performances. Cependant, ces dernières trouvaient leurs limites dès l'apparition des variations paramétriques, non linéarités ou des perturbations extérieures, et par conséquent, ces dernières deviennent insuffisantes surtout lorsque les exigences sur la précision et d'autres caractéristiques dynamiques sont

strictes. L'appel à des lois de commande robustes insensibles aux variations paramétriques, aux perturbations externes et aux non linéarité est nécessaire.

La Commande à Structure Variable (CSV) par mode de glissement [7] [8] [9] a gagné une popularité certaine en raison de sa simplicité et sa robustesse lors de son application dans divers domaines tels que la commande des moteurs, les hélicoptères, véhicules spatiale, robots[5][6]...etc.

Dans cette technique, la commande commute entre deux structures afin d'amener le point représentatif de l'évolution du système sur une hypersurface nommée surface de glissement, lorsque cette dernière est atteinte, un régime glissant se produit. Dans ce cas le système jouit de propriétés fortes intéressantes telles que l'insensibilité aux variations paramétriques de la partie commandée et les signaux de perturbations externes. Donc le système est plongé dans l'état d'un système réduit et libre et ne dépend que des coefficients de la surface glissement.

Bien que cette commande possède beaucoup d'avantages, elle possède un inconvénient qui limite son utilisation. Car en pratique, la commutation de la commande à une fréquence infinie est difficile à réaliser à cause, d'une part de la présence d'un temps de retard pour le calcul de cette commande, et d'autre part, de la limitation physique (fréquence de commutation finie). Par conséquent, des oscillations à hautes fréquences se produisent dans le mode de glissement et autour du point d'équilibre du système, ces oscillations sont nommées broutement (chattering en anglais).

Diverses techniques ont été proposées pour palier à cet inconvénient ; certaines consistent à approximer la fonction discontinue par une fonction continue au voisinage de la surface de commutation, d'autres par augmentation de fréquence de commutation et par un gain auto ajustable. Mais la réduction du broutement (chattering) se fait au prix d'une perte de précision.

Les derniers développements théoriques de la commande à structure variable ont été principalement focalisés sur les systèmes continus dans le temps, sa contrepartie numérique, commande à structure variable discrète a reçu moins d'attention. Aujourd'hui; les matériels informatiques voient leurs coûts diminuer en même temps que leurs performances augmentent et que leurs souplesses d'utilisation sont plus grandes, les tendances actuelles de l'implémentation de la CSV sont de plus en plus orienté vers l'utilisation numérique. Cette optique conduit les chercheurs à s'intéresser à la

discrétisation des régimes glissant afin de commander les systèmes. Les travaux de recherche [19] [20] [21] [22] [23][24][25][26]s'efforcent alors principalement de trouver de nouveaux théorèmes, définitions et condition d'existence et de la convergence de ce type de commande.

Une Commande dite à Structure Variable Discrète (CSVD) est une commande qui ne change sa structure qu'aux instants d'échantillonnages, où cette dernière est calculée, appliquée et maintenue constante durant toute la période d'échantillonnage. Cette limitation est l'origine d'un mouvement de zigzag du point représentatif du système le long du mode de glissement et autour du point d'équilibre. Ce nouveau comportement peut rendre le système instable, étant donnée que la dynamique du système ne peut pas plonger d'une façon définitive dans l'état d'un système réduit et libre, donc un mouvement de glissement idéal est irréalisable.

L'objectif de notre travail est d'analyser et de résoudre des problèmes de commande pour des systèmes dynamiques décrits par des modèles mathématiques. Dans ce cadre nous avons étudié la commande à structure variable par mode de glissement dans le domaine continu afin de l'appliquer à un bras manipulateur de type SCARA RP41 et de tester ses performances telle que la rapidité et la robustesse. Par la suite, nous nous sommes intéressés à la discrétisation du mode de glissement afin de pouvoir commander ce dernier et éliminer le phénomène de broutement.

Le présent mémoire est organisé comme suit:

Le premier chapitre présente la description du robot manipulateur SCARA RP41 et ses modèles géométriques, cinématiques et dynamiques, ainsi nous avons spécifié le domaine d'utilité de chaque modèle.

Le second chapitre est consacré à l'étude de la commande à structure variable par mode de glissement où nous présentons la méthodologie de synthèse pour la mise en œuvre de ce type de commande, par la suite, cette dernière est testée sur le modèle dynamique du robot SCARA en mode de régulation aussi bien qu'en mode de poursuite de trajectoire.

Les performances de cette technique telle que la rapidité, la robustesse face aux variations paramétriques, la charge transportée et les signaux de perturbation externes, ont bien été mises en évidence. Mais la réduction de phénomène de broutement se fait au prix d'une perte de précision.

Le chapitre trois portera sur l'aspect discret de la commande à structure variable par mode de glissement, quelques approches sont présentées concernant les caractéristiques, les attributs et la condition d'existence et de convergence d'un mode de glissement discret. Par la suite, nous appliquons l'une de ces approches sur notre robot SCARA linéarisé et discrétisé, afin de montrer l'influence de la période d'échantillonnage sur le comportement du système.

Dans le chapitre quatre, nous adoptons une autre approche nommée l'approche de la loi de la convergence pour la commande du robot SCARA RP41, où nous présentons la méthodologie de synthèse d'une commande glissante discrète selon cette approche et pour la mise en œuvre, nous utilisons une fois, le modèle dynamique du robot SCARA et une fois, son modèle dynamique linéarisé et discrétisé.

D'après les résultats obtenus nous distinguons la grande sensibilité des systèmes physiques envers la période d'échantillonnage, et plus spécialement à une commande échantillonnée par mode de glissement, où cette dernière est maintenue constante durant toute la période d'échantillonnage ceci peut rendre le système instable et par conséquent, le choix de la période de l'échantillonnage devient très délicat, d'autre part les performances de la commande à structure variable telle que la rapidité, la robustesse et la simplicité sont toujours satisfait.

En fin, nous terminerons par une conclusion et des perspectives.



## CHAPITRE 1 MODELISATION DU ROBOT SCARA RP41

### 1.1 INTRODUCTION

La commande d'un robot manipulateur consiste à asservir la situation (position et orientation) de son organe terminal à une situation imposée, en agissant sur les actionneurs dont il est doté et modifier ainsi sa configuration.

Cette commande nécessite la disposition de certains modèles mathématiques à savoir :

- ❖ Le modèle géométrique direct et inverse, qui expriment la situation de l'organe terminal en fonction des variables articulaires du mécanisme et inversement.
- ❖ Le modèle cinématique direct et inverse qui expriment la vitesse de l'organe terminal en fonction des vitesses articulaires et inversement.
- ❖ Le modèle dynamique qui représente les équations du mouvement du robot, permettant d'établir les relations entre les couples, les forces exercées par les actionneurs et les positions, vitesses et accélérations des actionneurs.

### 1.2 DESCRIPTION GEOMETRIQUE D'UN BRAS MANIPULATEUR

Un robot manipulateur à structure ouverte simple est composé de  $(n+1)$  corps rigides notés  $C_0..C_j..C_n$  et  $(n)$  articulations ou liaisons, le corps  $C_0$  constitue la base du robot tandis que le corps  $C_n$  porte l'organe terminal. L'articulation  $(J)$  relie le corps  $C_j$  au corps  $C_{j-1}$ , chaque articulation est mue indépendamment et son mouvement produit le mouvement relatif du corps. Les mouvements articulaires sont des rotations, dans ce cas l'articulation est dite rotoïde ou translation, alors l'articulation est prismatique axiale, les liaisons à plusieurs degrés de liberté sont décomposées en autant de liaisons à un seul degré de liberté, par adjonction de corps fictifs [1] [2]. (Figure 1.1).

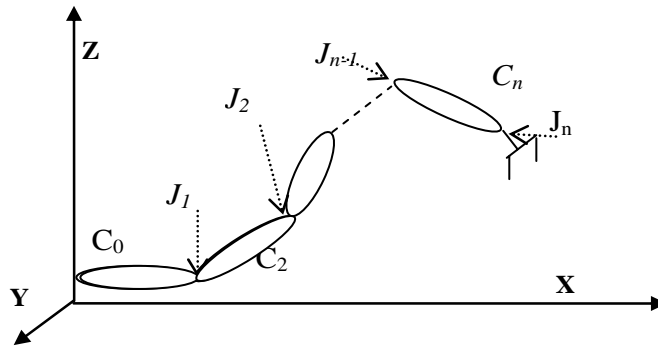


Figure1.1 : Robot manipulateur à structure ouverte simple

Selon que l'articulation soit de type rotoïde  $\theta_j$  ou prismatique  $r_j$ , on définit la variable articulaire  $q_j$  associée à l'articulation  $j$  par la relation suivante :

$$q_j = \bar{\sigma}_j \theta_j + \sigma_j r_j \quad \text{avec} \quad \bar{\sigma}_j = 1 - \sigma_j \quad (1.1)$$

$\sigma_j = 0$  Si l'articulation  $j$  est rotoïde.

$\sigma_j = 1$  Si l'articulation  $j$  est prismatique.

### 1.2.1 Espace articulation ou espace de configuration

On appelle espace articulaire ou espace de configuration, l'espace de représentation de la situation des variables articulaires du robot manipulateur. La dimension de cet espace est égale au nombre de variables articulaires indépendantes et correspond au nombre de degrés de liberté de la structure mécanique. Si  $n$  est le nombre d'articulations de la structure mécanique, l'espace articulaire est noté  $R^n$  et les variables articulaires sont définies par :

$$q = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]^T \quad (1.2)$$

### 1.2.2 Espace opérationnel

On appelle espace opérationnel, l'espace de représentation de la situation (position et orientation) de l'organe terminal. La représentation la plus simple consiste à utiliser les coordonnées cartésiennes pour la représentation de la position.

La dimension de cet espace constitue le nombre de degrés de liberté maximum que peut avoir l'organe terminal et correspond au nombre de paramètres indépendants nécessaires pour décrire sa situation dans l'espace cartésien. L'espace opérationnel est noté  $R^m$  ;  $m$  étant sa dimension. Les coordonnées opérationnelles sont définies par :

$$p = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_m]^T \quad (1.3)$$

### 1.2.3 Description de la situation d'un solide dans l'espace

Il est nécessaire pour positionner et orienter un solide indéformable et libre dans l'espace de fixer six paramètres indépendants : trois paramètres pour la position qui lui est associé et trois paramètres pour l'orientation de ce repère par rapport à un repère de référence.

Ces paramètres constituent les coordonnées opérationnelles et sont définis dans le repère de référence du poste de travail ou l'espace opérationnel.

#### 1.2.3.1 Description de la position d'un solide

La position de l'origine d'un repère lié à un solide par rapport à un repère de référence peut être définie par les coordonnées cartésiennes, cylindriques ou sphériques (tableau 1.1).

Le choix d'une description est guidé par les caractéristiques du robot manipulateur d'une part et celles de la tâche à réaliser d'autre part.

Tableau 1.1 : Description de la position d'un bras rigide

Type de coordonnées	La position	Représentation graphique
Cartésiennes	$P_{car} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$	
Cylindriques	$P_{cyl} = \begin{bmatrix} r \cdot \cos(\alpha) \\ r \cdot \sin(\alpha) \\ z \end{bmatrix}$	
Sphériques	$P_{sph} = \begin{bmatrix} r \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \\ r \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \\ r \cdot \cos(\beta) \end{bmatrix}$	

### 1.2.3.2 Description de l'orientation d'un solide

Les méthodes les plus couramment utilisées pour la description de l'orientation d'un solide sont :

- ❖ Les cosinus directeurs ;
- ❖ Les angles d'Euler ;
- ❖ Les angles de roulis, tangage et lacet ;
- ❖ Les paramètres d'Euler ou Ternions ;

Le tableau suivant décrit les différentes méthodes déjà citées.

Tableau 1.2 : Description de l'orientation d'un solide

Méthode	Définition	Matrice homogène d'orientation
Cosinus Directeurs	Les éléments des vecteurs $\underline{s}$ , $\underline{n}$ et $\underline{a}$	$P_{CD} = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x \\ s_y & n_y & a_y \\ s_z & n_z & a_z \end{bmatrix}$
Les Angles d'Euler $\varphi$ : précession $\theta$ : nutation $\psi$ : rotation propre	Les trois rotations : Rot(Z, $\varphi$ ) Rot(Y, $\theta$ ) Rot(X, $\psi$ )	$P_{Eul} = \begin{bmatrix} C\varphi C\psi - S\varphi C\theta S\psi & -C\varphi C\psi - S\varphi C\theta C\psi & S\varphi S\theta \\ S\varphi C\psi + C\varphi C\theta S\psi & -S\varphi S\psi + C\varphi C\theta C\psi & -C\varphi S\theta \\ S\theta S\varphi & S\theta C\varphi & C\theta \end{bmatrix}$
Les Angles $\varphi$ : roulis $\theta$ : tangage $\psi$ : lacet	Les trois rotations : Rot(Z, $\varphi$ ) Rot(Y, $\theta$ ) Rot(X, $\psi$ )	$P_{rnl} = \begin{bmatrix} C\varphi C\theta & C\varphi S\theta S\psi - S\varphi C\psi & C\varphi S\theta C\varphi + S\varphi S\psi \\ S\varphi C\theta & -S\varphi S\theta + C\varphi C\psi & S\varphi S\theta C\psi - C\varphi S\psi \\ -S\theta & C\theta S\psi & C\theta C\psi \end{bmatrix}$
Paramètres d'Euler $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et $\lambda_4$	Une rotation unique autour de $U, Rot(U, \theta)$ $\lambda_1 = C(\theta/2)$ $\lambda_2 = U_x S(\theta/2)$ $\lambda_3 = U_y S(\theta/2)$ $\lambda_4 = U_z S(\theta/2)$	$P_{pEul} = \begin{bmatrix} 2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) - 1 & 2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_1\lambda_4) & 2(\lambda_2\lambda_4 - \lambda_1\lambda_3) \\ 2(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4) & 2(\lambda_1^2 + \lambda_3^2) - 1 & 2(\lambda_3\lambda_4 - \lambda_1\lambda_2) \\ 2(\lambda_2\lambda_4 - \lambda_1\lambda_3) & 2(\lambda_3\lambda_4 + \lambda_1\lambda_2) & 2(\lambda_1^2 + \lambda_4^2) - 1 \end{bmatrix}$

### 1.2.4 Transformation homogène

On appelle transformation homogène, la matrice de dimension  $(4 \times 4)$  permettant la définition d'une transformation quelconque (rotation ou translation) d'un repère  $R_i$  à un autre repère  $R_j$ .

$$T_i^j = \begin{bmatrix} s_i^j & n_i^j & a_i^j & p_i^j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & p_x \\ s_y & n_y & a_y & p_y \\ s_z & n_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

où :  $s_i^j, n_i^j$  et  $a_i^j$  désignent respectivement les vecteurs unitaires suivant les axes  $X_j, Y_j$  et  $Z_j$  du repère  $R_j$  exprimés dans le repère  $R_i$ .

$p_i^j$  est l'origine du repère  $R_j$  exprimé dans le repère  $R_i$ .

### 1.2.5 L'espace de travail d'un robot manipulateur

L'espace de travail d'un robot manipulateur est défini comme l'ensemble des positions et des orientations accessibles par un repère particulier, lié en général, à son organe terminal. Il est entièrement déterminé par la structure du bras manipulateur : longueurs des éléments rigides, amplitude maximale de la rotation et la translation des articulations et du déplacement des bras.

## 1.3 MODELISATION

La modélisation des robots manipulateurs recouvre l'ensemble des modèles mathématiques utilisés en robotique [2] [3] [4]. Ces modèles permettent :

- ❖ D'exprimer les déplacements relatifs des différents éléments du mécanisme articulé les uns par rapport aux autres (matrices homogènes élémentaires) ;
- ❖ De spécifier les situations successives que doit prendre le repère associé à l'organe terminal du robot pour réaliser une tâche donnée, ainsi que les vitesses correspondantes ( modèles géométriques et différentiels ) ;
- ❖ De décrire et de contrôler les efforts mis en jeu lorsque le robot interagit avec son environnement (modèle dynamique).

### 1.3.1 Modélisation géométrique

La modélisation géométrique est l'ensemble des relations qui permettent d'exprimer la situation de l'organe terminal du robot en fonction de ses coordonnées articulaires et inversement.

#### 1.3.1.1 Modèle géométrique direct

Le Modèle Géométrique Direct (MGD) est défini par la fonction  $f$ , telle que :

$$\begin{aligned} f : R^n &\rightarrow R^m \\ q &\rightarrow p = f(q) \end{aligned} \quad (1.5)$$

On présente dans ce qui suit le formalisme des matrices homogènes de DENAVITT-HARTENBERG.

#### Paramètres de DENAVITT-HARTENBERG

La matrice de passage entre les repères  $R_{j-1}$  au repère  $R_j$  noté  $T_{j-1}^j$ , est obtenue en effectuant les transformations homogènes suivantes :

- ❖ Rotation autour de  $X_{j-1}$  d'un angle  $\alpha_j$ ,
- ❖ Translation le long de  $X_{j-1}$  d'une longueur  $d_j$ ,
- ❖ Rotation autour de  $Z_j$  d'un angle  $\theta_j$ ,
- ❖ Translation le long de  $Z_j$  d'une distance  $r_j$ .

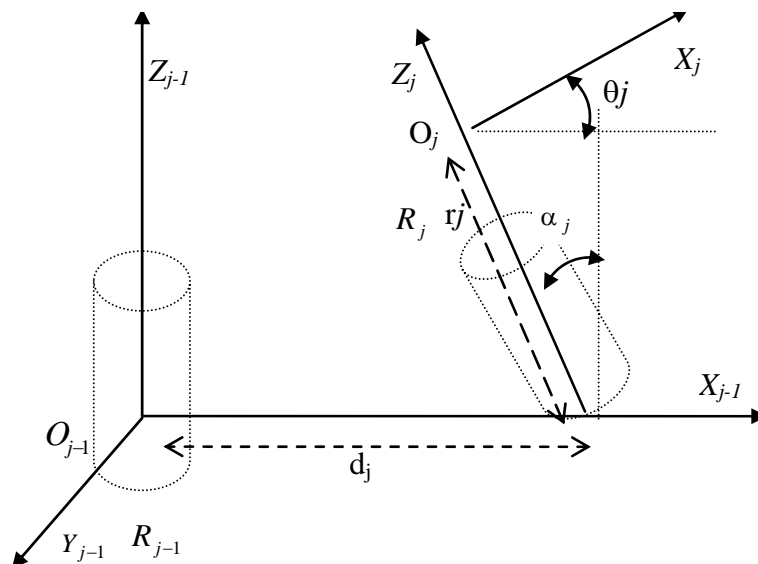


Figure 1.2: Représentation de DENAVITT-HARTENBERG

$$T_{j-1}^j = Rot(X, \alpha_j).Trans(d_j, 0, 0).Rot(Z, \theta_j).Trans(0, 0, r_j) \quad (1.6)$$

sachant que :

❖ L'opérateur *Rot* représente la matrice homogène de rotation autour des axes  $X_{j-1}$  et

$Z_j$

❖ L'opérateur *Trans* représente la matrice homogène de translation le long des axes

$X_{j-1}$  et  $Z_j$ . Ce qui donne :

$$T_{j-1}^j = \begin{bmatrix} \cos(\theta_j) & \sin(\theta_j) & 0 & d_j \\ \cos(\alpha_j)\sin(\theta_j) & \cos(\alpha_j)\cos(\theta_j) & -\sin(\alpha_j) & -r_j\sin(\alpha_j) \\ \sin(\alpha_j)\sin(\theta_j) & \sin(\alpha_j)\cos(\theta_j) & \cos(\alpha_j) & -r_j\cos(\alpha_j) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{j-1}^j & P_{j-1}^j \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

où :

$M_{j-1}^j$  : matrice (3×3) de rotation définissant les axes de repère  $R_j$  dans le repère  $R_{j-1}$ .

$P_{j-1}^j$  : vecteur position de l'origine du repère  $R_j$  relativement à  $R_{j-1}$  et exprimé dans  $R_{j-1}$ .

La matrice de passage homogène  $T_0^n$ , qui relie le repère de l'organe terminal et celui de la base s'obtient en effectuant le produit des matrices de passage homogène élémentaires suivant l'équation (1.8).

$$T_0^n = T_0^1 \times T_1^2 \times T_2^3 \dots \times T_{n-1}^n \quad (1.8)$$

### 1.3.1.2 Modèle géométrique inverse

Le Modèle Géométrique Inverse (MGI) consiste à calculer les coordonnées articulaires correspondant à une situation donnée de l'organe terminal lorsqu'elles existent ; ceci est défini par l'équation suivante :

$$\begin{cases} f^{-1} : R^m \rightarrow R^n \\ p \rightarrow q = f^{-1}(p) \end{cases} \quad (1.9)$$

Le calcul du modèle géométrique inverse peut se faire par des méthodes géométriques [4].

### 1.3.2 Modélisation différentielle

Le modèle différentiel d'un robot manipulateur représente les variations élémentaires des coordonnées opérationnelles en fonction des variations élémentaires des coordonnées articulaires et inversement. L'intérêt de la représentation différentielle d'un robot manipulateur est multiple, il permet :

❖ Le calcul de façon itérative des variables articulaires  $q_i$  connaissant les coordonnées opérationnelles  $p_i$  ;

- ❖ L'obtention du modèle cinématique qui exprime les vitesses opérationnelles en fonction des vitesses articulaires ;
- ❖ L'établissement de la relation reliant les efforts exercés sur l'organe terminal aux forces et couples des actionneurs ;

#### 1.3.2.1 La matrice JACOBIENNE d'un robot manipulateur

Le modèle différentiel direct est donné par l'équation suivante :

$$dp = J(q) dq \quad (1.10)$$

où :  $J(q)$  désigne la matrice JACOBIENNE du mécanisme.

La matrice JACOBIENNE est donnée par :

$$J_{i,j} = \frac{\partial p_i}{\partial q_j} = \frac{\partial f_i(q)}{\partial q_j} \quad (1.11)$$

#### 1.3.2.2 Matrice JACOBIENNE inverse d'un robot manipulateur

L'inverse de la matrice JACOBIENNE peut être obtenue par l'équation suivante :

$$J_{i,j}^{-1} = \frac{\partial q_i}{\partial p_j} = \frac{\partial f_i^{-1}(p)}{\partial p_j} \quad (1.12)$$

Pour le calcul de la matrice JACOBIENNE Inverse, on peut soit utiliser l'équation (1.12), soit inverser la matrice JACOBIENNE Directe.

#### 1.3.2.3 Modèle cinématique direct

Le modèle cinématique direct d'un robot manipulateur décrit la vitesse des coordonnées opérationnelles en fonction des vitesses articulaires.

$$\dot{X} = [J]\dot{q} \quad (1.13)$$

#### 1.3.2.4 Modèle cinématique inverse

L'objectif du modèle cinématique inverse est de calculer à partir d'une configuration donnée la vitesse articulaire  $\dot{q}$  qui assure au repère terminal une vitesse opérationnelle  $\dot{X}$  imposée. Cette définition est analogue à celle du modèle différentiel inverse; ce dernier permet de déterminer la différentielle articulaire  $dq$  correspondant à une différentielle des coordonnées opérationnelles  $dx$  spécifiées.

$$\dot{q} = [J]^{-1} \dot{X} \quad (1.14)$$



### 1.3.3 Modélisation dynamique

La dynamique des robots est décrite par des équations différentielles non linéaires en présence des forces de pesanteur, des couplages dus aux interactions dynamiques (forces d'inerties, forces de Coriolis et forces centrifuges); des autres non linéarités spécifiques aux actionneurs (hystérésis, frottements complexes). Ce modèle peut être écrit sous la forme matricielle et d'une manière condensée par l'équation :

$$D(q)\ddot{q} + h(q, \dot{q}) + g(q) = \Gamma(u) \quad (1.15)$$

$q, \dot{q}, \ddot{q}$  : représentent respectivement les vecteurs position, vitesse et accélération articulaires.

$D(q)$  : matrice (n×n) des interactions d'inertie entre les différents éléments du robot manipulateur. Cette matrice est symétrique positive.

$h(q, \dot{q})$  : vecteur (n×1) regroupant les non linéarités telles que les forces centrifuges, les forces de Coriolis et les forces de frottement.

$g(q)$  : vecteur représentant les forces de la pesanteur.

$\Gamma(u)$  : vecteur des couples ou des forces appliqués aux axes par les actionneurs.

Plusieurs formalismes ont été utilisés pour calculer le modèle dynamique des robots ; le formalisme le plus utilisé est celui de LAGRANGE. Ce dernier conduit directement au système des équations non linéaires couplées du second ordre, en utilisant la formule suivante:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \zeta_i \quad (1.16)$$

Avec  $L$  : est le Lagrangien du système, tel que :

$$L = T - V \quad (1.17)$$

où  $T$  : énergie cinétique du système

$V$  : énergie potentielle

- *Expression de l'énergie cinétique [3]*

$$2T = M_i [V_{G_i}^0(R_i)]^2 + \Omega_i^{0T}(R_i) I_i^0 \Omega_i(R_i) \quad (1.18)$$

$I_i$  : matrice d'inertie du corps  $i$

$M_i$  : masse du corps  $i$

$V_{G_i}$  : vitesse linéaire du centre de gravité du corps  $i$

$\Omega_i$  : vitesse angulaire du corps  $i$

La matrice d'inertie  $I_i$  exprimée dans un repère lié au corps  $i$  est donnée comme suit :

$$I_i = \begin{bmatrix} \int (y^2 + z^2) dm & -\int xy dm & -\int xz dm \\ -\int xy dm & \int (x^2 + z^2) dm & -\int yz dm \\ -\int xz dm & -\int yz dm & \int (y^2 + x^2) dm \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

### 1.3.3.1 Modèle dynamique direct

Connaissant les forces généralisées ( $\Gamma$ ) exercées par les actionneurs sur les articulations, pour un point donné de la trajectoire  $(q, \dot{q}, \ddot{q})$ , on calcule alors les accélérations  $\ddot{q}$ , puis les vitesses  $\dot{q}$  et les positions  $q$  que prennent les articulations. D'où le modèle dynamique direct est illustré par la figure suivante :

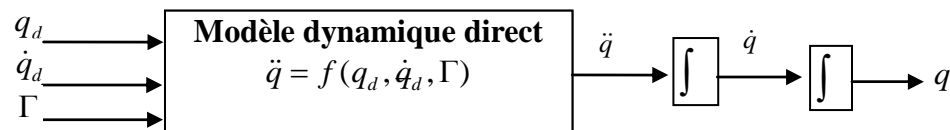


Figure 1.3 : Modèle dynamique direct

### 1.3.3.2 Modèle dynamique inverse

Le modèle dynamique inverse du robot manipulateur est constitué par les relations qui expriment les couples  $\Gamma$  exercés par les actionneurs aux articulations en fonction de positions  $q$ , vitesses  $\dot{q}$  et accélérations  $\ddot{q}$  des variables articulaires.

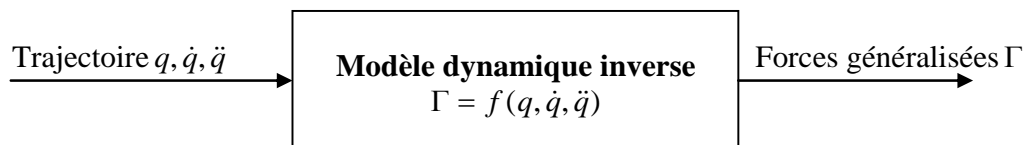


Figure 1.4 : Modèle dynamique inverse

## 1.4 MODELISATION DU ROBOT SCARA (RP41)

### 1.4.1 Description du robot

Le robot SCARA RP 41 est un bras manipulateur planaire ayant une structure ouverte simple, constitué principalement de deux segments  $S_1$  et  $S_2$  qui peuvent tourner respectivement autour des axes  $Z_1$  et  $Z_2$ ;  $S_2$  comporte l'organe terminal qui est une pince à deux doigts, les trois rotations  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$  sont assurées par les actionneurs électriques (moteur à courant continu) tandis que la translation  $T$  de la pince, ainsi que son ouverture et fermeture, elle sont assurées par des actionneurs pneumatiques fonctionnant en tout ou rien.

L'abréviation RP41 signifiée :

**R** : robot

**P** : planaire

**4** : quatre degrés de liberté

(Trois rotation  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$  plus une translation tout ou rien du dernier axe, qui ne sera pas considéré comme étant un degré de liberté)

**1** : première classe

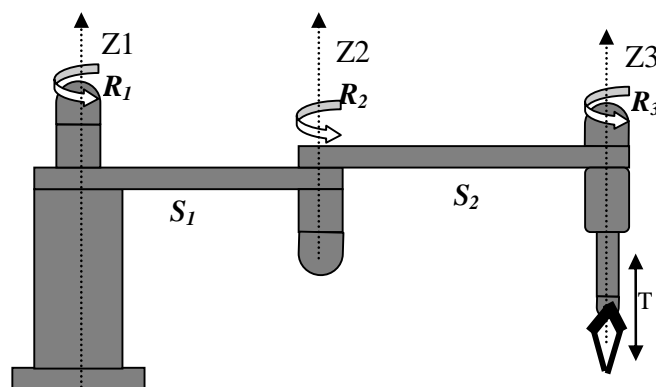


Figure 1.5 : Robot SCARA RP 41

### 1.4.2 Espace de travail

Longueur des éléments rigides sont :

$L_0=14$  cm.

$L_1=30$  cm.

$L_2=20$  cm.

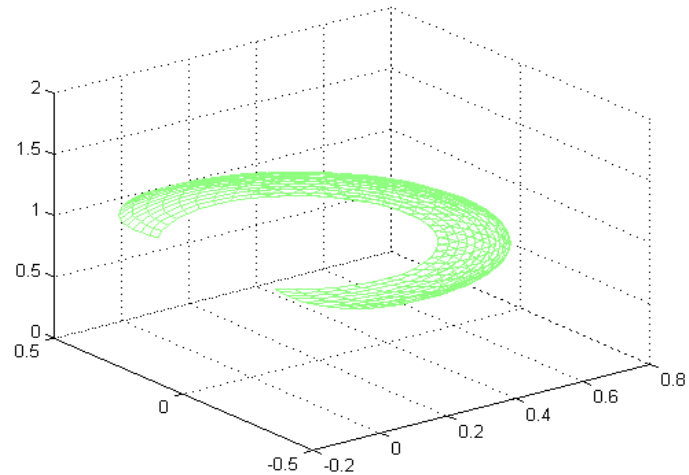


Figure 1.6 : Volume du travail de SCARA RP41

### 1.4.3 Modèle géométrique

La figure ci-dessous donne une description géométrique du RP41. Le placement des repères et la détermination des paramètres géométriques sont effectués selon la méthode décrite dans la section. (1.3.1.1).

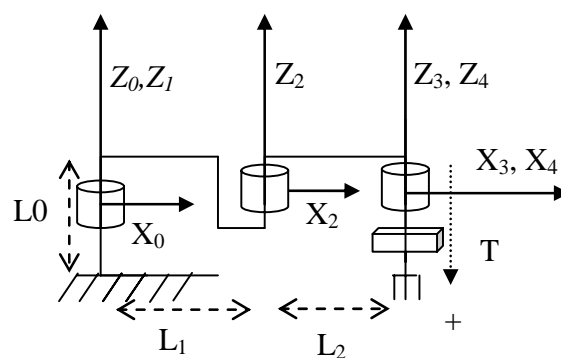


Figure 1.7 : Description géométrique du robot SCARA

Les paramètres géométriques de DENAVITT-HARTEMBERG du robot SCARA sont donnés dans le tableau ci-dessous.

Tableau 1.3 : Les paramètres de DENAVITT-HARTEMBERG

	$\sigma_j$	$\alpha_j$	$d_j$	$\theta_j$	$r_j$
1	0	0	0	$\theta_j$	L0
2	0	0	L1	$\theta_j$	0
3	0	0	L2	$\theta_j$	0
4	1	0	0	0	T

Les matrices de transformation homogènes sont données comme suit :

$$T_0^1 = \begin{bmatrix} C1 & -S1 & 0 & 0 \\ S1 & C1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_1^2 = \begin{bmatrix} C2 & -S2 & 0 & L_1 \\ S2 & C2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_2^3 = \begin{bmatrix} C3 & -S3 & 0 & L_2 \\ S3 & C3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T_3^4 = \begin{bmatrix} C4 & -S4 & 0 & 0 \\ S4 & C4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice de transformation homogène de l'organe terminal par rapport à la base du robot est donné par :

$$T_0^4 = T_0^1 \cdot T_1^2 \cdot T_2^3 \cdot T_3^4 = \begin{bmatrix} C123 & -S123 & 0 & L_1 C1 + L_2 C12 \\ S123 & C123 & 0 & L_1 S1 + L_2 S12 \\ 0 & 0 & 1 & L_0 - T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

avec  $C1 = \cos(\theta_1)$  et  $S1 = \sin(\theta_1)$

$C123 = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$  et  $S123 = \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$

Algorithme de calcul du Modèle géométrique direct (MGD) :

- ❖ Introduction des paramètres de DENAVITT-ARTEMBERG.
- ❖ Le calcul des matrices de transformation  $T_0^1, T_1^2, T_2^3, T_3^4$ .
- ❖ Le calcul de la matrice de transformation homogène  $T_0^4$ .
- ❖ Affichage de matrice  $T_0^4$  (la matrice d'orientation & le vecteur de position).

#### 1.4.4 Modèle géométrique inverse

Le vecteur de position de l'organe terminal donnée par l'équation (1.21) est déduit de la matrice homogène  $T_0^4$ .

$$P = \begin{bmatrix} L_1 \cos(\theta_1) + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ L_1 \sin(\theta_1) + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ L_0 - T \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X = L_1 \cos(\theta_1) + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ Y = L_1 \sin(\theta_1) + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ Z = L_0 - T \end{cases} \quad (1.21)$$

De l'équation (1.21), nous remarquons que la coordonnée du vecteur de position  $P$  selon l'axe  $Z$  ne dépend pas des variables articulaires ; ceci peut être justifié par l'architecture planaires du robot SCARA, qui ne permet aucun mouvement selon cet axe.

La résolution du système d'équation (1.21) permet de définir les équations des variables articulaires qui sont données par :

$$\begin{cases} \theta_1 = ATAN(S_1.C_1) \\ \theta_2 = ATAN(\pm\sqrt{1-(C_2)^2}.C_2) \end{cases} \quad (1.22)$$

$$\text{avec : } S_1 = \frac{B_1 X - B_2 Y}{B_1^2 B_2^2} \quad \text{et} \quad C_1 = \frac{B_1 X + B_2 Y}{B_1^2 B_2^2}$$

$$B_1 = L_1 + L_2 C_2 \quad B_2 = L_2 S_2$$

$$C_2 = \frac{X^2 + Y^2 + (L_1)^2 + (L_2)^2}{2L_1 L_2}$$

Connaissant  $\theta_1, \theta_2$  on peut calculer  $\theta_3$ , et on trouve :

$$\theta_3 = ATAN(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) - \theta_1 - \theta_2 \quad (1.23)$$

### 1.4.5 Le modèle cinématique

Le robot SCARA est un robot planaire à trois degrés de libertés d'axes rotoides avec  $L_0$ ,  $L_1$  et  $L_2$  comme longueurs des segments. La représentation du robot SCARA est donnée par la figure suivante :

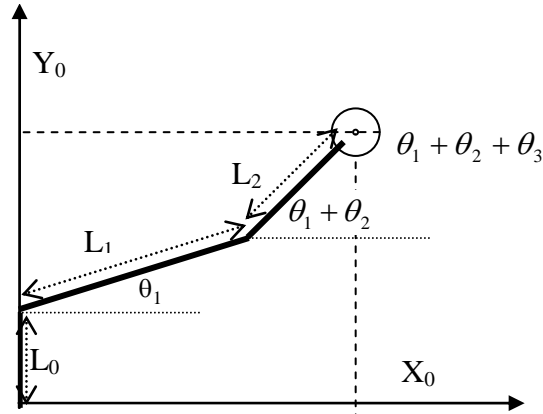


Figure 1.8 : Représentation du robot SCARA dans le plan

La situation de l'organe terminal dans le plan cartésien est donnée par l'équation suivante:

$$\begin{cases} X = L_1 \cos(\theta_1) + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) = f_1(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \\ y = L_1 \sin(\theta_1) + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) = f_2(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \\ \alpha = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \end{cases} \quad (1.24)$$

pour avoir la vitesse de déplacement, en dérivant l'équation (1.24) :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = \frac{df_1}{d\theta_1} \frac{d\theta_1}{dt} + \frac{df_1}{d\theta_2} \frac{d\theta_2}{dt} + \frac{df_1}{d\theta_3} \frac{d\theta_3}{dt} \\ \frac{dY}{dt} = \frac{df_2}{d\theta_1} \frac{d\theta_1}{dt} + \frac{df_2}{d\theta_2} \frac{d\theta_2}{dt} + \frac{df_2}{d\theta_3} \frac{d\theta_3}{dt} \end{cases} \quad (1.25)$$

avec  $\frac{d\theta_1}{dt}$ ,  $\frac{d\theta_2}{dt}$  et  $\frac{d\theta_3}{dt}$  sont les vitesses angulaires

nous obtiendrons :

$$\begin{cases} \dot{X} = -(L_1 \sin(\theta_1) + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2))\dot{\theta}_1 - L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)\dot{\theta}_2 \\ \dot{Y} = (L_1 \cos(\theta_1) + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2))\dot{\theta}_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)\dot{\theta}_2 \\ \dot{Z} = 0 \end{cases} \quad (1.26)$$

$\dot{X}$ ,  $\dot{Y}$  et  $\dot{Z}$  : vitesses linéaires

Les coordonnées des vitesses angulaires de l'organe terminal sont données comme suit :

$$\begin{cases} W_x = 0 \\ W_y = 0 \\ W_z = \dot{\alpha} = \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \end{cases} \quad (1.27)$$

Donc le modèle cinématique du robot SCARA est donné par le système d'équation suivant :

$$\begin{bmatrix} V(t) \\ W(t) \end{bmatrix} = [J(\theta)] \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

Par identification, on déduit la matrice JACOBIENE suivante:

$$J(\theta) = \begin{bmatrix} -(L_1 S1 + L_2 S12) & -L_2 S12 & 0 \\ L_1 C1 + L_2 C12 & L_2 C12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

Algorithme de calcul du Modèle Cinématique Direct (MCD) :

- ❖ Introduction de la matrice de transformation homogène T
- ❖ Calcul du vecteur de vitesse linéaire par la dérivation du vecteur de position
- ❖ Calcul du vecteur de vitesse angulaire
- ❖ Calcul de la matrice JACOBIENNE
- ❖ Affichage du modèle cinématique direct.

#### 1.4.6 Modèle cinématique inverse

Pour le calcul du modèle cinématique inverse, on utilise la dérivation du modèle géométrique, puis on calcule l'inverse.

on a :



$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_1 S1 - L_2 S12 & -L_1 S12 \\ L_1 C1 + L_2 S12 & L_2 C12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \\ \dot{Z} = 0 \\ W_x = 0 \\ W_y = 0 \\ W_z = (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \end{array} \right. \quad (1.30)$$

Le modèle inverse est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{L_1 L_2 S1} \begin{bmatrix} L_1 C12 & L_2 S12 \\ -(L_1 C1 + L_2 C12) & -(L_1 S1 + L_1 S12) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} \\ \dot{\theta}_3 = W_z - \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 \end{array} \right. \quad (1.31)$$

#### 1.4.7 Modélisation dynamique

Pour trouver le modèle dynamique du robot SCARA RP41, nous allons utiliser l'approche de LAGRANGE déjà d'écrite dans la section (1.3.3.1).

Comme toutes les liaisons du robot SCARA sont rigides et toutes ces mouvements rotatifs sont autour des axes  $Z_i$ , donc aucun mouvement selon l'axe de la pesanteur, alors l'énergie potentielle est nulle pour chaque segment.

$$V = 0 \quad (1.32)$$

Par conséquent le Lagrangien ne dépend que de l'énergie cinétique  $T$ :

$$L = T \quad (1.33)$$

Nous allons définir certaines transformations qui seront utiles pour le calcul des énergies des segments.

##### *1. Matrices des transformations des repères :*

###### ❖ La première articulation :

Cette articulation effectue une rotation autour de l'axe  $Z_1$ ; la matrice de transformation  $M_0^1$  définit les axes de repère  $R_1$  dans le repère  $R_0$ .

$$M_0^1 = \begin{bmatrix} -C1 & S1 & 0 \\ S1 & C1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

❖ deuxième articulation :

De même pour la deuxième articulation, une rotation autour de l'axe  $Z_2$  est réalisée d'où la matrice de rotation  $M_1^2$  est donnée par l'équation suivante:

$$M_1^2 = \begin{bmatrix} -C2 & S2 & 0 \\ S2 & C2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.35)$$

❖ La troisième articulation :

La troisième articulation effectue une rotation autour de l'axe  $Z_3$

$$M_2^3 = \begin{bmatrix} -C3 & S3 & 0 \\ S3 & C3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.36)$$

2. Transformations des vitesses de rotation des repères :

❖ La vitesse de rotation du repère  $R_{i-1}$  dans le repère  $R_i$  est donnée par la relation suivante :

$$\Omega_i^0(R_i) = \Omega_i^{i-1}(R_{i-1}) + [M_{i-1}^i]^T \Omega_{i-1}^0(R_{i-1})$$

❖ Dans le cas d'une articulation rotoïde, la vitesse linéaire du repère  $R_i$  est donnée par :

$$\begin{aligned} V_{o_{i+1}}^0(R_i) &= V_{o_i}^0(R_i) + \Omega_i^0(R_i) \wedge O_i O(R_i) \\ V_{o_{i+1}}^0(R_{i+1}) &= [M_i^{i+1}] V_{o_{i+1}}^0(R_i) \end{aligned}$$

❖ Les vitesses de rotation des repères  $R_0$ ,  $R_1$  et  $R_2$

$$\Omega_1^0(R_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \quad \Omega_2^1(R_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad \Omega_3^2(R_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

❖ L'énergie cinétique totale du système est obtenue par :

$$T = \sum_{i=1}^3 T_i \quad (1.37)$$

3. Le calcul de l'énergie cinétique de chaque corps

- Calcul de l'énergie cinétique du premier segment :

La formule de l'énergie cinétique est donnée par :

$$2T_1 = M_1 (V_{G_1}^0(R_1))^2 + \Omega_1^{0T}(R_1) \cdot I^1 \cdot \Omega_1^0(R_1)$$

sachant que :

$$\Omega_1^{0T}(R_1) \cdot I^{(1)} \cdot \Omega_1^0(R_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{11}^1 & I_{12}^1 & I_{13}^1 \\ I_{21}^1 & I_{22}^1 & I_{23}^1 \\ I_{31}^1 & I_{32}^1 & I_{33}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_1 \end{bmatrix} = I_{33}^1 \dot{\theta}_1^2$$

on a :  $V_G^0(R_1) = V_{o_1}^0(R_1) + \Omega_1^0(R_1) \Lambda \overrightarrow{O_1 G_1}$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \Lambda \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donc l'énergie cinétique du premier segment est donnée par l'équation suivante:

$$\Rightarrow 2T_1 = (M_1 l_1^2 + I_3^{(1)}) \dot{\theta}_1^2 \quad (1.38)$$

- Calcul de l'énergie cinétique du deuxième segment :

De même nous avons :

$$2T_2 = M_2 (V_{G_2}^0(R_2))^2 + \Omega_2^{0T}(R_2) I^2 \Omega_2^0(R_2)$$

on a :

$$\Omega_2^{0T}(R_2) \cdot I^{(2)} \cdot \Omega_2^0(R_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{11}^{(2)} & I_{12}^{(2)} & I_{13}^{(2)} \\ I_{21}^{(2)} & I_{22}^{(2)} & I_{23}^{(2)} \\ I_{31}^{(2)} & I_{32}^{(2)} & I_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_1 + \theta_2 \end{bmatrix} = I_{33}^{(2)} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2$$

$$V_{G_2}^0(R_2) = V_{o_2}^0(R_2) + \Omega_2^0(R_2) \Lambda \overrightarrow{O_2 G_2} \quad \text{Avec} \quad \overrightarrow{O_2 G_2} = \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_{o_2}^0(R_2) = M_2^1 V_{o_2}^0(R_1)$$

$$V_{o_2}^0(R_1) = V_{o_1}^0(R_1) + \Omega_1^0(R_1) \Lambda O_1 O_2(R_1)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \Lambda \begin{bmatrix} 0 \\ L_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ L_1 \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Avec} \quad \overrightarrow{O_1 O_2} = \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_{O_2}^0(R_2) = \begin{bmatrix} C_2 & S_2 & 0 \\ -S_2 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ L_1 \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_2 L_1 \dot{\theta}_1 \\ C_2 L_1 \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_{G_2}^0(R_2) = \begin{bmatrix} S_2 L_1 \dot{\theta}_1 \\ C_2 L_1 \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_2 L_1 \dot{\theta}_1 \\ C_2 L_1 \dot{\theta}_1 + l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

L'énergie cinétique du deuxième segment est donnée par :

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2T_2 = & [M_1(L_1^2 + l_2^2 + 2L_1 l_2 c_2) + I_3^{(2)}] \dot{\theta}_1^2 + [M_2 l_2^2 + I_3^{(2)}] \dot{\theta}_2^2 \\ & + [M_2(2c_2 L_1 l_2 + 2l_2) + 2I_{33}^{(2)}] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \end{aligned} \quad (1.39)$$

- Calcul de l'énergie cinétique du troisième segment :

$$2T_3 = M_3 [V_{G_3}^0(R_3)]^2 + \Omega_3^{0T}(R_3) I^3 \Omega_3^0(R_3)$$

$$\Omega_3^{0T}(R_3) I^3 \Omega_3^0(R_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{11}^3 & I_{12}^3 & I_{13}^3 \\ I_{21}^3 & I_{22}^3 & I_{23}^3 \\ I_{31}^3 & I_{32}^3 & I_{33}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = I_{33}^3 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2$$

$$V_{G_3}^0(R_3) = V_{O_3}^0(R_3) + \Omega_3^0(R_3) \wedge \overrightarrow{O_3 G_3}(R_3)$$

$$\Rightarrow \Omega_3^0(R_3) \wedge \overrightarrow{O_3 G_3}(R_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Avec} \quad \overrightarrow{O_3 G_3}(R_3) = [0 \ 0 \ -T]^T$$

$$V_{G_3}^0(R_3) = V_{O_3}^0(R_3)$$

$$\begin{aligned} &= M_3^2 V_{O_3}(R_2) \quad V_{O_3}(R_2) = V_{O_2}(R_2) + \Omega_2^0(R_2) \wedge \overrightarrow{O_2 O_3}(R_2) \\ &= \begin{bmatrix} s2L_1 \dot{\theta}_1 \\ c2L_1 \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s2L_1 \dot{\theta}_1 \\ c2L_1 \dot{\theta}_1 + L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$V_{O_3}^0(R_3) = M_3^2 V_{O_3}(R_2)$$

$$= \begin{bmatrix} c_3 & s_3 & 0 \\ -s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_2 L_1 \dot{\theta}_1 \\ c_2 L_1 \dot{\theta}_1 + L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_3 s_2 L_1 \dot{\theta}_1 + s_3 (c_2 L_1 \dot{\theta}_1 + L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)) \\ -s_3 s_2 L_1 \dot{\theta}_1 + c_3 (c_2 L_1 \dot{\theta}_1 + L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 2T_3 = [M_3(L_1^2 + L_2^2 + 2c_2 L_1 L_2) + I_{33}^{(3)}] \dot{\theta}_1^2 + [M_3 L_2^2 + I_{33}^{(3)}] \dot{\theta}_2^2 + I_{33}^{(3)} \dot{\theta}_3^2 + 2[M_3(L_2^2 + L_1 L_2 c_2) + I_{33}^{(3)}] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + 2I_{33}^{(3)} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + 2I_{33}^{(3)} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \quad (1.40)$$

- Energie totale du système :

$$2T_{tot} = [M_1 l_1^2 + M_2(L_1^2 + l_2^2 + 2L_1 l_2 c_2) + M_3(L_1^2 + L_2^2 + 2L_1 L_2 c_2) + I_{33}^{(1)} + I_{33}^{(2)} + I_{33}^{(3)}] \dot{\theta}_1^2 + [M_2 l_2^2 + M_3 L_2^2 + I_{33}^{(2)} + I_{33}^{(3)}] \dot{\theta}_2^2 + I_{33}^{(3)} \dot{\theta}_3^2 + 2I_{33}^{(3)} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + 2I_{33}^{(3)} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + 2[M_2 L_1 l_2 c_2 + M_3(L_2^2 + L_1 L_2 c_2) + I_{33}^{(2)} + I_{33}^{(3)}] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \quad (1.41)$$

On pose :

$$A = M_1 l_1^2 + M_2(L_1^2 + l_2^2 + 2L_1 l_2 c_2) + M_3(L_1^2 + L_2^2 + 2L_1 L_2 c_2) + I_{33}^{(1)} + I_{33}^{(2)} + I_{33}^{(3)}$$

$$B = M_2 l_2^2 + M_3 L_2^2 + I_{33}^{(2)} + I_{33}^{(3)}$$

$$C = M_2 L_1 l_2 c_2 + M_3(L_2^2 + L_1 L_2 c_2) + I_{33}^{(2)} + I_{33}^{(3)}$$

D'où on obtient :

$$T_{tot} = \frac{A}{2} \dot{\theta}_1^2 + \frac{B}{2} \dot{\theta}_2^2 + \frac{I_{33}^{(3)}}{2} \dot{\theta}_3^2 + C \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + I_{33}^{(3)} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + I_{33}^{(3)} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \quad (1.42)$$

Le formalise de Lagrange s'écrit :

$$U_1 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_{tot}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial T_{tot}}{\partial \theta_1}$$

$$U_2 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_{tot}}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial T_{tot}}{\partial \theta_2}$$

$$U_3 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_{tot}}{\partial \dot{\theta}_3} \right) - \frac{\partial T_{tot}}{\partial \theta_3}$$

en dérivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial T_{tot}}{\partial \dot{\theta}_1} = A\dot{\theta}_1 + C\dot{\theta}_2 + I_{33}^{(3)}\dot{\theta}_3 \\ \frac{\partial T_{tot}}{\partial \dot{\theta}_2} = C\dot{\theta}_1 + B\dot{\theta}_2 + I_{33}^{(3)}\dot{\theta}_3 \\ \frac{\partial T_{tot}}{\partial \dot{\theta}_3} = I_{33}^{(3)}\dot{\theta}_1 + I_{33}^{(3)}\dot{\theta}_2 + I_{33}^{(3)}\dot{\theta}_3 \end{cases} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T_{tot}}{\partial \dot{\theta}} \begin{cases} A\ddot{\theta}_1 + C\ddot{\theta}_2 + I_{33}^{(3)}\ddot{\theta}_3 \\ C\ddot{\theta}_1 + B\ddot{\theta}_2 + I_{33}^{(3)}\ddot{\theta}_3 \\ I_{33}^{(3)}\ddot{\theta}_1 + I_{33}^{(3)}\ddot{\theta}_2 + I_{33}^{(3)}\ddot{\theta}_3 \end{cases}$$

on obtient

$$\begin{cases} \frac{\partial T_{tot}}{\partial \theta_1} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial \theta_2} = 2[M_2L_1l_2(-\sin(\theta_2)) + M_3L_1L_2(-\sin(\theta_2))]\dot{\theta}_1^2 + \\ \quad [M_2L_1l_2(-\sin(\theta_2)) + M_3L_1L_2(-\sin(\theta_2))]\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ \frac{\partial T}{\partial \theta_3} = 0 \end{cases}$$

On pose :  $\{D = [M_2L_1l_2(-\sin(\theta_2)) + M_3L_1L_2(-\sin(\theta_2))]\}$

Ainsi, on obtient le modèle dynamique robot SCARA donnée par l'équation suivante :

$$[U] = \begin{bmatrix} A & C & I_{33}^{(3)} \\ C & B & I_{33}^{(3)} \\ I_{33}^{(3)} & I_{33}^{(3)} & I_{33}^{(3)} \end{bmatrix} [\dot{\theta}] + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [\dot{\theta}^2] + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [\dot{\theta}\dot{\theta}] \quad (1.43)$$

#### 1.4.8 Modèle dynamique inverse

Pour le calcul du modèle dynamique inverse du robot SCARA, nous allons inverser son modèle dynamique direct donné par l'équation (1.43) par :

$$U = G\ddot{\theta} + H\dot{\theta}\dot{\theta} + K\dot{\theta}^2 \quad (1.44)$$

$$G = \begin{bmatrix} A & C & I_{33}^{(3)} \\ C & B & I_{33}^{(3)} \\ I_{33}^{(3)} & I_{33}^{(3)} & I_{33}^{(3)} \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad et \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Comme G est une matrice positive et symétrique, donc G est inversible et par conséquent le modèle dynamique inverse du robot SCARA est donné par le système d'équation suivant:

$$\ddot{\theta} = G^{-1}[U - H\dot{\theta}\dot{\theta} - K\dot{\theta}^2] \quad (1.45)$$

## 1.5 CONCLUSION

Ce chapitre a été consacré à l'étude des différents modèles mathématiques du robot obtenus par modélisation, ces derniers sont utilisés dans le domaine de la robotique pour la commande des bras manipulateurs. Parmi ces modèles, nous citons : le modèle géométrique, modèle cinématique ou différentiel et le modèle dynamique. Ainsi nous avons présenté certaines notions et formules nécessaires et utiles pour le calcul de ces modèles.

Par la suite, nous avons choisi un modèle robot de type SCARA RP41 de première classe; ce dernier est un robot manipulateur planaire ayant une structure ouverte simple à quatre degrés de liberté (trois rotations plus une translation tout ou rien du dernier axe) pour effectuer le calcul.

Partant de tous ces modèles mathématiques calculés, nous pouvons conclure que si une tâche à exécuter exige beaucoup de précision, mais ne prend pas en compte le temps d'exécution, un appel au modèle géométrique direct ou inverse selon l'espace utilisé est suffisant; par contre, pour des applications d'asservissement en vitesse, le modèle cinématique ou différentiel est nécessaire, au-delà lorsque des exigences sur la rapidité et le temps d'exécution (exécution en temps réel) sont strictes, alors l'appel au modèle dynamique est utile.

L'objectif essentiel, de notre travail est d'analyser et de résoudre des problèmes de commande pour des systèmes dynamiques décrits par des modèles mathématiques (modélisation). La théorie de la commande en régime glissant pour ces systèmes a attiré une communauté nombreuse et a connu un développement très important, pour cela, nous avons choisie cette commande pour l'appliquer à notre robot SCARA; ainsi cette dernière sera le thème de notre prochain chapitre.

## CHAPITRE 2

### COMMANDE A STRUCTURE VARIABLE CONTINUE PAR MODE DE GLISSEMENT

#### 2.1 INTRODUCTION

Les lois de commande classiques telles que les PID donnent de bons résultats dans le cas où les paramètres des systèmes sont connus avec certitudes, mais pour des systèmes non linéaires et fortement couplés avec des variations paramétriques et des signaux de perturbation externes, ces lois de commandes deviennent insuffisantes surtout lorsque les exigences sur la précision et d'autres caractéristiques dynamiques sont strictes. L'appel à des lois de commande robustes insensibles aux variations paramétriques, aux perturbations externes et aux non linéarités est nécessaire. Les lois de commande dites à structure variable constituent une solution à ce problème.

La Commande à Structure Variable (CSV) par mode de glissement a gagné une popularité certaine en raison de sa simplicité et sa robustesse lors de son application dans divers domaines tels que la commande des moteurs, les hélicoptères, véhicules spatiale, robots [5][6]...etc.

Dans un tel système, la commande en commutant, permet d'amener le point représentatif de l'évolution du système sur une hypersurface nommée surface de glissement; lorsque cette dernière est atteinte, un régime glissant se produit; ainsi le système jouit de propriétés fortes intéressantes, telles que l'insensibilité aux variations paramétriques de la partie commandée ainsi que des signaux de perturbations externes, son comportement ne dépend que des paramètres de l'hypersurface de glissement.

Bien qu'ayant divers avantages, cette technique de commande possède également un inconvénient qui limite son utilisation. En effet dans la pratique, les imperfections telles que les retards de commutation et l'hystérésis engendrent des oscillations autour de la surface de glissement pouvant exciter des dynamiques non modélisées.

Divers techniques ont été proposées pour palier à cet inconvénient; certaines consistent à approximer la fonction discontinue par une fonction continue au voisinage de la surface de commutation [7] [8].



En raison des nombreuses avantages de la commande à structure variable telles que la rapidité, la robustesse et la simplicité de la mise en œuvre, ce type de commande semble tout à fait approprié pour les bras manipulateurs pour lesquels des exigences des performances telle que la précision sont strictes. De plus, comme les paramètres du robot ne sont pas connus avec certitudes et la charge manipulée est souvent inconnue, la commande devra prendre en charge ces perturbations et variations paramétriques pour éviter une dégradation des performances.

Ce chapitre est entièrement consacré à l'étude de la commande à structure variable par mode de glissement. Après avoir donnée les principes fondamentaux de ce type de commande, nous l'appliquerons à notre robot SCARA RP41.

Les algorithmes des différentes extensions de correcteur à structure variable sont appliqués à chaque actionneur du robot SCARA dans les deux modes de fonctionnement régulation et poursuite de trajectoire et afin de réduire le phénomène de broutement, nous avons utilisé la technique de la bande limite.

## 2.2 SYSTEMES A STRUCTURE VARIABLE

Contrairement aux correcteurs par retour d'état où la commande est fixe, Les Systèmes à Structure Variable (SSV) sont des systèmes bouclés où les gains du régulateur peuvent commuter à tout instant d'une structure à une autre, suivant le signe d'une fonction  $S(t)$ , correspondant à l'hypersurface de glissement définie dans l'espace d'état du système.

Le fait de changer de structure et de basculer de l'une à l'autre permet de combiner les avantages de chacune d'elles, et mieux encore, le système à structure variable est doté d'une nouvelle propriété, absentes au niveau de toutes les autres structure de commande, est d'obtenir un système stable à partir d'une structure instable de la commande.

On distingue deux types de configurations de bases différentes des SSV :

- ❖ La première configuration, la commande change sa structure par la commutation entre deux contre réaction des retours d'états (Figure 2.1.A).
- ❖ La deuxième, la structure de commande change par commutation au niveau de l'organe de commande (Figure 2.1.B).

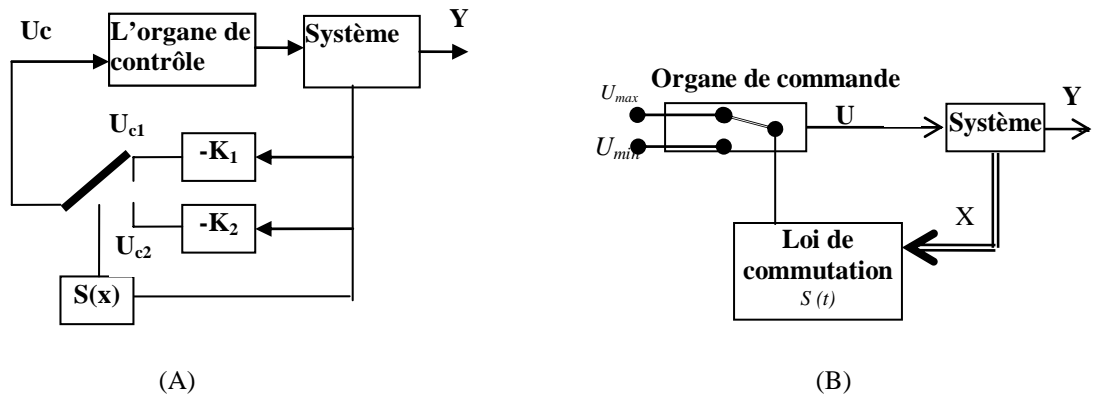


Figure 2.1 : Système à structure variable

avec

$$U_c = \begin{cases} U_{c1} = -K_1 \cdot X & \text{pour } S(x) > 0 \\ U_{c2} = -K_2 X & \text{pour } S(x) < 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

$$U = \begin{cases} U_{\max} & \text{pour } S(x) > 0 \\ U_{\min} & \text{pour } S(x) < 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

### 2.3 MODE DE GLISSEMENT

La commande par mode de glissement consiste à engendrer une loi de contrôle qui permet d'amener le point représentatif de l'évolution du système sur une hypersurface nommée surface de glissement, et de le faire commuter sur cette surface jusqu'au point d'équilibre. L'évolution de la trajectoire d'état dans le plan de phase peut être caractérisé par trois modes (Figure 2.3).

- ❖ Mode de Convergence (MC) : durant cette phase l'état du système à réguler se déplace à partir de n'importe quel point du plan de phase vers la surface de commutation  $S(x)=0$ , et l'atteint dans un temps fini.
- ❖ Mode de Glissement (MG) : la variable d'état atteint la surface de glissement et tend vers le point d'équilibre. La dynamique du système est décrite par la fonction de glissement  $S(x)=0$ .
- ❖ Mode Permanent (MP) : ce mode illustre la réponse du système autour de son point d'équilibre.

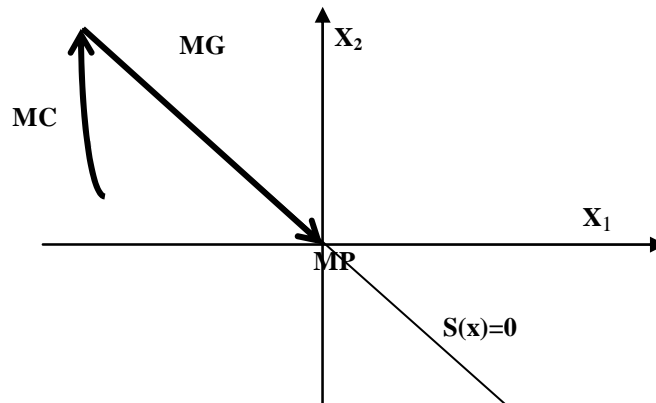


Figure 2.2 : Différentes phases du trajectoire dans le plan de phase

Pour le mode de glissement, nous distinguons deux sortes de régimes : un régime glissant idéal et un régime glissant réel.

### 2.3.1 Régime glissant idéal

Théoriquement, l'organe de commutation est supposé idéal insensible au bruit, et la trajectoire en régime de glissement décrit parfaitement l'équation  $S(x)=0$  (Figure 2.3).

Le régime glissant idéal correspond à une oscillation de fréquence infinie et d'amplitude nulle, le point représentatif de l'évolution du système glisse parfaitement sur l'hypersurface de commutation  $S$ .

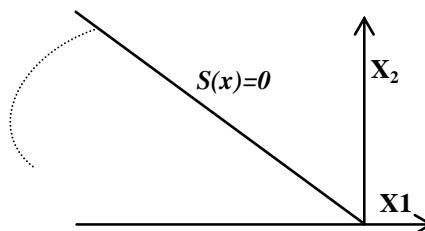


Figure 2.3 : Glissement idéal

### 2.3.2 Régime glissant réel

Pratiquement, l'organe de commutation est réalisé à partir de relais qui présente des imperfections (hystérésis, retard de commutation...). La trajectoire de phase en régime glissant reste au voisinage de la surface de commutation, donnant naissance à des oscillations indésirables (broutement ou chattering) qui diminuent la précision du système, en gardant toujours la stabilité. (Figure 2.4).

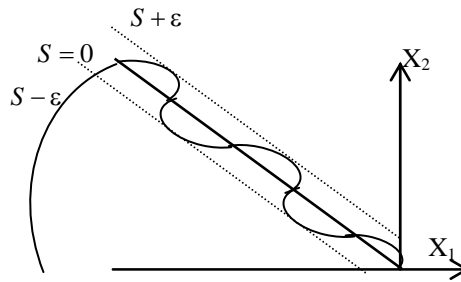
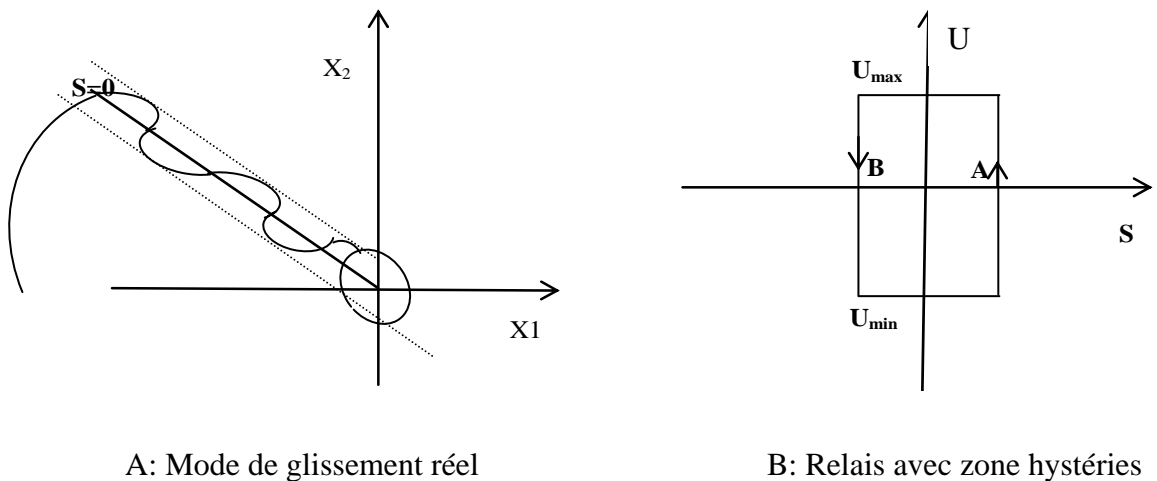


Figure 2.4: Glissement réel

### 2.3.3 Description du mode de glissement

On suppose qu'à l'instant  $t_0$  le point de fonctionnement du système coupe la surface de glissement avec une commande ( $U=U_{\min}$ ) et dès qu'il atteint le point A (le seuil inférieur de basculement), la commande prend la valeur ( $U=U_{\max}$ ) et de nouveau le point représentatif du mouvement coupe la surface de glissement jusqu'à ce qu'il atteigne le point B (le seuil supérieur de basculement), Une deuxième fois la commande prend la valeur  $U=U_{\min}$  et le point sera forcé à évoluer sur la surface de glissement et ainsi de suite (Figure 2.5).



A: Mode de glissement réel

B: Relais avec zone hystéries

Figure 2.5 : Phénomène de glissement réel

## 2.4 FORMALISATION CLASSIQUE DU REGIME GLISSANT

Soit le système d'équation différentielle :

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.3)$$

Où les seconds membres sont des fonctions continues par morceaux, présentant une discontinuité sur une hypersurface notée  $S$  d'équation :  $S(x)=0$ .

Les fonctions  $f_i$  sont supposées définies dans un domaine  $G$  de l'espace d'état.

La surface  $S(x)=0$  sépare le domaine  $G$  en deux parties,  $G^+$  ( $S > 0$ ) et  $G^-$  ( $S < 0$ ) orienté de  $G^-$  vers  $G^+$  dans un voisinage de  $S(x)=0$ , la fonction  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  prend deux valeurs  $f^+$  et  $f^-$ ;  $f$  présente une discontinuité sur la surface  $S=0$ , appelons  $f_N^+$  et  $f_N^-$  les projections de  $f^+$  et  $f^-$  sur la normal à la surface  $S=0$  ;

Ce théorème donné par PHILIPPOV [9], permet de préciser les conditions d'existence et l'unicité d'une solution  $x(t)$  de l'équation (2.3).

*Théorème 1:*

*On considère le système décrit par l'équation (2.3), pour le quel on suppose que:*

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| \leq A \quad j, i = 1, 2, \dots, n \quad (2.4)$$

*Cette condition étant vérifiée pour tout  $x$  et  $t$  dans le domaine  $G^+$  et  $G^-$  ( $G = G^+ \cup G^-$ ).*

*Soit une fonction  $S$  deux fois différentiable. Chacune des composants  $f_N^+$  et  $f_N^-$  est continue par rapport à  $x$  et  $t$  (avec  $x$  une solution de  $S(x)=0$ ) et le vecteur  $h = f_N^+ - f_N^-$  est continûment différentiable.*

*Si en chaque point de  $S=0$ , une des inégalités  $f_N^+ < 0$  ou  $f_N^- > 0$  est vérifiée (pas obligatoirement la même en tout point de  $S=0$ ), il existe alors dans le domaine  $G$ , une solution  $x(t)$  unique du système (2.3), qui dépend des conditions initiales de façon continue.*

Ce théorème conduit à remarquer que si l'on vérifie à la fois  $f_N^+ < 0$  et  $f_N^- > 0$ , une trajectoire d'état  $x(t)$  qui atteint la surface  $S=0$  reste sur cette surface puisque de chaque côté de la surface, les vecteurs vitesses sont dirigés vers la surface.

il y a un régime de glissement limité sur la surface ( $S=0$ ).

### 2.4.1 Condition de glissement

Exprimons la condition de glissement ( $f_N^+ < 0$  et  $f_N^- > 0$ ) en fonction de la surface de glissement  $S$  calculons:

$$\dot{S} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial x_i} f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.5)$$

La dérivé  $\dot{S}$  apparaît comme le produit scalaire de la normale à la surface  $S=0$  et du vecteur  $f$  si les conditions de glissement sont vérifiées,  $f_N^+ < 0$  et  $f_N^- > 0$ , on déduit :

$$\begin{aligned} f_N^+ < 0 &\Rightarrow S > 0 \text{ et } \dot{S} < 0 \\ f_N^- > 0 &\Rightarrow S < 0 \text{ et } \dot{S} > 0 \end{aligned}$$

D'ou la condition de glissement sous les deux formes classiques est donnée par l'équation suivante :

$$f_N^+ < 0 \text{ et } f_N^- > 0 \Rightarrow \dot{S}S < 0 \quad (2.6)$$

La condition  $\dot{S}S < 0$  est l'inégalité fondamentale utilisé pour la synthèse d'un correcteur à structure variable, un tel correcteur à pour but, sous certaines conditions de maintenir le point représentatif de l'évolution du système dans l'espace d'état sur une surface choisie. Alors, l'état du système bouclé est plongé dans l'état du système réduit et libre de dimension  $(n-1)$ . D'où la dynamique du système ne dépend que du choix des coefficients de la surface de glissement; ceci explique l'invariance de cette loi de commande par rapport aux perturbations et aux variations paramétriques.

### 2.4.2 Commande équivalente en régime glissant

#### Cas d'un système monovariante :

Considérant un système dynamique monovariante défini par l'équation suivante:

$$\dot{x} = f(x, t) + g(x, t)U \quad (2.7)$$

Où  $x$ ,  $f$  et  $g$  sont des vecteurs colonnes de dimension  $n$ , supposons que le scalaire  $U$  subisse une discontinuité sur une surface de dimension  $(n-1)$  et d'équation  $S(x)=0$  [10].

$$U(x, t) = \begin{cases} U^+ & \text{si } S > 0 \\ U^- & \text{si } S < 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

Ainsi, un tel système défini par (2.7) et (2.8) est appelé un système à structure variable avec un régime glissant s'effectuant sur la surface d'équation  $S(x)=0$ .

On appelle commande équivalente  $U(x, t)=U_{eq}$ , la commande qui correspond à un régime glissant idéal c'est à dire que le glissement s'effectue sur la surface d'équation  $S(x)=0$ , qui peut être définie comme suit :

$$\begin{cases} S(x) = 0 \\ \dot{S}(x) = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

où la dérive de la surface est donnée par l'équation suivante :

$$\dot{S} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial x_i} (f_i(x, t) + g_i(x, t)U_{eq}) \quad (2.10)$$

des équations (2.9) et (2.10) on trouve :

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial x_i} (f_i(x, t) + g_i(x, t)U_{eq}) = 0$$

Maintenant, si on suppose  $\sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial x_i} g_i(x, t) \neq 0$ , la commande équivalente peut être donnée par le scalaire:

$$U_{eq} = - \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial x_i} f_i(x, t)}{\sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial x_i} g_i(x, t)} \quad (2.11)$$

Nous remplaçons  $U_{eq}$  par sa valeur dont l'équation (2.7), on obtient l'équation du régime glissant idéal, qui sera définie par l'expression suivante :

$$\dot{X} = f(x, t) - g(x, t) \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial X_i} f_i(x, t)}{\sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial X_i} g_i(x, t)} \quad (2.12)$$

Cas d'un système multivariable :

Soit le système dynamique multivariable défini par :

$$\dot{x} = f(x, t) + g(x, t)U \quad (2.13)$$

où  $x$  et  $f$  sont des vecteurs colonnes de dimension  $n$ ,  $g$  est une matrice de dimension  $(n \times m)$  et  $U$  est un vecteur de commande de dimension  $m$ , tel que chaque entrée  $U_i$  subisse une discontinuité sur une surface de dimension  $(n-1)$   $S_i(x)=0$ .

$$U_i(x, t) = \begin{cases} U_i^+ & \text{si } S > 0 \\ U_i^- & \text{si } S < 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

Le régime glissant s'effectue sur une variété  $S(x)=0$  de dimension  $(n-m)$  intersection des surfaces  $S_i = 0$ , avec  $(i=0, 1, 2, \dots, m)$ . Le vecteur commande équivalente assure un régime de glissement idéal. Le glissement s'effectue sur la surface  $S_i = 0$  avec la condition  $\dot{S}_i(x) = 0$ . Donc nous avons:  $U(x, t) = U_{eq} \Rightarrow S_i(x) = \dot{S}_i(x) = 0$

La dérivée de la surface est donnée par l'équation suivante :

$$\dot{S}_i = G \cdot f_i(x, t) + G \cdot g_i(x, t)U_{eq} = 0 \quad (2.15)$$

Où  $G$  est une matrice  $(m \times n)$  ; dont les lignes correspondent aux vecteurs gradients de  $S_i(x)$ . Supposons la matrice  $G \cdot g$  est inversible, la commande équivalente est donnée par l'équation du vecteur de commande suivant:

$$U_{eq} = -(G \cdot g)^{-1} G \cdot f \quad (2.16)$$

Ainsi nous obtenons l'équation d'état du système en mode de glissement :

$$\dot{X} = f(x, t) - g(x, t)(G \cdot g)^{-1} G \cdot f(x) \quad (2.17)$$

Remarques:

❖ Dans le cas des surfaces de glissement variables dans le temps,  $S_i(x, t)$ , la condition de glissement  $S_i \dot{S}_i < 0$  doit être remplacée par:

$$\lim_{S_i \rightarrow 0} S_i \dot{S}_i < -H |S_i| \quad i=1, 2, 3 \dots$$

Où  $H$  est une fonction monotone croissante ou une constante positive.

❖ En présence des imperfections ou des variations des paramètres, le glissement s'effectue au voisinage de la surface de glissement  $S_i(x)=0$ , la condition de glissement  $S_i \dot{S}_i < 0$  devient:

$$\lim_{S_i \rightarrow 0} S_i \dot{S}_i < 0 \quad i=1, 2, 3 \dots$$



## 2.5 DETERMINATION DU DOMAINE DE GLISSEMENT DANS LE CONTEXTE DE LA GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

### 2.5.1 Mode de glissement

Considérons le système dynamique non linéaire donné par :

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + g(x).U \quad (2.18)$$

Où  $x \in X$  un ouvert de  $\mathcal{R}^n$ ,  $f(x) = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T$  et  $g(x) = [g_1, g_2, \dots, g_n]^T$  sont des champs de vecteurs définis sur  $\mathcal{R}^n$  avec  $g(x) \neq 0, \forall x \in X$ .

La commande  $U: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ . Supposons que la fonction commande subisse une discontinuité du premier ordre sur une surface définie par une fonction continue,  $S: X \rightarrow \mathcal{R}$ , dont le gradient est non nul sur  $X$ . [11], [12].

$$S = \{x \in \mathcal{R}^n / S(x) = 0\} \quad (2.19)$$

L'équation (2.19) définit une hypersurface (variété de dimension  $(n-1)$ ), appelée « surface de glissement »

Le correcteur à structure variable peut prendre une valeur de deux fonctions continues suivant le signe de  $S(x)$ .

$$U = \begin{cases} U^+(x) & \text{si } S(x) > 0 \\ U^-(x) & \text{si } S(x) < 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

Soit  $L_{h\sigma}$  la dérivé directionnelle de la fonction scalaire  $\sigma$  suivant le champ  $h$ .

A l'aide de la loi de commande  $U$  donnée par (2.20), la commutation d'une valeur à l'autre s'effectue à la traversée d'une hypersurface de l'espace des phases du système de façon à maintenir le point représentatif de mouvement du système sur cette surface. Le système est en régime glissant sur celle ci chaque fois que :

$$\begin{cases} \lim_{S \rightarrow 0^+} L_{f+g.U} S < 0 \\ \lim_{S \rightarrow 0^-} L_{f+g.U} S > 0 \end{cases} \quad (2.21)$$

$\nabla S$  : Désigne le gradient de  $S(x)$  et  $(\cdot)$  désigne le produit scalaire de deux vecteurs.

La condition (2.21) est équivalente à :

$$\begin{cases} \lim_{S \rightarrow 0^+} (\nabla S, f + g.U^+) < 0 \\ \lim_{S \rightarrow 0^-} (\nabla S, f + g.U^-) > 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

La condition (2.22) est équivalente à la condition (2.6) et traduit le résultat suivant : la surface  $S$  sépare l'espace d'état  $G$  en deux parties  $G^+$  ( $S>0$ ) et  $G^-$  ( $S<0$ ), si dans un petit voisinage les projections  $f + g.U^+$  et  $f + g.U^-$  sur le vecteur gradient de  $S$  sont de signes contraires, la surface  $S$  sera attractive c'est à dire les champs commandés se dirigent vers la surface de commutation  $S$ .

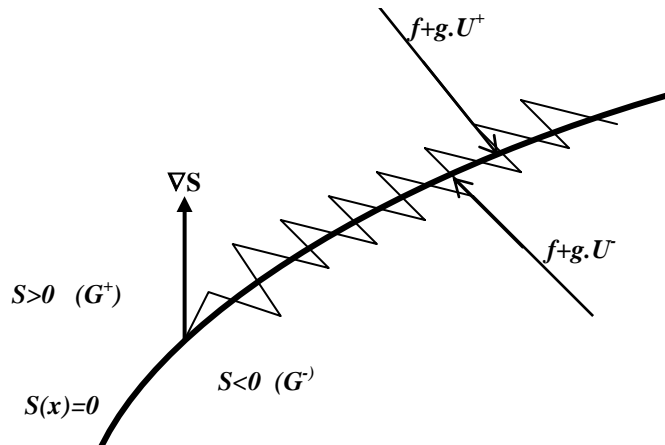


Figure 2.6: Commutation de champs de vecteurs sur la variété  $S$

### 2.5.2 La commande équivalente et la condition d'invariance

La commande équivalente  $U_{eq}$  est définie pour obtenir les équations du régime glissant idéal. Le point représentatif de mouvement du système glisse alors parfaitement sur la surface de commutation. Ceci se traduit par le fait que la surface de glissement porte la trajectoire du système dans l'espace des phases.

Le régime glissant idéal est décrit en utilisant les conditions d'invariances comme suit :

$$S(x) = 0 \quad \text{et} \quad L_{f+g.U_{eq}} S = (\nabla S, f + g.U_{eq}) = 0 \quad (2.23)$$

D'où, l'expression de la commande équivalente est donnée par:

$$U_{eq} = \frac{(\nabla S, f)}{(\nabla S, g)} = -\frac{L_f S}{L_g S} \quad (2.24)$$

Soit  $T_x X$  l'espace tangent à  $X$  en  $x$ , et  $\nabla_S(x)$  un sous espace de  $T_x X$ , tel que :

$$(\nabla S, \Delta_S(x)) = 0 \quad \Delta_S(x) = \ker \nabla S$$

Avec  $\Delta_S(x)$  appelé distribution glissante associé à  $S$ . Les conditions d'invariance (2.23)

conduisent à :

$$f + g.U_{eq}|_{S=0} \in \ker \nabla S = \Delta_S(x) \quad (2.25)$$

La dynamique du système commandé en mode de glissement idéal est décrite par :

$$\frac{dx}{dt} = f + g.U_{eq}(x)$$

Cette commande ne dépend que des coefficients de la surface de glissement  $S(x)=0$ , hypersurface sur laquelle se trouve la trajectoire d'état  $x(t)$  solution (2.18).

### 2.5.3 Condition d'existence et l'unicité de la commande équivalente

Lemme 1 :

Une condition nécessaire et suffisante pour définir une commande équivalente [12] est que la condition de transversalité est décrite par l'équation (2.26) :

$$(\nabla S, g) \neq 0 \quad (2.26)$$

Soit localement satisfaite sur  $S$ .

*Preuve :*

Si la commande équivalente est bien définie par (2.24), alors nécessairement

$$(\nabla S, g) = L_g S \neq 0$$

L'interprétation géométrique de cette condition est pour le champ de vecteur  $g$  :

$$g \notin \ker \nabla S = \Delta_S(x)$$

Autrement dit,  $g$  ne peut pas être tangentiel à la surface de glissement  $S$ , donc  $g$  est transversal à  $\ker \nabla S$ . De plus lorsque la commande équivalente existe localement sur  $S$ , elle est unique.

Pour montrer l'unicité de la commande équivalente, nous supposons que les conditions d'invariance (2.23), soient satisfaites pour deux commandes équivalentes  $U_{1eq}$  et  $U_{2eq}$ .

Donc nous aurons :

$$\begin{aligned} (\nabla S, f + g.U_{1eq}) &= (\nabla S, f + g.U_{2eq}) = 0 \\ \Rightarrow (\nabla S, f + g.(U_{1eq} - U_{2eq})) &= 0 \end{aligned}$$

Comme la condition de transversalité est vérifiée, on a forcément :

$$U_{1eq} = U_{2eq}$$

Lemme 2 :

Si le régime glissant existe localement sur  $S$  alors :

$$L_g S = (\nabla S, g) < 0 \quad (2.27)$$

*Preuve :*

A partir des conditions d'existences des régimes glissants sur  $S$ , données par (2.21) et (2.22), on peut écrire :

$$L_{f+g,U^+}S = (\nabla S, f + g.U^+) > 0$$

$$L_{f+g,U^-}S = (\nabla S, f + g.U^-) < 0$$

d'où :

$$L_{f+g,U^+}S - L_{f+g,U^-}S = (\nabla S, f + g.U^+) - (\nabla S, f + g.U^-) < 0$$

$$L_{f+g,(U^+ - U^-)}S = (\nabla S, f + g(U^+ - U^-)) < 0$$

$$(U^+ - U^-)L_gS = (U^+ - U^-)(\nabla S, g) < 0$$

avec  $U^+ > U^-$ , on aura :

$$L_gS = (\nabla S, g) < 0$$

*Théorème 2 :*

*Une condition nécessaire d'existence locale des régimes glissants sur  $S$  est que localement dans  $X$ , on ait cette inégalité :*

$$U^-(x) < U_{eq}(x) < U^+(x) \tag{2.28}$$

*Preuve :*

Le régime glissant existe localement sur  $S$  :

L'inégalité (2.22) donne :

$$(\nabla S, f + g.U^+(x)) = (\nabla S, f) + U^+(x)(\nabla S, g) < 0$$

de lemme2 et de l'équation (2.24) :

$$\frac{(\nabla S, f)}{(\nabla S, g)} + U^+(x) = -U_{eq}(x) + U^+(x) > 0 \Rightarrow U_{eq}(x) < U^+(x)$$

et de même :

$$\begin{aligned} (\nabla S, f + g.U^-(x)) &= (\nabla S, f) + U^-(x)(\nabla S, g) > 0 \\ \Rightarrow \frac{(\nabla S, f)}{(\nabla S, g)} + U^-(x) &= -U_{eq}(x) + U^-(x) > 0 \Rightarrow U_{eq}(x) < U^-(x) \end{aligned}$$

L'implication inverse du théorème : soit la fonction de commande  $U_{eq}$  satisfaisant (2.28) et (2.24) alors :

$$0 < U_{eq}(x) - U^-(x) < U^+(x) - U^-(x)$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{U_{eq}(x) - U^-(x)}{U^+(x) - U^-(x)} = W_{eq}(x) < 1$$

à partir de :

$$U_{eq}(x) = U^+(x).W_{eq} + (1 - W_{eq}).U^-(x)$$

on a :

$$(\nabla S, f + g.U_{eq}) = W_{eq}(\nabla S, f + g.U^+) + (1 - W_{eq})(\nabla S, f + g.U^-) = 0$$

Ces équations sont vraies si les expressions  $(\nabla S, f + g.U^+)$  et  $(\nabla S, f + g.U^-)$  sont de signe contraire sur  $S$ . Comme l'orientation sur  $S$  est arbitraire on peut choisir :

$$(\nabla S, f + g.U^+) < 0 \quad \text{et} \quad (\nabla S, f + g.U^-) > 0$$

Ceci amène au choix de la commande de la forme discontinue :

$$U(x) = \begin{cases} U^+(x) & \text{si } S(x) > 0 \\ U^-(x) & \text{si } S(x) < 0 \end{cases}$$

qui satisfait :

$$(\nabla S, f + g.U^+(x))|_{S=0} = \lim_{S \rightarrow 0^+} (\nabla S, f + g.U^+) = \lim_{S \rightarrow 0^+} L_{f+g.U^+} S < 0$$

et

$$(\nabla S, f + g.U^-(x))|_{S=0} = \lim_{S \rightarrow 0^-} (\nabla S, f + g.U^-) = \lim_{S \rightarrow 0^-} L_{f+g.U^-} S > 0$$

#### 2.5.4 Dépendance et indépendance du régime glissant idéal vis-à-vis des champs de vecteurs $f(x)$ et $g(x)$

L'équation d'état d'un système en mode de glissement idéal soumis à une commande équivalente [12] est donnée par :

$$\dot{x} = f(x) + g(x).U_{eq}(s) = [I - g(x)(\nabla S, g(x))^{-1}.\nabla S]f(x) \quad (2.29)$$

La condition d'invariance de la variété est donnée par (2.25) sera de la forme :

$$f(x) + g(x).U_{eq}(x) = F.f(x) \in \text{Ker } \nabla S(x) = \Delta S(x) \quad (2.30)$$

où

$$F = [I - g(x)(\nabla S, g(x))^{-1}(\nabla S)]$$

$F$  : Représente l'opérateur de production sur l'espace  $T_x X$ .

Le long de la distribution  $\Delta S(x)$ , les composantes du champ de vecteur  $f$  définissent seules la nature du mode de glissement idéal.

Considérons, la distribution  $G : x \rightarrow \text{Span}\{g(x)\}$ ; avec  $\text{Span}\{g(x)\}$  est l'espace engendré par la base  $g(x)$ . Soit une distribution de champ de vecteurs  $\Delta G \in \text{Span}(g(x))$

$$\begin{aligned} [I - g(x)(\nabla S, g(x))^{-1} \cdot (\nabla S)]g(x).U(x) = \\ [g(x) - g(x)(\nabla S, g(x))^{-1}(\nabla S, g(x))] = 0.U(x) = 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

On remarque que le champ  $g(x)$  n'intervient pas dans le mode de glissement idéal définie par (1.30).

### 2.5.5 Invariance des régimes glissants par rapport aux perturbations

Soit le système dynamique perturber :

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + g(x).U(x) + \zeta \quad (2.32)$$

posant  $\zeta = \delta f(x)$

$\zeta$  : représente les perturbations paramétriques du champ de vecteurs nominal  $f$

Le régime glissant idéal jouit de propriété d'invariance forte [12] par rapport au signal de perturbation  $\zeta$  chaque fois que la dynamique du système en mode de glissement idéal est indépendante du signal de perturbation  $\zeta$ .

*Théorème 3 :*

*Le régime glissant sur la variété  $S$  du système perturbé (2.31), satisfait les propriétés d'invariances vis-à-vis de  $\zeta$ , si et seulement si le vecteur de perturbation*

$$\zeta \in \text{Span}\{g(x)\} \quad (2.33)$$

*Span* est l'espace engendré par la base  $g(x)$ .

*Preuve*

Pour le système perturbé (2.31), le régime glissant idéal est gouverné par :

$$\frac{dx}{dt} = F(f, \delta f)$$

Avec  $F$  l'opérateur de production et  $\delta f = \zeta$ .

La condition nécessaire est donnée par:

$$F \zeta = \left[ I - g(x)((\nabla S, g(x)))^{-1}(\nabla S) \right] \zeta = 0$$

Alors on déduit :

$$\zeta = \left\{ g(x)((\nabla S, g(x)))^{-1}(\nabla S) \right\} \zeta = g(x) \cdot \mu(x)$$

C'est à dire :

$$\zeta \in \text{Span}\{g(x)\} \text{ Pour toute fonction scalaire continue } \mu(x).$$

*Théorème 4 :*

Soit  $\zeta \in \text{Span}\{g(x)\}$  et  $U_{eq}(x)$  la commande équivalente correspondant au régime glissant sur  $S$  du système non perturbé (2.18). Soient  $U^+(x)$  et  $U^-(x)$  les bornes fixes de la loi de commande à structure variable, avec  $U^+(x) > U^-(x)$  localement dans  $X$ . Si le régime glissant existe pour le système perturbé (2.31) alors, nécessairement, le vecteur perturbé s'écrit  $\zeta = g(x) \cdot \mu(x)$  avec  $\mu(x)$  une fonction bornée.

$$U_{eq}(x) - U^+(x) < \mu(x) < U_{eq}(x) - U^-(x) \quad (2.34)$$

*Preuve*

Si le régime glissant existe pour le système perturbé (2.31) donc nous avons :

$$\begin{cases} \lim_{S \rightarrow 0^+} (\nabla S, f + g \cdot U^+ + \zeta) = \lim_{S \rightarrow 0^+} (\nabla S, f + (\mu + U^+)) \cdot g < 0 \\ \lim_{S \rightarrow 0^-} (\nabla S, f + g \cdot U^- + \zeta) = \lim_{S \rightarrow 0^-} (\nabla S, f + (\mu + U^-)) \cdot g > 0 \end{cases}$$

Ceci correspond à l'existence du régime glissant pour le système non perturbé avec une loi de commande à structure variable de type :

$$U = \begin{cases} U^+ + \mu & \text{si } S(x) > 0 \\ U^- + \mu & \text{si } S(x) < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow U^-(x) + \mu(x) < U_{eq}(x) < U^+(x) + \mu(x)$$

$$\Rightarrow U_{eq}(x) - U^+(x) < \mu(x) < U_{eq}(x) - U^-(x)$$

## 2.6 DETERMINATION DU DOMAINE DE GLISSEMENT PAR LES FONCTION DE LYAPUNOV

Nous rappelons d'abord dans ce paragraphe quelques définitions de stabilité. Nous étudions ensuite le domaine de glissement dans lequel les conditions de stabilité du système bouclé en régime glissant sont satisfaites [13] [14]

### ❖ Fonction de LYAPUNOV

Si dans un voisinage de 0, la fonction scalaire  $V(x)$  est définie positive ayant une dérivée partielle continue et si sa dérivée par rapport au temps pour toutes les trajectoires  $x(t)$  dans l'espace d'état définie semi négative ( $\dot{V}(x) \leq 0$ ), alors  $V(x)$  est une fonction de LYAPUNOV .

Considérons un système dynamique d'ordre  $n$  défini par le système des équations différentielles donnée par :

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (2.35)$$

où  $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  est le vecteur d'état et  $f=(f_1, f_2, \dots, f_n)^T$  est un vecteur de fonctions non linéaires.

### ❖ Définition de stabilité :

Le point d'équilibre  $x=0$  est stable si pour tout  $R>0$ , il existe  $r>0$  tel que si:

$$\|X(0)\| < r \text{ alors } \|X(t)\| < R \text{ pour tout } t \geq 0$$

$$\forall R > 0, \exists r > 0 \text{ tel que , si } \|X(0)\| < r \Rightarrow \|X(t)\| < R \quad \forall t \geq 0$$

### ❖ Stabilité asymptotique :

Le point d'équilibre  $X=0$  est asymptotiquement stable si  $X=0$  est stable si

$$\exists r > 0 \text{ tel que } \|X(0)\| < r \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} X(t) \rightarrow 0$$

### ❖ Stabilité asymptotique locale et globale :

Si la stabilité asymptotique est vérifiée pour toutes les conditions initiales, nous avons alors une stabilité asymptotique globale du point  $X=0$ , si ce n'est pas le cas, nous avons alors une stabilité asymptotique locale.

### *Théorème 5:*

1) S'il existe une fonction scalaire  $V(x)$  ayant sa première dérivée partielle continue telle que :

- ❖  $V(x)$  est définie positive (localement dans l'ensemble  $B_R = \{X / \|X\| > R\}$ )



❖  $\dot{V}(x)$  est semi- définie négative (localement dans  $B_R$ )

Alors le point d'équilibre  $X=0$  est stable. Si  $\dot{V}(x)$  est définie négative localement dans  $B_{R_0}$ , alors la stabilité asymptotique locale.

2) S'il existe une fonction scalaire  $V(x)$  ayant sa première dérivée continue telle que:

$V(x)$  est définie positive

$\dot{V}(x)$  est définie négative

$V(x) \rightarrow \infty$  quand  $\|X\| \rightarrow \infty$

Alors le point d'équilibre  $X=0$  est asymptotiquement stable globalement

### 2.6.1 Domaine de glissement

Le domaine de glissement peut être réduit à l'étude de la stabilité du système en régime de glissement [15].

Soit le système dynamique donné par :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = f(X, t) + g(X, t)U \\ Y = h(X, t) \end{cases} \quad (2.36)$$

- cas d'un glissement réel:

On suppose que le glissement s'effectue dans une bande de largeur  $(\pm \Delta)$ , autour de la surface  $S$  définie par l'équation  $S=0$ .

La loi de commande est définie par:

$$\begin{cases} U = \begin{cases} U^+ & \text{si } S > 0 \\ U^- & \text{si } S < 0 \end{cases} & \text{si } |S| \geq \Delta \\ \min(U^+, U^-) \leq U \leq \max(U^+, U^-) & \text{si } |S| \leq \Delta \end{cases} \quad (2.37)$$

Définition :

Soit  $D$  une partie de l'ensemble des  $X$  tel que  $S(X)=0$ ,  $D$  est un domaine de glissement

( $D$  contient les trajectoires  $X(t)$  en régime glissant) si:

1. Les trajectoires restent entre les deux frontières  $\pm \Delta$  associées à la surface  $S$  en domaine  $D$  et à la commande effective.

2. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\Delta$  et  $\varepsilon$  telle que la trajectoire, situé au départ dans la bande  $\pm \Delta$  du système commandé partant de la bande  $\pm \varepsilon$ , reste dans le domaine  $\pm \varepsilon$  (Figure 2.7).

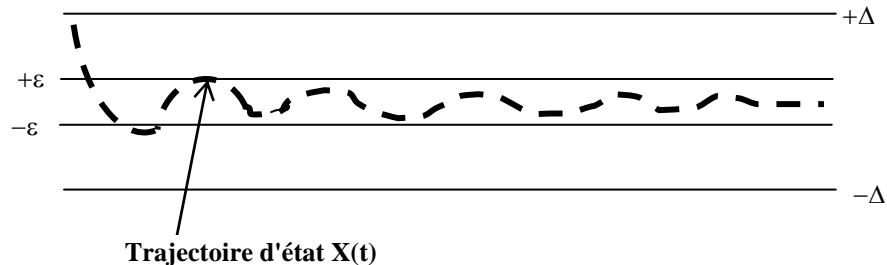


Figure 2.7: Domaine de glissement

Remarque :

Les fonctions de LYAPUNOV sont souvent utilisées pour l'étude de la stabilité des systèmes non linéaires. On donne l'équivalent du théorème de LYAPUNOV pour la détermination du domaine de glissement.

*Théorème 6:*

*pour que le domaine  $D$  soit un domaine de glissement, il suffit pour  $X$  élément de  $D$  qu'il existe  $\Omega \subset D$  contenant l'origine et une fonction  $V(S, X, t)$ , continûment différentielle par rapport à  $S, X$  et  $t$  vérifiant:*

*1) la fonction  $V(S, X, t)$  est définie positive par rapport à  $S, X$  et  $t$ , telle que  $V(S, X, t)$*

*Pour  $S \neq 0$  et  $V(0, X, t) = 0$  pour  $S = 0$ . Si  $|S| = R$  pour tout  $X$  élément de  $\{X \mid |S| = 0\}$*

*Pour  $t$  on a :*  $\inf_{|S|=R} V = h_R$        $\sup_{|S|=R} V = H_R$        $\lim_{R \rightarrow 0} H_R = 0$

*Où  $h_R$  et  $H_R = 0$  sont deux quantités positives dépendant seulement de  $R$ .*

*2) la dérivé totale de  $V$  est négative partout (pour  $S, X$  et  $t$ ) sauf sur la surface ( $S=0$ )*

*où cette fonction n'est pas définie et pour tout  $X$  élément de  $\{X \mid |S| = R\}$  à l'exception*

*les  $X$  solutions de  $S=0$ , la relation suivante:*

*$\sup \dot{V} = -m_R$        $m_R > 0$  est vérifiée.*

*Théorème 7:*

*Pour obtenir un mode de glissement stable, il suffit pour tout  $X$  et  $t$ , qu'il existe une fonction  $V(S, X, t)$  telles que les propriétés (1) et (2) du théorème soient vérifiées pour la stabilité asymptotique globale.*

Corollaire:

Le régime glissant est asymptotiquement stable, s'il existe une fonction  $V(S, X, t)$  continûment différentielle pour  $t$  et pour  $X$  élément de  $D$  telle que:

- ❖  $V(S, X, t) > 0$  si  $S \neq 0$  et  $V(0, X, t) = 0$ .
- ❖ la dérivée totale de  $V(S, X, t)$  est négative pour tout  $S, X$  et  $t$  sur la surface  $S=0$  uniquement ou cette fonction est discontinue.

### 2.6.2 Détermination de la condition de glissement par la fonction de LYAPUNOV

Soit le système donné par l'équation (2.36).

La fonction  $V(S, X, t)$  est choisie sous la forme quadratique suivant:

$$V(S, X, t) = \frac{1}{2} S^2(X, t)$$

- 1) La fonction  $V(S, X, t) > 0$  pour tout  $x, t$  et pour tout  $S \neq 0$  et  $V(0, X, t) = 0$ .
- 2) Le régime glissant est définie stable si la dérivé totale de  $\dot{V}(S, x, t)$  est négative.

$$(\dot{V}(S, X, t) = \dot{V}(S)) = S \cdot \dot{S} < 0 \quad (2.38)$$

Finalement, on a aboutit a la même inégalité de glissement donnée par le formalisme classique vu précédemment par l'équation (2.6).

### 2.7 CONCEPTION D'UNE COMMANDE A STRUCTURE VARIABLE PAR MODE DE GLISEMENT

La mise en œuvre d'une commande à structure variable par mode glissant est obtenue en trois étapes successives :

- ❖ Choix de la surface de glissement.
- ❖ Etablissement des conditions d'existences et de convergence du mode glissement.
- ❖ Etablissement d'une loi de commande permettant l'évolution de l'état du système sur cette surface.

### 2.7.1 Choix de la surface de glissement :

Le choix concerne le nombre nécessaire de surfaces ainsi que leurs formes, il est en fonction de l'application visée.

Le nombre de surfaces est choisi égal à la dimension de l'entrée du système; en ce qui concerne la forme, les surfaces de glissement dans le domaine de robotique sont choisies comme étant des hypersurfaces passant par l'origine de l'espace pour des raisons de stabilité et de manière à définir une certaine évolution du système lors du régime de glissement.

Les surfaces  $S(x)$  sont données par :

$$S(x) = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \cdot e_i = e_n + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \cdot e_i \quad \text{Avec} \quad \lambda_n = 1 \quad (2.39)$$

$\lambda_i$  : Coefficients de surface.

$e$  : est le vecteur d'erreur obtenue par la différence entre l'état actuel et l'état désiré donné par :  $e = x_i - x_{id}$

D'après ce choix de la surface, le problème de stabilité du système en régime glissant se pose comme le cas d'un système linéaire classique qui dépend des coefficients  $\lambda_i$ , d'où on peut utiliser les critères de stabilité de ROUTH et HERWITZ.

### 2.7.2 Condition de la convergence

Pour que le système converge vers la trajectoire désirée (tout en étant insensible aux perturbations externes et aux variations paramétriques) ; la loi de commande doit satisfaire une condition de glissement, cette dernière peut être obtenue en utilisant l'un des formalismes vu précédemment (formalisme classique (théorème de PHILIPPOV), formalisme de LYAPUNOV ou la géométrie différentielle).

Dans le cas où nous utilisons le formalisme de LYAPUNOV alors nous avons:

La fonction de LYAPUNOV  $V(S, X, t)$  est choisie sous la forme quadratique suivante :

$$V(S, X, t) = \frac{1}{2} S^2(X, t)$$

1. La fonction  $V(S, X, t) > 0$  pour tout  $X, t$  et pour tout  $S \neq 0$  et  $V(0, X, t) = 0$ .

donc :

$$V(S, X, t) > 0 \quad \forall \quad X, t, S \neq 0$$

2. Le régime glissant est défini stable si la dérivée totale de  $\dot{V}(S, X, t)$  est négative.

$$\dot{V}(S, X, t) = \dot{V}(S) = S \cdot \dot{S} < 0$$

$$S \dot{S} < 0 \quad (2.40)$$

### 2.7.3 Loi de commande à structure variable par mode de glissement

La synthèse d'un correcteur à structure variable consiste à définir une loi de commande qui permet d'amener et de maintenir l'état du système défini dans l'espace de l'erreur par  $e(t)$  sur une variété de commutation  $S(t)=0$ , appelé surface de glissement.

Une solution de l'inégalité de glissement (2.40) est de la forme :

$$U = -M \cdot \text{sign}(S) \quad (2.41)$$

Un contrôleur à structure variable par mode de glissement comporte deux parties : une partie qui consiste à donner un comportement linéaire au système et une autre partie à structure variable, stabilisante, représentant la dynamique du système durant le mode de convergence, ce contrôleur est donné par l'équation suivante :

$$U = U_{eq} + \Delta U \quad (2.42)$$

$U_{eq}$  Commande équivalente ou la composante continue (moyenne), qui correspond à un régime glissant idéal [15] défini par la formule suivante:

$$S = \dot{S} = 0 \quad (2.43)$$

$\Delta U$  Composante discontinue est déterminée pour garantir l'attraction de la variable à contrôler vers la surface de glissement et satisfaisant la condition de glissement  $S \cdot \dot{S} < 0$ .

Dans la littérature, différentes formes sont proposées pour la composante discontinue nous citons : [8][15][16]

$$\Delta U = -K \cdot \text{sign}(S) \quad (2.44)$$

$$\Delta U = \alpha e + \beta \dot{e} + \delta \cdot \text{sign}(S) \quad (2.45)$$

$$\Delta U = (\alpha |e| + \beta |\dot{e}| + \delta) \cdot \text{sign}(S) \quad (2.46)$$

En pratique, ces types de lois de commande peuvent engendrer des oscillations autour de la surface donnant lieu à certaines grandeurs de broutement, ces oscillations sont dues essentiellement aux relais de commutation et à la présence des non linéarités.

### 2.7.4 Réduction du phénomène de broutement

Pour remédier au phénomène de broutement qui est du à la composante de haute fréquence  $\Delta U$  ; plusieurs chercheurs ont proposé des solutions permettant de réduire ces oscillations nous citons les méthodes suivantes [8]:

- ❖ Par augmentation de fréquence de commutation.
- ❖ Par commande continue dans une bande autour de la surface de commutation (bande limite).
- ❖ Par gain auto ajustable (adaptatif).

#### 2.7.4.1 Commande continue par bande de surface

Afin d'adoucir les oscillations autour de la surface de glissement, une solution consiste à remplacer la composante discontinue de la commande par une composante continue à l'intérieur d'une fine bande située au voisinage de la surface et la discontinuité est conservée à l'extérieur de la bande[8]. Les trajectoires de phases initialisées à l'extérieur de cette bande converge vers elle, et sont contraintes d'évoluer à l'intérieur de cette bande (Figure 2.8).

la bande est définie comme suit :

$$B(t) = \{x / |S(x,t)| \leq \phi\}$$

$$B(t) = \{x / S(x,t) > 0 \text{ et } S(x,t) < 0\} \quad (2.47)$$

avec :  $S^-(x,t) = S(x,t) + \lambda.\varepsilon$ ,  $S^+(x,t) = S(x,t) - \lambda.\varepsilon$  et  $\Phi = \lambda.\varepsilon$

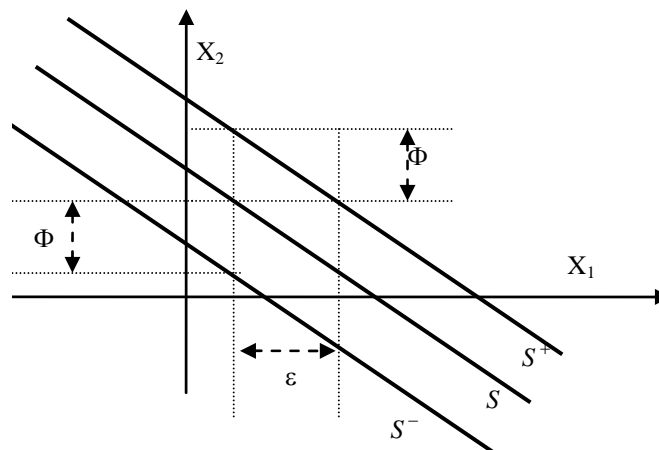


Figure 2.8 : Construction de la bande B (t)

Dans ce cas nous avons :  $\dot{S}^+(x,t) = \dot{S}(x,t) = \dot{S}^-(x,t)$ .

La commande et la condition de glissement sont appliquées à l'extérieur de la bande c'est à dire pour :

$$x \in \{ x / S^-(x,t) < 0 \quad \text{et} \quad S^+(x,t) > 0 \} \quad (2.48)$$

❖ Forme continue de saturation

La fonction signe est remplacée par une fonction de saturation notée par  $Sat(S)$  donnée par l'équation suivante :

$$sat = \begin{cases} \frac{S}{\Phi} & si \quad |S| \leq \Phi \\ sign(S) & si \quad |S| > \Phi \end{cases} \quad (2.49)$$

Pour une composante discontinue de type  $u = -K \cdot sat(S)$  nous avons.

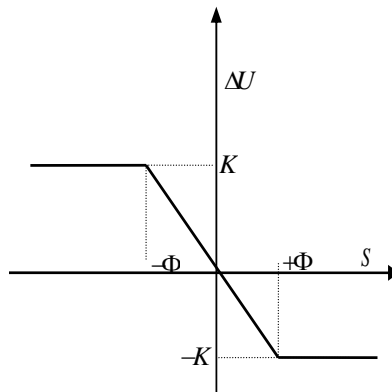


Figure 2.9 : Composante  $\Delta U$  par bande continue de saturation au voisinage de la surface

❖ Forme continue de lissage

La fonction discontinue  $sign(S)$  est remplacée dans la bande  $|S| < \Phi$  par une fonction appelée ( $Cont(S)$ ), la composante de haute fréquence prend la forme :  $\Delta U = -K \cdot Cont(S)$

$$Cont(S) = \begin{cases} \frac{S}{|S| + \delta} & si \quad |S| < \Phi \quad avec \quad \delta > 0 \\ sign(S) & si \quad |S| > \Phi \end{cases} \quad (2.50)$$

Cette fonction peut être schématiquement représenté par :

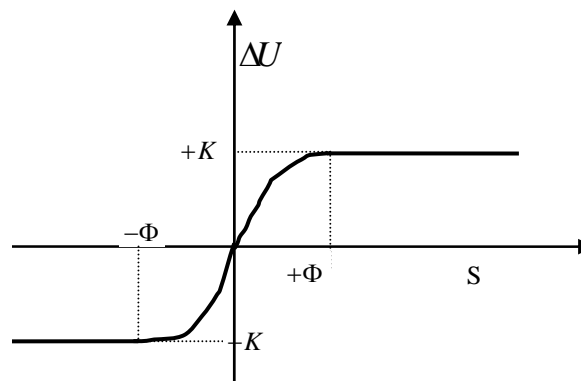


Figure 2.10 : Composante  $\Delta U$  par bande continue de lissage au voisinage de la surface

## 2.8 SYNTHÈSE DES CORRECTEURS À STRUCTURE VARIABLE PAR MODE DE GLISSEMENT APPLIQUÉS AU ROBOT SCARA RP41

Le modèle dynamique du robot SCARA calculé dans le chapitre 1 est donné par l'équation suivante:

$$[U_i] = [A][\ddot{q}_i] + [B][\dot{q}_i, \dot{q}_j] + [C][\dot{q}_i^2] \quad (2.51)$$

$$\text{avec : } A = \begin{bmatrix} a & c & I_{33}^{(3)} \\ c & b & I_{33}^{(3)} \\ I_{33}^{(3)} & I_{33}^{(3)} & I_{33}^{(3)} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d'où

$$a = M_1 l_1^2 + M_2 (L_1^2 + l_2^2 + 2L_1 l_2 \cos(q_2)) + M_3 (L_1^2 + L_2^2 + 2L_1 L_2 \cos(q_2)) + I_{33}^{(1)} + I_{33}^{(2)} + I_{33}^{(3)}$$

$$b = M_2 l_2^2 + M_3 L_2^2 + I_{33}^{(2)} + I_{33}^{(3)}$$

$$c = M_2 L_1 l_2 \cos(q_2) + M_3 (L_2^2 + L_1 L_2 \cos(q_2)) + I_{33}^{(2)} + I_{33}^{(3)}$$

$$d = [M_2 L_1 l_2 (-\sin(q_2)) + M_3 L_1 L_2 (-\sin(q_2))]$$

$M_1, M_2, M_3$  : masses des segments.

$L_1, L_2, L_3$  : longueurs des segments.

$q_1, q_2, q_3$  : angles des articulations.

$I_1, I_2, I_3$  : moments des inerties

Les algorithmes des correcteurs à structure variable sont appliqués à chaque actionneur du robot manipulateur SCARA (Figure 2.11) dans les deux modes :

- ❖ Mode de régulation : caractérisée par une évolution libre du système entre l'état initial et l'état final.
- ❖ Mode de poursuite de trajectoire : caractérisée par une évolution imposée entre l'état initial et l'état final.

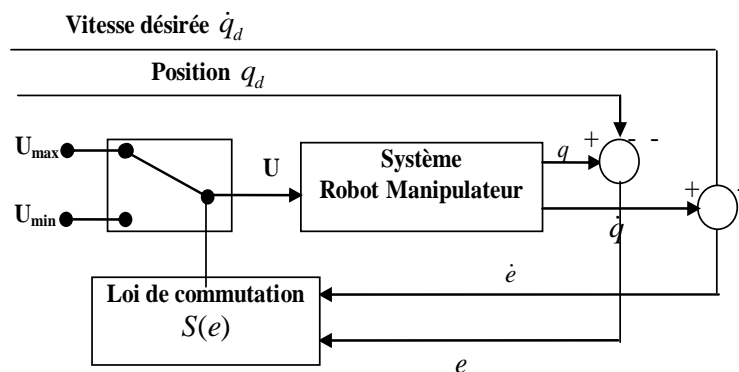


Figure 2.11 : Schéma de principe d'une commande à structure variable pour le robot SCARA



Nous voulons implémenter une loi de commande à structure variable afin que le robot atteigne une consigne ou suive une trajectoire désirée et ceci en partant d'un point quelconque du plan de mouvement. Pour ce faire nous définissons :

- ❖ Les variables suivantes qui représentent les erreurs entre la position et la vitesse actuelle du robot et celle de la trajectoire désirée :

$$\begin{aligned} e &= q - q_d \\ \dot{e} &= \dot{q} - \dot{q}_d \end{aligned} \quad (2.52)$$

$q_d$ ,  $\dot{q}_d$  et  $\ddot{q}_d$  représentent respectivement la position, la vitesse et l'accélération désirées.

- ❖ Les surfaces de glissements  $S_i$  des trois axes sont définies tel que :

$$S_i = \lambda_i e_i + \dot{e}_i \quad ; \quad i=1, 2, 3 \text{ et } \lambda_i > 0 \quad (2.53)$$

### 2.8.1 Une commande de type $U = -M \cdot \text{sign}(S)$

Les gains  $M_i$  des commandes  $U_i$  sont choisis positifs, de sorte que l'inégalité de glissement donnée par l'équation (2.40) soit toujours vérifiée pour chaque axe.

Le tableau ci dessous donne la démarche à suivre pour la synthèse d'un correcteur ce e type.

Tableau 2.1 : Synthèse d'un correcteur CVS avec une commande de type  $U = -M \cdot \text{sign}(S)$

Dynamique de la sortie du système à commander	$\ddot{q} = [A]^{-1}[U - B\dot{q}\dot{q} - C\dot{q}^2]$
Surfaces de glissement choisies	$S = \lambda e + \dot{e}$ Avec $e = q - q_d$ et $\dot{e} = \dot{q} - \dot{q}_d$
Gains de commande	$M > 0 \Rightarrow \begin{cases} M(1) > 0 \\ M(2) > 0 \\ M(3) > 0 \end{cases}$
Equation de la loi de commande	$U = -M \cdot \text{sign}(S)$

### 2.8.2 Une commande de type $U = U_{eq} + \Delta U$

afin de tester la robustesse de cette commande, nous allons utiliser le modèle réduit du robot SCARA RP41 pour le calcul de la loi de commande, qui sera appliquée plus tard au modèle complet du robot.

Le modèle réduit de SCARA RP41 est décrit par :

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c & I_{33}^{(3)} \\ c & b & I_{33}^{(3)} \\ I_{33}^{(3)} & I_{33}^{(3)} & I_{33}^{(3)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

❖ Calcul de la commande équivalente

La commande équivalente est obtenue pour un mode de glissement idéal sur la surface  $S = 0$  par la condition  $\dot{S} = 0$ .

Nous utilisons l'équation (2.53) pour déterminer cette dernière, nous obtenons :

$$\lambda \dot{e} + \ddot{e} = \lambda \dot{e} + (\ddot{q} - \ddot{q}_d) = 0 \quad (2.55)$$

Nous remplaçons l'expression (2.54) dans (2.55), ainsi la loi de la commande équivalente sera donnée par l'équation suivante:

$$U_{eq} = A \cdot (\ddot{q}_d - \lambda \dot{e}) \quad (2.56)$$

❖ Calcul de la commande discontinue

Pour assurer la convergence du système nous allons appliquer l'inégalité de glissement donnée par l'équation (2.40)

$$\begin{aligned} S \dot{S} &< 0 \\ \Rightarrow S \cdot (\lambda \dot{e} + A^{-1}(U_{eq} + \Delta U) - \ddot{q}_d) & \\ \Rightarrow S \cdot A^{-1} \cdot \Delta U &< 0 \end{aligned} \quad (2.57)$$

Comme il existe plusieurs formes, nous avons choisi les deux formes suivantes :

Première forme :  $\Delta U = -K \cdot \text{sign}(S)$

Deuxième forme :  $\Delta U = (\alpha \cdot |e| + \beta \cdot |\dot{e}| + \gamma) \cdot \text{sign}(S)$

Pour une composante discontinue de la forme  $\Delta U = -K \cdot \text{sign}(S)$

L'expression de la commande discontinue est remplacée par l'inégalité (2.57), ce qui donne:

$$-A^{-1} \cdot K \cdot |S| < 0 \Rightarrow K > 0 \quad (2.58)$$

Puisque  $A$  est une matrice symétrique positive, donc, obligatoirement, le gain  $K$  doit être positif pour que l'inégalité de glissement soit satisfaite.

Les étapes de synthèse d'une commande de type  $U = U_{eq} - K.sign(S)$  sont présentées dans le tableau ci-dessous :

Tableau 2.2 : Synthèse d'un correcteur CVS avec une commande de type  $U = U_{eq} - K.sign(S)$

Dynamique de la sortie du système	$\ddot{q} = [A]^{-1}U$
Surfaces de glissements choisies	$S = \lambda e + \dot{e}$ , $e = q - q_d$ et $\dot{e} = \dot{q} - \dot{q}_d$
Commande équivalente du système	$U_{eq} = A.(\ddot{q}_d - \lambda.\dot{e})$ $U_{eq} = [U_{1eq}, U_{2eq}, U_{3eq}]^T$
Gains de commande	$K > 0 \Rightarrow \begin{cases} K(1) > 0 \\ K(2) > 0 \\ K(3) > 0 \end{cases}$
Equation de la loi de commande	$U = U_{eq} - K.sign(S)$

Pour La composante discontinue de type  $\Delta U = (\alpha.|e| + \beta.|\dot{e}| + \gamma).sign(S)$

Les équations du bras manipulateur obtenues par modélisation avec une marge d'incertitude sur les paramètres dynamiques sont données comme suit :

$$\begin{aligned}
 a^* - \Delta a < a < a^* + \Delta a \\
 b^* - \Delta b < b < b^* + \Delta b \\
 c^* - \Delta c < c < c^* + \Delta c \\
 I_{33}^{(3)*} - \Delta I_{33}^{(3)} < I_{33}^{(3)} < I_{33}^{(3)*} + \Delta I_{33}^{(3)}
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

$a^*$ ,  $b^*$ ,  $c^*$  et  $I_{33}^{(3)*}$  :sont des paramètres estimés avec une marge de l'ordre  $\Delta a$ ,  $\Delta b$ ,  $\Delta c$  et  $\Delta I_{33}^{(3)}$ .

A cause des erreurs de modélisation les commandes équivalentes  $U_{ieq}$  de chaque axe sont estimées telle que :

$$U_{eq}^* = U_{eq} + \Delta U_{eq} \tag{2.60}$$

$U_{eq}^*$  : est la commande équivalente estimée calculée par l'équation (2.56) donnée par l'équation suivante :

$$U_{eq}^* = A.(\ddot{q}_d - \lambda.\dot{e})$$

Des équations (2.60) et (2.56), nous calculons l'erreur commise entre la commande équivalente vraie et la commande estimée, nous obtiendrons :

$$\Delta U_{eq} = (A^* - A).(\ddot{q}_d - \lambda.\dot{e}) = \Delta A.(\ddot{q}_d - \lambda.\dot{e}) \quad (2.61)$$

En effet, la commande effective appliquée au système est en fonction de la commande équivalente estimée et la commande discontinue, ainsi nous aurons :

$$U = U_{eq}^* + \Delta U \quad \text{et} \quad U_{eq}^* = U_{eq} + \Delta U_{eq} \quad (2.62)$$

Nous remplaçons l'expression de la commande effective calculée dans l'équation de la dérivé de la surface, puis dans l'expression de l'inégalité de glissement (2.57) nous trouverons respectivement les équations suivantes:

$$\dot{S} = A^{-1}(\Delta U_{eq} + \Delta U) \quad (2.62)$$

$$S.A^{-1}.(\Delta U_{eq} + \Delta U) < 0 \quad (2.63)$$

Pour une commande discontinue de type  $\Delta U = (\alpha|e| + \beta|\dot{e}| + \gamma).sign(-S)$ , nous aurons l'inégalité suivante :

$$S.A^{-1}.\Delta A.(\ddot{q}_d - \lambda.\dot{e}) + S.A^{-1}.\Delta A.(\beta|e| + \beta|\dot{e}| + \gamma).sign(S) < 0 \quad (2.64)$$

$$\text{avec } \alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^T, \quad \beta = [\beta_1, \beta_2, \beta_3]^T \quad \text{et} \quad \gamma = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3]^T$$

En majorant l'inégalité (2.64) nous aurons:

$$|S|.|A|.|\Delta A^{-1}|.|\ddot{q}_d| + |S|.|A|.|\Delta A^{-1}|.|\lambda|.|\dot{e}| + |S|.|A^{-1}|.(\alpha.|e| + \beta.|\dot{e}| + \gamma) < 0 \quad (2.65)$$

Et comme A est une matrice positive, donc nous obtiendrons :

$$|\Delta A^{-1}|.|\ddot{q}_d| + |\Delta A^{-1}|.|\lambda|.|\dot{e}| + \alpha.|e| + \beta.|\dot{e}| + \gamma < 0 \quad (2.66)$$

Pour satisfaire la condition de glissement  $S.\dot{S} < 0$ , il suffit que :

$$\begin{cases} \alpha < 0 \\ \beta < -|\Delta A|\lambda \\ \gamma < -|\Delta A^{-1}|.|\ddot{q}_d| \end{cases} \quad (2.67)$$

Le gain de la commande  $\alpha$  est choisi constant négatif pour chaque axe de robot, le gain  $\beta$  est choisi négatif et dépend uniquement de la gamme de variation des paramètres

dynamiques et le gain  $\gamma$  dépend non seulement de l'intervalle de variation des paramètres dynamiques mais aussi des valeurs des trajectoires désirées à chaque instant.

- ❖ Pour diminuer les oscillations dans le régime glissant, il est possible de remplacer la fonction discontinue  $sign(S)$  par une fonction de saturation présentée au dessus. Donc la commande effective appliquée au système devient :

$$U = \begin{cases} U_{eq}^* + (\alpha|e| + \beta|\dot{e}| + \gamma).sign(S) & si \quad |S| > \Phi \\ U_{eq}^* + (\alpha|e| + \beta|\dot{e}| + \gamma).sat(S) & si \quad |S| < \Phi \end{cases} \quad (2.68)$$

Avec  $\Phi$  est la largeur de la bande.

Le tableau ci dessous résume la démarche de cette synthèse :

Tableau 2.3 : Synthèse d'un correcteur CVS avec une commande de type

$$U = U_{eq}^* + (\alpha|e| + \beta|\dot{e}| + \gamma).sat(S)$$

Dynamique de sortie du Robot SCARA (le modèle réduit)	$A.\ddot{q} = U$
Surface de glissement	$S = \lambda e + \dot{e}$ , $e = q - q_d$ et $\dot{e} = \dot{q} - \dot{q}_d$
Contrainte issues a la modélisation	$a^* - \Delta a < a < a^* + \Delta a$ $b^* - \Delta b < b < b^* + \Delta b$ $c^* - \Delta c < c < c^* + \Delta c$ $I_{33}^{(3)*} - \Delta I_{33}^{(3)} < I_{33}^{(3)} < I_{33}^{(3)*} + \Delta I_{33}^{(3)}$
Commande équivalente estimée	$U_{eq}^* = A^* .(\ddot{q}_d - \lambda.\dot{e})$
Gains de commande	$\begin{cases} \alpha < 0 \\ \beta < - \Delta A \lambda \\ \gamma < - \Delta A^{-1} .\dot{q}_d \end{cases}$
Fonction de saturation	$sat = \begin{cases} \frac{S}{\Phi} & si \quad  S  \leq \Phi \\ sign(S) & si \quad  S  > \Phi \end{cases}$
Equation de la loi de commande	$U = U_{eq}^* + (\alpha e  + \beta \dot{e}  + \gamma).sat(S)$

## 2.9 SIMULATION

Pour la simulation, nous avons choisi la méthode de Runge-Kutta de quatrième ordre pour la résolution des équations différentielles de notre système mécanique avec un pas d'intégration  $p = 0.001$ .

Les paramètres du robot SCARA sont donnés dans le tableau suivant :

Tableau 2.4 : Les paramètres du robot SCARA

La masse du premier segment	2.2 kg	M1
La masse du deuxième	2.3 kg	M2
La charge transportée	0 kg – 5 kg	M3
La longueur du premier segment	15 cm	L1
La longueur du deuxième segment	20 cm	L2
La longueur du troisième segment	15 cm	L3
Tenseur d'inertie du bras 1	0.1 N.m	I1
Tenseur d'inertie du bras 2	0.1 N.m	I2
Tenseur d'inertie du bras 3	0.1 N.m	I3

Les figures ci-dessous présentent des simulations concernant l'application des différentes extensions de la commande à structure variable pour entraîner le robot SCARA à effectuer des mouvements. Pour cela le robot doit soit se déplacer selon une consigne, dans ce cas le fonctionnement est dit mode de régulation ou suivre une trajectoire bien définie c'est le mode de poursuite.

En mode régulation, nous désirons que le bras se déplace de son état initial  $X_i = [0 ; 0 ; 0]$  vers un état désiré  $X_f [1.2 ; 2.2 ; 3.]$  avec une vitesse et une accélération finales nulles. De même pour le mode de poursuite de trajectoire, nous avons choisi une trajectoire à profil de vitesse trapézoïdal, d'où la position désirée  $P_d = [2.9, 2.2, 2.1] rad$ , la vitesse de  $V_d = [1.1, 1.2, 1.0] rad/s$  et l'accélération  $A_d = [0.9 ; 0.6 ; 1] rad/s^2$ .

Les coefficients des surfaces de glissement et les gains des commandes effectives des différents types de correcteurs appliqués pour chaque axe du robot SCARA sont présentés dans les tableaux suivants :

Tableau 2.5 : Cas d'un correcteur de type  $U = -M.sign(S)$ 

Mode de régulation	Coefficients des surfaces de glissement	$\lambda = [10 ; 10; 10]$
	Les gains des lois commandes	$M = [105 ; 100 ; 101]$
Mode de poursuite	Coefficients des surfaces de glissement	$\lambda = [10 ; 10; 10]$
	Les gains des lois commandes	$M = [10 ; 10 ; 10]$

Tableau 2.6 : cas d'un correcteur de type  $U = U_{eq} - K.sign(S)$ 

Mode de régulation	Coefficients des surfaces de glissement	$\lambda = [10,10,10]$
	Les gains des lois commandes	$K = [95,75,50]$
Mode de poursuite	Coefficients des surfaces de glissement	$\lambda = [10,10,10]$
	Les gains des lois commandes	$K = [10,10,10]$

Tableau 2.7 : Un correcteur de type  $U = U_{eq} + (\alpha|e| + \beta|\dot{e}| + \gamma).sign(S)$ 

Mode de régulation	Coefficients des surfaces de glissement	$\lambda = [10,10,10]$
	Les gains des lois commandes	$\begin{cases} \alpha = [25 \ 20 \ 20] \\ \beta = -0.5A\lambda \\ \gamma = -0.5A^{-1}\ddot{q}_d \end{cases}$
Mode de poursuite	Coefficients des surfaces de glissement	$\lambda = [10,10,10]$
	Les gains des lois commandes	$\begin{cases} \alpha = [25 \ 25 \ 25] \\ \beta = -0.5A\lambda \\ \gamma = -0.5A^{-1}\ddot{q}_d \end{cases}$

### *L'analyse des résultats*

❖ En mode de régulation, l'évolution du système est libre entre l'état initial et l'état final ; la dynamique du système dépend uniquement du choix des coefficients de la surface de glissement ; ces coefficients doivent être positifs afin que le système soit asymptotiquement stable.

Les figures (2.12.A) et (2.13.A) représentent les allures de position, du plan de phase, de vitesse et de commande des trois segments du robot, en utilisant les correcteurs  $U = -M.sign(S)$  et  $U = U_{eq} + (\alpha|e| + \beta|\dot{e}| + \gamma).sign(S)$  respectivement.

Pour le premier correcteur, nous remarquons que la variable d'état atteint et suit la position désirée dans un temps fini, se qui se traduit par la convergence de la trajectoire d'état dans le plan de phase ; nous remarquons aussi des oscillations autour de la surface de glissement dans le plan de phase, ceci est du à la commutation de la commande; tandis que, pour le deuxième correcteur une amélioration de la qualité des résultats ; la variable d'état suit la consigne avec une erreur de position de l'ordre de 0.1% ; l'amplitude des brouitements dans le plan de phase ainsi que la commande est devenu beaucoup moins importante que le premier correcteur.

D'autre part, l'insertion de la fonction de saturation au niveau de la composante discontinue de la commande a permis également de réduire les brouitements (voir la figure 2.14).

Les figures (2.12.B) et (2.13.B) montrent la robustesse et l'invariance de ces correcteurs via une charge transportée égal à la somme des deux segments du robot, aux variations paramétriques de 50% et aux signaux de perturbations externes de même amplitudes que celles des gains des composantes discontinues des commandes.

❖ En mode de poursuite de trajectoire, l'évolution du système entre l'état initial et l'état final est imposée.

Les figures (2.15.a) et (2.16.a), donnent l'évolution des positions, vitesses et accélérations réelles et désirées ainsi que les commandes pour un système non chargé non et non perturbé. Nous avons une très bonne poursuite de position avec une erreur d'ordre 0.01%.



Pour le correcteur de type  $U = U_{eq} + (\alpha|e| + \beta|\dot{e}| + \gamma).sign(S)$  nous avons une bonne poursuite en vitesse et en accélération pour chaque axe du robot, tandis que pour le correcteur de type  $U = U_{eq} - K.sign(S)$ , nous remarquons des broutements autour de la vitesse et l'accélération désirées. Ces broutements sont dues au retard de commutation de la commande (temps de calcul).

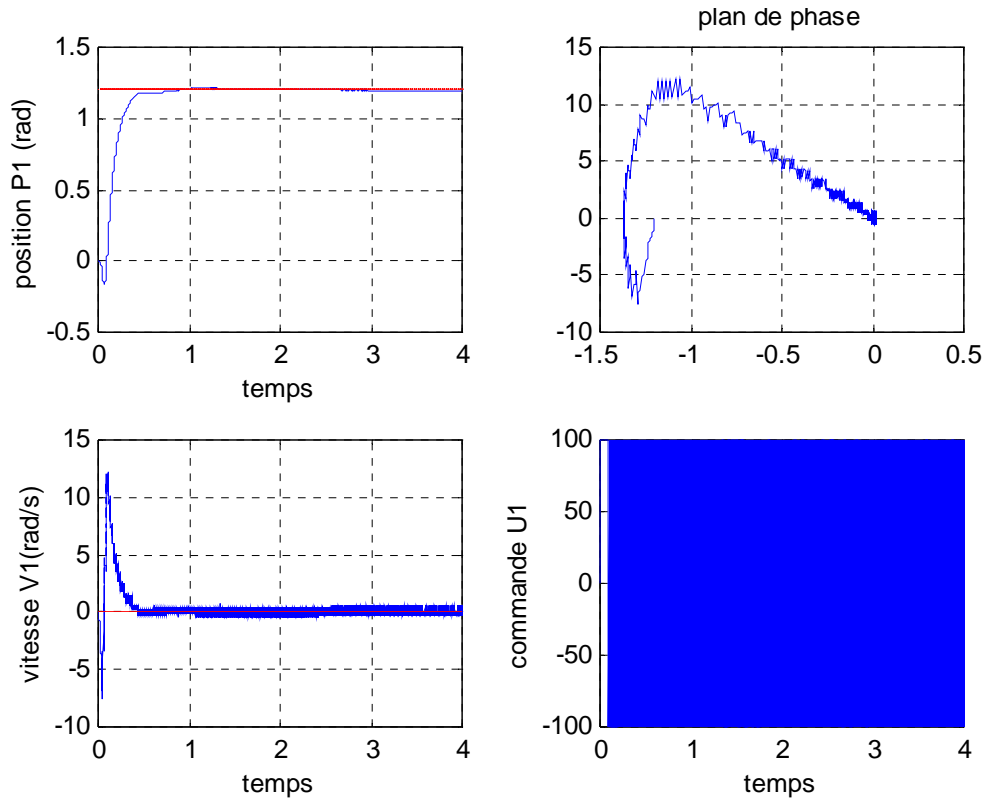
Pour remédier au problème de broutement, nous avons utilisé la technique de la bande limite où la fonction signe est remplacée par une fonction de saturation à l'intérieur d'une fine bande située au voisinage de la surface et la discontinuité est conservée à l'extérieur. La figure (2.17) présente l'application de la fonction de saturation où la largeur de la bande fine est choisie égale à 10 ( $\Phi = [10; 10; 10]$ ), nous remarquons une amélioration de poursuite et une réduction des broutements.

Plus  $\Phi$  augmente plus les broutements disparaissent et plus la précision diminue et l'erreur de la poursuite augmente.

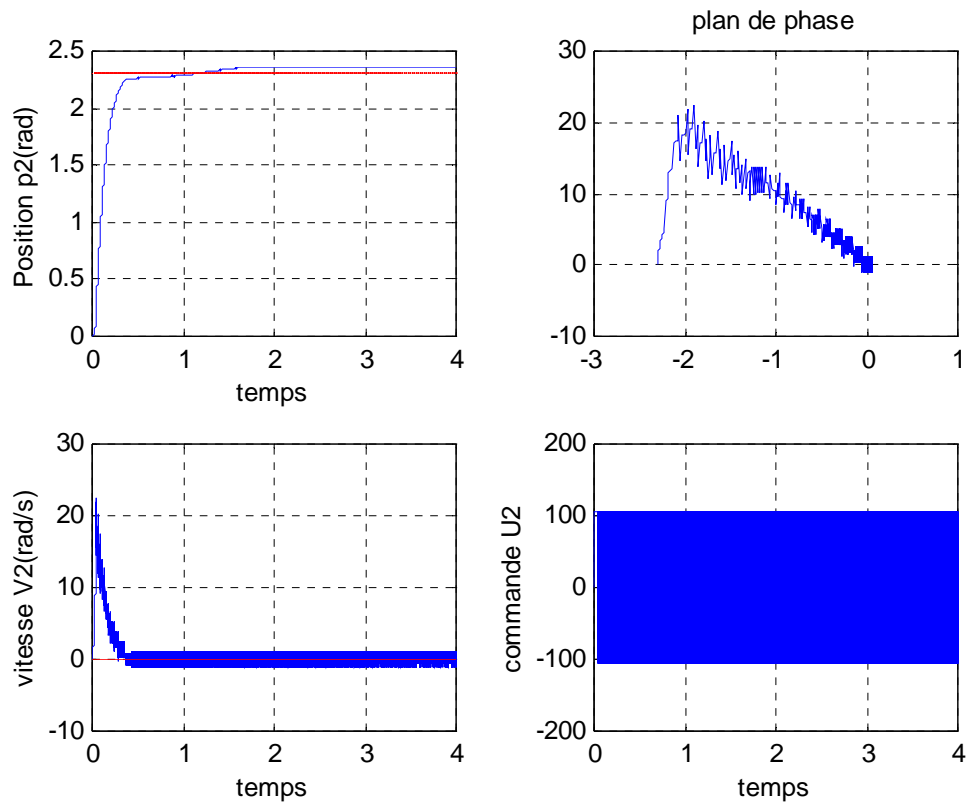
D'autre part, les figures (2.15.b) et (2.16.b) montrent la grande robustesse et l'invariance des correcteurs face aux variations paramétriques, la charge transportée et les perturbations externes.

Dans le tableau suivant, nous allons présenter les avantages et les inconvénients de ce type de commande

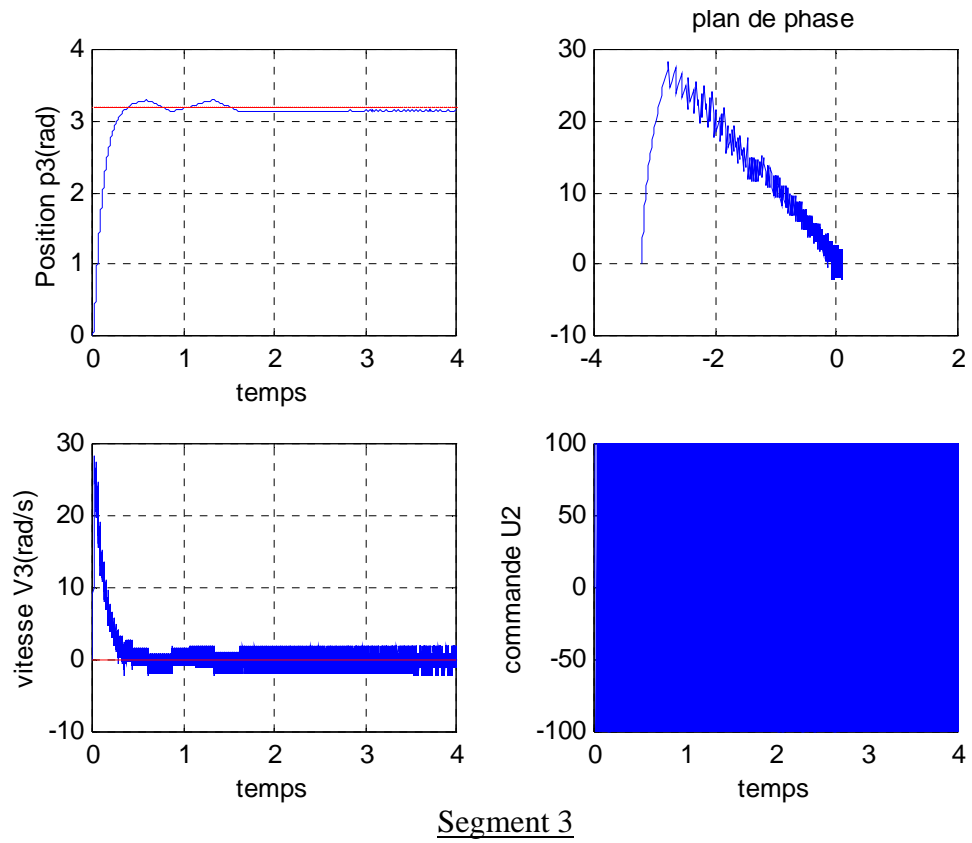
Avantages	inconvénients
<ul style="list-style-type: none"> <li>❖ Rapidité</li> <li>❖ bonne poursuite de position</li> <li>❖ pas de dépassement</li> <li>❖ robustesse</li> <li>❖ simplicité de la mise en œuvre</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>❖ les broutements</li> <li>❖ la réduction des broutements se fait au prix d'une perte de précision</li> <li>❖ pas de loi pour définir les paramètres de surface de glissement et les gains de la composante discontinue</li> </ul>



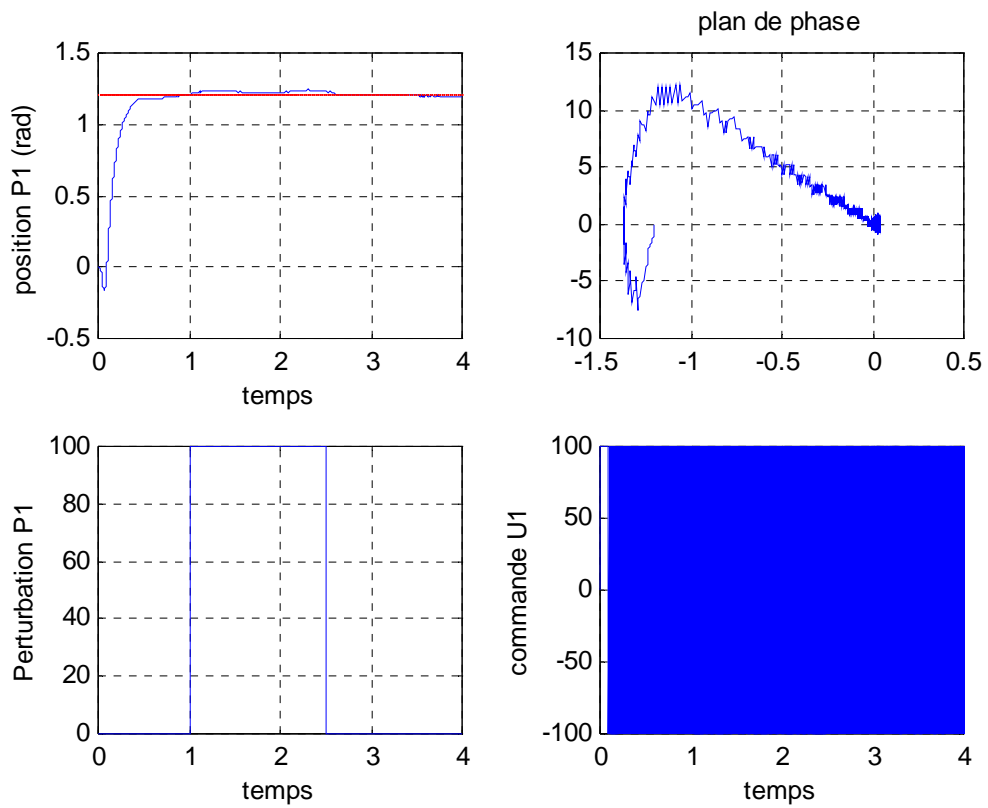
### Segment 1

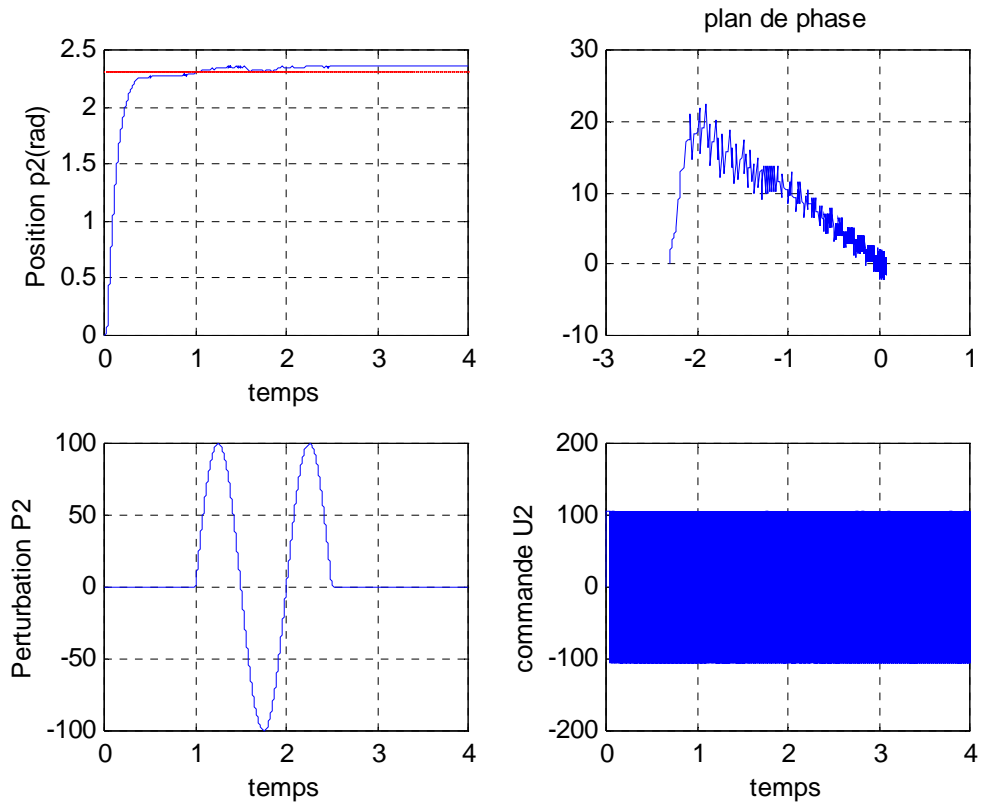


### Segment 2

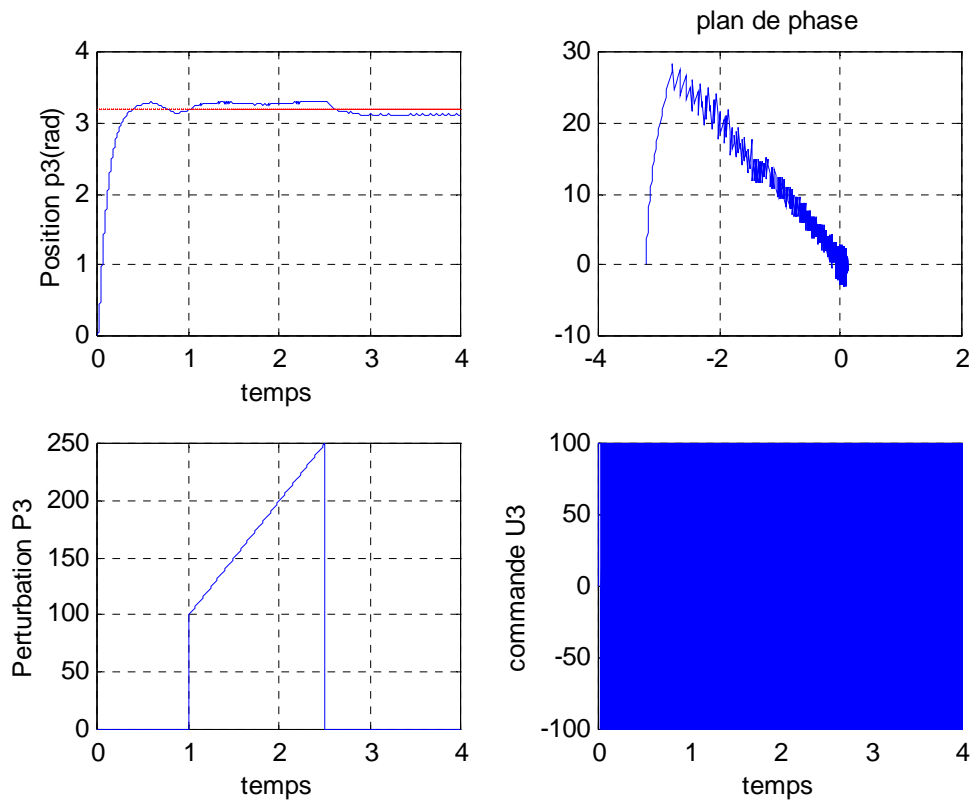


A : Pas de perturbation et sans charge transportée





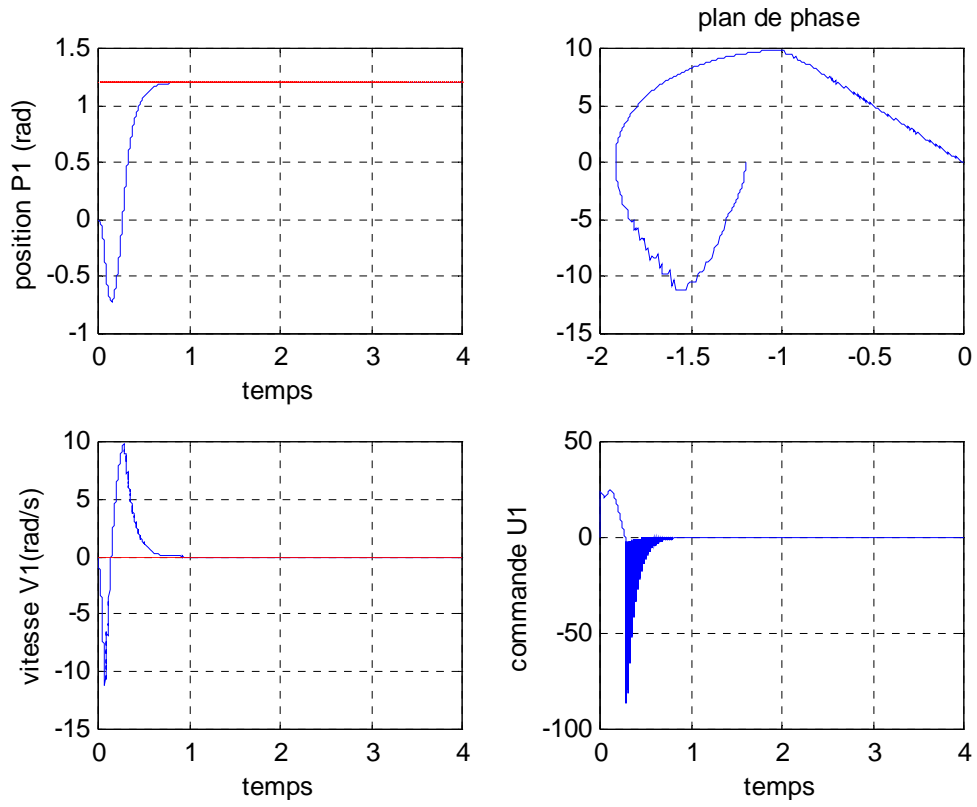
### Segment 2



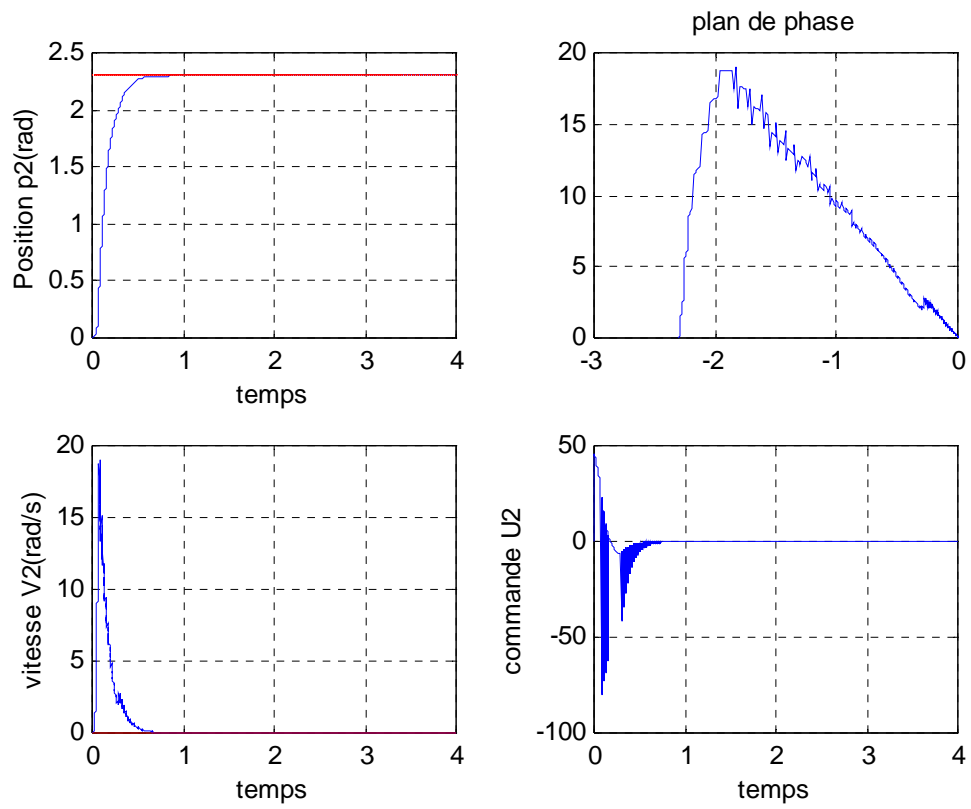
### Segment 3

B : Avec de perturbation et une charge transportée de 5kg

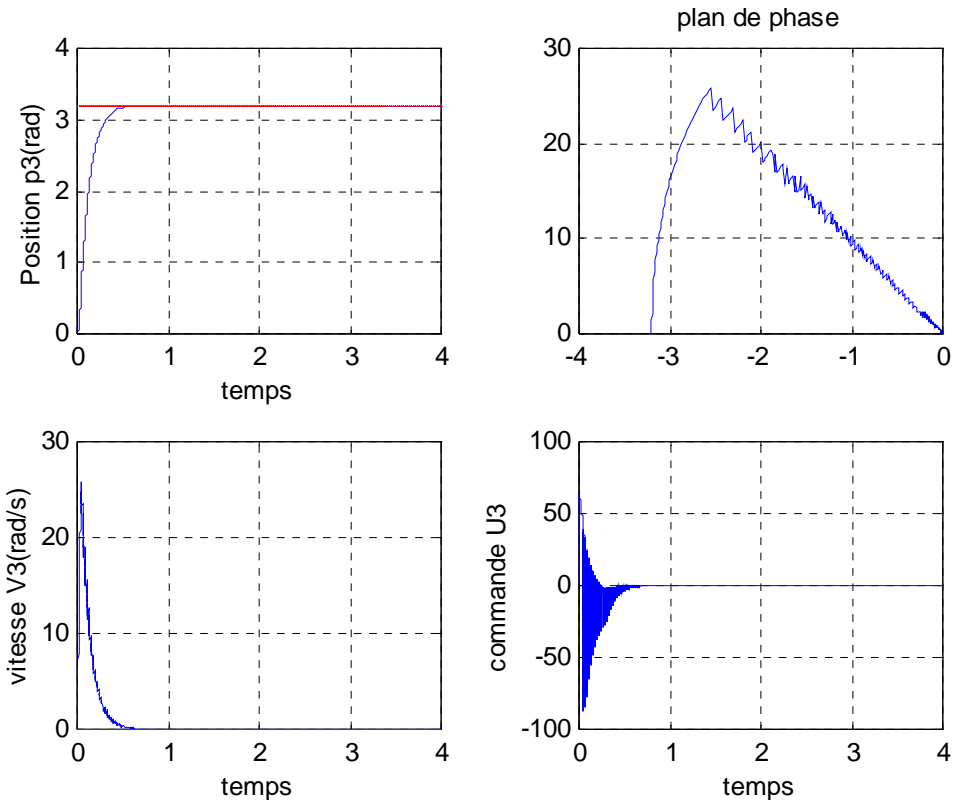
Figure 2.12 : Correcteur de type  $U=-M.sign(S)$  en mode de régulation



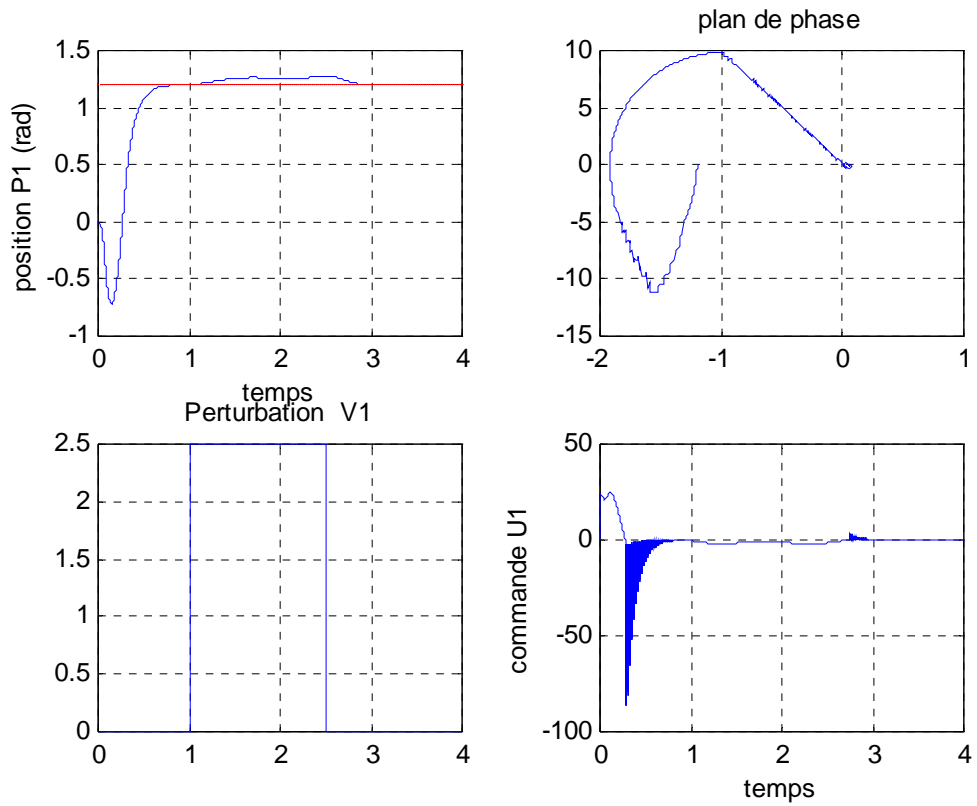
### Segment 1

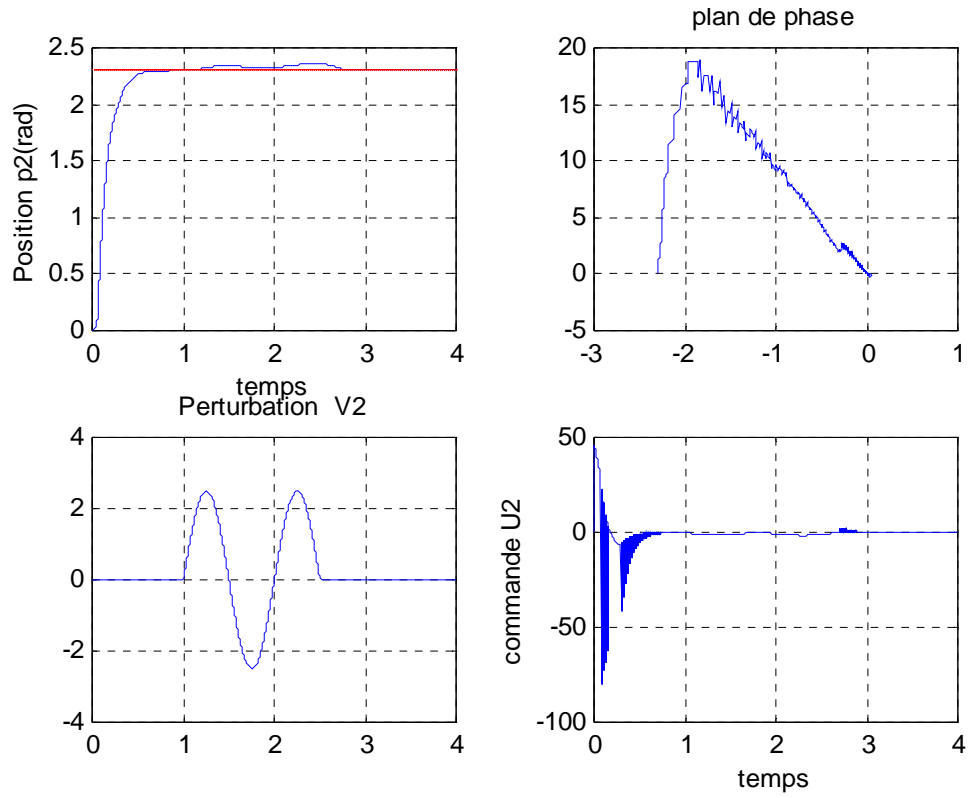


### Segment 2

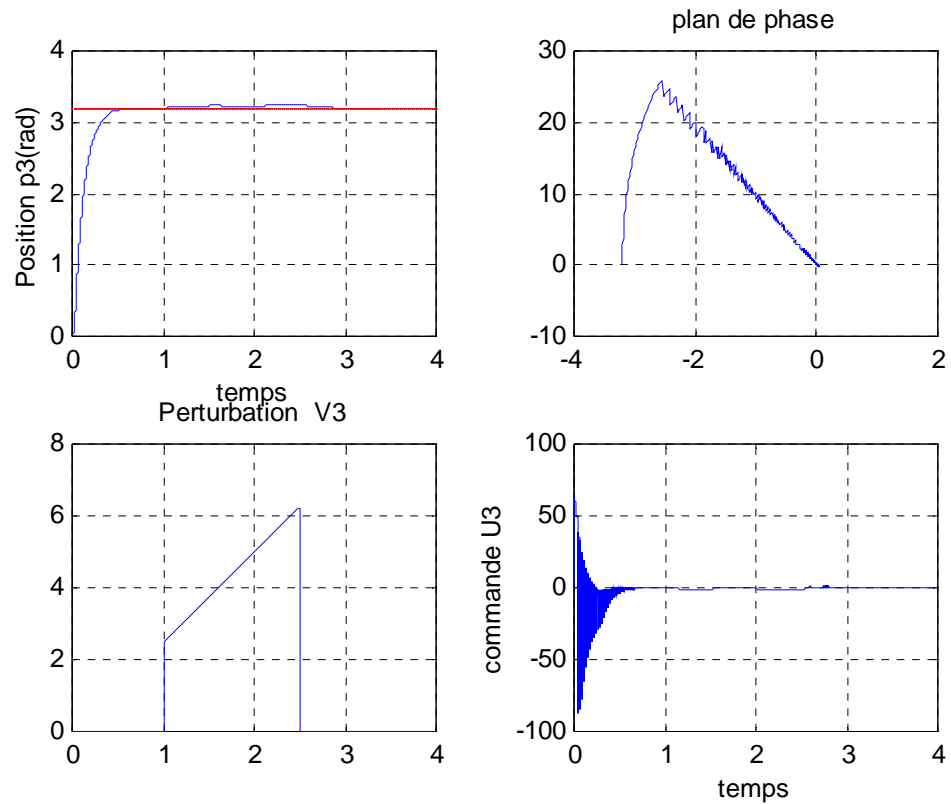
Segment 3

A : pas de perturbation et sans charge manipulée

Segment 1



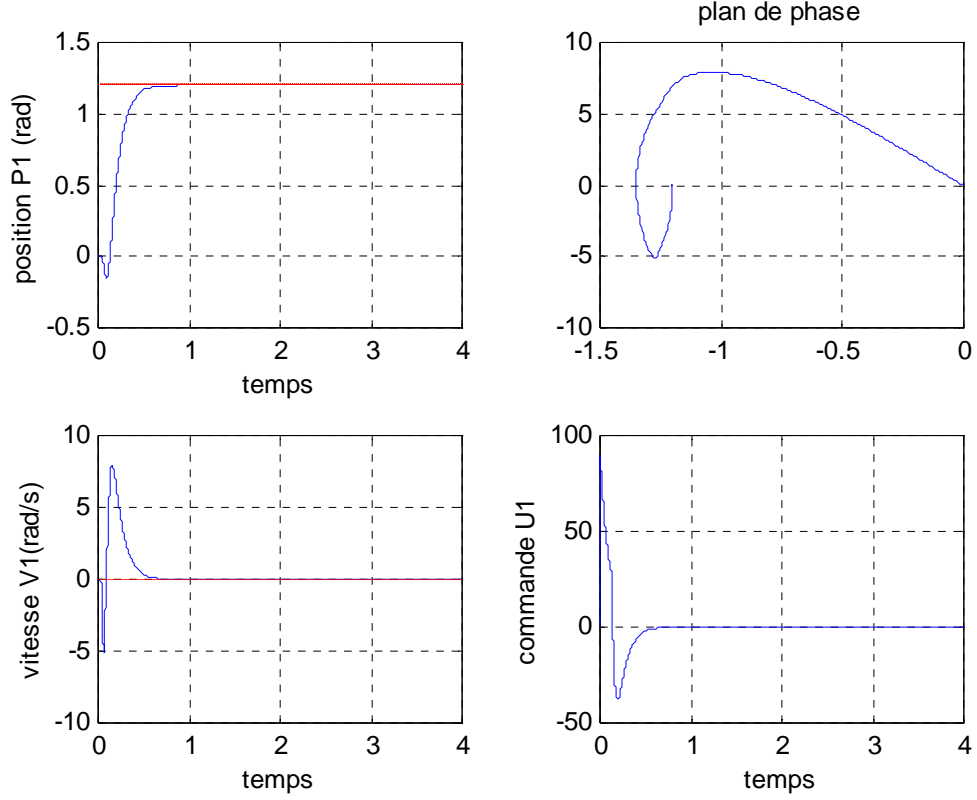
### Segment 2



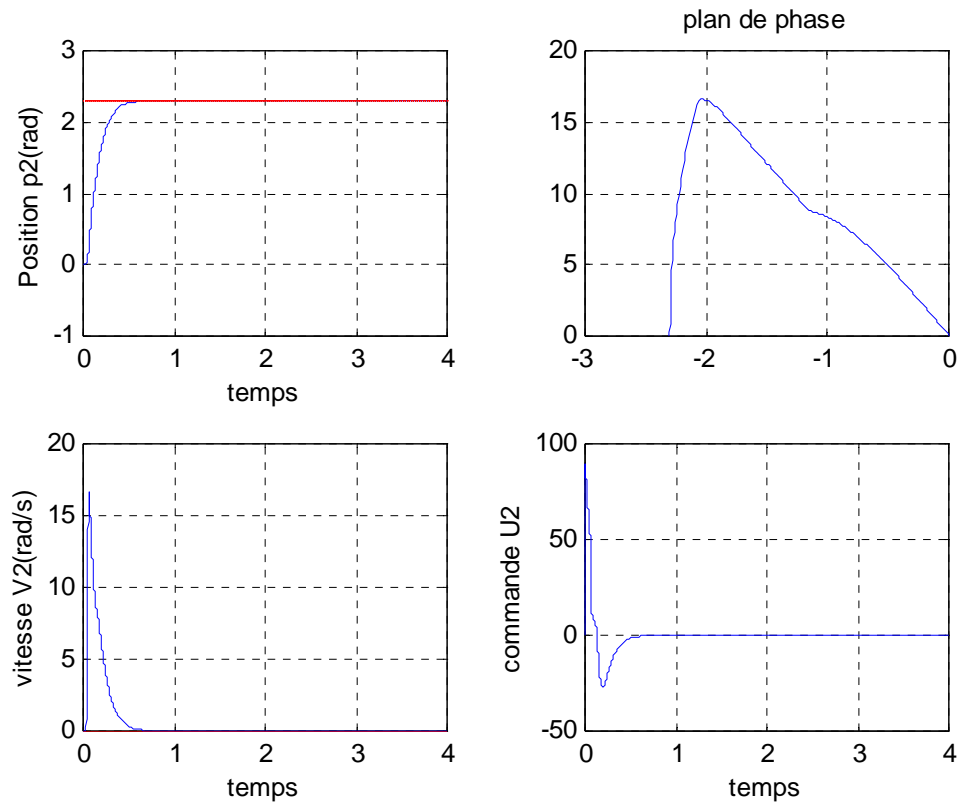
### Segment 3

B : Avec perturbation et un charge de 5 kg

Figure 2.13 : Correcteur de type  $U = U_{eq} - (\alpha|e| + \beta|\dot{e}| + \gamma).sign(S)$  en mode de régulation

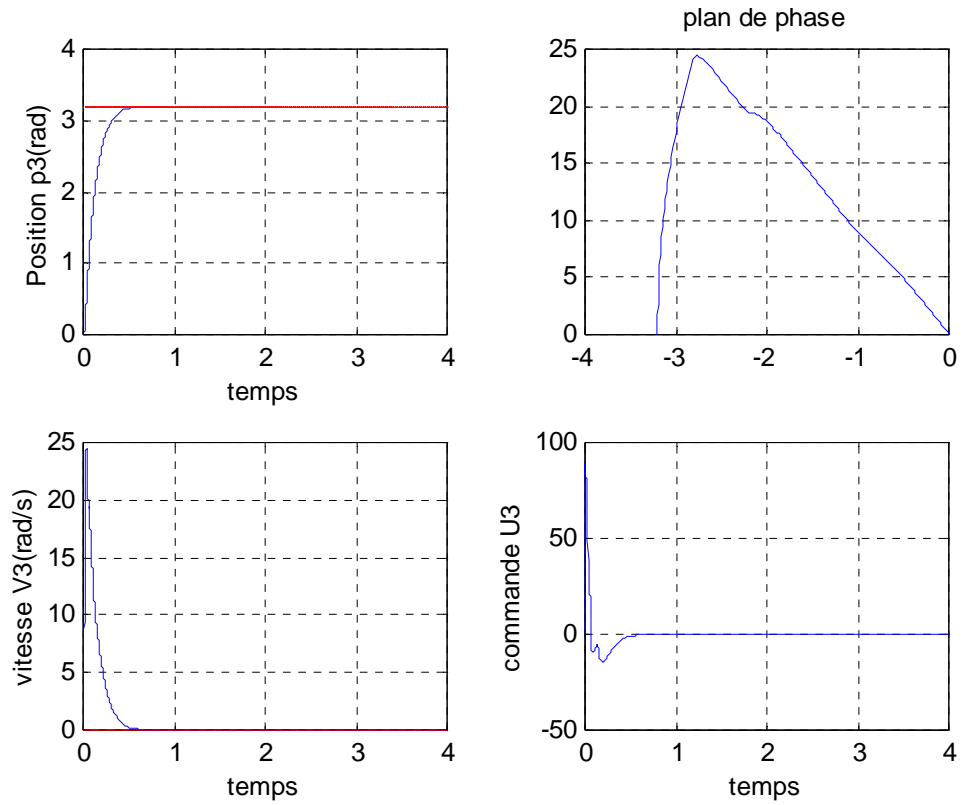


### Segment 1

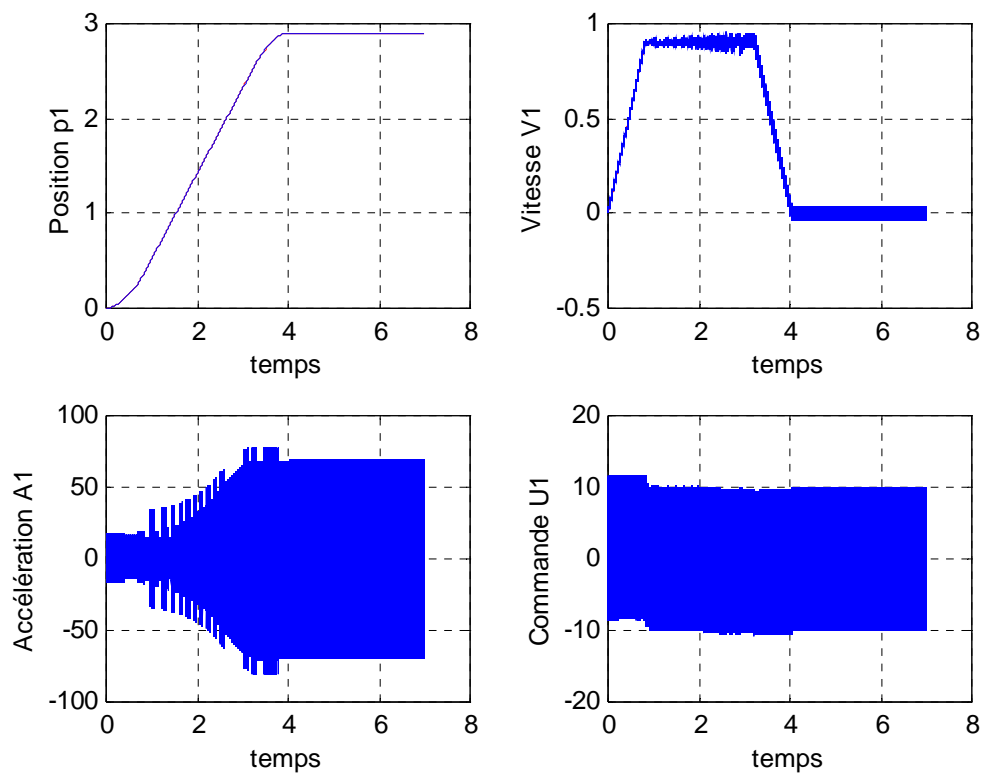


### Segment 2

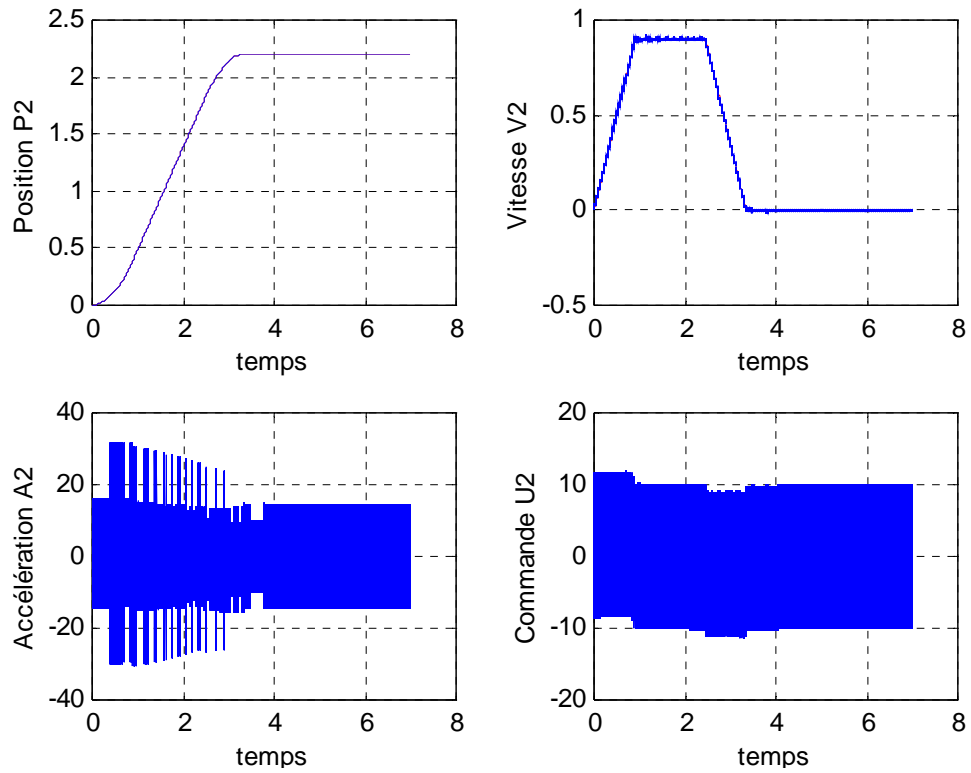




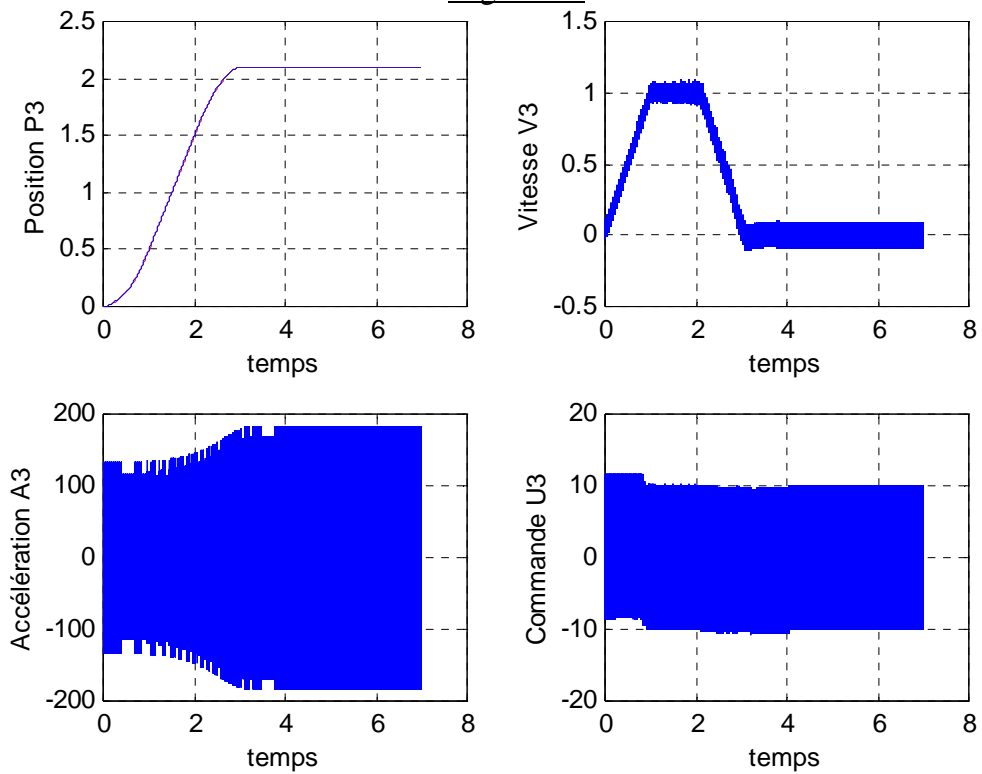
Segment 3

Figure 2.14 : Correcteur de type  $U = U_{eq} - k \cdot \text{sat}(S)$  en mode de régulation

Segment 1

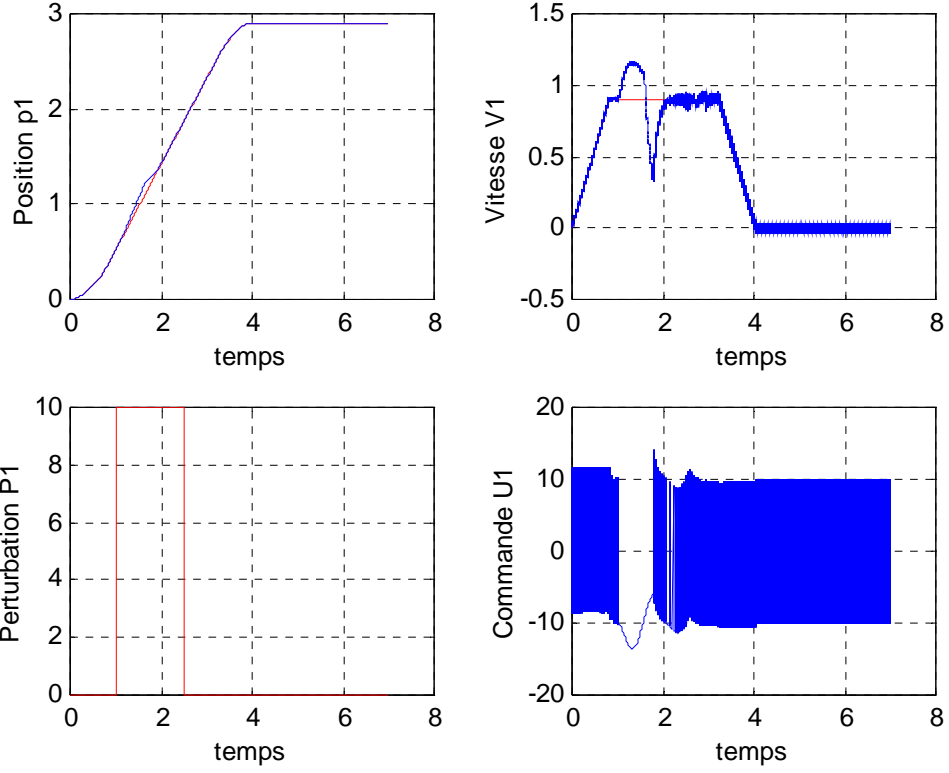


### Segment 2

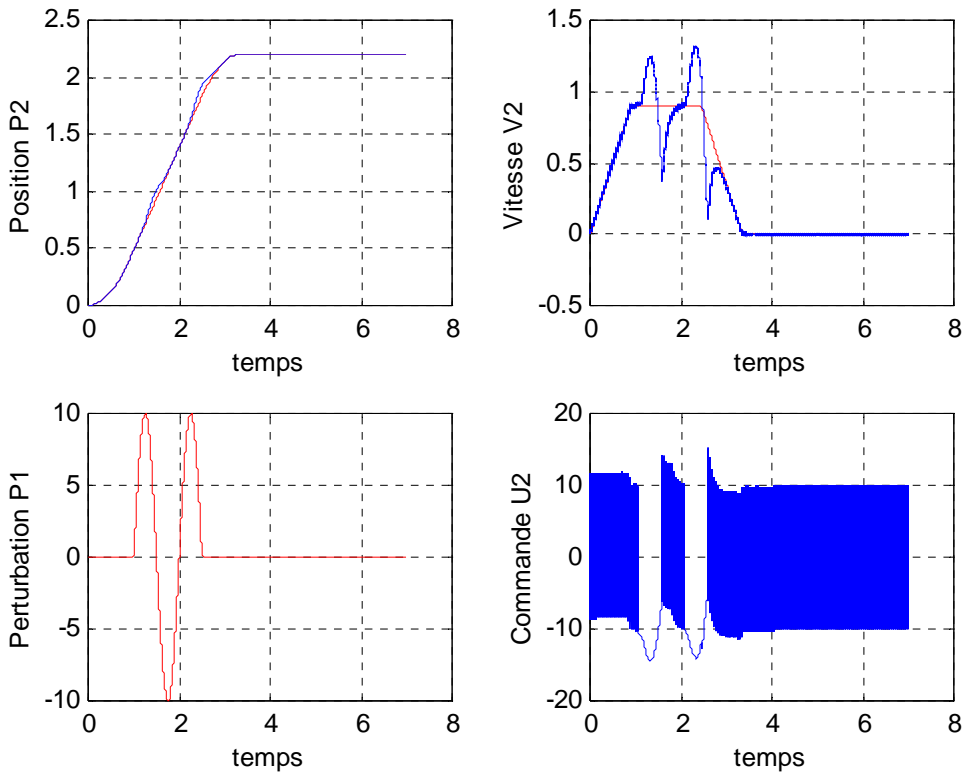


### Segment 3

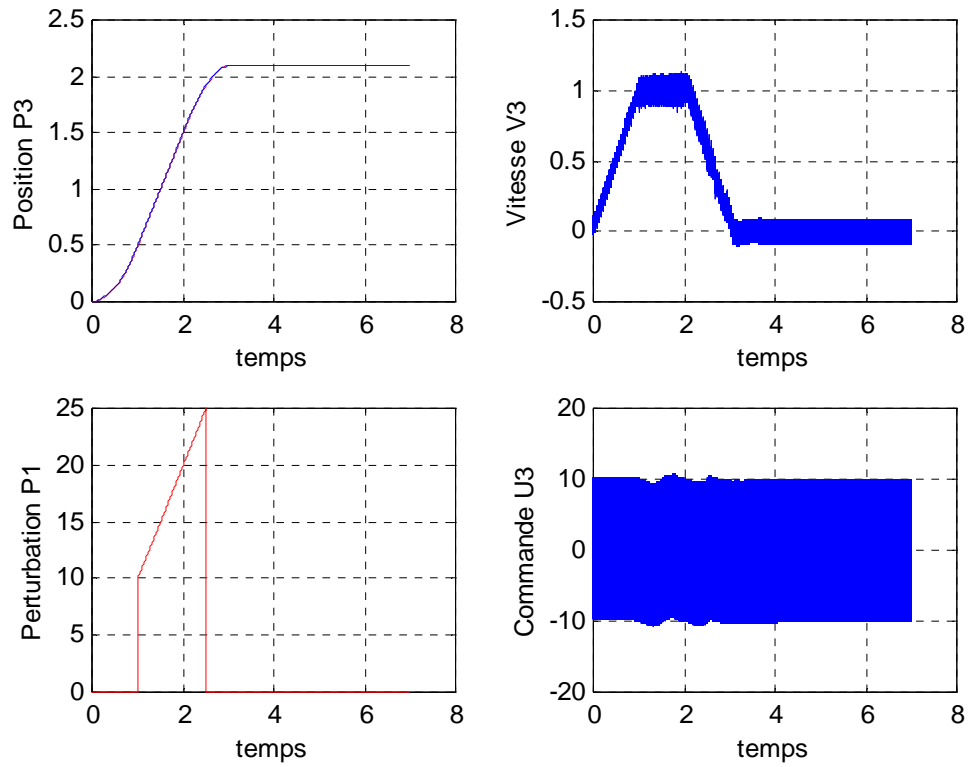
A : Pas de perturbation et sans charge manipulée



Segment 1



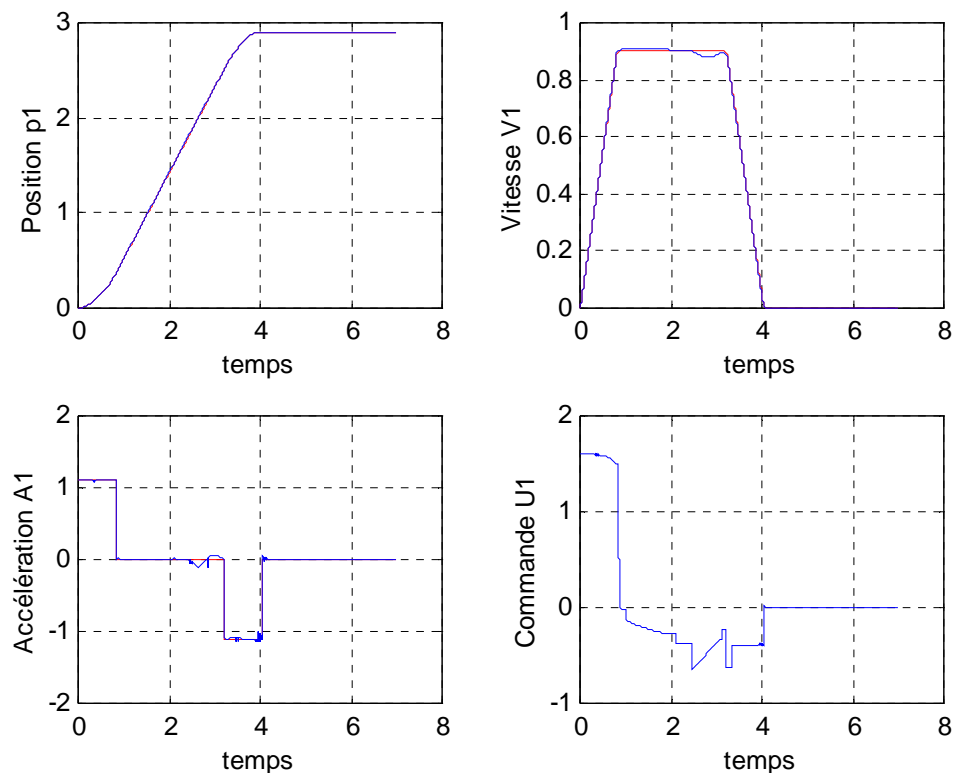
Segment 2



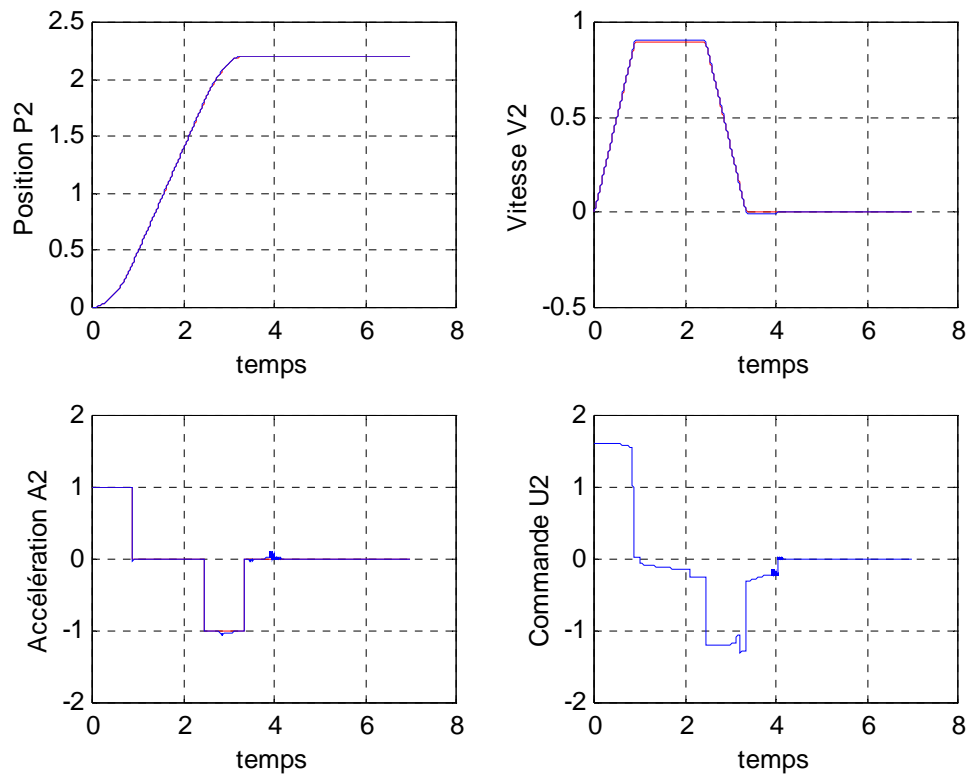
Segment 3

B: Avec perturbation et une charge de 5 kg

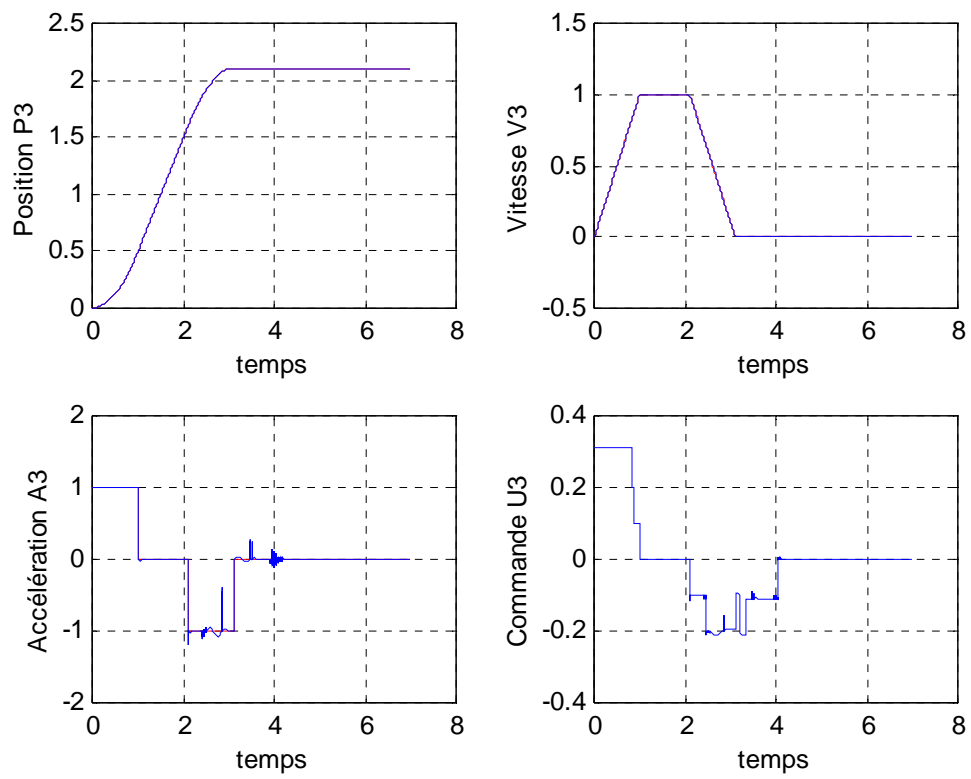
Figure 2.15 : Correcteur de type  $U = U_{eq} - K \cdot \text{sign}(S)$  en mode de poursuite de trajectoire



Segment 1

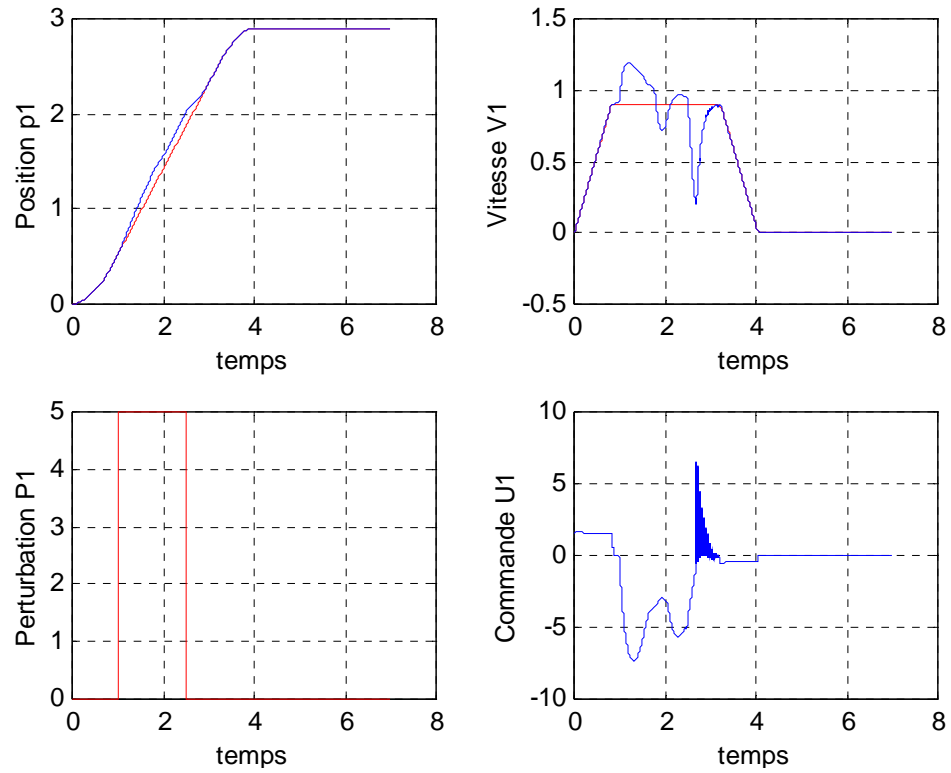


### Segment 2

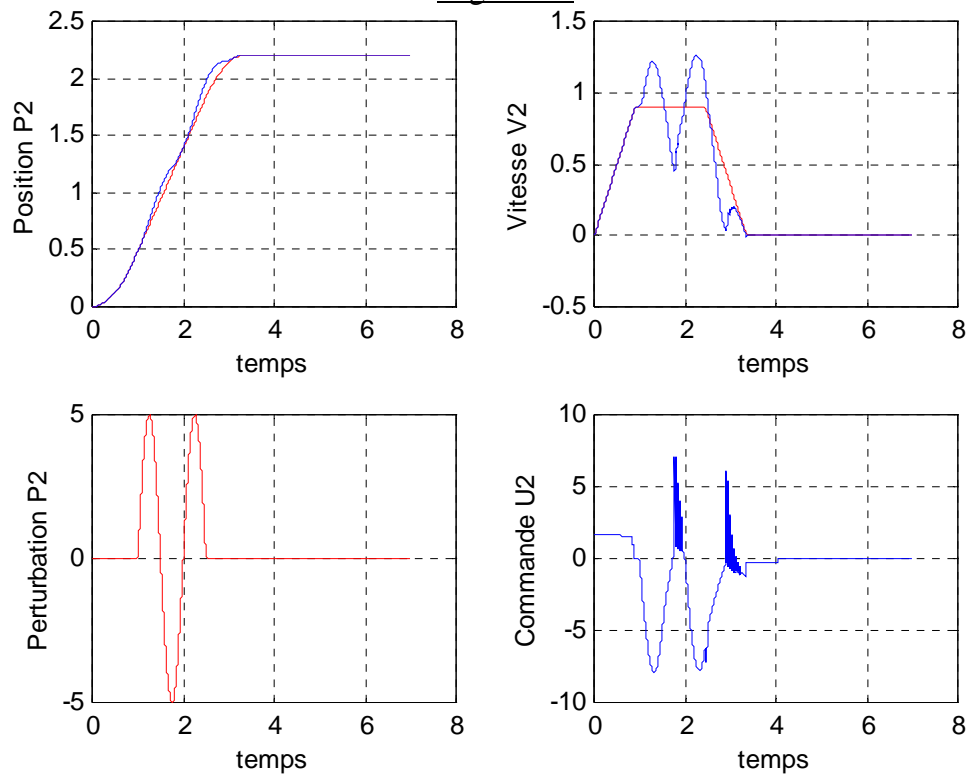


### Segment 3

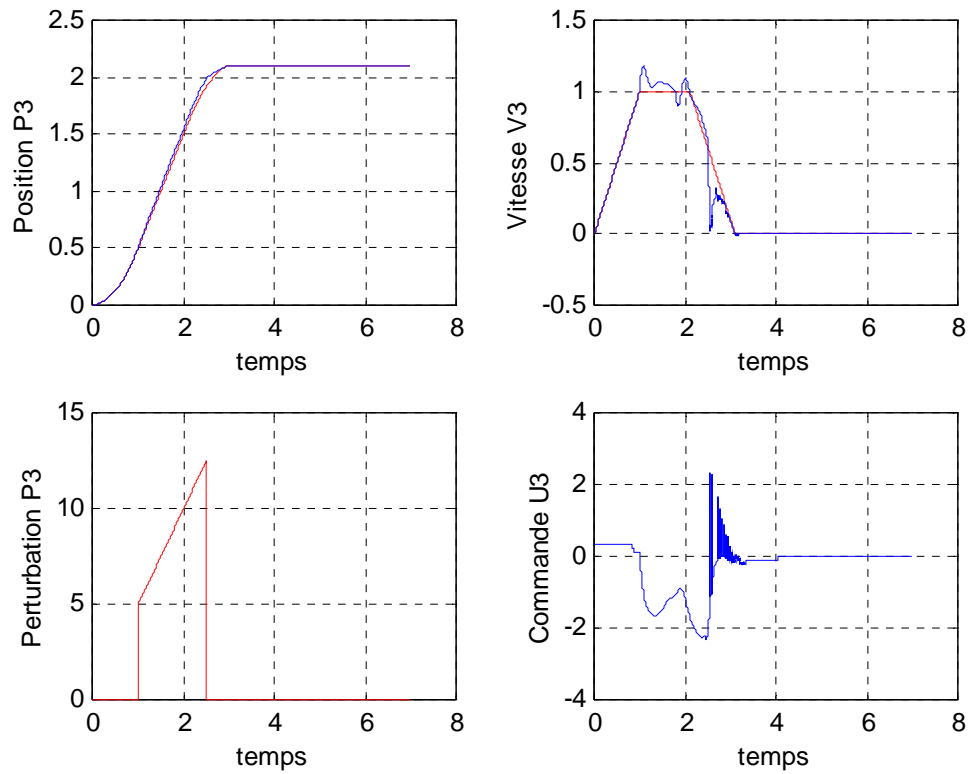
A: Pas de perturbation et sans charge



### Segment 1



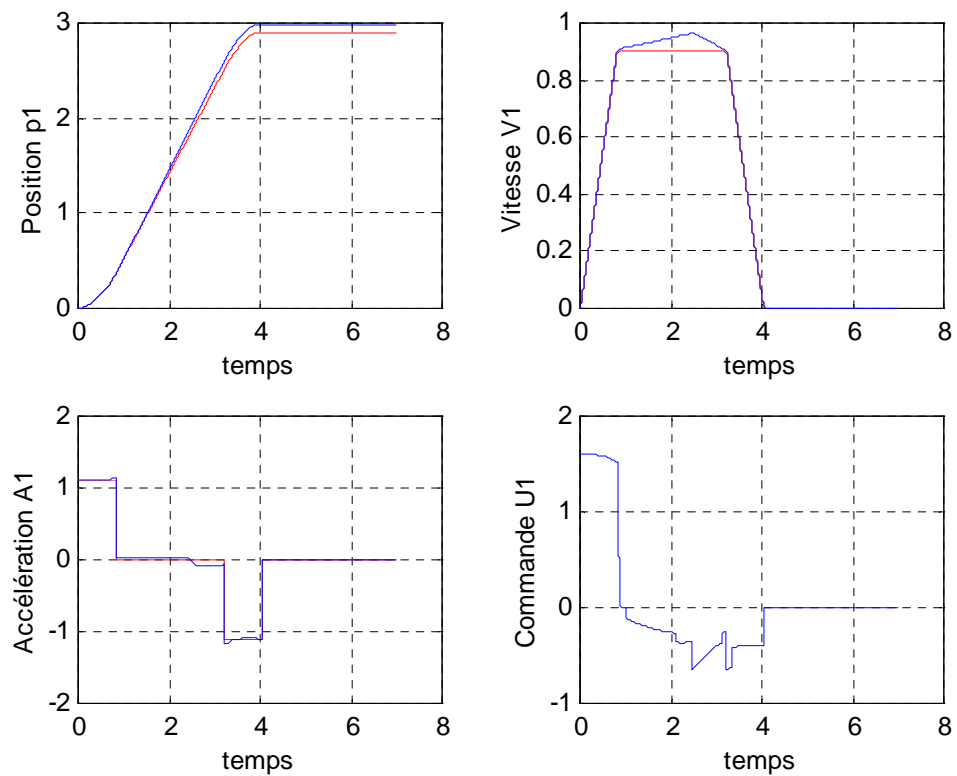
### Segment2



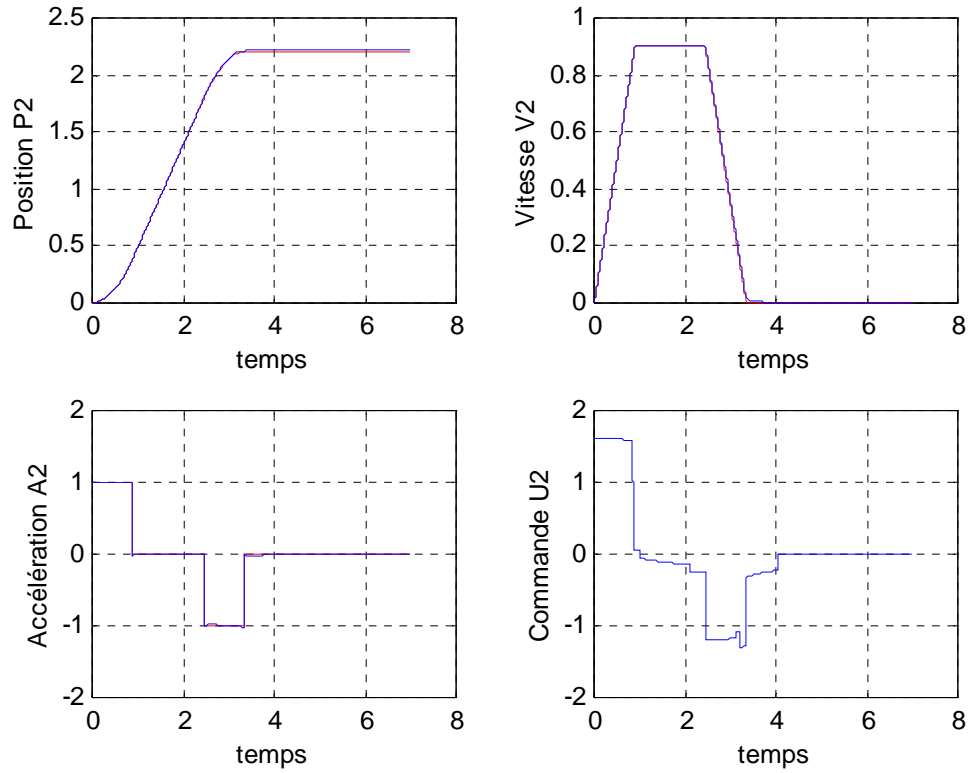
### Segment 3

B : Avec perturbation et une charge de 5 kg

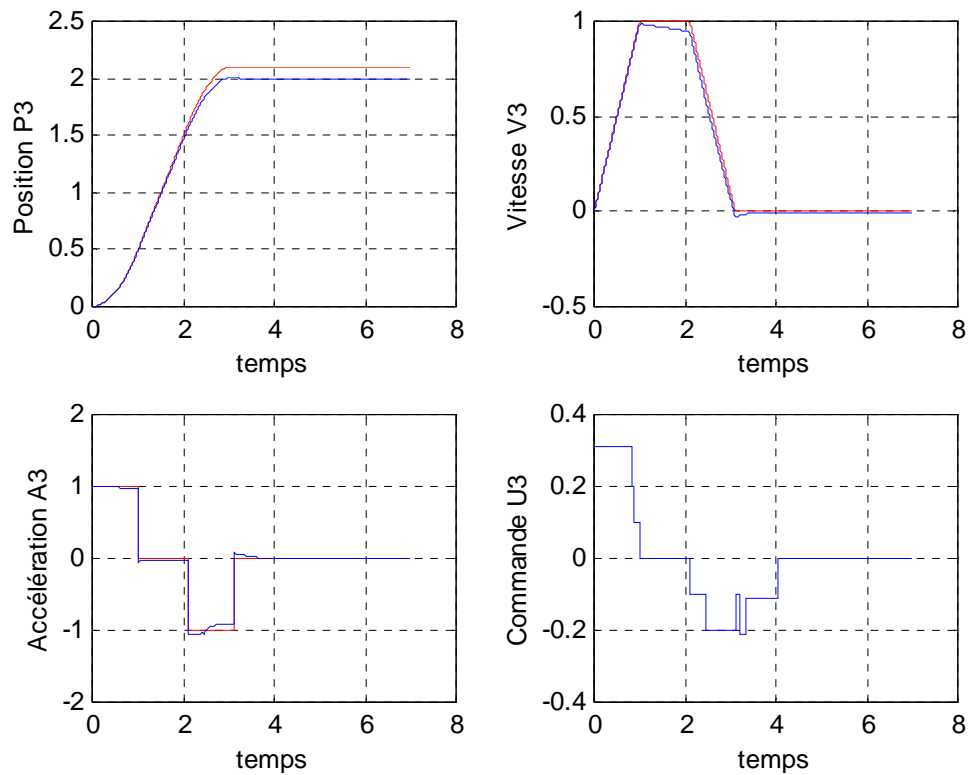
Figure 2.16 : Correcteur de type  $U = U_{eq} - (\alpha|e| + \beta|\dot{e}| + \gamma) \cdot \text{sign}(S)$  en mode de poursuite de trajectoire



### Segment 1



### Segment 2



### Segment 3

Figure 2.17 : Correcteur de type  $U = U_{eq} + (\alpha|e| + \beta|\dot{e}| + \gamma).sat(S)$  en mode de poursuite de trajectoire



## 2.10 CONCLUSION

Dans ce chapitre, la commande à structure variable par mode de glissement a été étudiée et testée en mode de régulation ainsi qu'en mode de poursuite de trajectoire.

Les différentes extensions de contrôleur à structure variable par mode de glissement ont été implémentées pour chaque axe du robot SCARA afin que ce dernier puisse atteindre une consigne ou suivre une trajectoire désirée et ceci en partant d'un point quelconque du plan de mouvement.

Les performances de ces correcteurs telles que la rapidité, la robustesse face aux variations paramétriques, la charge transportée et les signaux de perturbation externes, ont bien été mises en évidence.

Le gain de la commande discontinue doit être supérieur ou égal à l'amplitude maximale de la perturbation pour pouvoir la contrebalancer.

D'autre part, afin de réduire les broutements, l'insertion de la fonction de saturation au niveau de la composante discontinue de la commande a permis également de les réduire, mais cela se fait au prix d'une perte de précision.

Il existe de nouvelles techniques telle que la commande à structure variable généralisée qui permet de réduire les broutements.

La mise en œuvre des lois de commande étant souvent effectué par calculateur numérique, la théorie des systèmes en temps discret ne peut être négligée. Dans cette optique, nous nous intéressons dans le chapitre trois à la discrétisation des régimes glissant afin de commander un système représenté dans l'espace d'état.

## **CHAPITRE 3**

### **LE MODE GLISSANT DISCRET DES SYSTEMES A STRUCTURE VARIABLE**

#### 3.1 INTRODUCTION

Vu les grandes performances des microprocesseurs, la tendance actuelle de la mise en œuvre de la commande à structure variable est de plus en plus orientée vers l'utilisation de calculateur. Cette nouvelle tendance a conduit les chercheurs à s'intéresser à la discrétisation des régimes glissants afin de commander un système représenté dans l'espace d'état discret.

Pour l'implémentation d'une commande à structure variable par mode de glissement discret, l'organe de commutation est remplacé par un calculateur, ce dernier change la structure de la commande à des instants discrets. Cette limitation est l'origine d'un mouvement de zigzag du point représentatif de l'évolution du système le long du mode de glissement et autour du point d'équilibre. Ce nouveau comportement peut rendre le système instable, étant donnée que la dynamique du système ne peut pas plonger d'une façon définitive dans l'état d'un système réduit et libre, donc un mouvement de glissement idéal est irréalisable.

Ces récents travaux [19] [20] [21] [22] ont permis alors de trouver de nouvelles conditions pour l'existence et la convergence d'un régime de mode glissant discret, étant donnée que la condition du domaine continu ne peut pas générer un mode de glissement discret.

Dans ce chapitre, nous allons étudier le mode de glissement discret, ses caractéristiques, et ses attributs, nous allons présenter aussi certaines approches concernant ce mode. Par la suite, nous allons appliquer une de ces approches pour notre robot SCARA, où nous montrons l'influence de la période d'échantillonnage sur le comportement du système.

#### 3.2 COMMANDE A STRUCTURE VARIABLE DISCRETE PAR MODE DE QUASI GLISSEMENT

Dans les systèmes échantillonnés, toutes les grandeurs du système ainsi que la commande sont mesurées et maintenues constantes pendant toute la période d'échantillonnage à l'aide d'un bloqueur d'ordre zéro. Donc la différence principale entre une Commande à Structure Variable Continue (CSV) par Mode de Glissement (MG) et une Commande à Structure

Variable Discrète(CSVD) par Mode de Quasi Glissement (MQG) est que la première est appliquée à n'importe quel instant, dès que la trajectoire d'état traverse l'hypersurface de commutation ; par contre la deuxième, sa structure ne change qu'aux instants d'échantillonnage, où cette dernière est calculée, appliquée et maintenue constante durant toute la période d'échantillonnage; cette limitation est l'origine des oscillations de hautes fréquences le long du mode de glissement et autour du point d'équilibre, par conséquent le point représentatif du système aura un mouvement de zigzag ; ce nouveau comportement nommé mode de quasi glissement (quasi sliding mode), mode de pseudo glissement (pseudo sliding mode) ou mode de glissement discret (discrete sliding mode) qui peut rendre le système instable, ainsi il remet en cause la propriété de l'invariance [20] étant donnée que la dynamique du système ne peut pas plonger d'une façon définitive dans l'état d'un système réduit et libre.

Il est évident que la condition de glissement du régime glissant continu ne peut être appliquée au régime glissant discret, puisque un mouvement de glissement idéal est inexistant ; d'où l'utilisation de la version discrète de la condition de glissement continue donnée par l'équation (3.1) qui est nécessaire mais insuffisante [18].

$$[S(k+1) - S(k)]S(k) < 0 \quad (3.1)$$

Pour illustrer l'insuffisance de cette condition, nous présentons l'exemple suivant :

Soit :

$$S(k) = \tau (-2)^k \quad \text{avec} \quad \tau > 0 \quad (3.2)$$

Donc

$$\dot{S}(k) = S(k+1) - S(k) = -2\tau(-2)^k \quad (3.3)$$

D'après la condition citée ci-dessus,  $\forall k > 0 \Rightarrow S(k) \cdot \dot{S}(k) < 0$ , mais en réalité  $S(k)$  diverge lorsque  $k \rightarrow \infty$ .

### 3.3 APPROCHE DE LA CONVERGENCE

La synthèse d'un correcteur à structure variable par mode de glissement discret est réalisée en deux étapes [20]:

- ❖ Détermination de la fonction de commutation pour que le mode de glissement soit sur le plan  $S=0$ .

❖ Détermination de la loi de commande.

Une fois que la condition de glissement est satisfaite, cela implique que l'état du système se déplace de n'importe quel point initial vers le plan de commutation et qu'il l'atteint dans un temps fini, d'où la réponse d'un système globalement stable se réalise en trois phases qui sont :

Phase de convergence (reaching mode (RM)): C'est la durée de recherche de la surface  $S=0$  (Figure 3.1).

Phase de glissement (sliding mode (SM)): La surface est atteinte et l'état reste au voisinage.

Phase permanente (steading mode(SM)): L'état atteint le point d'équilibre.

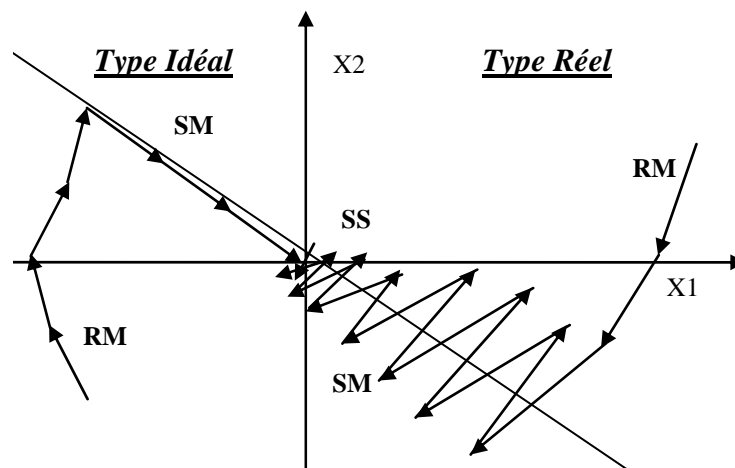


Figure 3.1 : Trajectoires des systèmes CSVD

Pour un mode de quasi glissement, nous pouvons distinguer deux types de trajectoire, une trajectoire idéale et une autre réelle.

#### La trajectoire idéale

Pour avoir ce type de trajectoire il faut que l'état du système arrive sur le plan de commutation exactement à l'instant de commutation et la dynamique du système soumise à une commande CSVD doit correspondre à celle d'un plan de commutation idéal, afin de permettre à l'état de glisser sur le plan de commutation idéal (Figure 3.1-type I).

#### La trajectoire réelle ou pratique

Ce type de trajectoire représente le mouvement pratique de l'état où la commutation ne s'effectue pas sur le plan de commutation mais provoque un mouvement de zigzag de part et d'autre de la surface et autour de point d'équilibre (Figure 3.1-type P).

Remarque:

Comme la trajectoire de type idéale est quasiment impossible à réaliser; le régime glissant d'une CSVD est caractérisé par le type réel.

### 3.3.1 Attributs de la DVSC

Pour une commande de type CSVD la trajectoire d'état du système doit satisfaire les trois attributs suivants :

Attribut 1 : à partir de n'importe quel état initial, la trajectoire doit se déplacer vers le plan de commutation et le traverse dans un temps fini.

Attribut 2 : la trajectoire d'état doit retraverser la surface de commutation à chaque période d'échantillonnage, ce qui génère un mouvement de zigzag.

Attribut 3 : l'amplitude des zigzags successifs doit être décroissante et la trajectoire d'état doit se maintenir dans une bande.

Ces trois attributs forment le principe de base pour la définition d'un régime glissant discret du système et sa condition de glissement.

### 3.3.2 Définitions

Les caractéristiques du mode de glissement discret sont différentes de celles du cas continu, la CSVD doit vérifier les trois définitions suivantes :

Définition 1 :

Le mouvement d'un système à structure variable discret qui satisfait les trois attributs cités au dessus est appelé Mode Quasi de Glissement MQG (quasi-sliding mode) et la bande spécifique qui contient (MQG) est nommée Bande de Quasi Glissement BQG (quasi sliding band) définie comme suit :

$$BQG = \{X / -\Delta < S(X) < \Delta\} \quad (3.4)$$

$2\Delta$  : est la largeur de la bande.

Définition 2 :

Le mode quasi glissement deviendra un mode de quasi glissement idéal lorsque  $\Delta$  est nul.

Définition 3 :

Un système à structure variable discret satisfait la condition de glissement si le système résultant possède les trois attributs.

### 3.3.3 Détermination de la surface de glissement

Soit une surface linéaire de la forme suivante:

$$S(k) = C^T x(k) \quad (3.5)$$

Le mode quasi glissement idéal satisfait la condition ci dessous:

$$\begin{aligned} S(k+1) &= S(k) \\ \Rightarrow C^T AX(k) + C^T BU(k) &= 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

D'où la commande équivalente est donnée par :

$$U_{eq} = -(C^T B)^{-1} C^T AX(k) \quad (3.7)$$

Les équations dynamiques du glissement idéal seront données par :

$$\begin{cases} X(k+1) = [I - B(C^T B)^{-1} C^T] AX(k) \\ C^T X(k) = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

Au lieu d'utiliser le système (3.8), il est intéressant de le mettre sous une forme plus directe, facilitant son analyse.

Une transformation telle que :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et } C = \begin{bmatrix} \bar{C}^T & 1 \end{bmatrix}$$

Le système en mode de glissement s'écrit comme :

$$\begin{cases} X_1(k+1) = A_{11}(k) + A_{12} X_2(k) \\ X_2(k) = -CX_1(k) \end{cases} \quad (3.9)$$

En éliminant  $X_2$  on obtient :

$$X_1(k+1) = [A_{11} - A_{12} \bar{C}^T] X_1(k) \quad (3.10)$$

### 3.3.4 Détermination de la loi de commande

L'approche de la convergence impose directement la dynamique du plan de commutation  $S(x)$ , puis une loi de commande est synthétisée de sorte que les trois attributs soient vérifiés.

Pour un système continu, la forme de la surface de glissement :

$$\dot{S}(t) \leq -\varepsilon \cdot \text{sign}(S) - q \cdot S(t) \quad \varepsilon > 0 \text{ et } q > 0 \quad (3.11)$$

la version discrète est donnée par :

$$S(k+1) \leq (1 - qT_E)S(k) - \varepsilon T_E \text{sign}(S(k)) \quad \varepsilon > 0 \quad q > 0 \text{ et } (1 - qT_E) > 0 \quad (3.12)$$

Ainsi la loi de la commande est déduite à partir de l'inégalité donnée par (3.12).

Nous avons l'incrément de la surface du système linéaire étudié qui s'exprime comme suit :

$$S(k+1) - S(k) = C^T X(k+1) - C^T X(k) = C^T AX(k) + C^T BU(k) - C^T X(k) \quad (3.13)$$

d'autre part nous avons:  $S(k+1) - S(k) = -qTS(k) - \varepsilon T \cdot \text{sign}(S(k))$

donc la commande  $U(k)$  du système s'écrit comme:

$$U(k) = -(C^T B)^{-1} \left[ C^T AX(k) - C^T X(k) + qTC^T X(k) + \varepsilon T \cdot \text{Sign}(C^T X(k)) \right] \quad (3.14)$$

alors l'équation d'état du système est donnée par l'équation suivante:

$$X(k+1) = AX(k) - B(CB)^{-1} \left[ C^T AX(k) - C^T X(k) + qTCX(k) + \varepsilon T \text{sign}(C^T X(k)) \right] \quad (3.15)$$

### 3.3.5 Détermination de la bande de quasi glissement

Par définition du mode de quasi glissement, les signes de  $S(k)$  à deux instants d'échantillonnage successifs doivent être opposés.

En étudiant le signe de cette équation (3.11), la région de l'espace d'état où chaque  $x$  vérifie le fait que  $\text{sign}(S(k)) \neq \text{sign}(S(k+1))$  est donnée par :

$$\left\{ x / |S(x)| < \frac{\varepsilon T}{1 - qT} \right\} \quad (3.16)$$

d'où, nous déduisons la largeur de la bande :

$$2\Delta = 2 \frac{\varepsilon T}{1 - qT} \quad (3.17)$$

en régime permanent, la bande sera plus réduite et est donnée par :

$$\{ x / |S(x)| < \varepsilon T \} \quad (3.18)$$

Nous remarquons que la largeur de la bande décroît avec des périodes d'échantillonnage décroissantes.

### 3.3.6 Robustesse des systèmes discrets :

Considérons le système discret donné par l'équation suivante :

$$X(k+1) = AX(k) + \Delta A X(k) + BU(k) + f(k) \quad (3.19)$$

$\Delta A$  : Représente les variations des paramètres du système,  $f(k)$  la perturbation extérieure.

En supposant que l'on ait :

$$\Delta A = B\tilde{A}$$

$$f = B\tilde{f}$$

L'équation d'état s'écrit comme :

$$X(k+1) = AX(k) + B[U(k) + \tilde{A}X(k) + \tilde{f}(k)] \quad (3.20)$$

L'équation du régime glissant idéal reste inchangée, par contre la loi de commande se présente comme suit :

$$U(k) = -(c^T B)[c^T AX(k) - c^T X(k) + qTc^T X(k) + \varepsilon T \text{sign}(c^T X(k))] - A_c X(k) - f_c(k) \quad (3.21)$$

afin de simplifier les écritures, adoptons les notions suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{S}(X(k)) &= c^T B\tilde{A}X(k) & \tilde{F}(X(k)) &= c^T B\tilde{f} \\ S_c(X(k)) &= c^T BA_c X(k) & F_c(X(k)) &= c^T Bf_c \end{aligned} \quad (3.22)$$

La variation  $S(k+1) - S(k)$  est :

$$S(k+1) - S(k) = qTS(k) - \varepsilon T \text{sign}S(k) + \tilde{S} - S_c + \tilde{F} - F_c \quad (3.23)$$

Les de  $\tilde{S}$  et  $\tilde{f}$  sont supposées connues et données par :

$$S_L < \tilde{S} < S_U \quad \text{et} \quad F_L < \tilde{F} < F_U$$

$S_c$  et  $F_c$  sont choisis tel que le signe de  $S(k+1)$  soit opposé à celui de  $S(k)$  donc nous obtenons :

$$\text{quand } S(k) > 0 \quad S_c = S_U \quad \text{et} \quad F_c = F_U$$



quand  $S(k) < 0$   $S_c = S_L$  et  $F_c = F_L$

d'autre part posons :

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{S_U + S_L}{2}, & S_2 &= \frac{S_U - S_L}{2} \\ F_1 &= \frac{F_U + F_L}{2}, & F_2 &= \frac{F_U - F_L}{2} \end{aligned} \quad (3.24)$$

D'on nous définissons:

$$\begin{aligned} S_c &= S_1 + S_2 \cdot \text{sign}(S(k)) \\ F_c &= F_1 + F_2 \cdot \text{sign}(S(k)) \end{aligned} \quad (3.25)$$

La loi de commande (3.21) se réécrit comme suit:

$$\begin{aligned} U(k) &= -(c^T B)[c^T AX(k) + (1 - qT)S(k) + \varepsilon T \text{sign}(S(k)) \\ &\quad + S_1 + F_1 + (S_2 + F_2) \text{sign}(S(k))] \end{aligned} \quad (3.26)$$

La surface de commutation se réécrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} S(k+1) &= (1 - qT)S(k) - \varepsilon T \text{sign}(S(k)) + \tilde{S} \\ &\quad + \tilde{F} - (S_1 + F_1) - (S_2 + F_2) \text{sign}(S(k)) \end{aligned} \quad (3.27)$$

❖ Cette approche a montré que les caractéristiques de la commande à structure variable discrète sont différentes à celle du domaine continu. Elle a définie le mode de quasi glissant, la bande de quasi glissement ainsi les attributs fondamentales pour l'existence de ce mode.

### 3.4 APPROCHE DE FURUTA

La commande à structure variable par mode glissement discrète est réalisée par un ordinateur, elle est calculée à chaque période d'échantillonnage ( $kT_E$ ) et maintenue constante durant toute la période d'échantillonnage [21] telle que :

$$U(t) = U_k \quad kT_E < t < (k+1)T_E$$

Les équations d'état d'un système linéaire échantillonné sont données par :

$$\begin{cases} X_{k+1} = \Phi X_k + \Gamma U_k \\ Y_k = C X_k \end{cases} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} X_k &= X(kT_E) & Y_k &= Y(kT_E) \\ \text{où} \quad \Phi &= e^{AT_E} & \Gamma &= \int_0^{T_E} e^{A\tau} B d\tau \end{aligned}$$

Similaire au système continu la surface de glissement est définie comme :

$$S_k = GX_k \quad (3.29)$$

G est une matrice des coefficients de la surface de glissement, elle est déterminée à partir du lemme suivant :

Lemme 1 :

La commande équivalente du système (3.28) est donnée par l'équation suivante:

$$U_k = F_{eq} X_k \Rightarrow F_{eq} = -(G\Gamma)^{-1} G(\Phi - I) \quad (3.30)$$

*Théorème 1:*

*La dynamique du système de glissement est donnée par :*

$$\begin{cases} X_{k+1} = [\Phi - \Gamma(G\Gamma)^{-1} G(\Phi - I)] X_k \\ GX_k = 0 \end{cases} \quad (3.31)$$

*Et soit*

$$\begin{bmatrix} \Phi - ZI & \Gamma \\ G & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_k \\ U_k \end{bmatrix} = 0 \quad (3.32)$$

*-G est déterminée en utilisant la transformé en z, telle que l'ensembles des Z() soient inférieurs à 1 ( $|Z| < 1$ )*

*-le calcul de  $U_k$  qui permet d'amener la trajectoire d'état sur l'hypersurface  $S_k$ .*

*l'équation de LYAPUNOV est choisie comme suit:*

$$V_k = \frac{1}{2} S_k^2 \quad \text{et} \quad \Delta S_{k+1} = S_{k+1} - S_k$$

La commande du système est donnée par lemme2 :

lemme2 :

$$\begin{aligned} S_k \cdot \Delta S_{k+1} &< -\frac{1}{2} (\Delta S_{k+1})^2 \quad \text{pour} \quad S_k \neq 0 \\ V_{k+1} &< V_k \end{aligned} \quad (3.33)$$

Preuve :

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + \Delta S_{k+1} \\ \Rightarrow S_{k+1}^2 &= S_k^2 + 2S_k \cdot \Delta S_{k+1} + (\Delta S_{k+1})^2 \end{aligned} \quad (3.34)$$

La commande effective du système est donnée par :

$$U_k = (F_{eq} + F_D)X_k \quad (3.35)$$

avec  $F_{eq}$  est la commande équivalente du système donnée par (3.30) et  $F_D$  est la loi de la commande discontinue, alors on déduit l'équation suivante :

$$\Delta S_{k+1} = G\Gamma F_D X_k$$

*Théorème 2:*

*Si le théorème (1) est satisfait et si la loi de commande choisie est de type (3.35); donc les valeurs absolues du  $i^{eme}$  élément de  $F_D$  doivent être constantes telles que :*

$$|f_i^+| = |f_i^-| = f_0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$f_i = \begin{cases} f_0 & \text{pour } (G\Gamma)S_k X_{ki} < -\delta_i \\ 0 & \text{pour } -\delta_i \leq (G\Gamma)S_k X_{ki} \leq \delta_i \\ -f_0 & \text{pour } (G\Gamma)S_k X_{ki} > \delta_i \end{cases} \quad (3.36)$$

- *le système est stable si et seulement si :*

$$\delta_i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n |X_{ki} X_{kj}| f_0 (G\Gamma)^2 \quad (3.37)$$

- *La limite d'amplitude donnée par :*

$$0 < f_0 < \left| \frac{2}{G\Gamma \sum_{j=1}^n |t_{ij}|} \right| \quad (3.38)$$

❖ L'approche de FURUTA a montré que les systèmes échantillonnés ne peuvent avoir qu'un mode appelé « mode de quasi glissement » c'est-à-dire que le système peut converger vers la surface de glissement sans y'est rester, ceci est dû à la commande qui est maintenue constante pendant toute la période de l'échantillonnage.

❖ La CSVD ne possède pas la propriété de l'invariance, en ce qui concerne la propriété de la robustesse, elle est sous investigation.

### 3.5 APPROCHE DE SARPTURK, ISTEFAPOULOS ET KAYNAK

La commande dans le cas discret doit être bornée inférieurement et supérieurement et que ces bornes dépendent non seulement de la période d'échantillonnage mais également des incertitudes des paramètres du système mécanique [22].

#### 3.5.1 Définition de la condition de glissement

Soit un système discret de la forme suivante :

$$X(k+1) = F(k+1, k)X(k) + G(k+1, k)U(k) + H(k+1, k)V(k) \quad (3.39)$$

Nous allons appliquer au système une commande à structure variable de type:

$$U(k) = -K(X(k), S(k)) \text{ sign}(S(k)) \quad (3.40)$$

Nous supposons que la paire  $(F, G)$  est contrôlable et que les variations paramétriques ainsi que les perturbations sont dans le champ de  $G$ .

La version discrète de la condition de glissement du domaine continu est donnée par l'équation suivante :

$$[S_i(k+1) - S_i(k)]S_i(k) < 0 \quad (3.41)$$

Cette inégalité est nécessaire mais non suffisante pour l'existence d'un régime glissant discret. En effet, cette dernière n'assure pas la convergence vers la surface et peut même engendrer des oscillations d'amplitude croissante dégenérant une instabilité du système. Pour y remédier la condition nécessaire et suffisante s'écrit comme :

$$|S_i(k+1)| < |S_i(k)| \quad (3.42)$$

Une loi de commande satisfaisant ce type d'inégalités garantit la convergence des trajectoires vers un domaine de rayon décroissant.

L'inégalité (3.42) peut être décomposée en deux inégalités suivantes :

$$[S_i(kT+T) - S_i(kT)]\text{sign}(S_i(kT)) < 0 \quad (3.43.a)$$

$$[S_i(kT+T) + S_i(kT)]\text{sign}(S_i(kT)) \geq 0 \quad (3.43.b)$$

D'où la condition (3.43.a) est équivalente à (3.41), qui est assure un régime glissant sur l'hyperplan ( $i$ ), mais elle peut engendrer une divergence et une instabilité du système; par contre la condition (3.43.b) assure la convergence de la trajectoire vers l'hyperplan de commutation.

### 3.5.2 Détermination des bornes de la commande

Une commande à structure variable par mode de glissement s'écrit comme suit:

$$U_i(k) = \begin{cases} U_i^+(k) & \text{si } S_i(k) > 0 \\ U_i^-(k) & \text{si } S_i(k) < 0 \end{cases} \quad (3.44)$$

nous choisissons une surface de glissement de la forme suivante :

$$S = CX \quad (3.45)$$

afin d'évaluer les bornes de la commande considérons l'inégalité (3.43.a) :

$$\begin{aligned} [S_i(k+1) - S_i(k)] \text{sign}(S_i(k)) &< 0 \\ \Rightarrow [CF(k+1, k)X(k) + CG(k+1, k)U(k) + CH(k+1, k)V(k) - CX(k)] \text{sign}(S_i(k)) \\ \text{si } S_i(k) > 0 &\Rightarrow CGU(k) < +C(F - I)X(k) - CHV(k) \end{aligned}$$

posons :

$$L_{s,i} = c^i [(I - F(k+1, k))X(k) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m c^j g^j(k+1, k)U_j(k) - c^i H(k+1, k)V(k)] \quad (3.46)$$

$c^i$  : représente la  $i^{\text{eme}}$  ligne de la matrice C

$g^i$  : représente la  $i^{\text{eme}}$  colonne de la matrice G

$$\text{si } S(k) > 0 \quad \text{Sup } c^i g^j(k+1, k)U_i^+(k) < \text{Inf } L_{s,i}^+ \quad (3.47)$$

$$\text{si } S(k) < 0 \quad \text{Inf } c^i g^j(k+1, k)U_i^-(k) < \text{Sup } L_{s,i}^- \quad (3.48)$$

nous appliquons l'inégalité qui assure la convergence (3.43.b), alors nous aurons :

$$[S_i(k+1) + S_i(k)] \text{sign}(S_i(k)) > 0$$

posons

$$L_{c,i} = -c^i [(I + F(k+1, k))X(k) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m c^j g^j(k+1, k)U_j(k) - c^i H(k+1, k)V(k)] \quad (3.49)$$

$$si \ S(k) > 0 \quad Inf \ c^i g^j(k+1, k) U_i^+(k) > Supf \ L_{c,i}^- \quad (3.50)$$

$$si \ S(k) < 0 \quad Inf \ c^i g^j(k+1, k) U_i^+(k) < Inf \ L_{c,i}^+ \quad (3.51)$$

❖ Si la période d'échantillonnage croît, les bornes supérieure et inférieure seront d'autant plus éloignées, et réciproquement quand la période d'échantillonnage décroît les bornes se rapprochent.

❖ Ainsi nous pouvons distinguer que lorsque la période d'échantillonnage tend vers zéro, les limites de convergence tend vers le domaine continu, de sorte que les deux inégalités d'existence et de convergence deviennent comme suit:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \{[S(kT + T) + S(T)]sign(SkT)\} = 2|S(kT)| > 0$$

et

$$\lim_{T \rightarrow 0} \{[(S(kT + T) - S(T)).sign(S(kT))]\} = T\dot{S}(kT).sign(S(kT)) < 0$$

### 3.6 PRECISION DE KOTTA

KOTTA [23] a montré que les bornes de la commande dépendaient également de la distance qui sépare l'état de la surface de commutation.

Soit un système discret de la forme suivante:

$$X(k+1) = FX(k) + GU(k) \quad (3.52)$$

et la surface est donnée par :

$$S(k) = CX(k) \quad (3.53)$$

La commande équivalente est calculée à partir de la condition  $S(k) = S(k+1)$  telle que:

$$S(k+1) = S(k) = C.X(k+1) = CFX(k) + CGU_{eq}(k) = 0$$

$$\Rightarrow U_{eq}(k) = -(CG)^{-1}CFX(k) \quad (3.54)$$

nous appliquons les inégalités de glissement (3.43.a) et (3.43.b), nous aurons:

$$\begin{aligned} L_c^+ &< (CG)U^+(k) < L_s^+ \\ L_s^- &< (CG)U^+(k) < L_c^- \end{aligned} \quad (3.55)$$

où

$$\begin{aligned} L_s &= C(I - F)X \\ L_c &= -C(I + F)X \end{aligned} \quad (3.56)$$

ainsi la commande appliquée au système est comme suit :

$$\begin{cases} U_{eq} - \frac{|S|}{|CG|} < U^+ < U_{eq} + \frac{|S|}{|CG|} \\ U_{eq} - \frac{|S|}{|CG|} < U^- < U_{eq} + \frac{|S|}{|CG|} \end{cases} \quad (3.57)$$

la largeur de l'intervalle, où est choisie la commande, est de  $2 \frac{|S|}{|CG|}$

### 3.7 APPROCHE DE CHAN

Cet auteur propose un correcteur à structure variable robuste face à des perturbations variant lentement [24]. Par ailleurs cette technique est intéressante car elle ne nécessite pas la connaissance des perturbations et de leurs bornes cependant elle requiert leurs estimations.

#### 3.7.1 Estimation des perturbations

Soit un système discret donner par l'équation suivante:

$$x(k+1) = A.x(k) + B.u(k) + f(k) \quad (3.58)$$

$x$  est un vecteur de dimension  $n$ , la commande  $u$  de dimension  $m$ , et  $f(k)$  la perturbation, or cette dernière est supposée être de la forme suivante :

$$f(k) = B\xi(k) \quad (3.59)$$

la surface de glissement est définie par :

$$S(k) = G.x(k) = 0 \quad (3.60)$$

$G$  est une matrice de dimension  $(m \times n)$

une loi de commande de la forme suivante :

$$u(k) = u(k-1) + (GB)^{-1}[-GA[x(k) - x(k-1)] - (I - P)S(k)] \quad (3.61)$$

Cette loi de commande peut être réécrite comme :

$$u(k) = (GB)^{-1}[-GAX(k) - S(k) + (GB)u(k-1) + GAX(k-1) + PS(k)] \quad (3.62)$$

nous multiplions par  $G$ , l'équation (3.58), nous aurons l'équation suivante :

$$Gx(k+1) = GAX(k) + GBu(k) + Gf(k) \quad (3.63)$$

retardons d'une unité l'expression ci dessus :

$$S(k) = Gx(k) = GAX(k-1) + GBu(k-1) + Gf(k-1) \quad (3.64)$$

Puis nous remplaçons (3.64) dans (3.61). La loi de commande s'écrit comme :

$$u(k) = (GB)^{-1}[-GAX(k) - Gf(k-1) + PS(k)] \quad (3.65)$$

❖ Nous remarquons que cette expression intègre une estimation de la perturbation. En effet comme il suppose que les perturbations varient lentement, le terme  $f(k-1)$  nous donne en fait une estimation de la perturbation  $f(k)$ .

❖ Contrairement à d'autres travaux où des estimateurs complexes devaient être insérés pour l'estimation des perturbations, cette loi intègre une estimation très simple de ces dernières.

L'équation du système s'écrit comme suit :

$$x(k+1) = A_{eq}x(k) + B(GB)^{-1}PS(k) + f(k) - f(k-1) \quad (3.66)$$

$$\text{Où } A_{eq} = A - B(GB)^{-1}GA \quad (3.67)$$

$G$  : est choisie telle que  $A_{eq}$  soit asymptotiquement stable.

$$S(k+1) = Gx(k+1) = PS(k) + G(f(k) - f(k-1)) \quad (3.68)$$

En absence de perturbation, la matrice  $P$  détermine la vitesse de convergence de  $S(k)$  vers zéro.

Par contre en présence de perturbation, il est nécessaire de choisir  $P=0$ , de sorte que l'on ait :

$$x(k+1) = A_{eq}x(k) + f(k) - f(k-1) \quad (3.69)$$

$$S(k+1) = Gf(k) - f(k+1) \quad (3.70)$$



- ❖ Si les variations des perturbations entre deux instants d'échantillonnages successives sont faibles, alors la différence telle que  $|f(k) - f(k-1)|$  sera faible.
- ❖ L'inconvénient de cette technique est qu'elle ne s'applique que dans le cas où l'on est en présence de perturbations variant lentement dans le temps.

### 3.8 APPROCHE DE SIRA-RAMIREZ

Soit un système de la forme :

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k)) \\ y(k) = h(x(k)) \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (3.71)$$

où  $x \in X$  qui ouvert de  $\mathfrak{R}^n$

$$f : X * U \rightarrow X$$

$$h : X \rightarrow Y$$

Avec  $h$  l'ensemble de niveau (level set) qui définit hypersurface de glissement telle que:

$$h(0) = \{x / x \in X : h(x) = 0\} \quad (3.72)$$

La commande appliquée au système est de la forme suivante:

$$u = \begin{cases} u^+(x) & \text{si } h(x) > 0 \\ u^-(x) & \text{si } h(x) < 0 \end{cases} \quad (3.73)$$

Définition :

Le système (3.71) soumis à une commande à structure variable de la forme (3.73) engendre un régime de quasi glissement localement autour de  $h(0)$  si :

$$y(k)(y(k+1) - y(k)) < 0 \quad (3.74)$$

Cette condition est équivalente à :

$$y(k)y(k+1) < y(k)^2 \quad (3.75)$$

La condition (3.75) peut engendrer un mouvement de quasi glissement.

Lemme :

La condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un mode quasi-glissement autour de  $h(0)$  est l'existence d'un quasi glissement autour d'un tel plan.

*Théorème :*

*Un régime de quasi-glisement existe sur  $h(0)$  si et seulement si :*

$$|y(k)y(k+1)| < y(k)^2 \quad (3.76)$$

❖ Pour cette approche le mouvement de quasi glissement peut être généré par la loi de commande continue et non pas nécessairement discontinue, contrairement au cas continu ou la commande doit être discontinue [25].

### 3.9 APPROCHE DE YON-PING

Dans le but de trouver une condition du mode de quasi glissement, cette approche se réfère à la condition générale de glissement du domaine continue [26] donnée par l'équation suivante :

$$S(t).\dot{S}(t) \leq -\eta |S(t)| \quad (3.77)$$

L'approximation discrète est :

$$S(k).\Delta S(k) < -T.\eta |S(k)| \quad (3.78)$$

Donc, cette approximation n'assure pas la convergence de  $|S(k)|$  vers zéro et pour montrer l'insuffisance de cette condition nous présentons l'exemple suivant :

Exemple2 :

$$S(k) = k(-1)^k (T\eta + 0.001)$$

Si (3.78) est vérifiée, il est évident que :  $\lim_{k \rightarrow \infty} |S(k)| = \infty$  ; donc, la convergence n'est pas assurée, Pour se faire les conditions suivantes sont proposées :

$$|\Delta S| < \sigma.T \quad \text{Pour tout } S(k) \quad (3.79.a)$$

$$S(k).S(k).\Delta S(k) < -\eta.TS(k) \quad \text{Pour tout } |S(k)| > \sigma.T \quad (3.79.b)$$

$$\text{Avec } 0 < \eta < \sigma$$

Les condition (3.79.a) et (3.79.b) sont appelées les conditions d'existence d'un mode de glissement, vu que le point représentant l'évolution du système ne glisse pas parfaitement sur la surface, mais le mouvement est compris dans une bande définie  $|S(k)| < 2\sigma T$ .

Dans ce qui suit, trois théorèmes importants seront présentés :

*Théorème 1*

Selon la condition (3.79.a)

$$|\Delta S(k)| < \sigma T \quad \text{pour tout } S(k)$$

$$\text{Si } |S(n)| > \sigma T \text{ à l'instant } k=n ;$$

donc :

$$S(n).S(n+1) > 0 \quad \text{et} \quad S(n).S(n-1) > 0 \quad (3.80)$$

*Théorème 2*

Selon les conditions (3.79.a) et (3.79.b)

$$|\Delta S(k)| < \sigma T \quad \text{pour tout } S(k)$$

$$S(k).\Delta S(k) - \eta T |S(k)| \quad \text{pour} \quad |S(k)| > \sigma T$$

quand :  $0 < \eta < \sigma$  à l'instant  $k=n$  alors :

$$|S(n+1)| < |S(n)| - nT \quad (3.81)$$

*Théorème 3*

D'après les conditions (3.79.b) et (3.80)

$$|\Delta S(k)| < \sigma T \quad \text{pour tout } S(k)$$

$$S(k).\Delta S(k) - \eta T |S(k)| \quad \text{pour} \quad |S(k)| > \sigma T$$

quand :  $0 < \eta < \sigma$ , Il existe un temps fini tel que  $S(k) \leq 2.\sigma.T$  pour tout  $k \geq n$

### Discussion

- ❖ Toutes les approches citées ci-dessus montrent que les caractéristiques de la commande à structure variable discrète sont différentes à celle du domaine continu.
- ❖ la CSVD ne possède pas la propriété de l'invariance.
- ❖ La propriété de la robustesse, pour certaines entres ses approches est sous investigation.
- ❖ Pour la mise en œuvre d'une CSVD, nous avons choisi l'approche de SARPTURK. Cette dernière est similaire à celle du domaine continu de point de vue conception avec une nouvelle condition du mode de glissant discret.

### 3.10 IMPLANTATION D'UNE COMMANDE GLISSANTE DISCRETE POUR LE ROBOT SCARA RP41 SELON L'APPROCHE DE SARPTURK

La mise en œuvre d'une commande à structure variable discrète nécessite les trois étapes suivante

1. La surface de glissement dans le domaine discret est donnée par l'équation suivante :

$$S(k) = \lambda e(k) + \frac{e(k+1) - e(k)}{T}$$

2. La condition d'un mode de pseudo glissement est donnée par l'inégalité suivante :

$$|S(k+1)| < |S(k)|$$

3. L'établissement de la loi de commande permettant l'évolution de l'état du système autour de cette surface.

Comme cette approche est destinée pour des systèmes linéaires, donc il sera utile de linéariser les équations dynamiques de notre robot SCARA, puis établir leurs représentations dans le domaine discret, par la suite calculer et appliquer la commande selon cette approche.

#### 3.10.1 Linéarisation du système

Un bouclage de linéarisation consiste à éliminer toutes les non linéarités du système original et de lui imposer une dynamique linéaire [27].

Soit le système non linéaire donné par :

$$x^n = f(x) + b(x)U \tag{3.82}$$

$U$  : la commande,  $x = [x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{n-1}]^T$  vecteur d'état et  $f(x)$ , une fonction non linéaire.

La forme canonique du système écrit par :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \dots \\ x_n \\ f(x) + b(x).U \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

Nous appliquons un bouclage linéaire telle que l'expression de la commande  $U$  est donnée par l'équation suivante :

$$U = \frac{1}{b}(V - f) \quad (3.84)$$

$V$  : est la nouvelle commande appliquée au système.

Nous remplaçons  $U$  par son expression dans (3.82), nous obtiendrons l'équation du système linéaire donnée par l'équation suivante :

$$x^n = V \quad (3.85)$$

#### Bouclage linéarisant du robot SCARA

L'équation dynamique du robot dans est donnée par :

$$\ddot{q} = A(q)^{-1}(U - B(q, \dot{q})) \quad (3.86)$$

La boucle de linéarisation utilisée est représentée par la figure suivante :

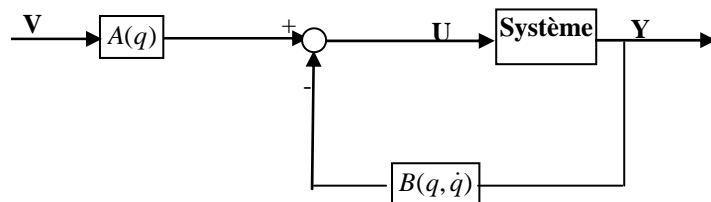


Figure 3.2 : Boucle de linéarisation

Avec  $A$  : est la matrice des coefficients variables des moments d'inerties

$B$  : est la matrice qui représente les coefficients des forces de Coriolis et Centrifuge

$U$  : est la commande du système

Soit  $V$  nouvelle commande appliquée au système telle que:

$$V = A^{-1}U + B \quad (3.87)$$

Nous remplaçons (3.87) dans (3.86), alors nous aurons l'équation de notre système linéarisé donnée par :

$$\ddot{q} = A^{-1}(AV + B - B) \Rightarrow \ddot{q} = V \quad (3.88)$$

### 3.10.2 Echantillonnage des systèmes

Le système dans le domaine continu est donné par l'équation suivante :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A(t).X(t) + B(t).U(t) + F(t) \\ Y(t) = C(t).X(t) + D(t).U(t) \end{cases} \quad (3.89)$$

Avec  $X(t) \in R^n$   
 $U(t) \in R^m$

$F(t)$ : est un signal de perturbation

Pour la représentation discrète du système, nous utilisons l'approximation d'Euler donnée comme par l'équation suivante:

$$\frac{dX}{dt} \approx \frac{\Delta X}{\Delta t} = \frac{X(k+1) - X(k)}{T} \quad \text{avec } T : \text{periode d'échantillonnage} \quad (3.90)$$

ainsi nous obtiendrons l'équation du système discret, comme suit :

$$\begin{cases} X(k+1) = F(k+1, k) + G(k+1, k)U(k) + H(k+1, k)V(k) \\ Y(k) = C(k)X(k) + D(k).Y(k) \end{cases} \quad (3.91)$$

- **Modèle discret du robot SCARA linéarisé**

L'équation dynamique du robot SCARA après linéarisation est donnée par l'équation suivante :

$$\ddot{q}(t) = V(t) \quad (3.92)$$

Pour obtenir le modèle discret, nous utilisons l'approximation (3.91), donc nous avons:

$$\dot{q}(k) = \frac{q(k+1) - q(k)}{T} \quad (3.93)$$

$$\ddot{q}(k) = \frac{\dot{q}(k+1) - \dot{q}(k)}{T} = \frac{\frac{q(k+2) - q(k+1)}{T} - \frac{q(k+1) - q(k)}{T}}{T} \quad (3.94)$$

Ainsi l'équation aux différences du système discret est donnée par :

$$q(k+2) = T^2 \ddot{q}(k) + 2q(k+1) - q(k) \quad (3.95)$$

Nous introduisons l'équation (3.92) dans (3.95), alors nous obtiendrons l'équation au différence de notre système donnée par :

$$q(k+2) = T^2 V(k) + 2q(k+1) - q(k) \quad (3.96)$$

- écriture du système dans l'espace d'état :

Posons  $X(k) = \begin{bmatrix} q(k) \\ q(k+1) \end{bmatrix}$  avec  $q(k) = [q_1(k), q_2(k), q_3(k)]$   
 $q(k+1) = [q_1(k+1), q_2(k+1), q_3(k+1)]$

$$X(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} X(k) + T^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} V(k) \quad (3.97)$$

### 3.10.3 Détermination de la commande glissante discrète pour SCARA

D'après l'approche de SARPTURK pour que le système converge vers la surface de glissement  $S$ , il faut que l'inégalité du mode de quasi glissement soit vérifiée:

$$|S(k+1)| < |S(k)| \Leftrightarrow \begin{cases} (S(k+1) - S(k)).\text{sign}(S(k)) < 0 \\ (S(k+1) + S(k)).\text{sign}(S(k)) > 0 \end{cases} \quad (3.98)$$

Nous utilisons ses deux inégalités pour le calcul de la commande comme suit :

- 1) cas d'un correcteur de type  $V = -M(k).\text{sign}(S(k))$

nous remplaçons l'expression de la commande  $V$  dans l'équation (3.98), nous aurons :

$$\begin{cases} [-M(k) - \ddot{Y}(k) + \lambda \dot{e}(k)].\text{sign}(S(k)) < 0 \\ [-T^2 M(k) + (2 + \lambda T)e(k+1) + (\lambda T - 2)e(k) - T^2 \ddot{Y}(k)].\text{sign}(S(k)) > 0 \end{cases} \quad (3.99)$$

Dans le tableau 3.1, nous présentons la démarche de calcul du gain  $M$

Tableau 3.1 : synthèse d'un correcteur par mode de glissement pour  
 $V = -M(k).sign(S(k))$

Equation au différence du système	$X(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 2I \end{bmatrix} X(k) + T^2 \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} V(k)$
Les gains de la loi de commande	<p><i>si</i> <math>S(k) &gt; 0</math> <i>alors</i></p> $\Rightarrow -\ddot{Y}(k) - \lambda \dot{e}(k) < M(k) < T^{-2}(2 + \lambda T)e(k+1) + T^{-2}(\lambda T - 2)e(k)$ <p><i>si non</i></p> $\Rightarrow -T^{-2}(2 + \lambda T)e(k+1) + T^{-2}(\lambda T - 2)e(k) < M(k) < \ddot{Y}(k) + \lambda \dot{e}(k)$ <p><i>fin si;</i></p>

2) Cas d'un correcteur de type  $V(k) = V_{eq}(k) - K.sign(S(k))$

La commande équivalente du système notée par  $V_{eq}(k)$  est définie pour un régime glissant idéal réalisé sur l'hypersurface de glissement où  $S(k+1) = S(k) = S(k-1) = \dots = 0$ , donc l'équation de cette dernière est donnée comme suit :

$$V_{eq}(k) = T^{-2}[-\lambda T e(k+1) + \lambda T e(k) + T^2 \ddot{Y}(k)] \quad (3.100)$$

Pour le calcul des gains de la commande, on utilise les conditions de quasi glissement données par l'équation (3.98), alors nous aurons :

$$\begin{aligned} & [V_{eq}(k) - K.sign(S(k)) - \ddot{Y}(k) + \lambda \dot{e}(k)]sign(S(k)) < 0 \\ & [T^2 V_{eq}(k) - T^2 K.sign(S(k)) + (2 + \lambda T)e(k+1) + (\lambda T - 2)e(k) - T^2 \ddot{Y}(k)]sign(S(k)) > 0 \end{aligned} \quad (3.101)$$

Dans le tableau ci-dessous, nous allons donner les limites supérieure et inférieure du gain  $K$  suivant le signe de la surface :

Tableau 3.2 : synthèse d'un correcteur par mode de glissement de type  
 $U(k) = U_{eq}(k) - K(k).sign(S(k))$

commande équivalente	$V_{eq}(k) = T^{-2}[-\lambda T e(k+1) + \lambda T e(k) + T^2 \ddot{Y}(k)]$
Gains de commande	<p><i>si</i> <math>S(k) &gt; 0</math> <i>alors</i></p> $V_{eq} - \ddot{Y}(k) + \lambda \dot{e}(k) < K < V_{eq} - \ddot{Y}(k) + T^{-2}(2 + \lambda T)e(k+1) + T^{-2}(\lambda T - 2)e(k)$ <p><i>si non</i></p> $-V_{eq} + \ddot{Y}(k) + T^{-2}(2 + \lambda T)e(k+1) - T^{-2}(\lambda T - 2)e(k) < K < V_{eq} + \ddot{Y}(k) - \lambda \dot{e}(k)$ <p><i>finsi;</i></p>



### 3.11 SIMULATION

Pour la simulation, nous allons faire évoluer notre système linéaire dans un mode de fonctionnement pas à pas, où le système initialement est au repos telle que la position initiale  $P_i=[0 ; 0 ; 0 ] rad$ , et nous désirons qu'il atteigne une consigne désirée  $P_d=[1.9 ; 2.1 ; 5.9] rad$  selon une dynamique libre ; puis en mode de poursuite où les positions, vitesses et accélérations désirée sont respectivement  $[3.2 ; 2.1 ; 2.2]rad$  ,  $[.9 ; 1.1 ; .9]rad/s$  et  $[.6 ; .6 ; .6] rad/s^2$ .

Les gains de la commande appliquée au système pour les deux types de correcteurs sont calculés à chaque période d'échantillonnage comme suit :

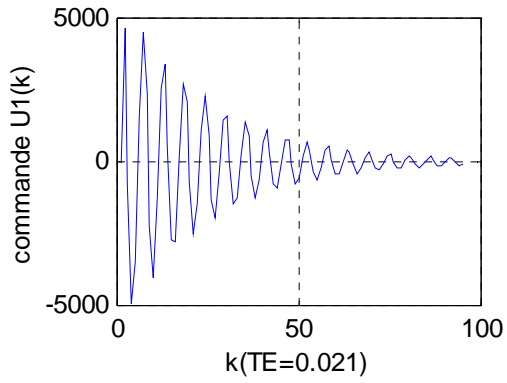
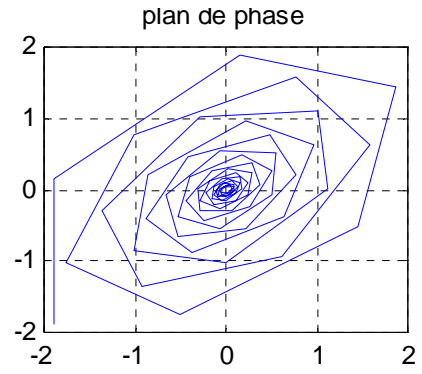
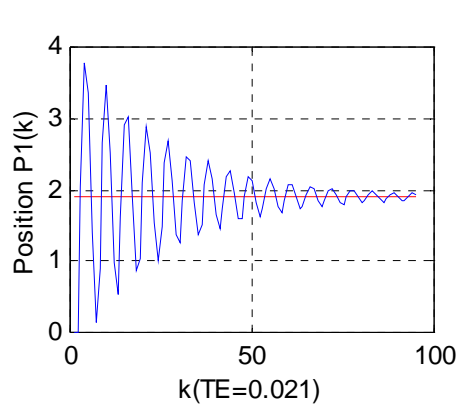
Tableau 3.3 : calcul des gains de la commande.

Type de correcteur	Calcul des gains
$V = -M(k) * sign(Sk))$	<p><i>pour chaque k</i>  <i>si <math>S(k) &gt; 0</math> alors</i>  <math>M_{inf} = -\ddot{Y}(k) - \lambda \dot{e}(k)</math>  <math>M_{sup} = T^{-2} (2 + \lambda T)e(k+1) + T^{-2} (\lambda T - 2)e(k)</math>  <i>si non</i>  <math>M_{suo} = \ddot{Y}(k) + \lambda \dot{e}(k)</math>  <math>M_{inf} = -T^{-2} (2 + \lambda T)e(k+1) + T^{-2} (\lambda T - 2)e(k)</math>  <i>fin si;</i></p>
$U(k) = U_{eq}(k) - K(k).sign(S(k))$	<p><i>pour <math>k = 1, 2, \dots, n</math></i>  <math>V_{eq}(k) = T^{-2} [-\lambda T e(k+1) + \lambda T e(k) + T^2 \ddot{Y}(k)]</math>  <i>si <math>S(k) &gt; 0</math> alors</i>  <math>K_{inf} = \frac{V_{eq} - \ddot{Y}(k) + \lambda \dot{e}(k) - \ddot{Y}(k)}{2}</math>  <math>K_{sup} = \frac{V_{eq} + T^{-2} (2 + \lambda T)e(k+1) + T^{-2} (\lambda T - 2)e(k)}{2}</math>  <i>si non</i>  <math>K_{sup} = \frac{-(V_{eq} - \ddot{Y}(k) + \lambda \dot{e}(k) - \ddot{Y}(k))}{2}</math>  <math>K_{inf} = -\frac{V_{eq} + T^{-2} (2 + \lambda T)e(k+1) + T^{-2} (\lambda T - 2)e(k)}{2}</math>  <i>finsi;</i></p>

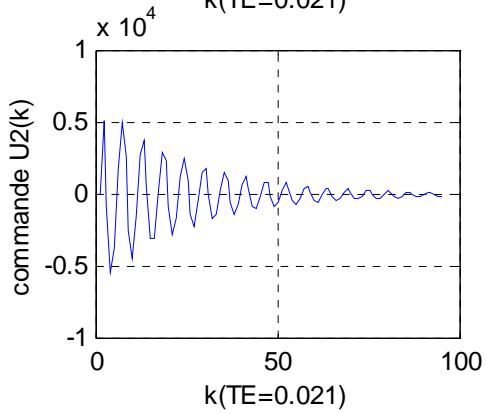
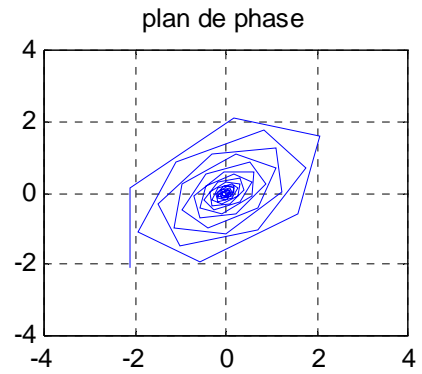
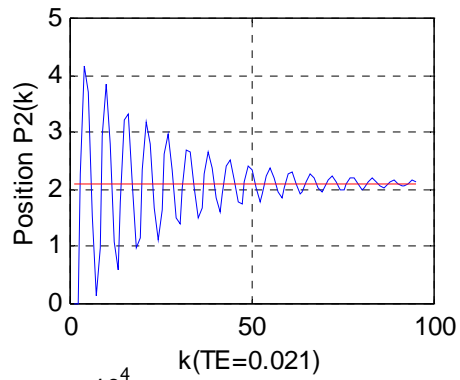
$$\text{Avec } M(k) = \frac{M_{\text{sup}}(k) + M_{\text{inf}}(k)}{2} \quad \& \quad K(k) = \frac{K_{\text{sup}}(k) + K_{\text{inf}}(k)}{2}$$

Analyse des résultats :

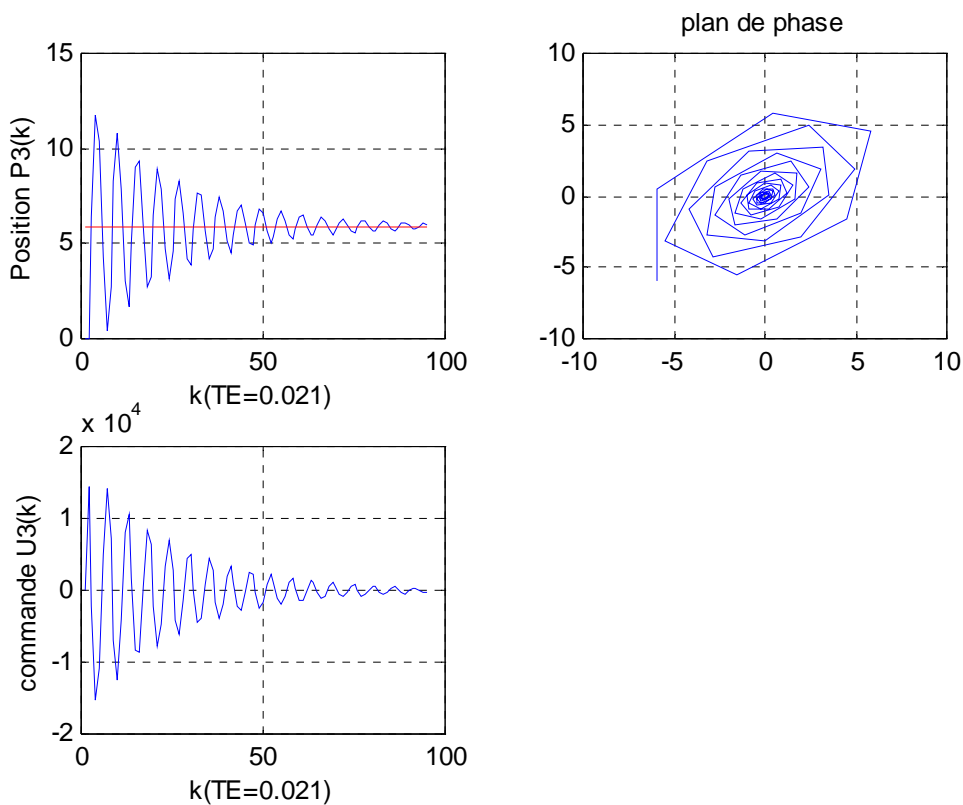
- ❖ la figure (3.3) montre l'évolution du système dans cas où la première inégalité (3.89.a) du mode de quasi glissement n'est pas vérifiée, nous remarquons un mouvement de zigzag est effectué mais au niveau de n'importe qu'elle bande dans le plan de phase, tandis que si la deuxième inégalité (3.89.b) est violée, le système diverge complètement ; et par conséquent le mode de quasi glissement ne peut être réalisé seulement si les deux inégalités du mode de pseudo glissement soient vérifiées en même temps pour chaque période d'échantillonnage.
- ❖ En mode de régulation, les figures (3.4) et (3.5) montrent l'évolution des variables d'état en mode de quasi glissement, nous remarquons que la variable d'état du système converge et suit la consigne désirée dans un temps fini et avec une erreur d'ordre de 1% ; pour des périodes d'échantillonnage de 0.038 et 0.021 respectivement.
- ❖ En mode de poursuite de trajectoire, les figures (3.6) et (3.7) montrent les allures de la position, le plan de phase et la commande pour chaque segment du robot, ainsi nous remarquons que la poursuite de la position est établie pour une période d'échantillonnage de 0.01; et nous pouvons constater que la commande appliquée au système doit être bornée supérieurement et inférieurement et ces bornes dépendent de la période d'échantillonnage.
- ❖ Plus la période de l'échantillonnage augmente plus la précision diminue comme est illustré dans la figure (3.8) et (3.9) ; mais lorsque cette dernière dépasse un certain seuil le système diverge.
- ❖ Ce concerne la robustesse, des figures (3.10 et 3.11), nous remarquons que le système est très sensible vis-à-vis des signaux de perturbation et la charge transportée.



Segment 1

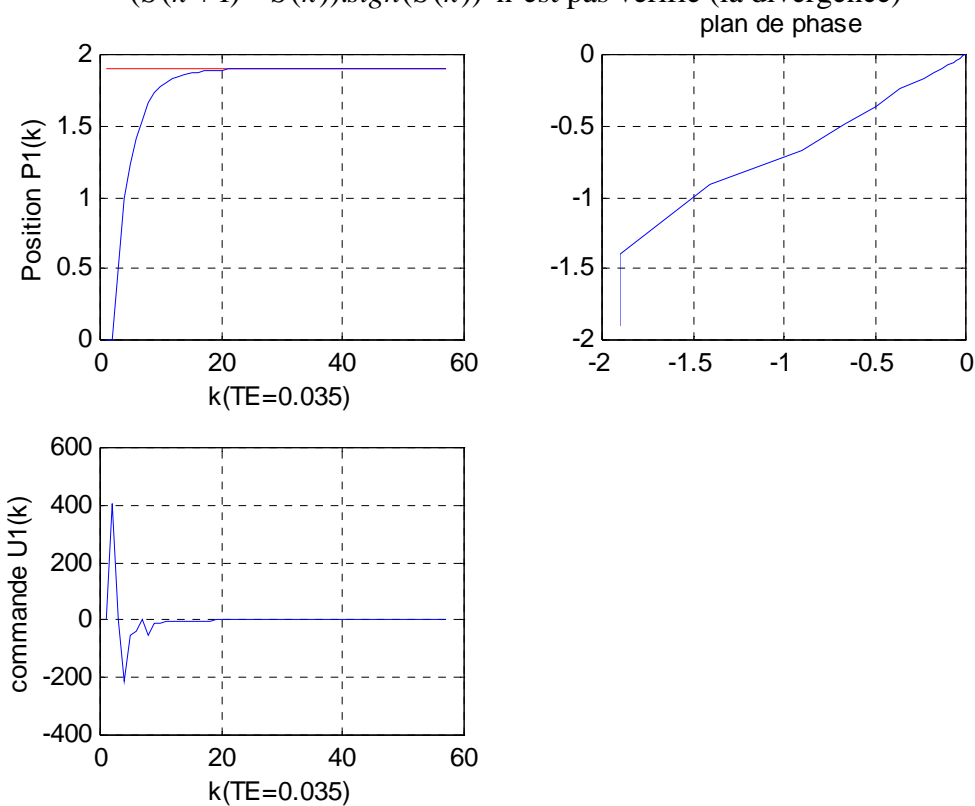


Segment 2

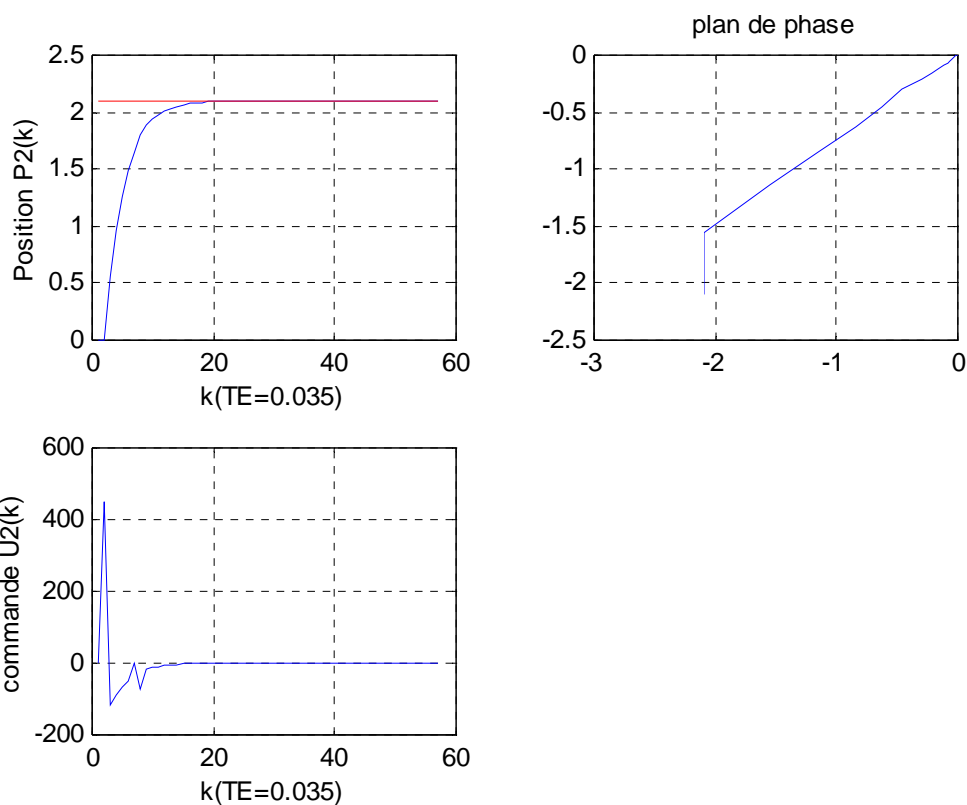


Segment 3

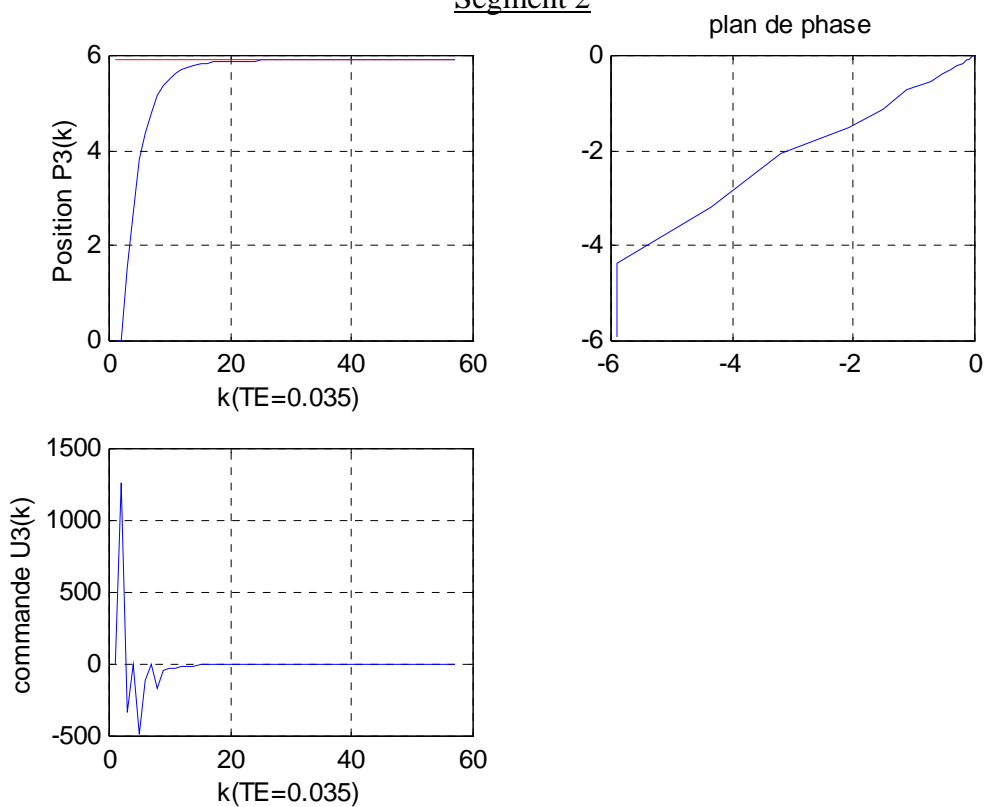
Figure 3.3 : Correcteur à structure variable discrète dans le cas l'inégalité  $(S(k + 1) - S(k)).sign(S(k))$  n'est pas vérifié (la divergence)



Segment 1

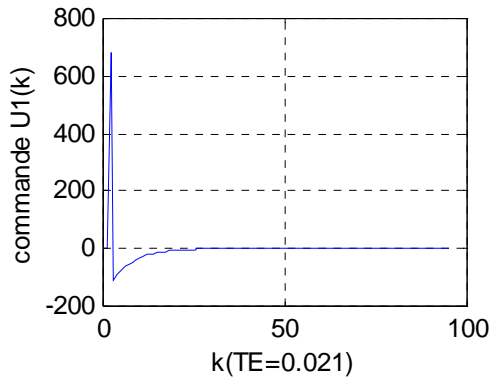
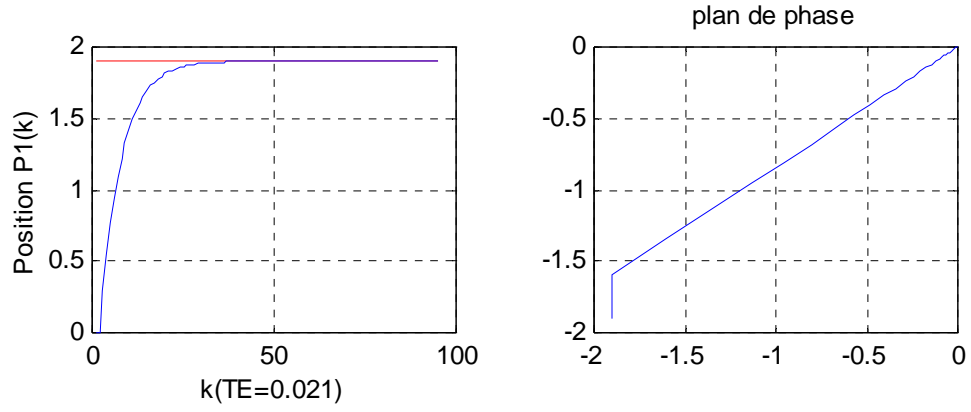


### Segment 2

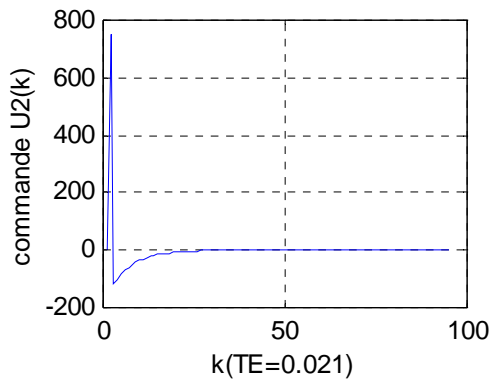
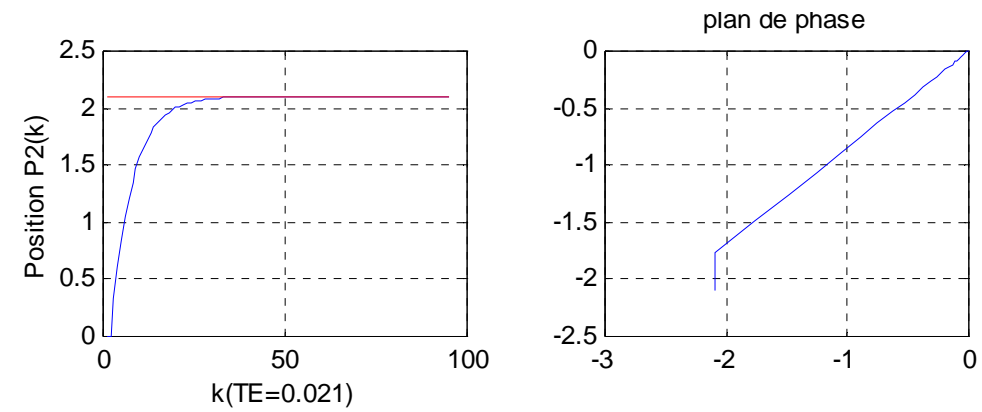


### Segment 3

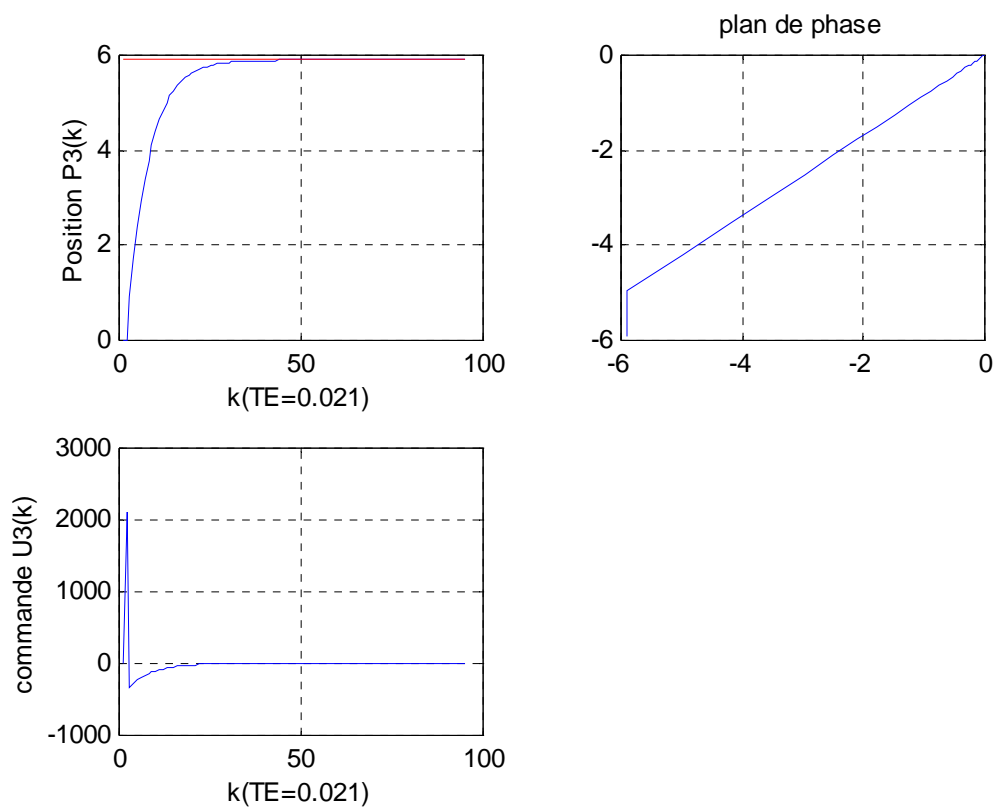
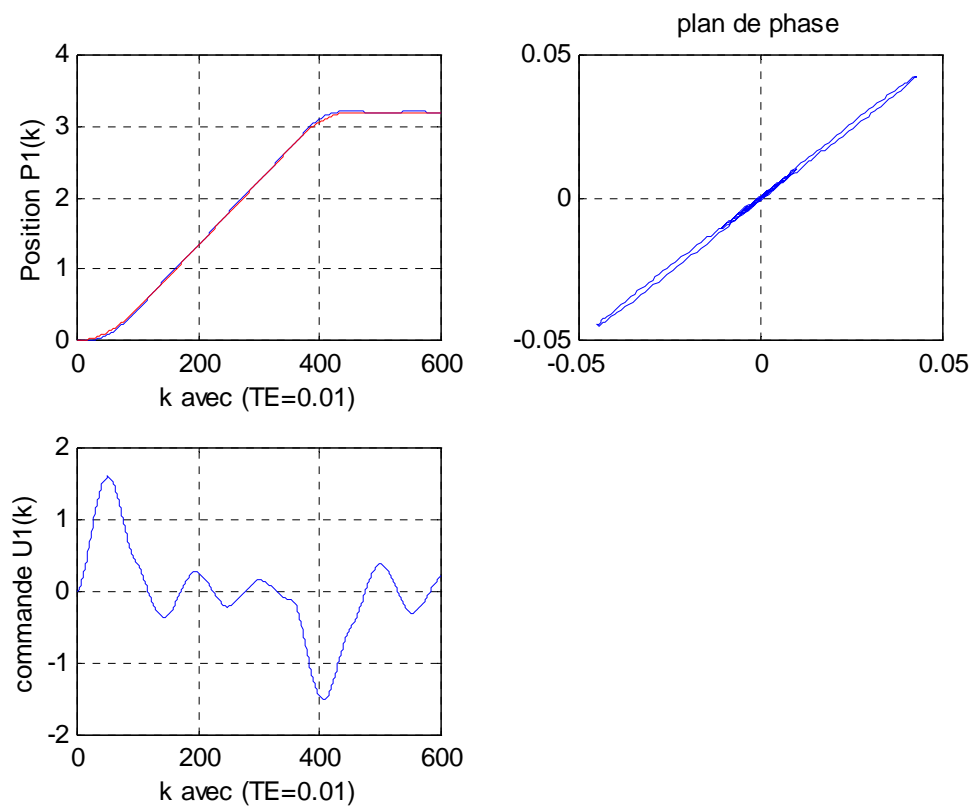
Figure 3.4 : Correcteur de type  $U(k) = -M(k).sign(S(k))$  avec une période d'échantillonnage de 0.035 et  $\lambda = [7.5, 7.6, 7.7]$



Segment 1



Segment 2

Segment 3Figure 3.5 : Correcteur de type  $U(k) = U_{eq}(k) - K(k).sign(S(k))$  en mode de régulationSegment 1

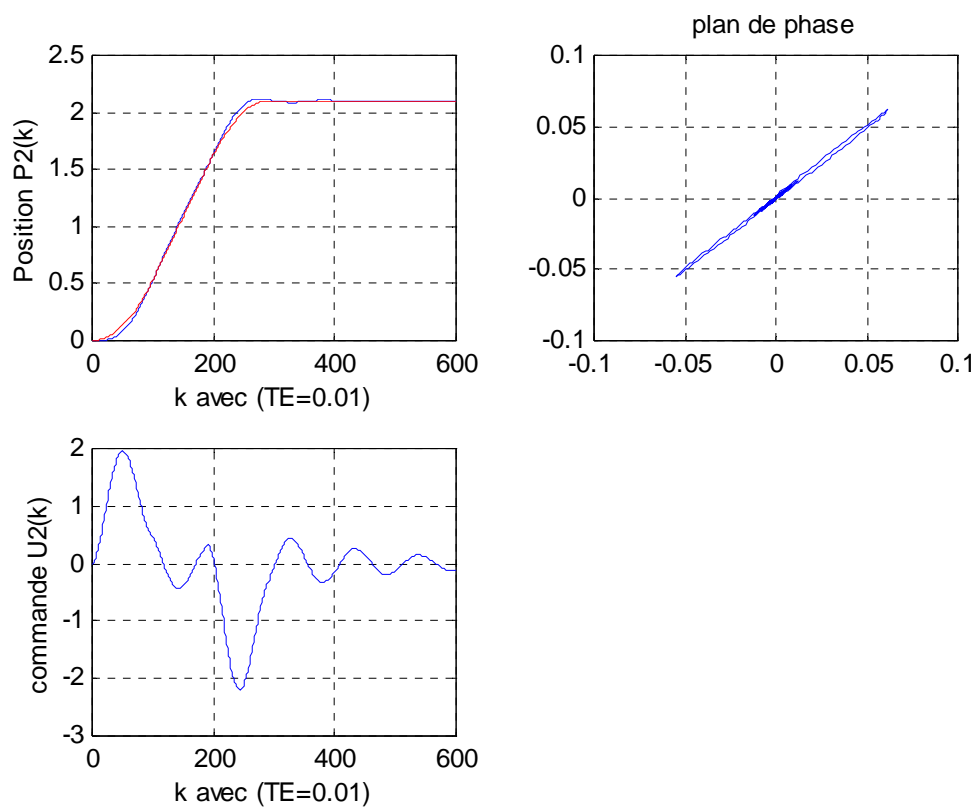
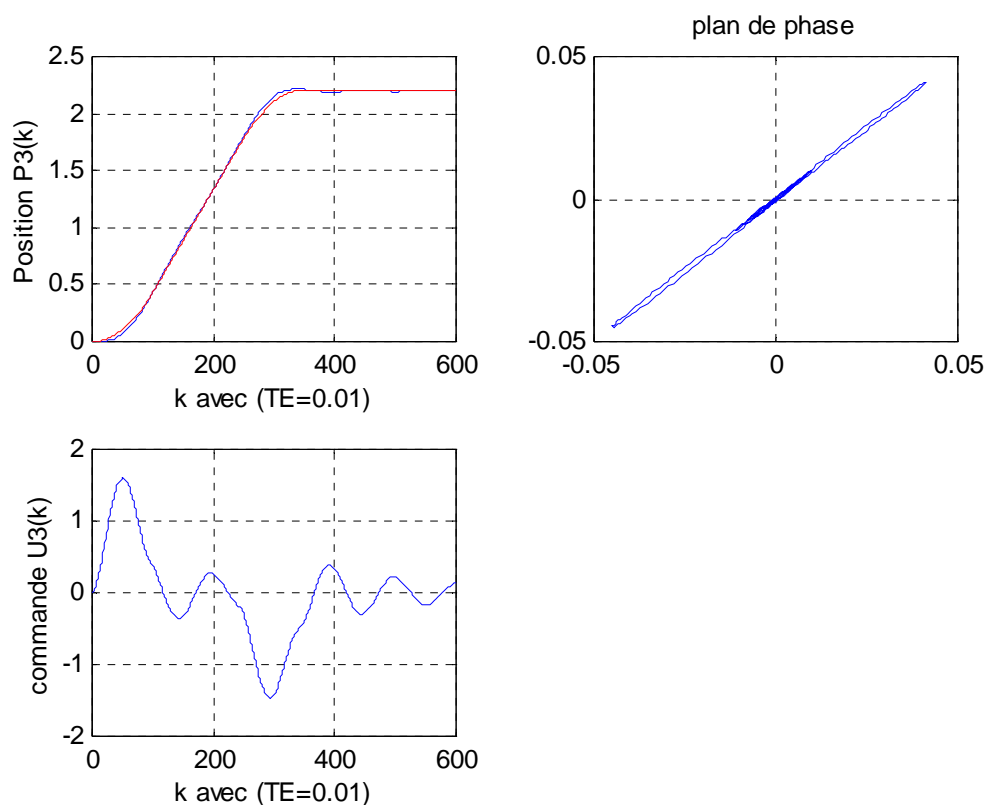
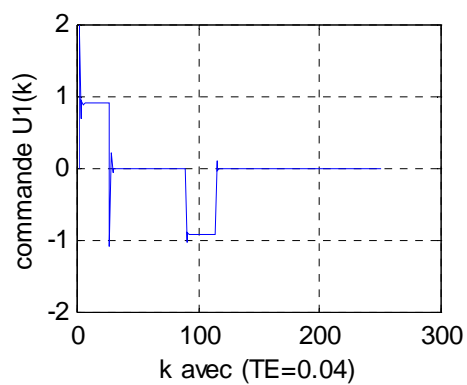
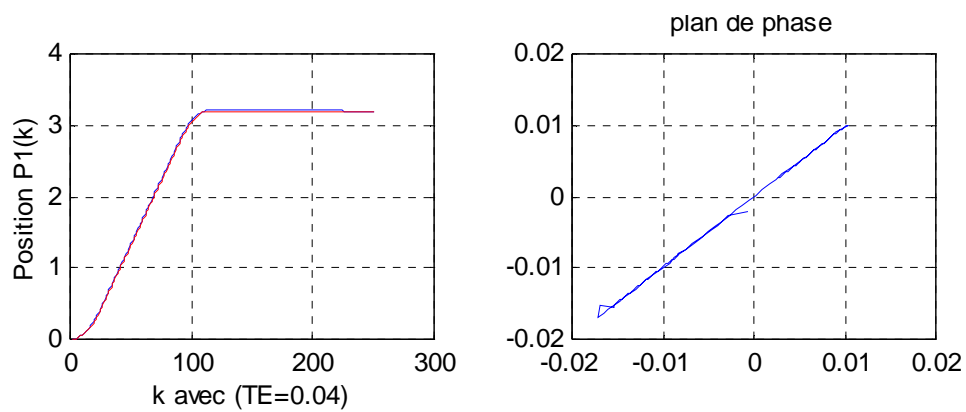
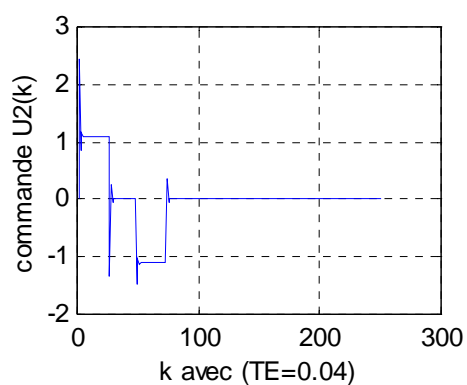
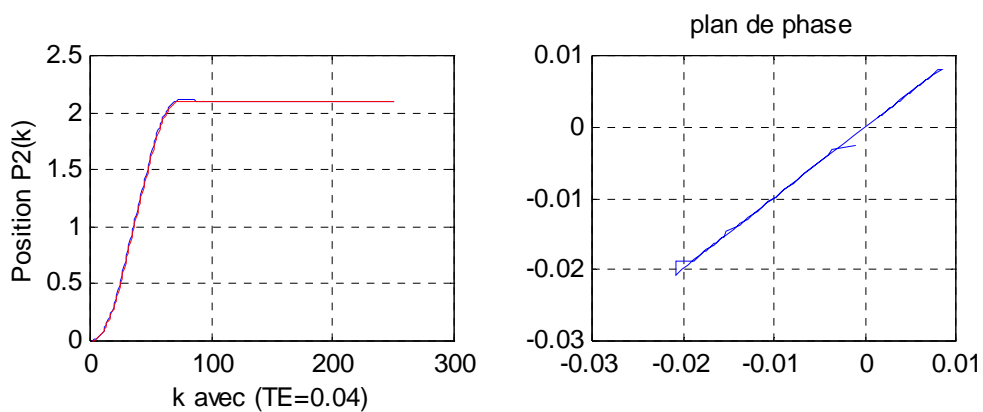
Segment 2Segment 3

Figure 3.6 : Correcteur de type  $U = -M(k).sign(S(k))$  en mode de poursuite de trajectoire  
Avec  $\lambda = [35; 35; 35]$

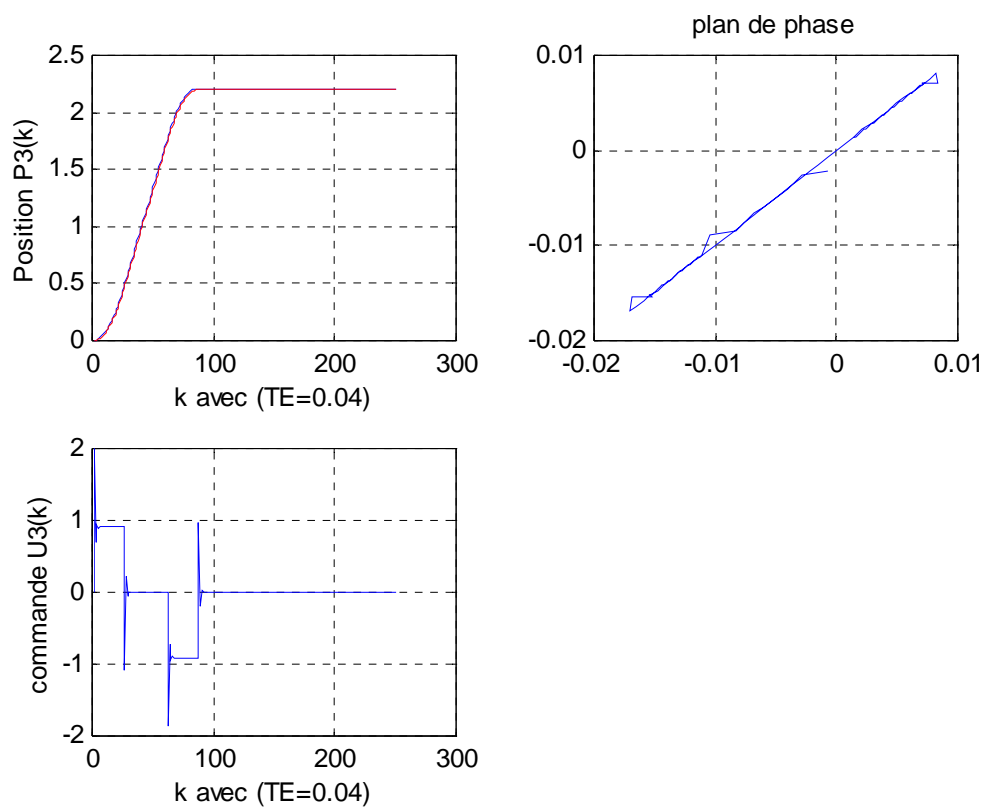




### Segment 1

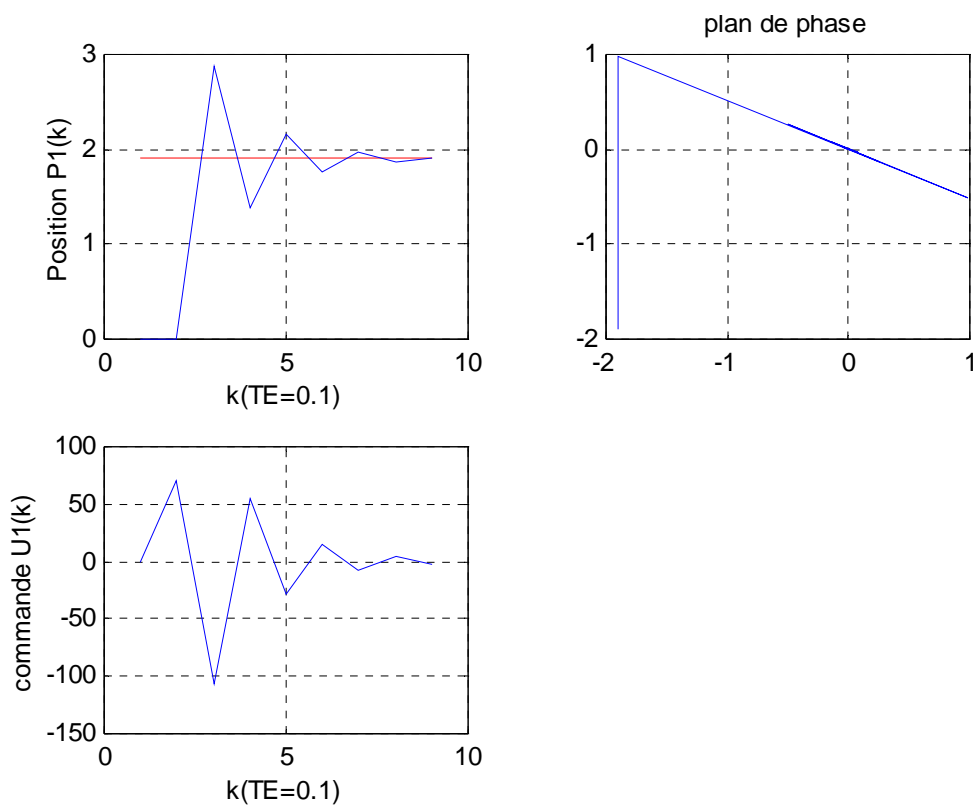


### Segment 2

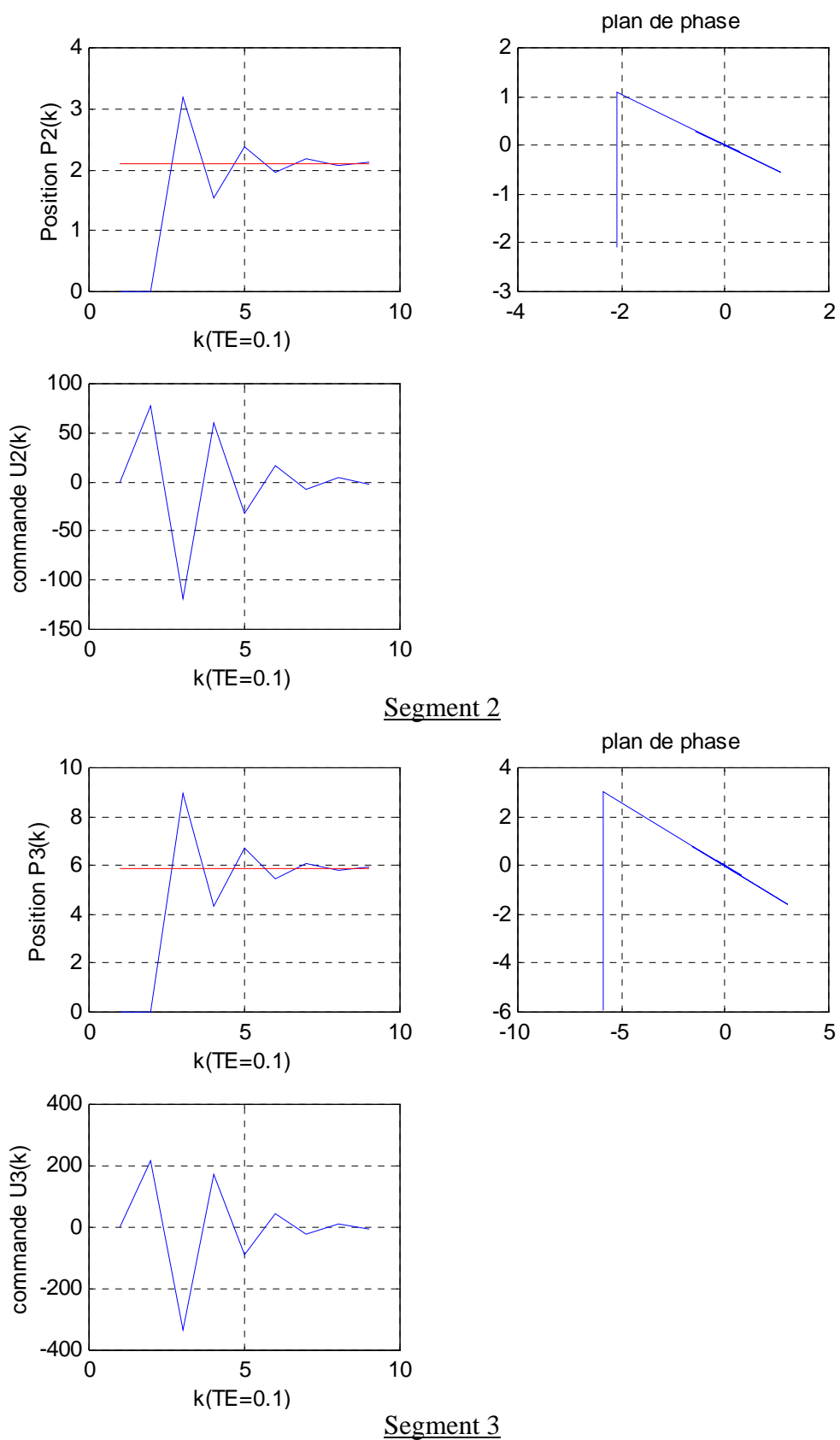


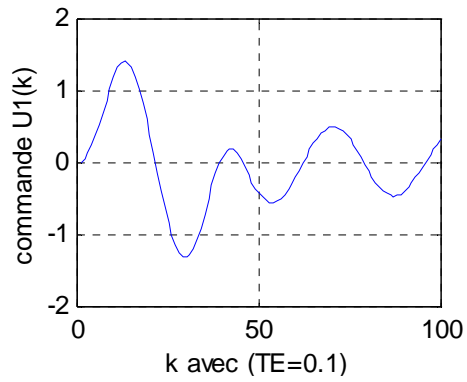
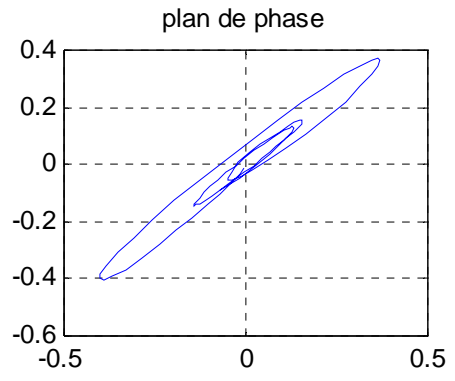
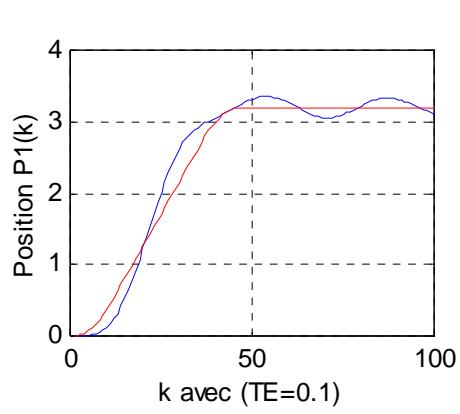
### Segment 3

Figure 3.7 : Correcteur de type  $U(k) = U_{eq}(k) - k.sign(S(k))$  en mode de poursuite de trajectoire

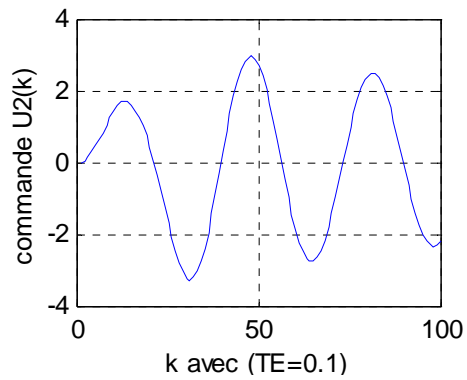
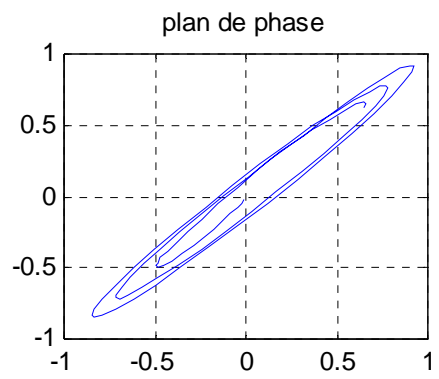
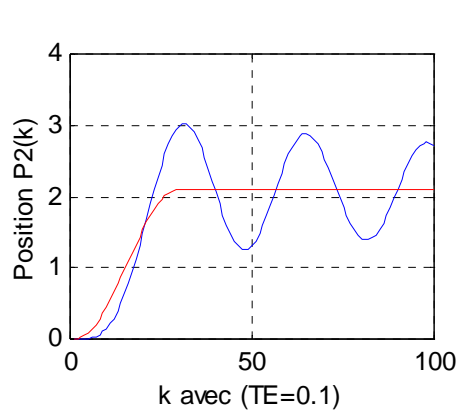


### Segment 1

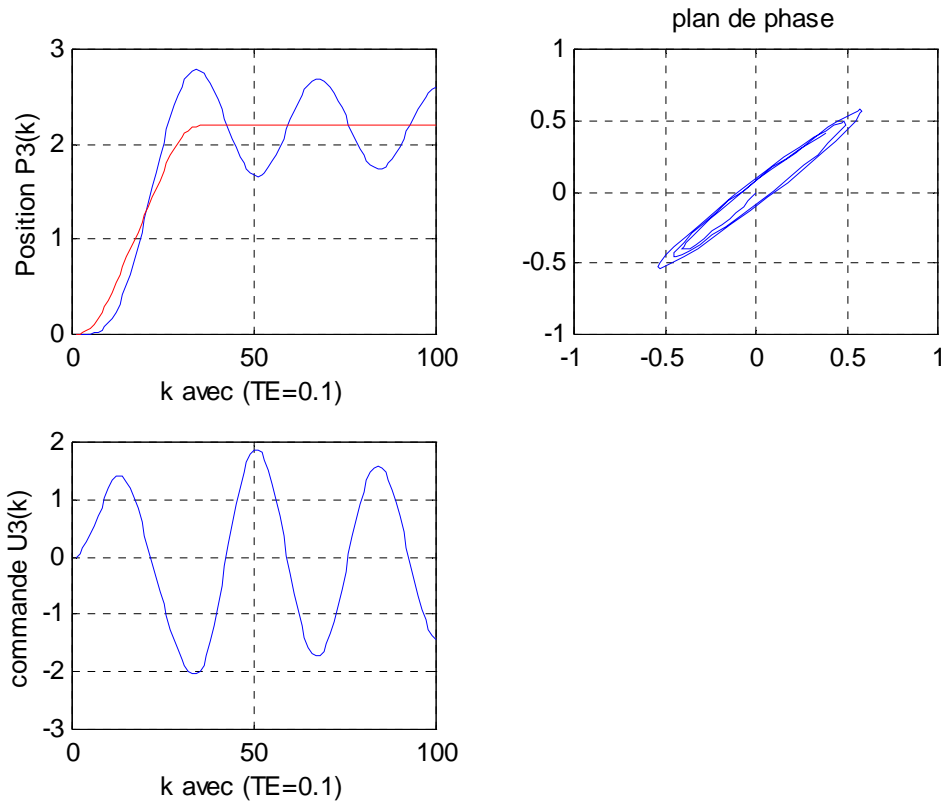
Figure 3.8 : Mode de régulation avec  $TE=0.1$



Segment 1

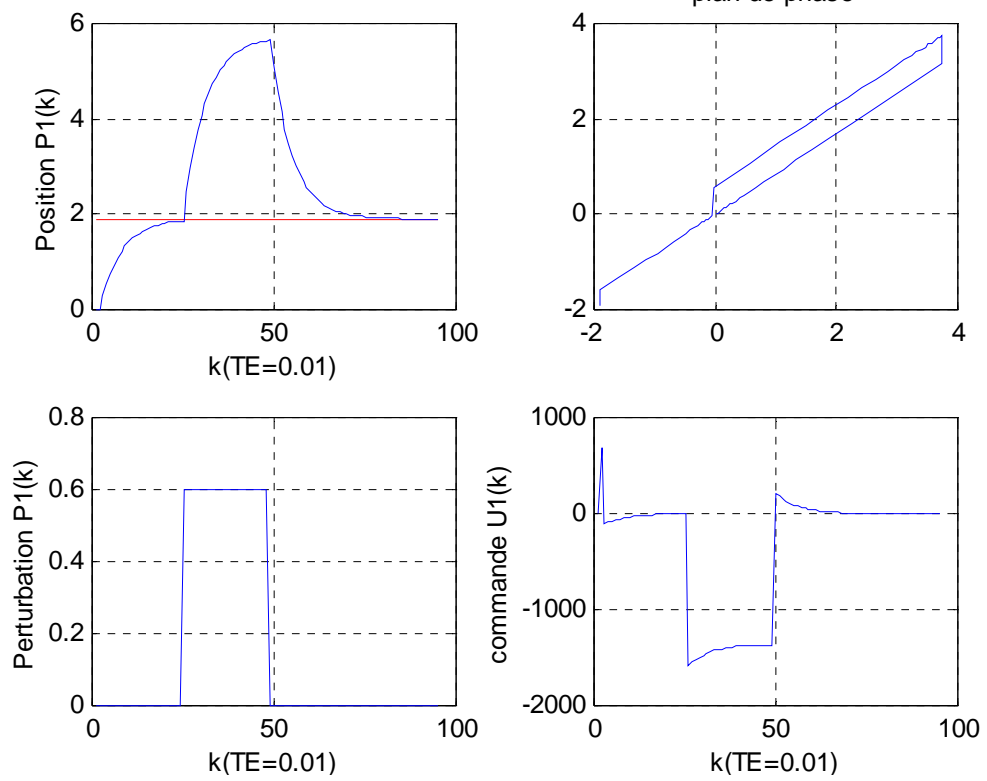


Segment 2

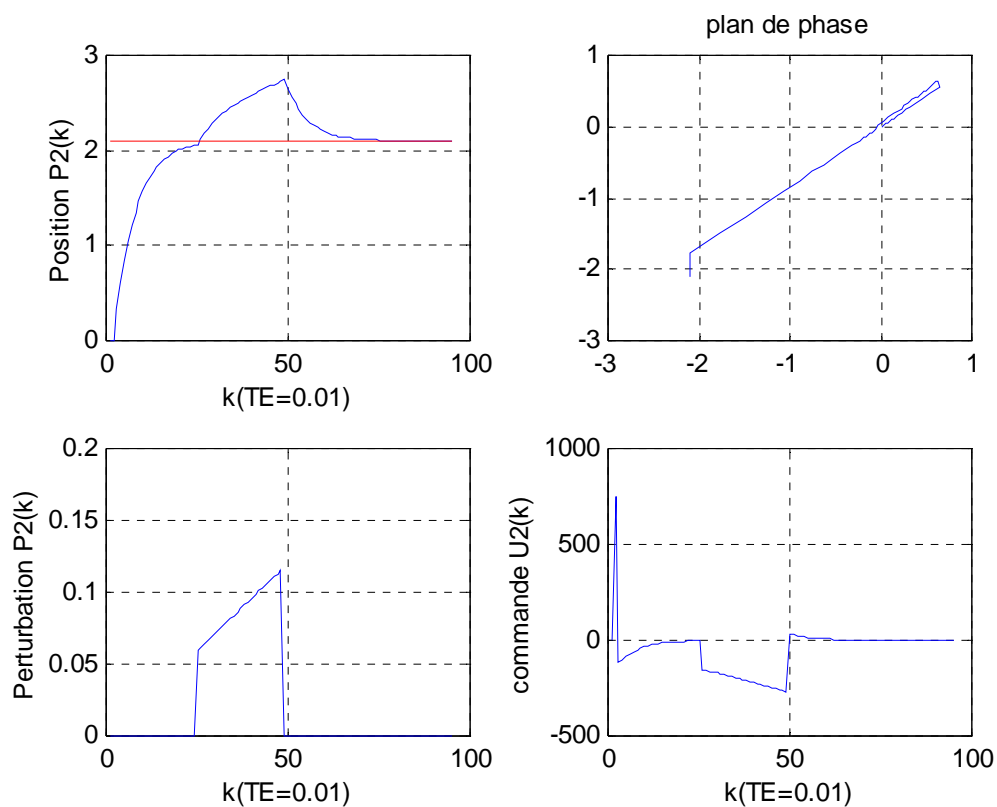


Segment 3

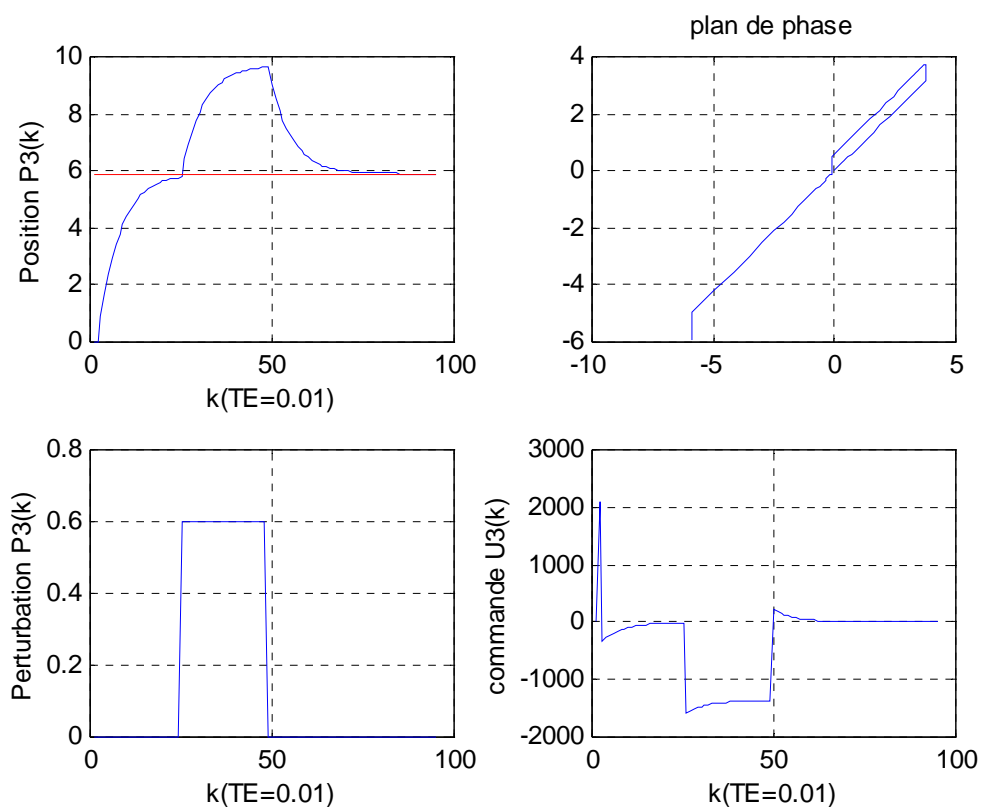
Figure 3.9 : Mode de poursuite de trajectoire avec  $TE=0.1$



Segment 1

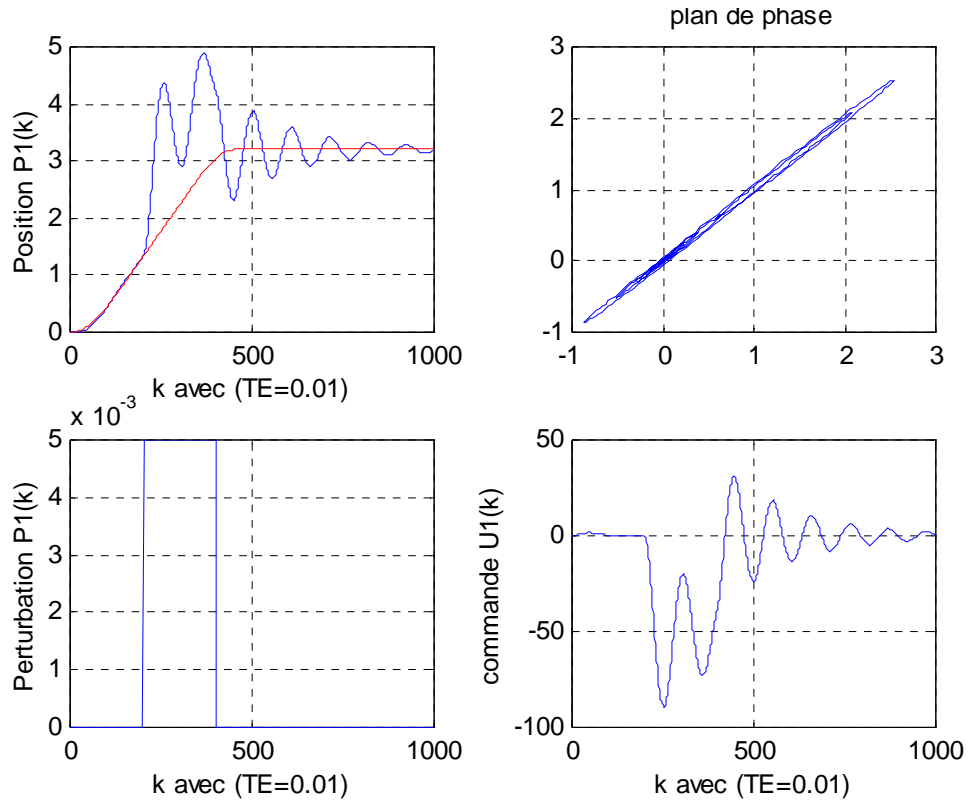


### Segment 2

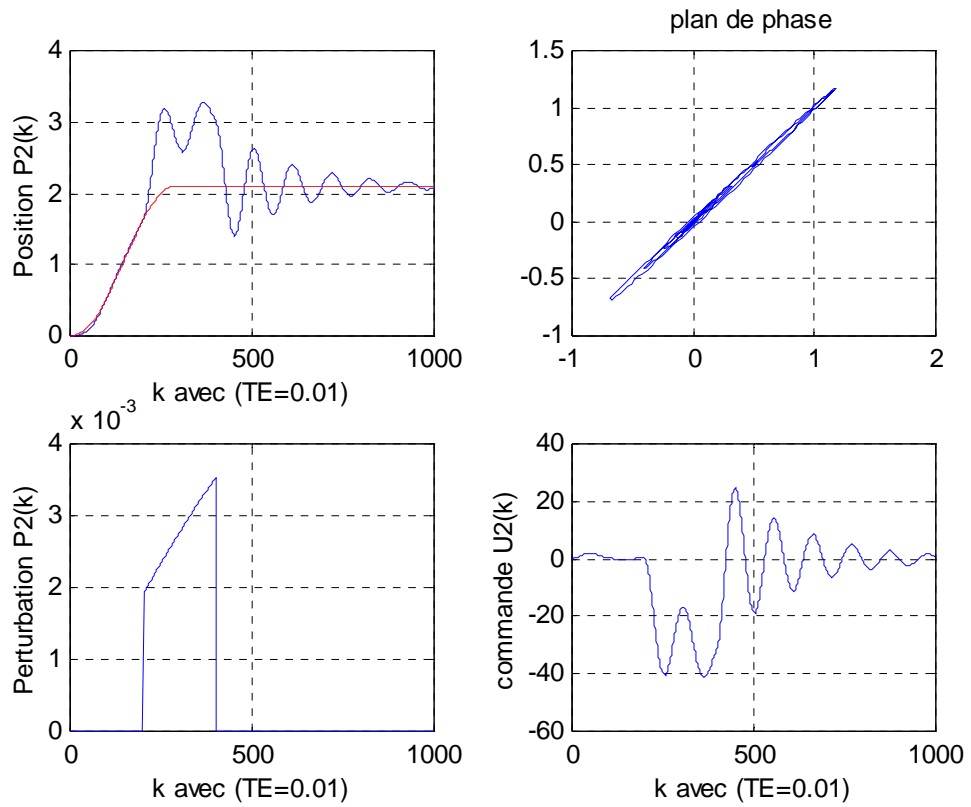


### Segment 3

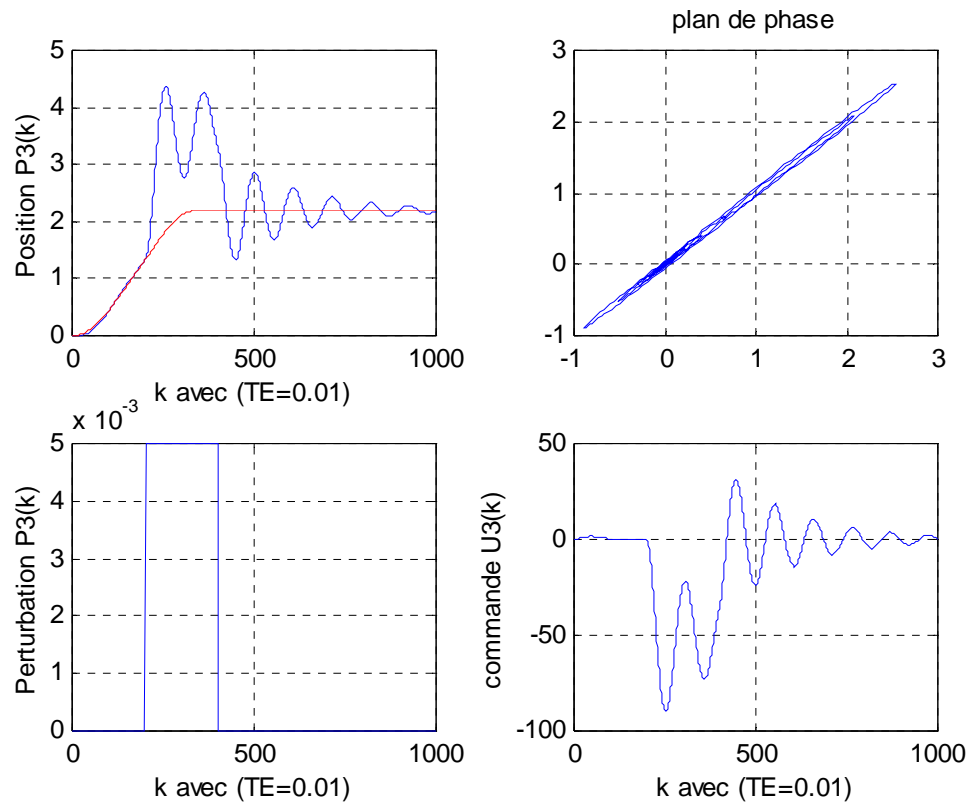
Figure 3.10 : Mode de régulation avec une charge transportée et des perturbations



Segment 1



Segment 2



### Segment 3

Figure 3.11 : Mode de poursuite de trajectoire avec une charge transportée et des perturbations



### 3.12 CONCLUSION

Ce chapitre était consacré entièrement à l'étude de la commande à structure variable par mode de quasi glissement, ainsi nous avons présenté les différentes approches existantes dans ce domaine.

Pour la mise en œuvre d'une commande glissante discrète, nous avons choisie l'approche de SARPTURK à cause de sa similarité au domaine continu, mais cette dernière est spécifique pour les systèmes linéaires. C'est pour quoi nous avons linéarisé les équations dynamiques du robot SCARA pour pouvoir l'appliquée. Cette approche est testée pour les deux modes de fonctionnement régulation et poursuite de trajectoire.

D'après les simulations, nous avons remarqué que l'état du système suit très bien l'état désiré pour une période d'échantillonnage petite, mais plus cette dernière augmente plus la précision diminue et le mouvement de zigzag apparaisse.

Le mode de quasi glissement est réalisé dans le cas où les deux inégalités de ce mode sont vérifiées en même temps pour chaque période d'échantillonnage, car l'une elles assure le régime de quasi glissant sur l'hyperplan, mais elle peut engendrer une divergence et une instabilité du système; par contre la deuxième inégalité la convergence de la trajectoire vers l'hyperplan de commutation.

Bien que, le phénomène de broutement a disparue, un mouvement de zigzag apparaît dans le mode de glissement; ce comportement est du à la commande maintenance constante durant toute la période d'échantillonnage. Un mode de glissement idéal est alors inexistant et la dynamique du système ne peut pas plonger d'une façon définitive dans l'état d'un système réduit et libre.

Dans le prochain chapitre, nous allons appliquer l'approche de la convergence de Gao pour notre système mécanique SCARA.

## **CHAPITRE 4**

### **MISE EN ŒUVRE D'UNE COMMANDE GLISSANTE DISCRETE SELON L'APPROCHE DE LA LOI DE LA CONVERGENCE POUR LE ROBOT SCARA RP41**

#### 4.1 INTRODUCTION

Les systèmes physiques sont sensibles à la période d'échantillonnage, spécialement à une commande échantillonnée par mode de glissement, ceci est dû à l'hypothèse de la conception de cette commande, qui est caractérisée par la commutation infinie d'une structure à l'autre.

La réalisation pratique de ce type de commande est très difficile à cause d'une part de la limitation physique de l'organe de commutation (relais) et le temps du calcul de la commande.

Par contre pour l'implémentation de la commande par mode de glissement discrète, l'organe de commutation est remplacé par un calculateur qui change la structure du système au instant discret, cette limitation conduit à un régime glissant non idéal, ce dernier est de nature différente comparée à celui du domaine continu qui est dû à l'imperfection et les retards engendrés par les composants de commutation.

Dans l'approche de la convergence, la loi de la Commande à Structure Variable Discrète (DVSC) est synthétisée de sorte que trois attributs soient vérifiés, ces trois attributs forment le principe de base pour la définition d'un régime glissant discret du système et sa condition de glissement.

Dans Ce chapitre, nous allons implanter la CSVD selon l'approche de la loi de la CONVERGENCE pour que le robot SCARA atteigne une consigne ou suivre une trajectoire désirée ; ainsi nous allons étudier l'effet de la période d'échantillonnage sur le modèle mathématique du robot SCARA linéarisé et discrétisé et puis sur son modèle dynamique; par la suite, nous allons tester la robustesse de CSVD vis à vis du modèle imprécis, la charge transportée et les signaux de perturbation externes.

#### 4.2 DESCRIPTION DE LA COMMANDE DU SYSTEME ECHANTILLONNE

Dans les systèmes échantillonnés, toutes les grandeurs du système ainsi que la commande sont mesurés à l'instant ( $kT$ ) et maintenues constantes durant toute la période d'échantillonnage à l'aide d'un bloqueur d'ordre zéro (Figure 4.1) et par conséquent un mouvement de zigzag se produit le long de la surface de glissement et autour du point d'équilibre; donc un mode de quasi glissement se produit.

Si on se limite à déterminer les valeurs des grandeurs du système aux instants d'échantillonnage, il n'y a alors pas de différence entre les systèmes échantillonnés et les systèmes discrets. Ils admettent la même représentation formelle.

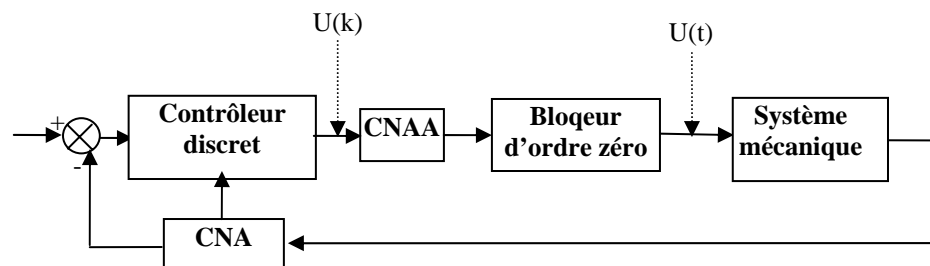


Figure 4.1 : Synoptique de la commande

#### 4.3 SYNTHÈSE D'UN CORRECTEUR A STRUCTURE VARIABLE DISCRET PAR L'APPROCHE DE LA CONVERGENCE

La synthèse d'un correcteur à structure variable par mode de glissement discret est réalisée en deux étapes (voir le chapitre 3 section 3.3) :

##### 4.3.1 Détermination de la fonction de commutation

En général, la fonction de commutation est choisie de la forme suivante :

$$S(k) = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i . e_i(k)$$

avec  $\lambda_n = 1$ ,  $i=1 \dots n$  et  $\lambda_i$  : Coefficients de la surface.

$e_i(k)$  : vecteur d'erreur défini comme suit :  $e_i(k) = x_i(k) - x_{id}(k)$

$x_{id}$  : vecteur d'état désiré.

### 4.3.2 Etablissement de la loi de commande

La loi de commande établie doit satisfaire les trois attributs du régime quasi glissant qui sont:

At1 : à partir de n'importe quel état initial, la trajectoire doit se déplacer vers le plan de commutation et le traverse dans un temps fini.

At2 : la trajectoire d'état doit retraverser la surface de commutation à chaque période d'échantillonnage, ce qui génère un mouvement de zigzag.

Att 3 : l'amplitude des zigzags successifs doit être décroissante et la trajectoire d'état doit se maintenir dans une bande.

## 4.4 CAS D'UN SYSTEME LINEAIRE

L'équation aux différences du robot SCARA linéarisé et discrétisé est donnée par l'équation suivante:

$$q(k+2) = T^2 U(k) + 2q(k+1) - q(k) \quad (4.1)$$

avec :

$$q(k) = [q_1(k), q_2(k), q_3(k)]$$

$$q(k+1) = [q_1(k+1), q_2(k+1), q_3(k+1)]$$

### 4.4.1 Détermination de la surface de glissement

Pour une surface linéaire de la forme suivante:

$$S(k) = \lambda e(k) + \frac{e(k+1) - e(k)}{T} \quad (4.2)$$

avec

$$e(k) = q(k) - q_d(k) \quad (4.3)$$

$e(k)$  est l'erreur entre l'état réel et l'état désiré à l'instant  $k$

Le mode quasi glissement idéal satisfait la condition ci dessous:

$$S(k+1) = S(k) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda T e(k) + e(k+1) - e(k) = 0 \quad (4.4)$$

d'où la commande équivalente du système est donnée par l'équation suivante:

$$U_{eq}(k) = T^{-2}(q_d(k+2) - 2q(k+1) + q(k) + (1 - \lambda T)e(k)) \quad (4.5)$$

ainsi, L' équation dynamique d'un glissement idéal est donnée comme suit :

$$\begin{cases} q(k+2) = q_d(k+2) + (1 - \lambda)e(k) \\ \lambda T e(k) + e(k+1) - e(k) = 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

#### 4.4.2 Détermination de la loi de convergence

Cette approche impose directement la dynamique du plan de commutation  $S(x)$  de sorte que les trois attributs du mode de quasi glissement soient vérifiés, puis la loi de commande est synthétisée.

Ainsi, la dynamique du mode de quasi glissement est décrite par l'équation suivante :

$$S(k+1) \leq (1 - pT)S(k) - \varepsilon T \operatorname{sign}(S(k)) \quad \varepsilon > 0 \quad p > 0 \quad \text{et} \quad (1 - pT_E) > 0 \quad (4.7)$$

la loi de la commande est déduite à partir de l'inégalité donnée par (4.7) et donnée par l'équation suivante :

$$U(k) = T^{-2} \left[ -(1 + \lambda T)e(k+1) + e(k) + T^2 \ddot{q}_d(k) + (1 - pT)TS(k) - \varepsilon T \operatorname{sign}(S(k)) \right] \quad (4.8)$$

avec  $q_d(k)$  est l'état désiré est :

$$\ddot{q}_d(k) = \frac{q_d(k+2) - 2q_d(k+1) + q_d(k)}{T^2}$$

La dynamique du système en mode de quasi glissement est donnée par l'équation suivante :

$$\begin{cases} q(k+2) = -(1 + \lambda T)e(k+1) + e(k) + T^2 \ddot{q}_d(k) + (1 - pT)TS(k) - \varepsilon T \operatorname{sign}(S(k)) \\ \quad + 2q(k+1) + q(k) \\ S(k+1) \leq (1 - pT)S(k) - \varepsilon T \operatorname{sign}(S(k)) \end{cases} \quad (4.9)$$

#### 4.4.3 Détermination de la largeur de la bande

Pour le mode de quasi glissement, les signes de  $S(k)$  à deux instants d'échantillonnage successifs doivent être opposés et après l'étude du signe de l'équation (4.7), où chaque  $x$  vérifie le fait que  $\operatorname{sign}(S(k)) \neq \operatorname{sign}(S(k+1))$  ainsi la largeur de la bande est donné par l'équation suivante :

$$2\Delta = 2 \frac{\varepsilon T}{1 - qT} \quad (4.10)$$

en régime permanent, la bande sera plus réduite et est donnée l'équation suivante:

$$\{2\Delta < \varepsilon T\} \quad (4.11)$$

Le tableau ci-dessous résume ces étapes de synthèse

Tableau 4.1 : synthèse de CSVD pour un système linéaire

Equation aux différences	$q(k+2) = T^2 U(k) + 2q(k+1) - q(k)$
Dynamique du système en mode de glissement idéal	$\begin{cases} q(k+2) = q_d(k+2) + (1-\lambda)e(k) \\ \lambda T e(k) + e(k+1) - e(k) = 0 \end{cases}$
Dynamique du système en mode de quasi glissement	$\begin{cases} q(k+2) = -(1+\lambda T)e(k+1) + e(k) + T^2 \ddot{q}_d(k) + (1-pT)TS(k) - \varepsilon T \text{sign}(S(k)) \\ \quad + 2q(k+1) + q(k) \\ S(k+1) \leq (1-pT)S(k) - \varepsilon T \text{sign}(S(k)) \end{cases}$
La largeur de la bande de quasi glissement	$2\Delta = 2 \frac{\varepsilon T}{1 - qT}$

#### 4.5 CAS DU ROBOT SCARA RP41

Nous voulons implémenter la commande à structure variable discrète afin que notre robot SCARA puisse se déplacer pour atteindre une consigne ou suivre une trajectoire désirée et ceci en partant d'un point quelconque du plan de mouvement. Pour ce faire, nous allons calculer la commande glissante discrète à partir du modèle discret du robot SCARA à chaque période d'échantillonnage et l'appliquer à notre système physique SCARA défini par l'équation dynamique suivante:

$$A(q, \dot{q})\ddot{q} + B(q, \dot{q}) = U \quad (4.12)$$

avec :

$U$  : est le vecteur de commande de dimension  $(3 \times 1)$

$A$  : est la matrice des coefficients d'inertie de dimension  $(3 \times 3)$ .

$B$  : est le vecteur des forces Centrifuge et Coriolis de dimension  $(3 \times 1)$ .

$q$  : est le vecteur des variables articulaire du robot SCARA de dimension  $(3 \times 1)$

#### 4.5.1 Modèle discret du robot SCARA RP41

Dans le domaine discret, toutes les grandeurs du système ainsi que la commande sont calculées aux instants d'échantillonnages, maintenues constante durant toute la période d'échantillonnage telle que :

$$\begin{aligned} U(t) &= U(k) \\ \ddot{q}(t) &= \ddot{q}(k) \quad \text{et} \quad kT < t < (k+1)T \\ A(t) &= A(k) \\ B(t) &= B(k) \end{aligned}$$

avec  $T$  : est la période d'échantillonnage

Pour avoir le modèle discret du robot SACARA RP41, nous utilisons l'approximation d'Euler pour le calcul de la dérivée, telle que :

$$\dot{q}(k) = \frac{q(k+1) - q(k)}{T} \Rightarrow q(k+1) = T \cdot \dot{q}(k) + q(k) \quad (4.13)$$

$$\ddot{q}(k) = \frac{\dot{q}(k+1) - \dot{q}(k)}{T^2} = \frac{q(k+2) - 2q(k+1) + q(k)}{T^2} \quad (4.14)$$

On déduit les équations (4.13) et (4.14) dans (4.12), nous obtiendrons l'équation aux différences du robot SCARA RP41, donnée par l'expression suivante :

$$q(k+2) = T^2 A^{-1}(k) (U(k) - B(k)) + 2q(k+1) - q(k) \quad (4.15)$$

- La représentation dans l'espace d'état discret

On pose :

$$\begin{aligned} X(k) &= (q(k), \dot{q}(k))^T \\ X(k+1) &= (q(k+1), \dot{q}(k+1))^T \end{aligned}$$

$$X(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 2I \end{bmatrix} X(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ T^2 A^{-1}(k) \end{bmatrix} U(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ -T^2 A^{-1}(k) B(k) \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

#### 4.5.2 Détermination de la surface de glissement

On définit la surface de glissement par :

$$S(k) = \lambda e(k) + \dot{e}(k)$$

avec

$$\dot{e}(k) = \frac{e(k+1) - e(k)}{T}$$

donc

$$S(k) = \lambda e(k) + \frac{e(k+1) - e(k)}{T} \quad (4.17)$$

$S$  : vecteur des coefficients de glissement de dimension  $(3 \times 1)$

$e$  : vecteur d'erreur à l'instant  $k$  de dimension  $(3 \times 1)$

$$e(k) = q_d(k) - q(k)$$

$q_d$  : vecteur de l'état désiré de dimension  $(3 \times 1)$

Pour un mode de glissement idéal, la trajectoire est maintenue sur la surface de glissement, et l'erreur au voisinage de la surface de glissement est nulle, telle que :

$$S(k) = S(k-1) = S(k+1) = S(k+2) \dots = 0 \quad (4.18)$$

Ainsi la commande équivalente du mode de quasi glissement idéal est donnée par l'équation suivante :

$$U_{eq}(k) = B(k) + A(k)T^{-2} [T^2 \ddot{q}_d(k) - \lambda T^2 \dot{e}(k)] \quad (4.19)$$

avec  $\ddot{q}_d(k) = \frac{q_d(k+2) - 2q_d(k+1) + q_d(k)}{T^2}$  et  $\dot{e}(k) = \frac{e(k+1) - e(k)}{T}$

ainsi la dynamique du système en mode de quasi glissement idéal est donnée par l'équation suivante :

$$\begin{cases} q(k+2) = A(k)[\ddot{q}_d(k) - \lambda \dot{e}(k)] + 2q(k+1) - q(k) \\ S(k) = \lambda e(k) + \frac{e(k+1) - e(k)}{T} = 0 \end{cases} \quad (4.20)$$



### 4.5.3 Détermination de la loi de la convergence pour le robot SCARA

La dynamique du plan de commutation  $S(x)$  pour un mode de quasi glissement est définie par l'équation suivante :

$$S(k+1) \leq (1 - pT_E)S(k) - \varepsilon T_E \text{sign}(S(k)) \quad \varepsilon > 0 \quad p > 0 \text{ et } (1 - pT_E) > 0 \quad (4.21)$$

la commande est déduite à partir de l'inégalité donnée par (4.21) comme suit :

$$\begin{aligned} S(k+1) &= \lambda.e(k+1) + \frac{e(k+2) - e(k+1)}{T} \\ \Rightarrow T S(k+1) &= \lambda.Te(k+1) + e(k+2) - e(k+1) \\ \Rightarrow T S(k+1) &= (\lambda T - 1)e(k+1) + q(k+2) - q_d(k+2) \end{aligned}$$

$$S(k+1) = T^{-1}[(\lambda T - 1)e(k+1) + T^2 A^{-1}(k)(U(k) - B(k)) + 2q(k+1) - q(k) - 2q_d(k+2)]$$

d'autre part nous avons:  $S(k+1) = (1 - pT)S(k) - \varepsilon T \text{sign}(S(k))$

La loi de la commande du mode de quasi glissement est donnée par:

$$\begin{aligned} U &= AT^{-2}(T(1 - pT).S(k) - \varepsilon T^2 \text{sign}(S(k))) \\ &\quad - (1 + \lambda T)e(k+1) + e(k) + T^2 \ddot{q}_d(k) + B(k) \end{aligned} \quad (4.22)$$

La dynamique du mode de quasi glissement est donnée par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} q(k+2) = (T(1 - pT).S(k) - \varepsilon T^2 \text{sign}(S(k)) - (1 + \lambda T)e(k+1) + e(k) + T^2 \ddot{q}_d(k)) \\ \quad + 2q(k+1) - q(k)B(k) \\ S(k+1) \leq (1 - pT)S(k) - \varepsilon T \text{sign}(S(k)) \end{cases} \quad (4.23)$$

Tableau 4.2: Synthèse de CSVD pour le mode robot SCARA RP41

Equation aux différences du SCARA	$q(k+2) = T^2 A^{-1}(k) (U(k) - B(k)) + 2q(k+1) - q(k)$
Dynamique du mode de glissement idéal	$\begin{cases} q(k+2) = A(k)[\ddot{q}_d(k) - \lambda \dot{e}(k)] + 2q(k+1) - q(k) \\ S(k) = \lambda e(k) + \frac{e(k+1) - e(k)}{T} = 0 \end{cases}$
Dynamique du mode de quasi glissement	$\begin{cases} q(k+2) = (T(1 - pT).S(k) - \varepsilon T^2 \text{sign}(S(k)) - (1 + \lambda T)e(k+1) + e(k) + T^2 \ddot{q}_d(k)) \\ \quad + 2q(k+1) - q(k)B(k) \\ S(k+1) \leq (1 - pT)S(k) - \varepsilon T \text{sign}(S(k)) \end{cases}$
Largeur de la bande de quasi glissement	$2\Delta = 2 \left  \frac{\varepsilon T}{1 - pT} \right $

#### 4.6 SIMULATION

Pour ces simulations, nous nous intéressons à l'effet d'échantillonnage sur le comportement des systèmes linéaire et non linéaire piloté par une commande à structure variable discrète ; ainsi la robustesse de ces derniers vis-à-vis de la charge transportée, les variations paramétriques et signaux de perturbation externes.

Pour le modèle dynamique du robot SCARA, nous adoptons le long de ces simulations un pas d'intégration  $p$  de  $1^{-3}$ , et on définit un paramètre  $R$  égal au rapport entre la période d'échantillonnage  $T$  et le pas d'intégration  $p$ .

Les tableaux ci-dessous représentent les valeurs choisies des paramètres  $p$  et  $\varepsilon$  de la commande, pour les deux types de systèmes.

Tableau 4.3 : Les paramètres de la commande pour le système linéaire

Mode de régulation	$\lambda = [75 \ 75 \ 75]$ $p = [10 \ 10 \ 10]$ $\varepsilon = [10 \ 10 \ 10]$
Mode de poursuite de trajectoire	$\lambda = [350 \ 350 \ 350]$ $p = [0.4 \ 0.5 \ 0.6]$ $\varepsilon = [0.5 \ 0.6 \ 0.9]$

Tableau 4.4 : Les paramètres de la commande pour le robot SCARA

Mode de régulation	$\lambda = [10 \ 10 \ 10]$ $p = [10 \ 10 \ 10]$ $\varepsilon = [0.1 \ 0.1 \ 0.1]$
Mode de poursuite de trajectoire	$\lambda = [10 \ 10 \ 10]$ $p = [10 \ 10 \ 10]$ $\varepsilon = [0.2 \ 0.2 \ 0.3]$

#### Analyse des résultats

- Cas d'un modèle linéaire discret

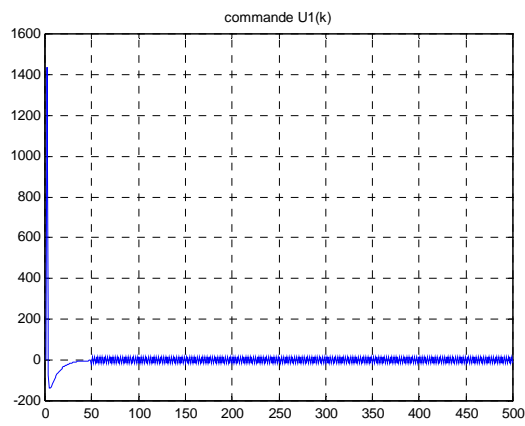
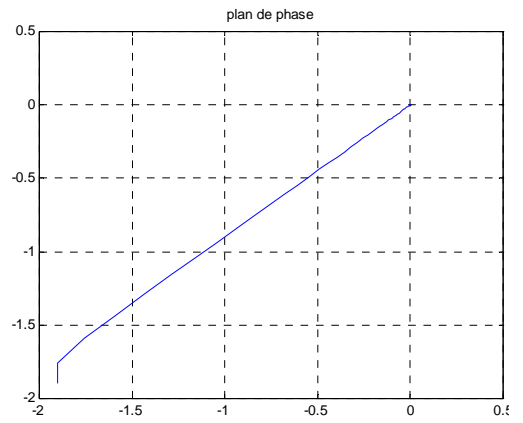
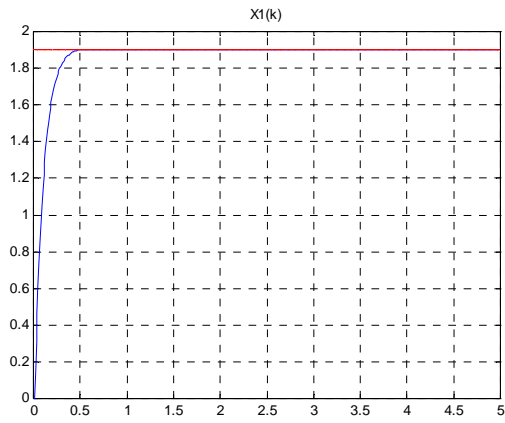
- ❖ Pour le mode de régulation, le système étant initialement au repos  $x(t=0)=[0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0]$ , nous voulons que  $x$  aboutisse à la consigne  $x_d=[1.9 ; 2.1 ; 5.9, 1.9 ; 2.1 ; 5.9]$  selon une dynamique libre et dans un temps finie. Ainsi les figures (4.2) et (4.3) montrent l'évolution de la position, vitesse, plan de phase et

commande de chaque bras pour les périodes d'échantillonnage suivante :  $T=0.01$  et  $T=0.025$ . Nous remarquons que pour une période d'échantillonnage de 0.01, l'état du système suit parfaitement l'état désiré ; tandis que pour la périodes 0.025 l'état du système oscille autour de l'état désiré et un mouvement de zigzag apparaît dans le plan de phase.

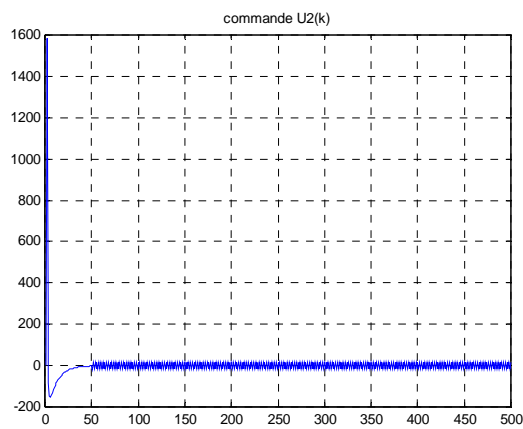
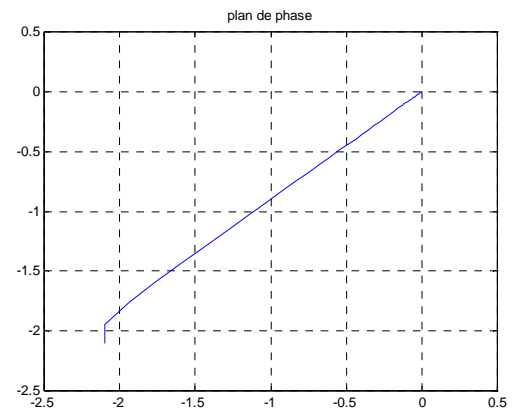
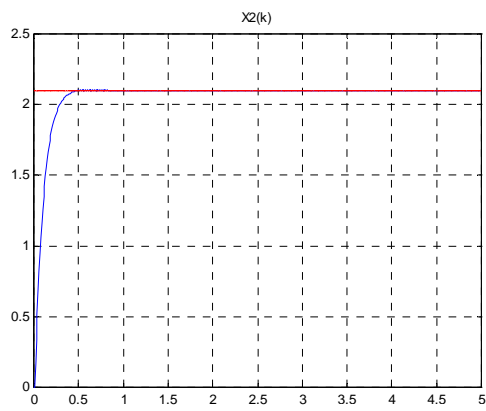
- ❖ En mode de poursuite de trajectoire, l'évolution du système est imposée, alors les positions, vitesses et accélérations désirées de chaque axe sont respectivement  $[3.2 ; 2.1 ; 2.2] \text{ rd}$  ,  $[.9 ; 1.1 ; .9] \text{ rad/s}$  et  $[.6 ; .6 ; .6] \text{ rad/s}^2$  , les figures (4.4) et (4.5) représentent l'allure des états pour  $T=0.01$  et  $T=0.058$  ; de même que le mode de régulation pour  $T=0.01$  donc une bonne qualité de poursuite et pour  $T=0.058$  un mouvement de zigzag apparaît.
- ❖ nous distinguons que lorsque la période d'échantillonnage diminue le système tend vers un mode de glissement et quand cette dernière augmente, alors le système tend vers un mode de quasi glissement ou les amplitudes des zigzags sont proportionnelles à cette période de discrétisation.
- ❖ le système linéaire discret est très sensible à la période d'échantillonnage surtout le mode de régulation et le bon choix de la période de l'échantillonnage est très nécessaire pour garantir la convergence du système
- Cas du modèle dynamique de robot SCARA RP41
  - ❖ Pour le mode de régulation, les figures (4.6) et (4.7) montrent l'évolution du système pour  $R=10$  et  $R=90$  respectivement ; alors nous remarquons que l'état du système converge vers la position désirée sans déplacement et l'atteint dans un temps fini ; l'erreur de poursuite est très faible pour  $R=10$ , mais au delà de ce rapport le système converge vers l'état désiré avec des oscillations de part et d'autre de ce dernier qui se traduit par un mouvement de zigzag dans le plan de phase,
  - ❖ Pour le mode de poursuite de trajectoire, les figures (4.8) et (4.9) représentent les allures de position, vitesse, commande et plan de phase de chaque segment du robot SCARA RP41 pour  $R=10$  et  $R=100$  respectivement; ainsi nous constatons que pour  $R=10$ , la poursuite de la trajectoire désirée est établie dans un temps fini et sans

déplacement, tandis que pour  $R=100$  l'erreur de la poursuite augmente. Plus que le rapport  $R$  augmente plus l'amplitude des zigzags augmentent et le système tend vers l'instabilité (Figure 4.10).

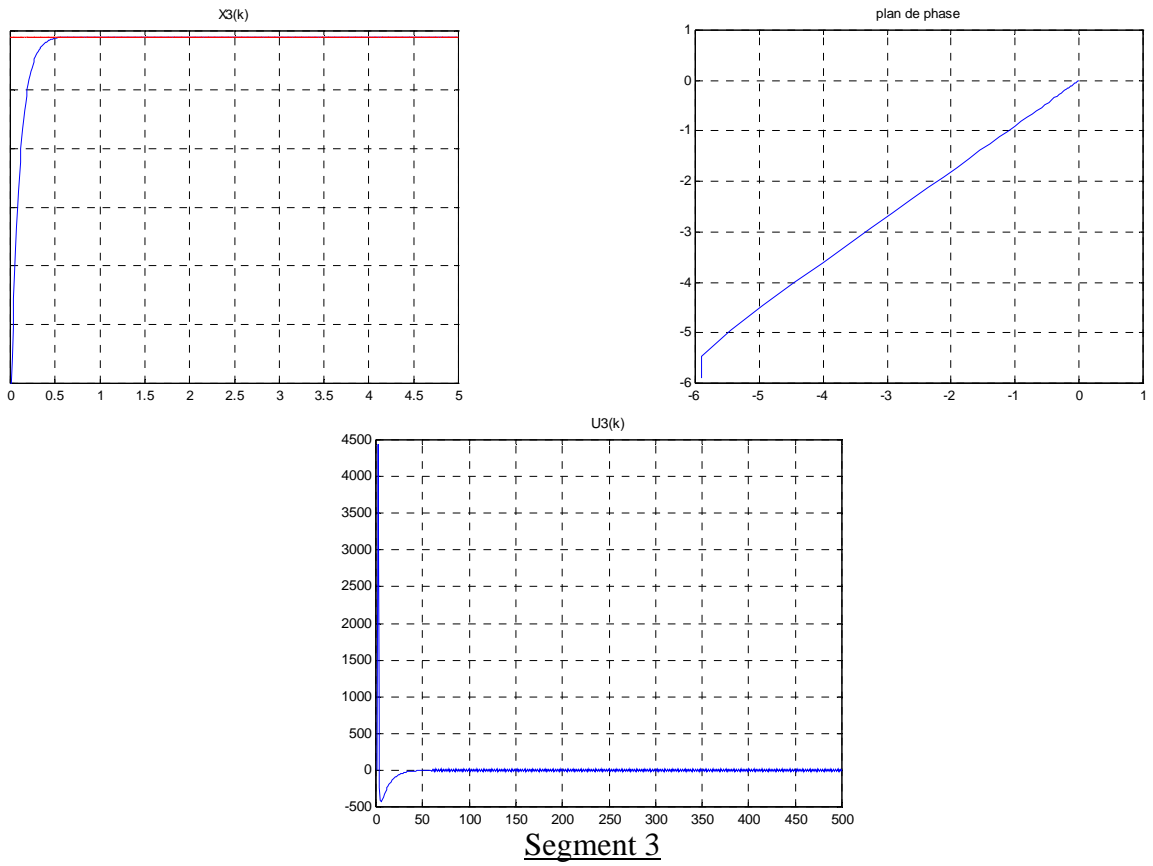
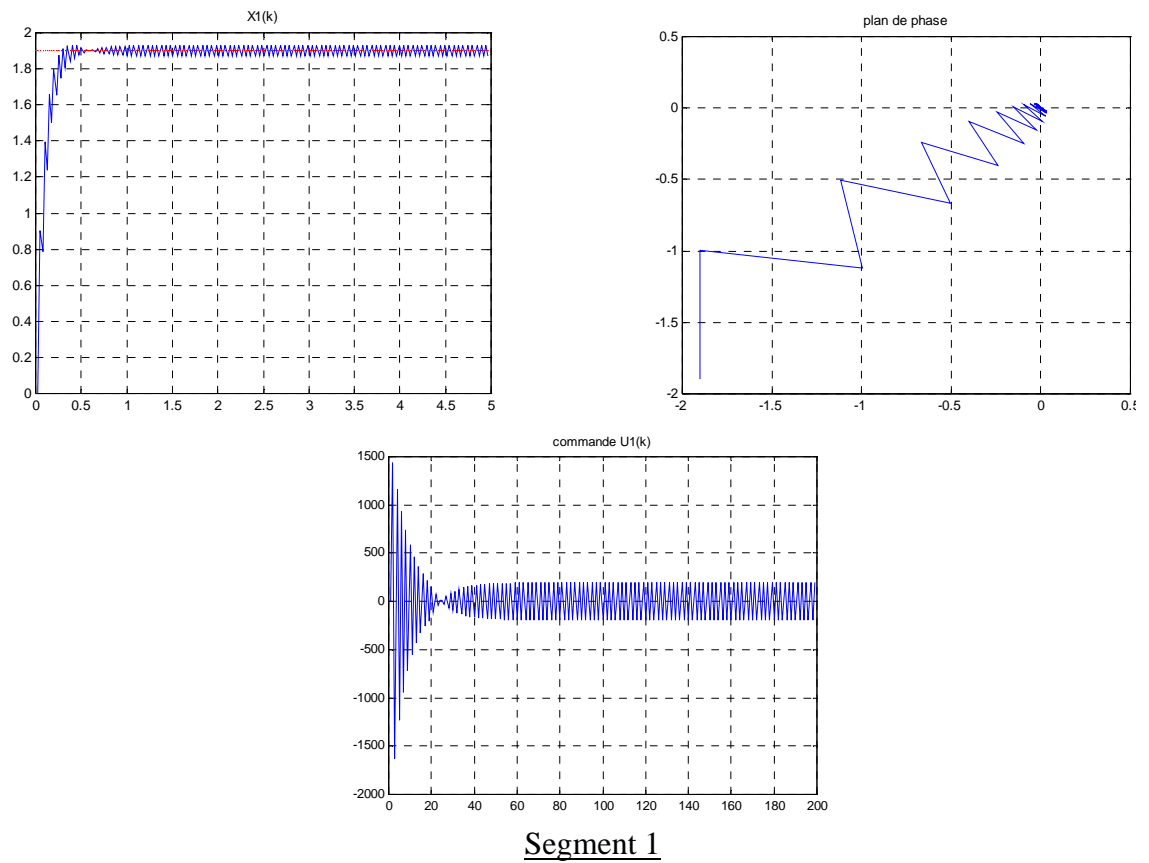
- ❖ l'augmentation de la période échantillonnage induit à une altération de la précision en régime permanent ainsi qu'un mouvement de zigzag le long de la trajectoire.
- ❖ Le mode de quasi glissement est réalisé et la convergence du système est toujours vérifiée pour un rapport de  $R$  entre 10 et 90 en mode de régulation ; et de 10 à 150 en mode de poursuite de trajectoire.
- ❖ le mode de régulation est plus sensible à la période de l'échantillonnage que le mode de poursuite. En mode de régulation, le système devient instable à partir de  $R=100$ , tandis qu'en mode de poursuite de trajectoire le rapport  $R$  peut atteindre jusqu'à 200.
- ❖ lorsque une période d'échantillonnage est égale au pas d'intégration ; le phénomène de broutement réapparaît et cette fois il est causé par le retard lié au temps de calcul de la commande (Figures 4.11 et 4.12).
- ❖ La figure (4.13), montre la robustesse de la CSVD vis-à-vis la charge transportée  $M_3= 5$  kg, et les signaux de perturbation externe où nous avons choisi simultanément pour chaque axe les signaux suivants. Un signal porte pour le premier axe, un signal sinusoïdal pour le second et un signal continu pour le dernier axe.
- ❖ Pour que la commande puisse contrebalancer les signaux de perturbations externes, il faut que l'amplitude de ses derniers soient strictement inférieurs à celle de la commande.

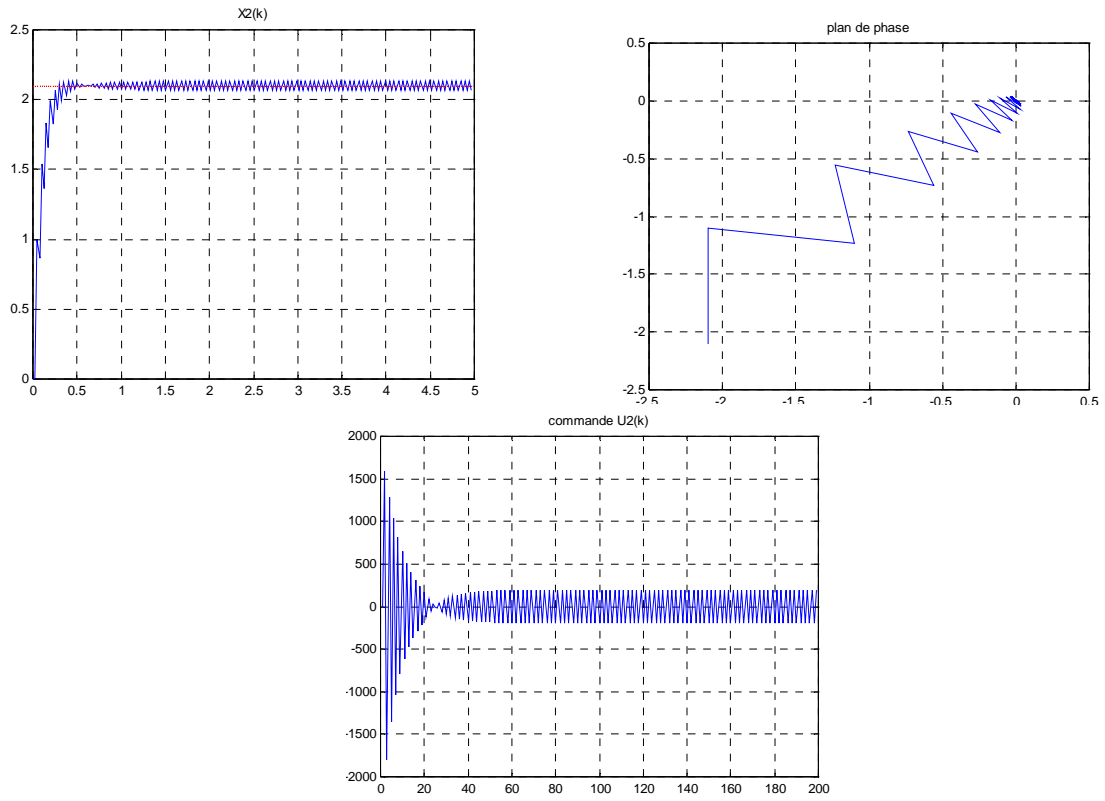


Segment 1

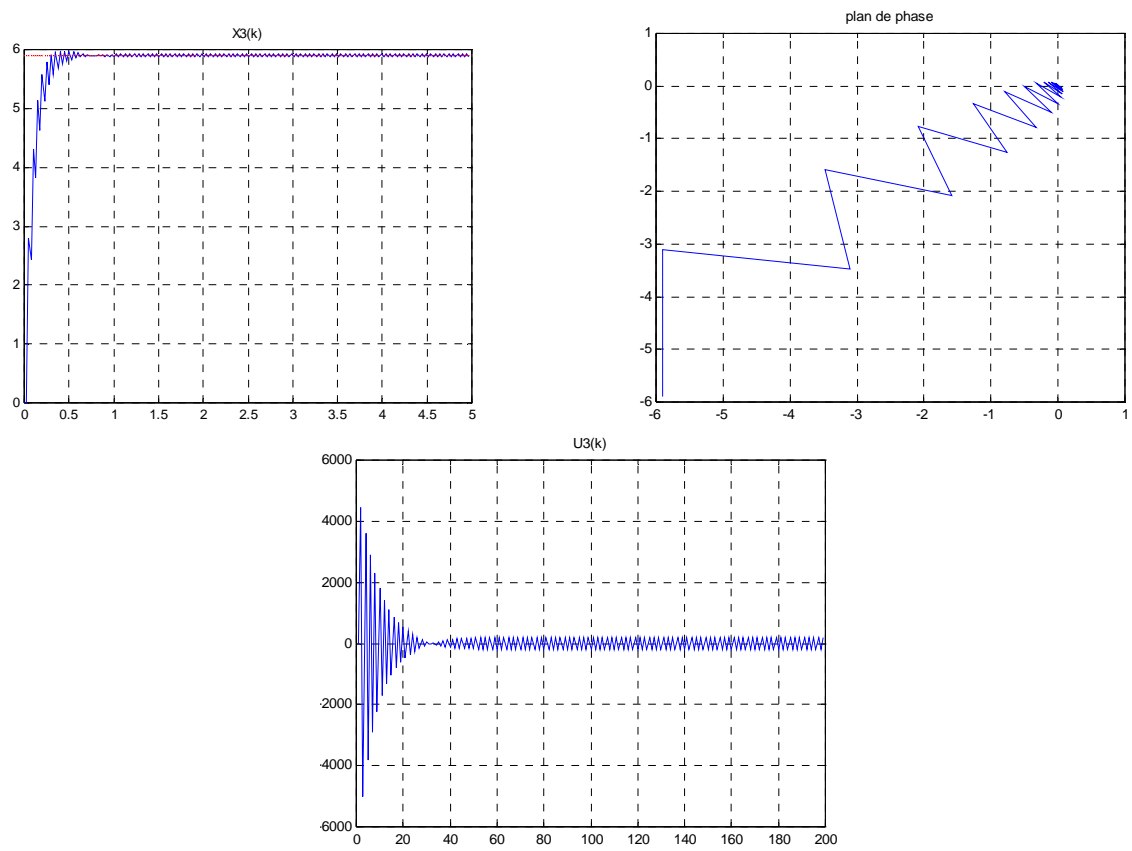


Segment 2

Figure 4.2: Mode de régulation pour le système linéaire et  $T=0.01$ 

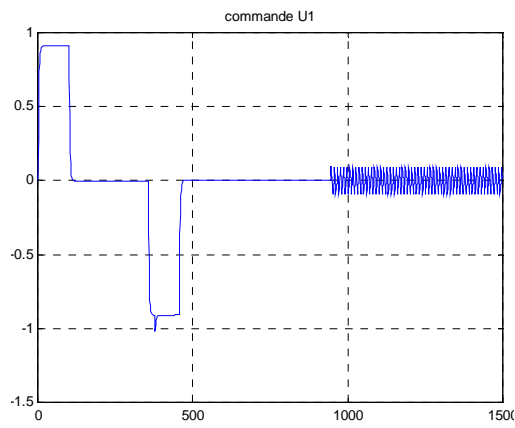
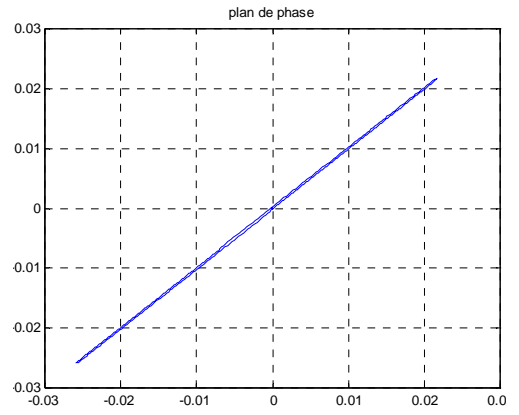
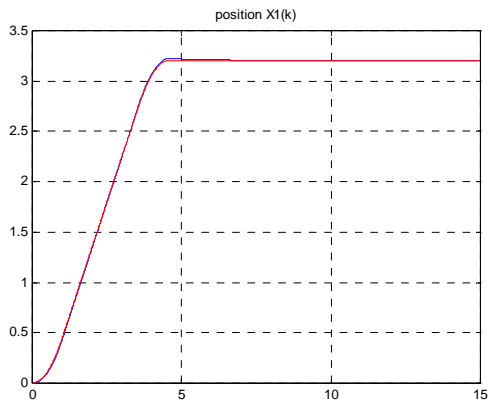


### Segment 2

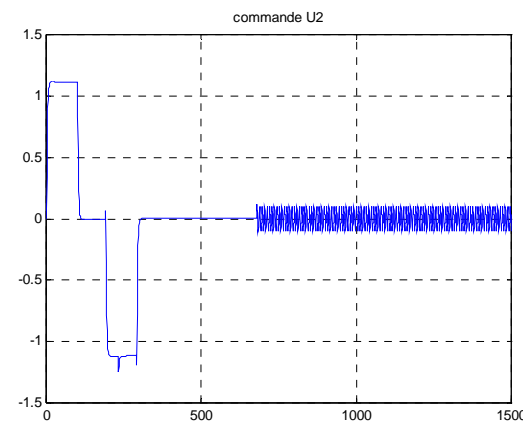
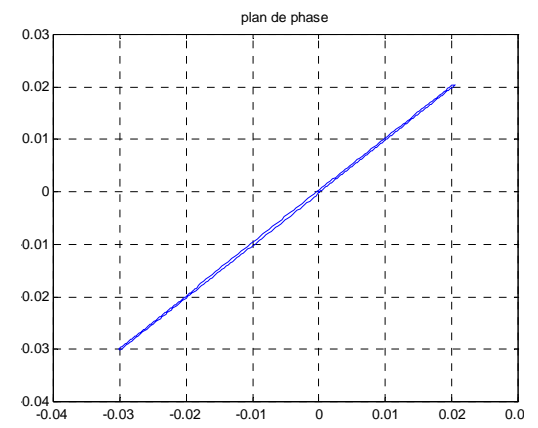
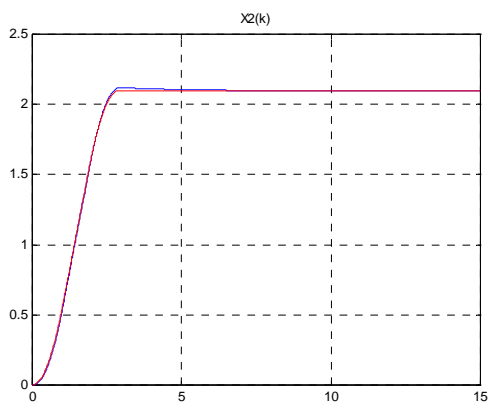


### Segment 3

Figure 4.3: Mode de régulation pour le système linéaire et  $T=0.025$

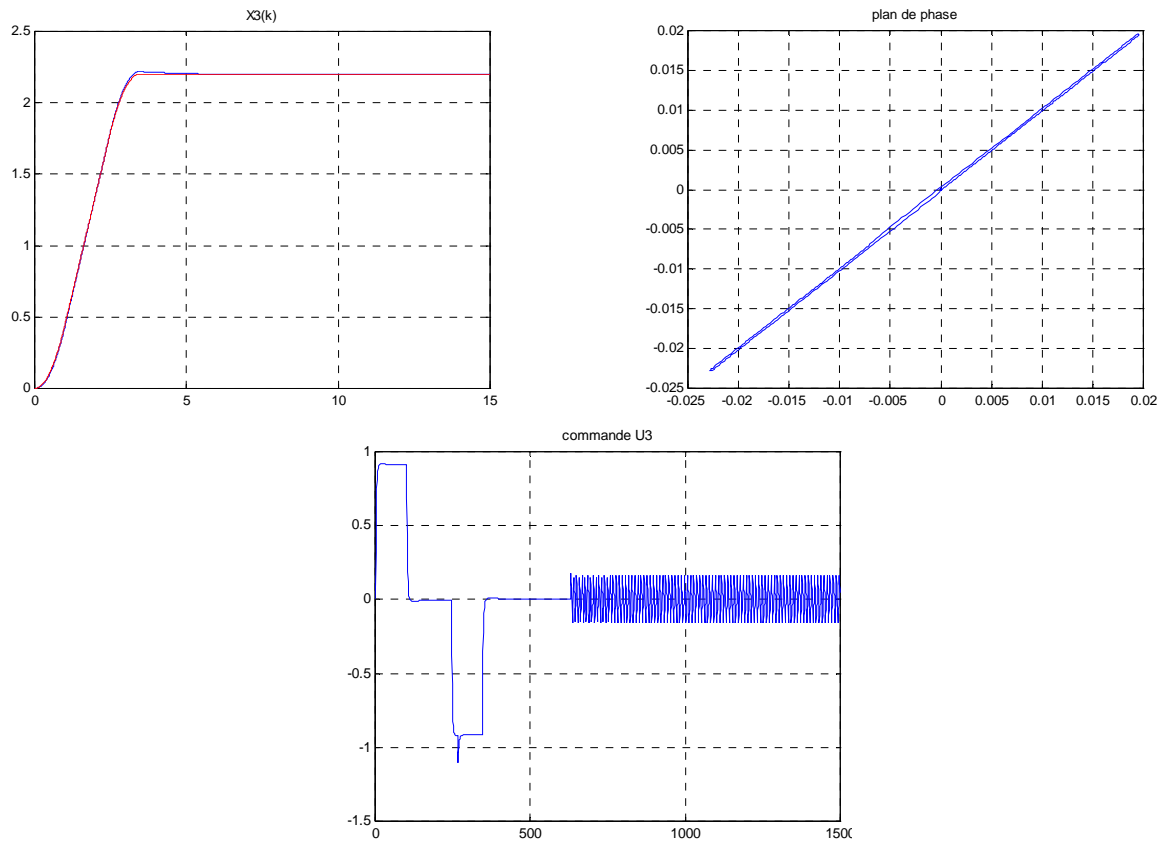


Segment 1



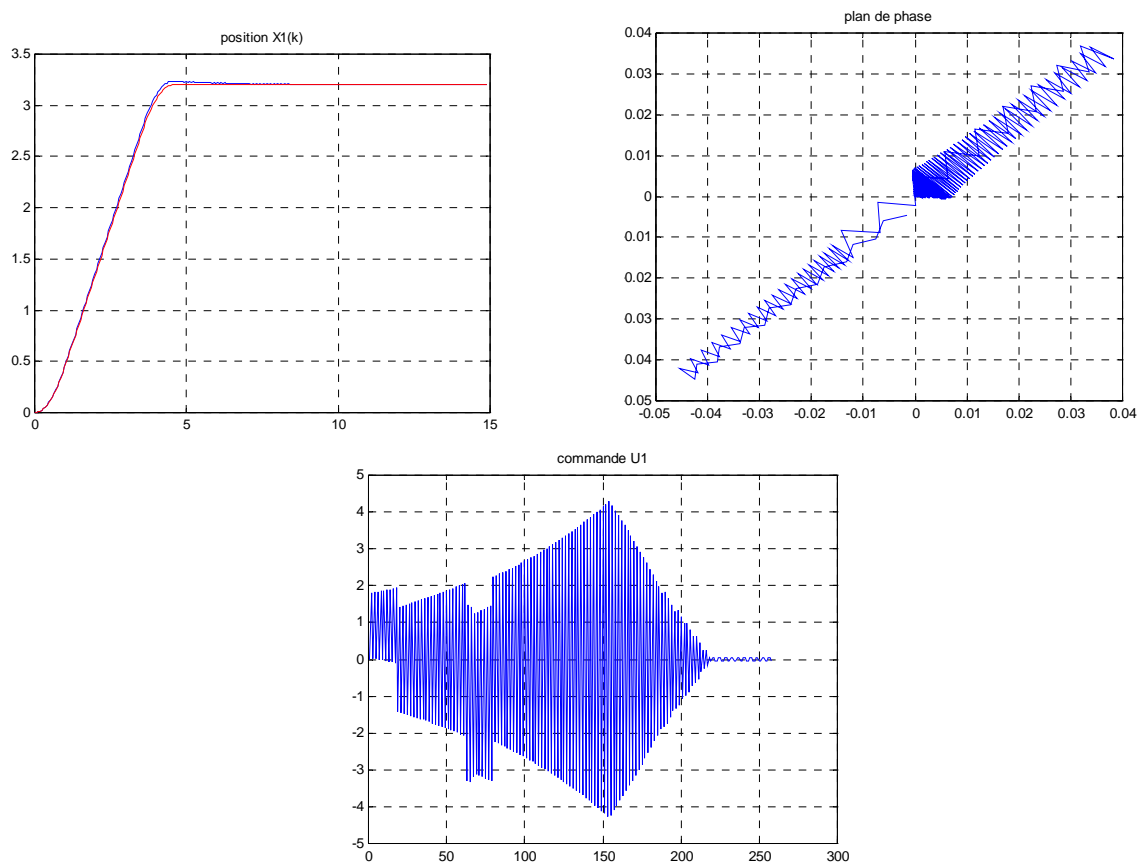
Segment 2





### Segment 3

Figure 4.4: Mode de poursuite de trajectoire système linéaire et  $T=0.01$



### Segment 1

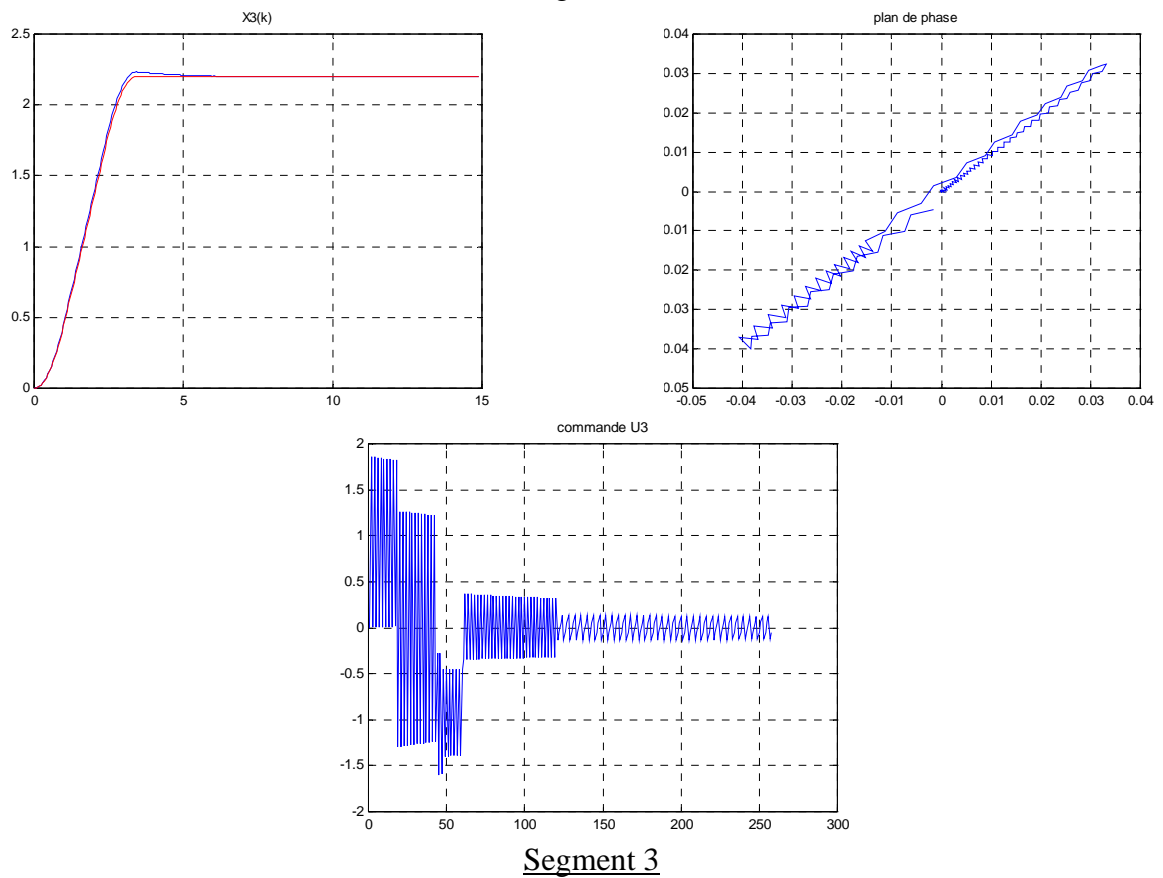
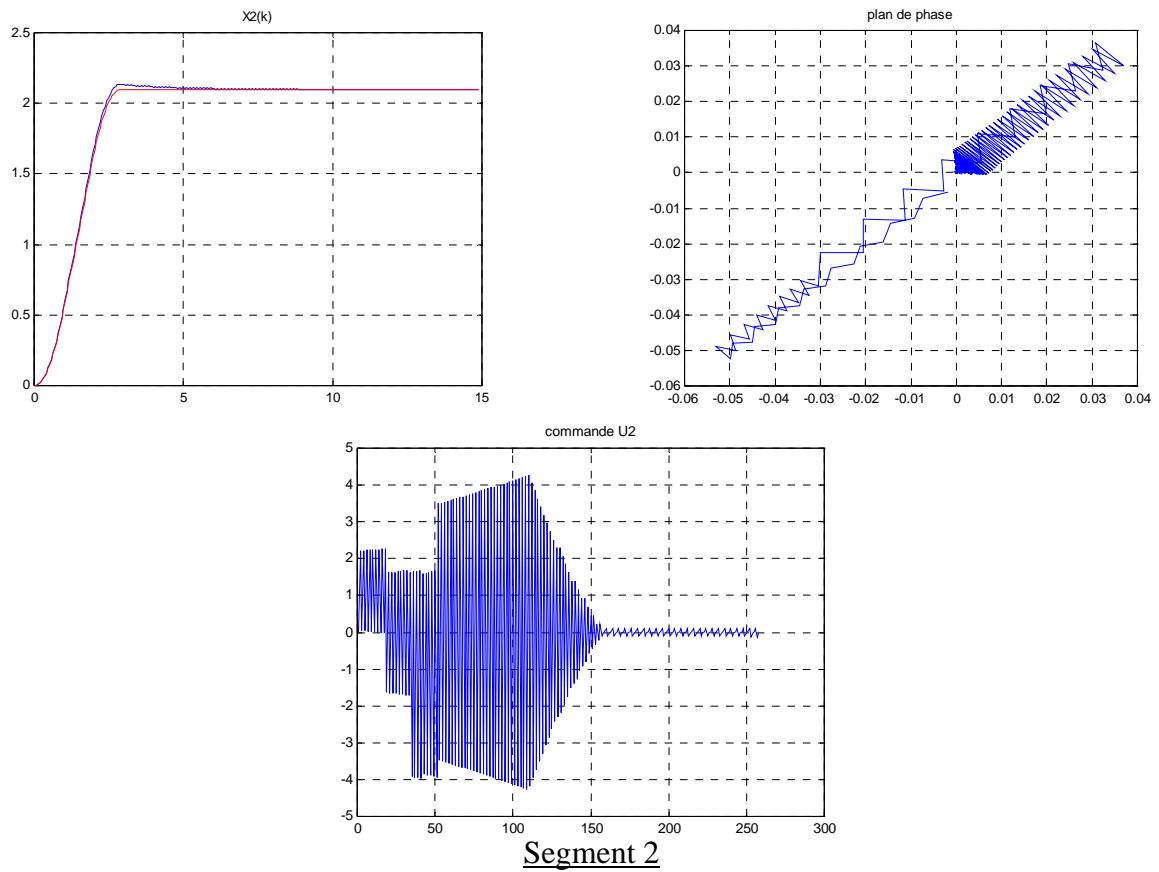
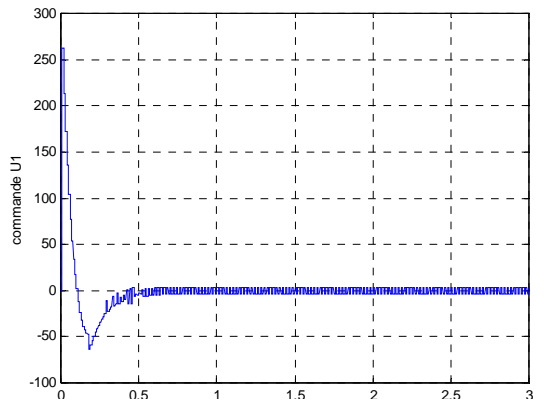
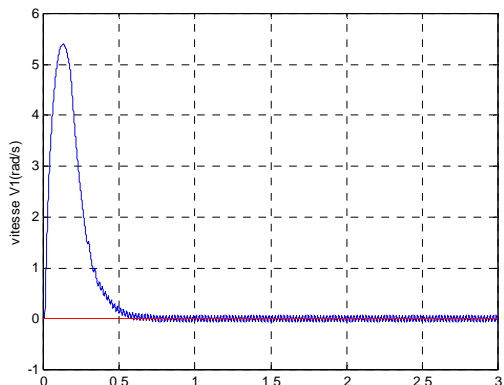
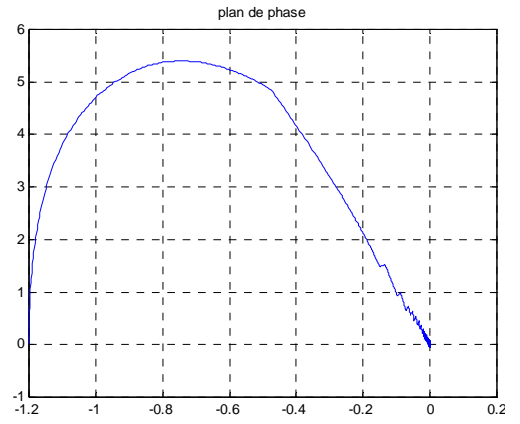
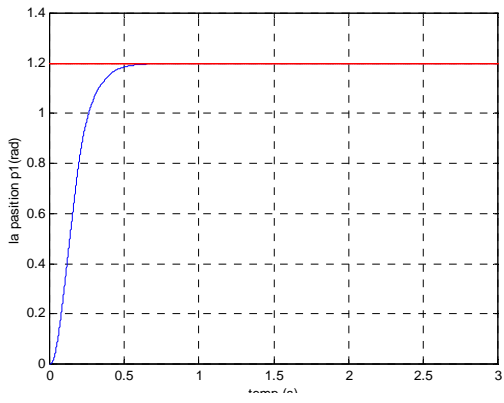
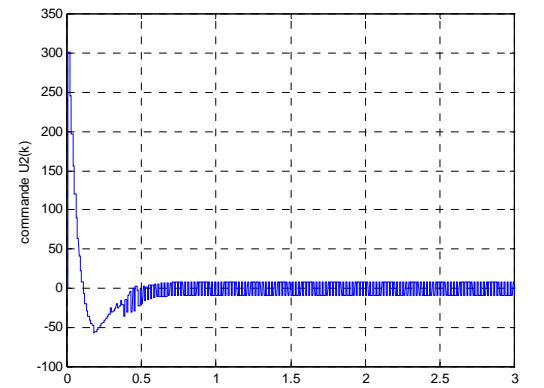
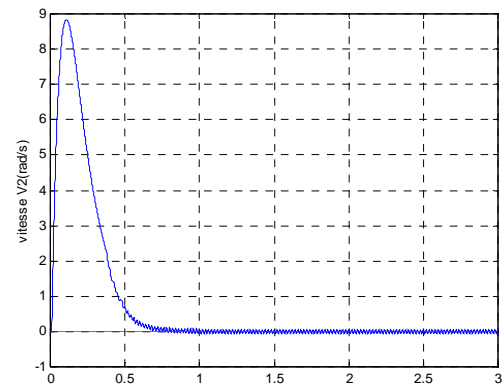
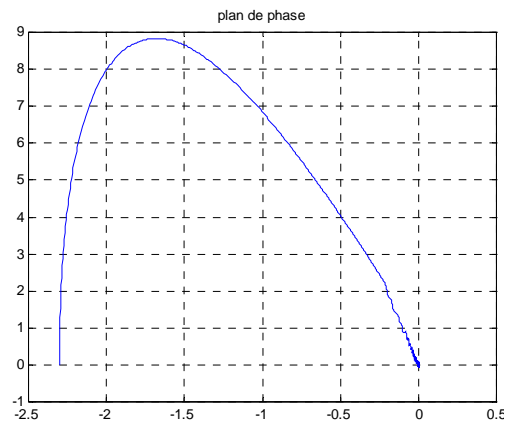
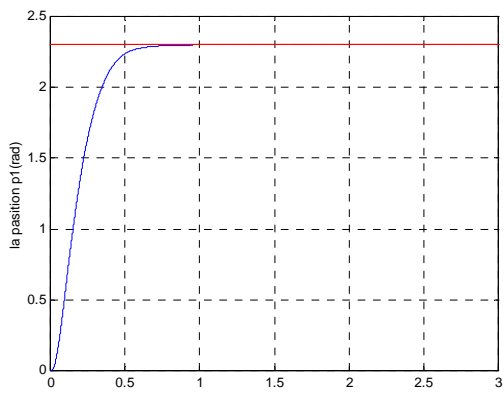


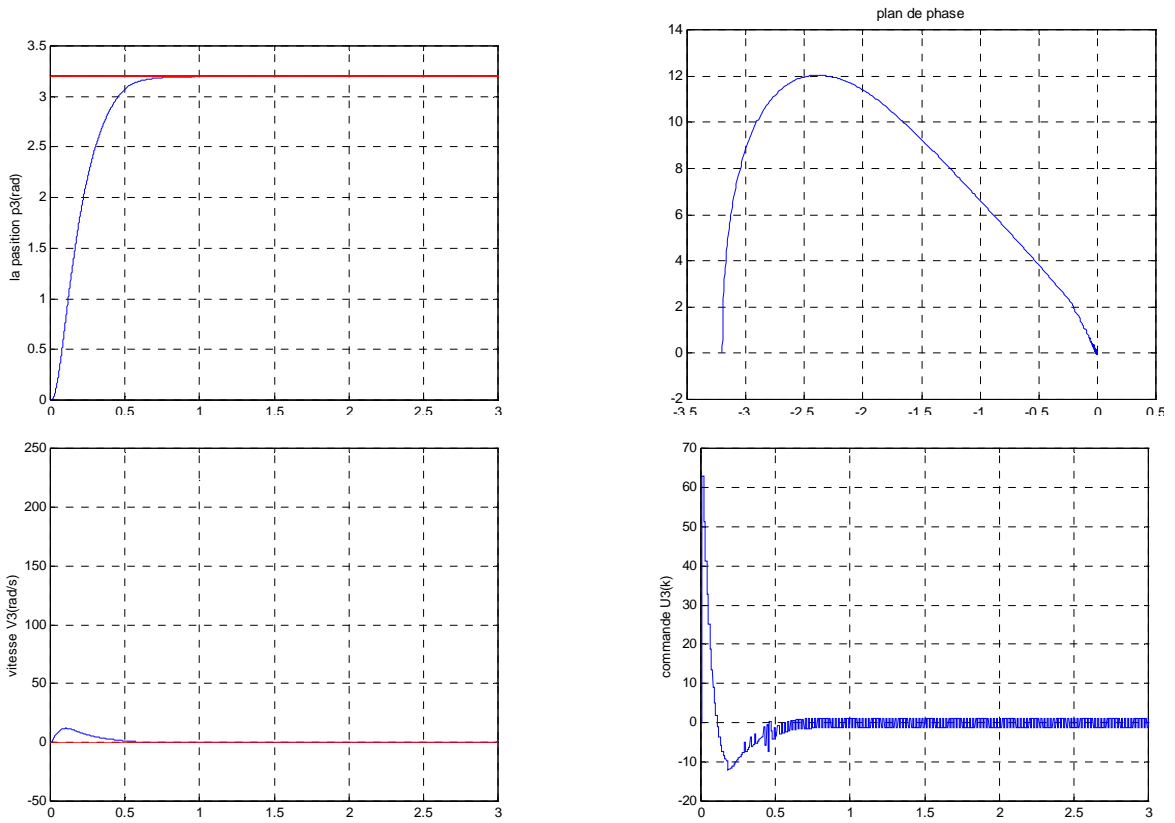
Figure 4.5: Mode de poursuite de trajectoire système linéaire et  $T=0.058$



Segment 1

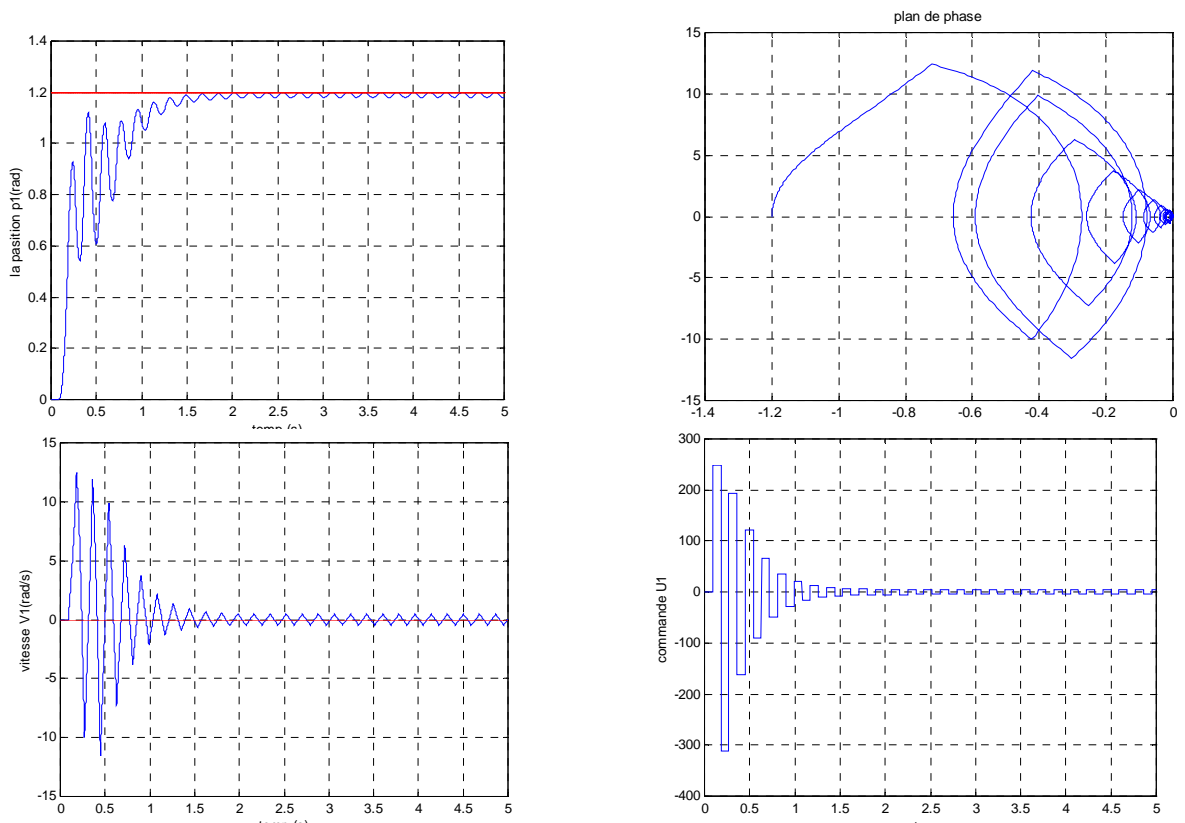


Segment 2

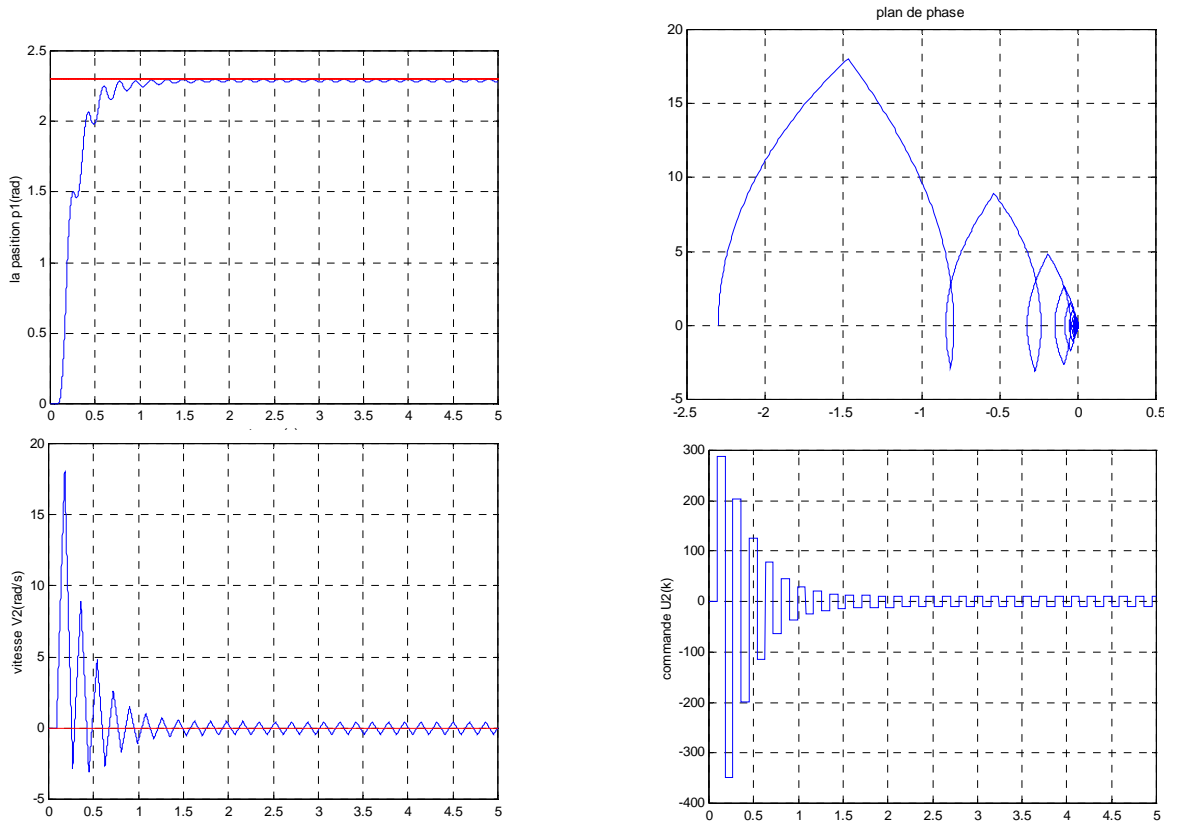


Segment 3

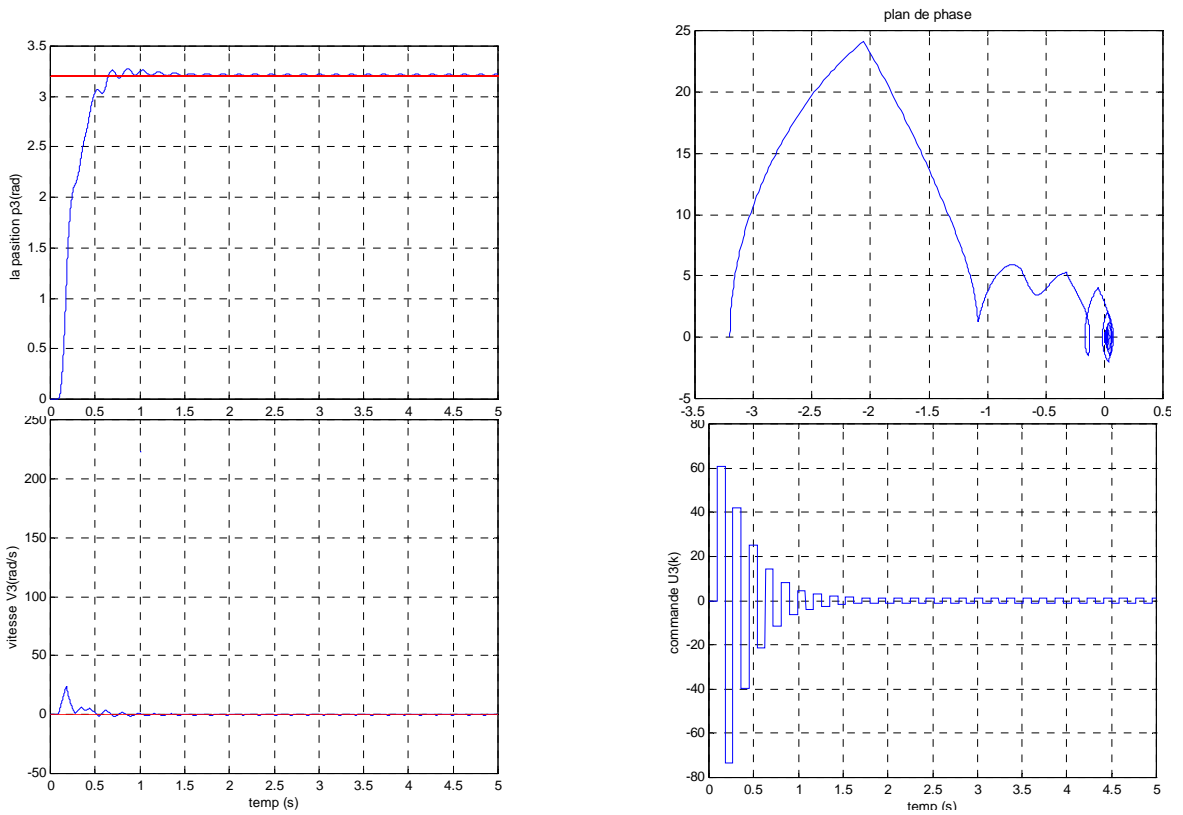
Figure 4.6 : Mode de régulation pour le robot SCARA avec  $R=10$



Segment 1

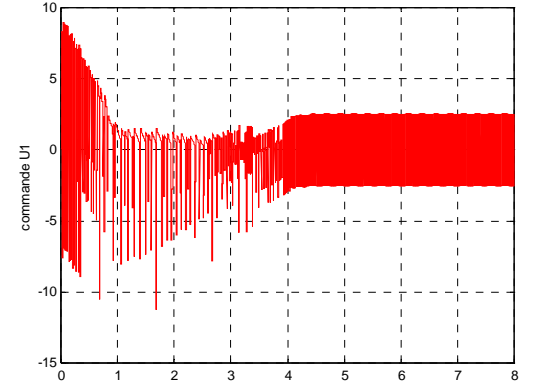
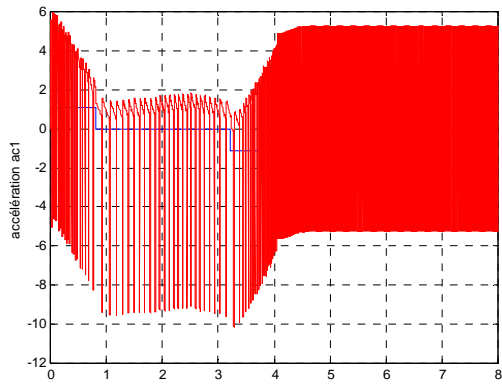
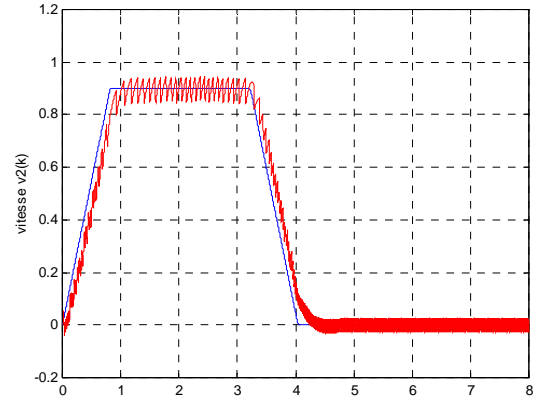
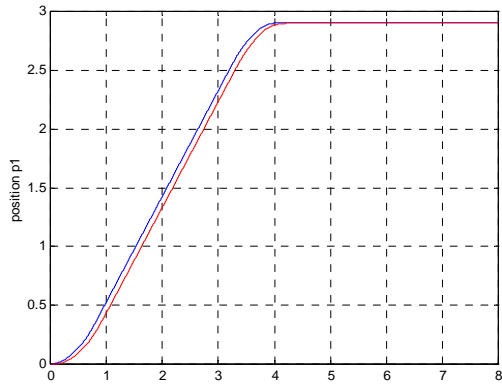


Segment 2

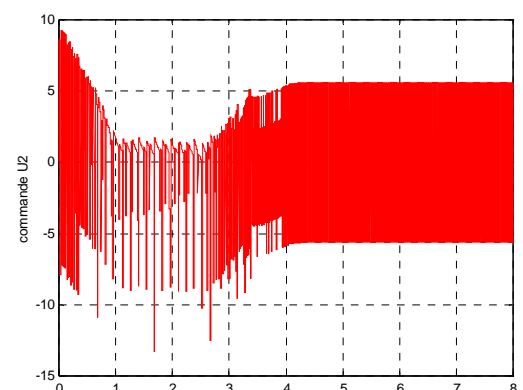
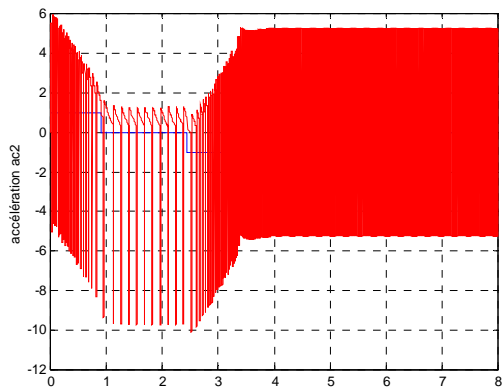
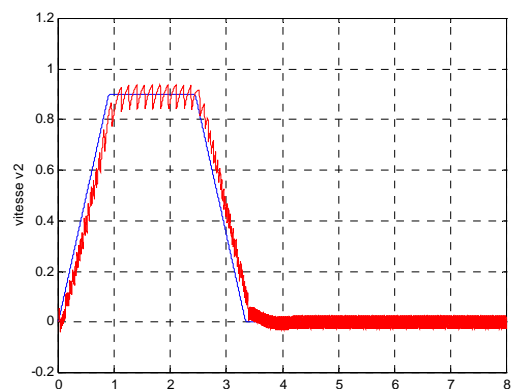
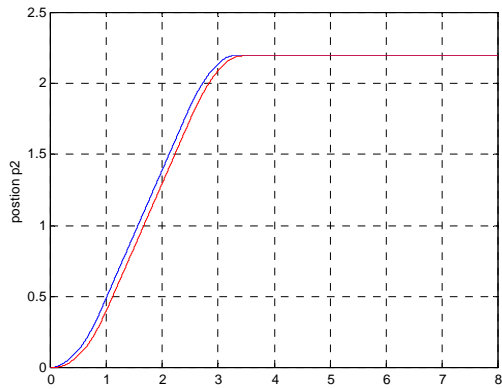


Segment 3

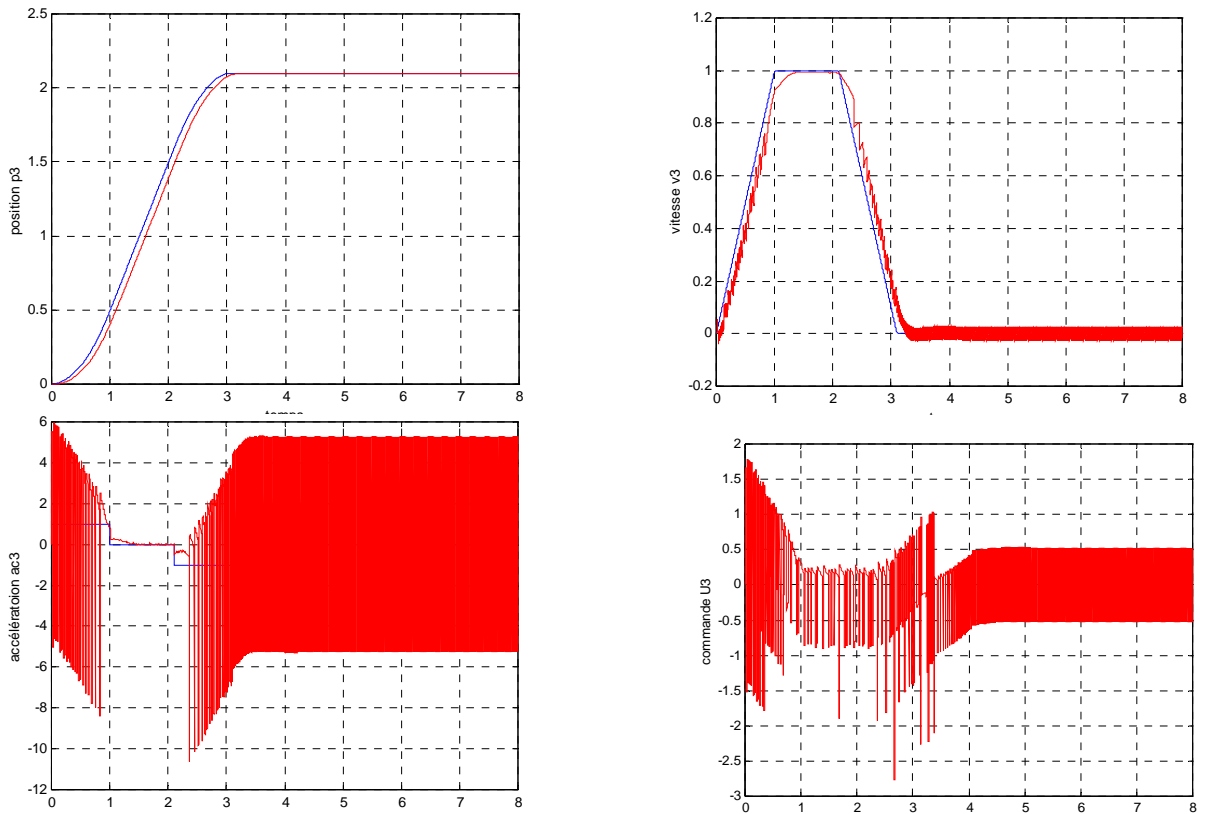
Figure 4.7 : Mode de régulation pour le robot SCARA avec  $R=90$



Segment 1

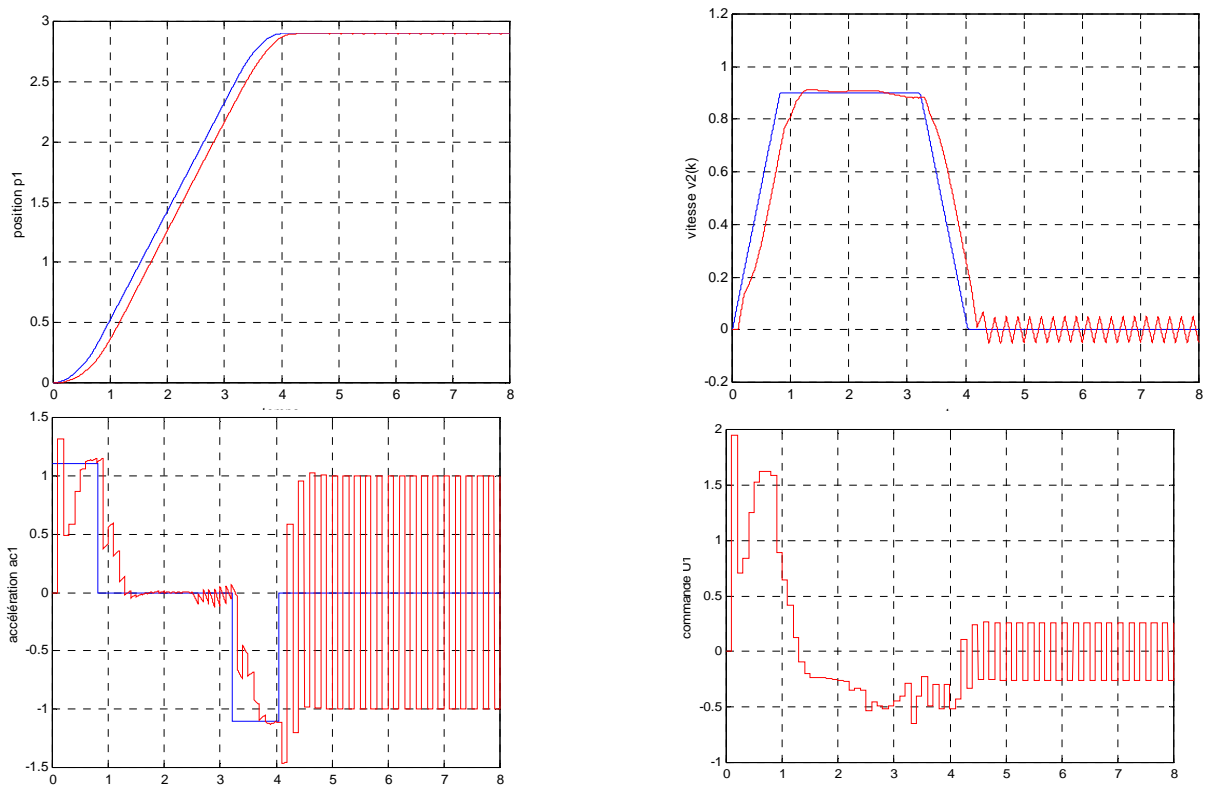


Segment 2

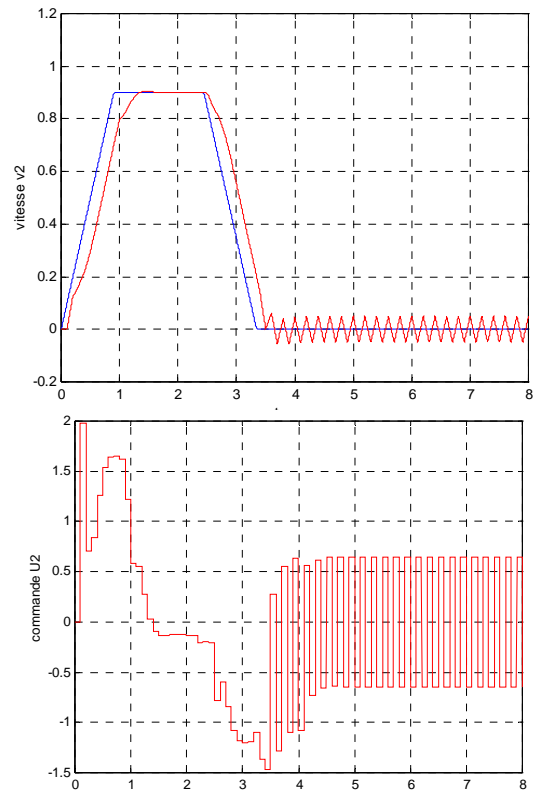
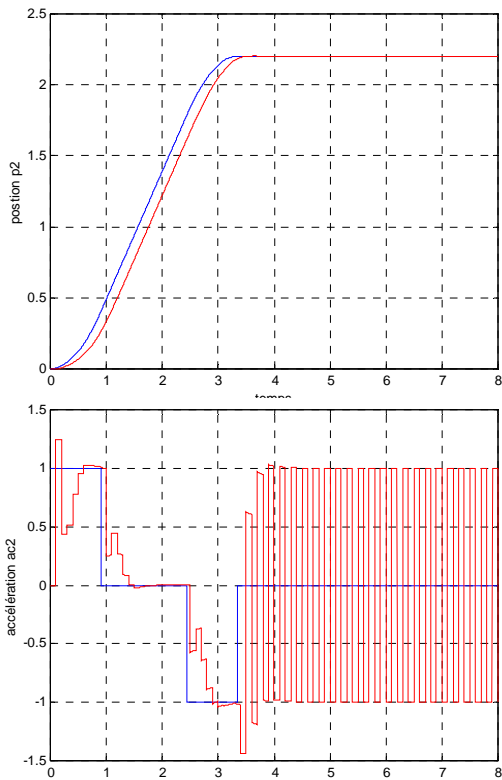


Segment 3

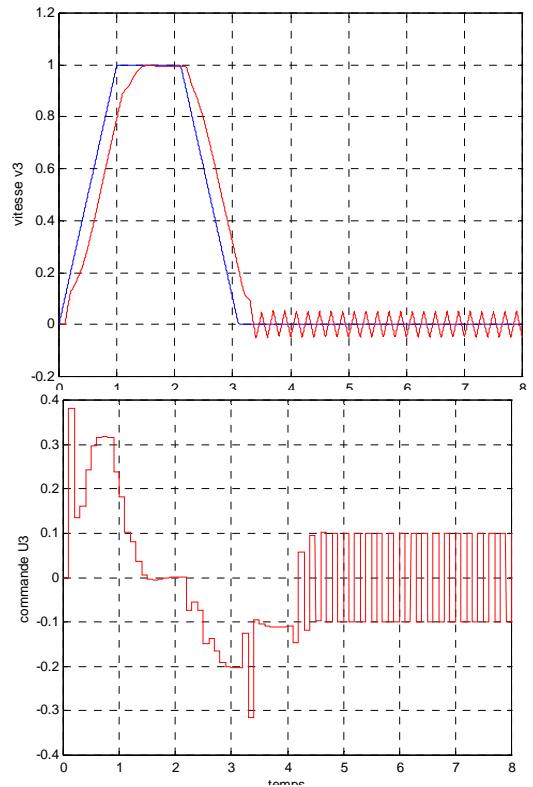
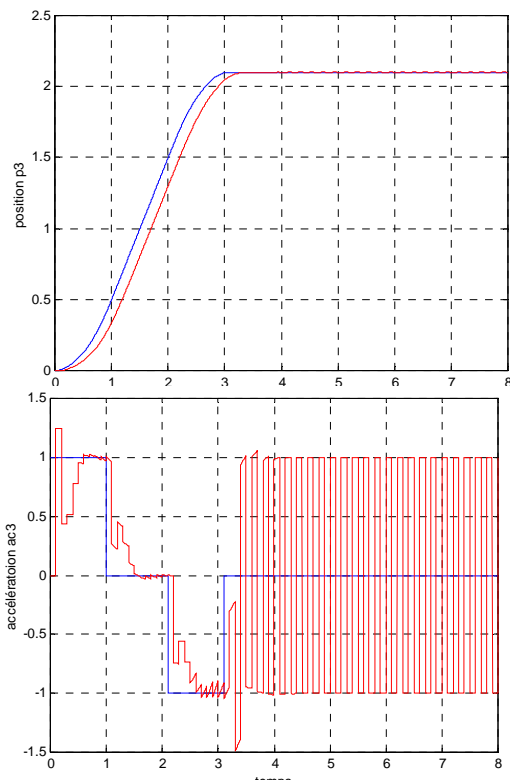
Figure 4.8 : Mode de poursuite de trajectoire pour le robot SCARA avec  $R=10$



Segment 1



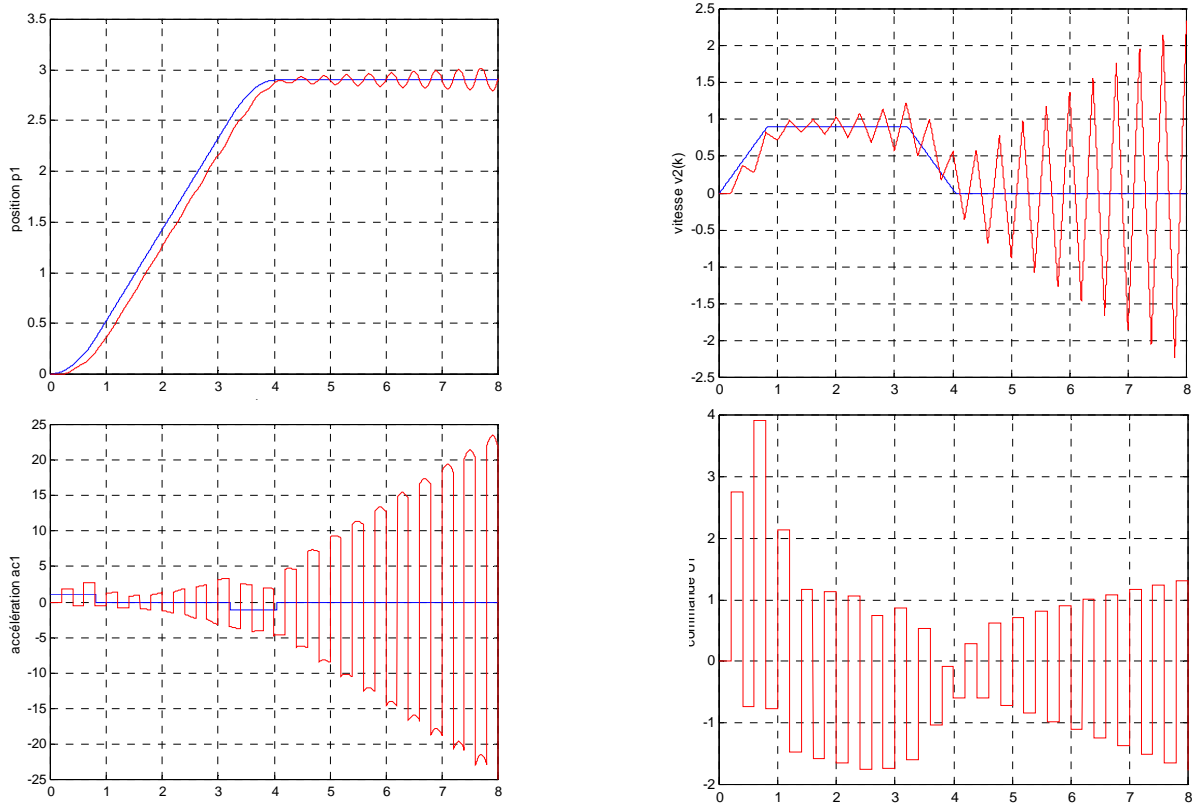
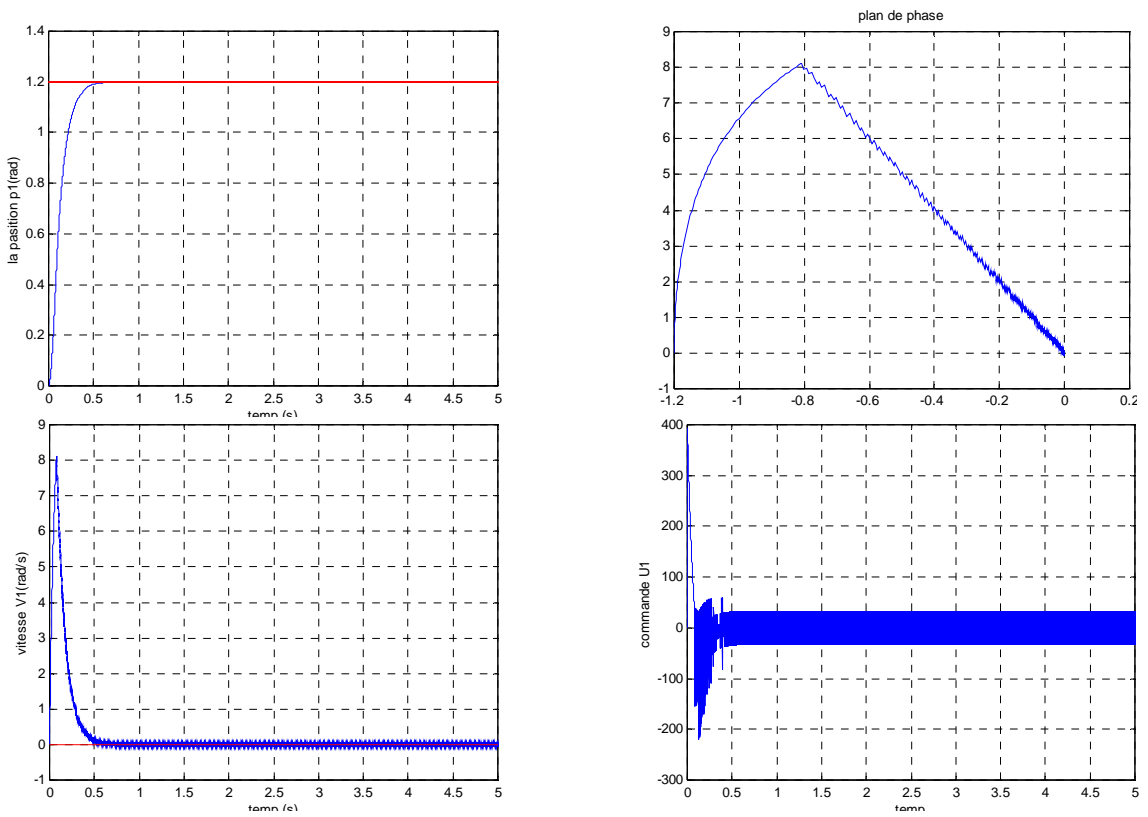
Segment 2



Segment 3

Figure 4.9 : Mode de poursuite pour le robot SCARA R=100



Figure 4.10 : Mode de poursuite pour SCARA avec  $R=200$ Figure 4.11 : Mode de régulation pour SCARA avec  $R=1$ (segment 1)

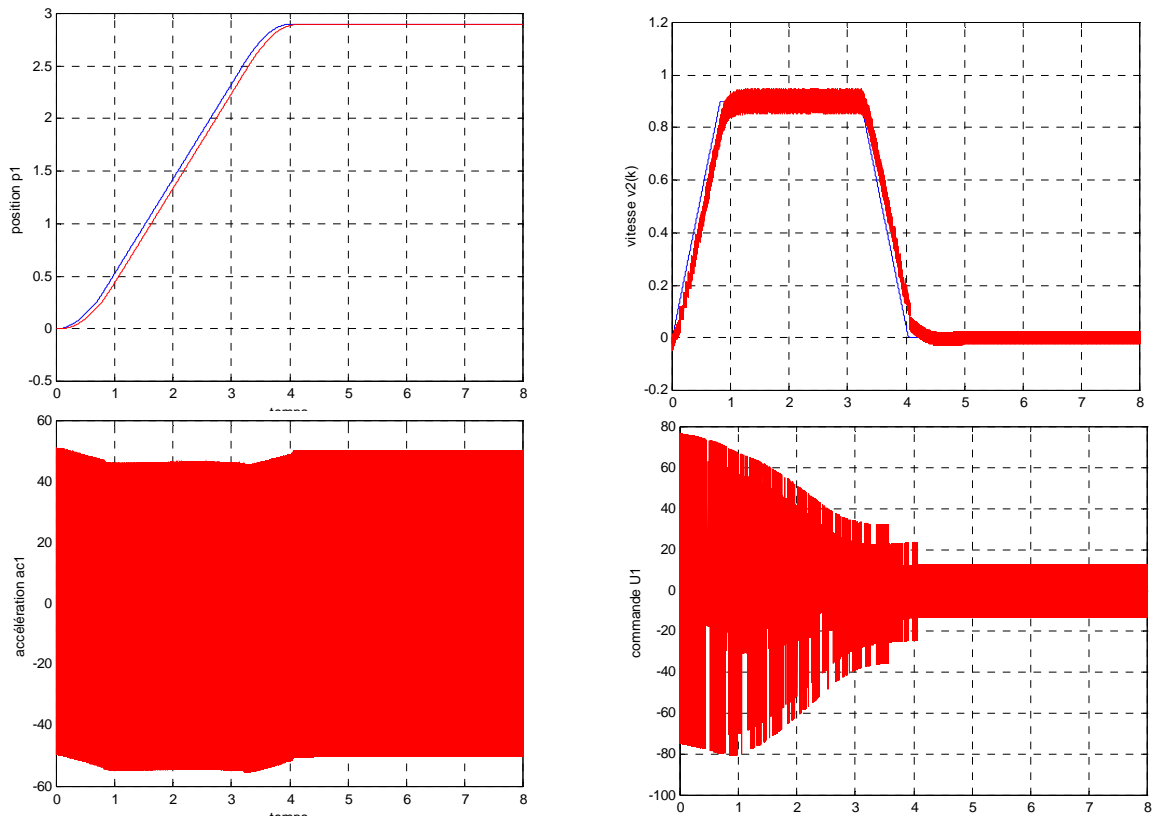
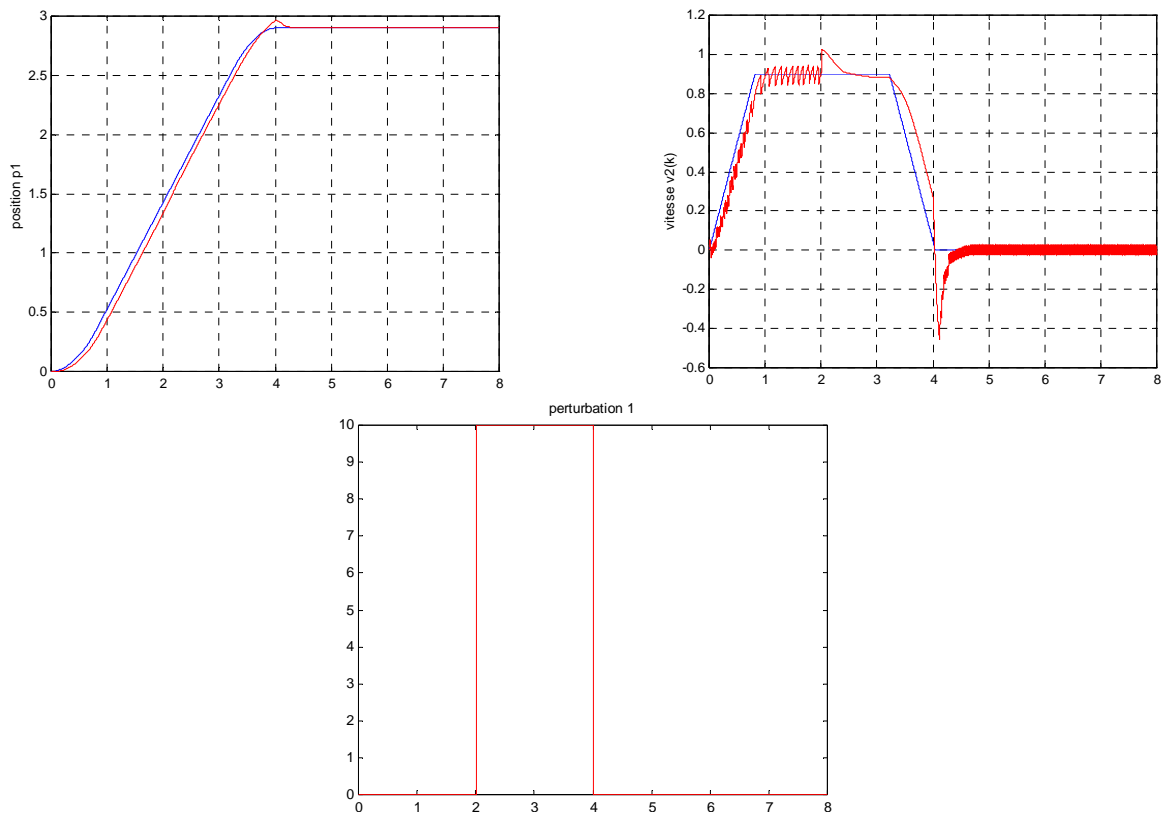
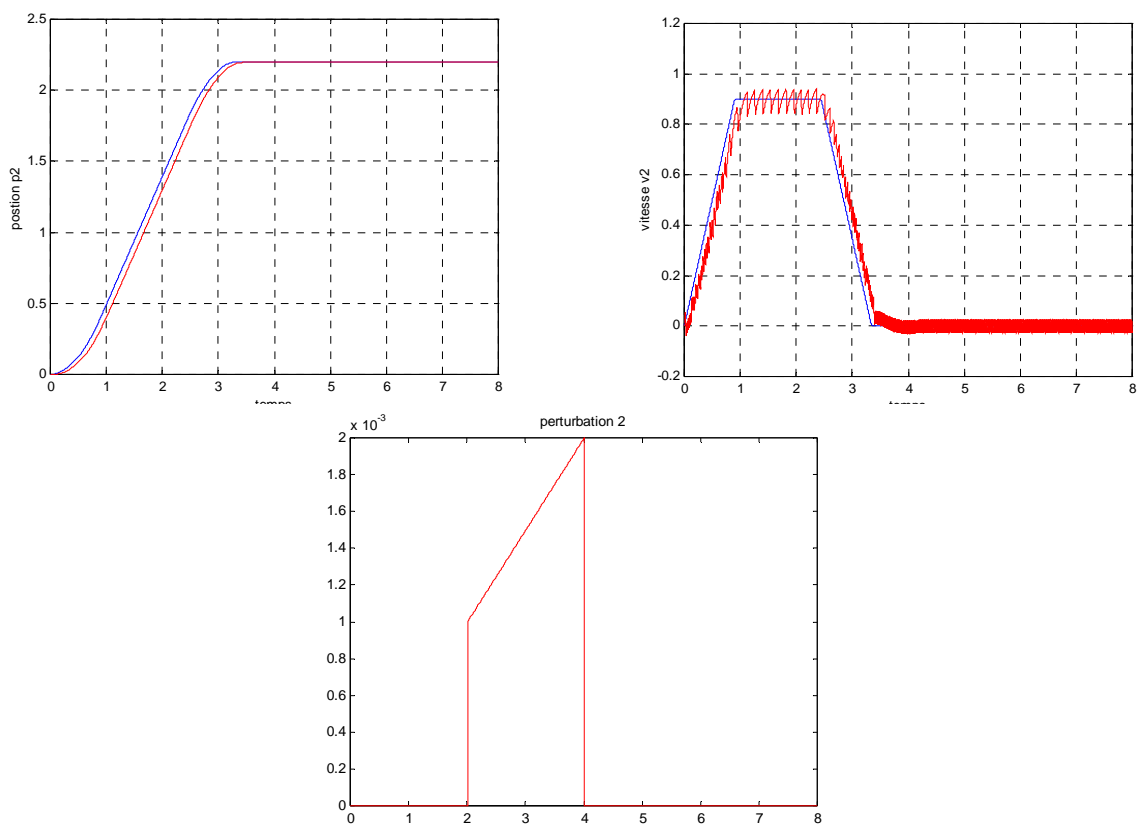


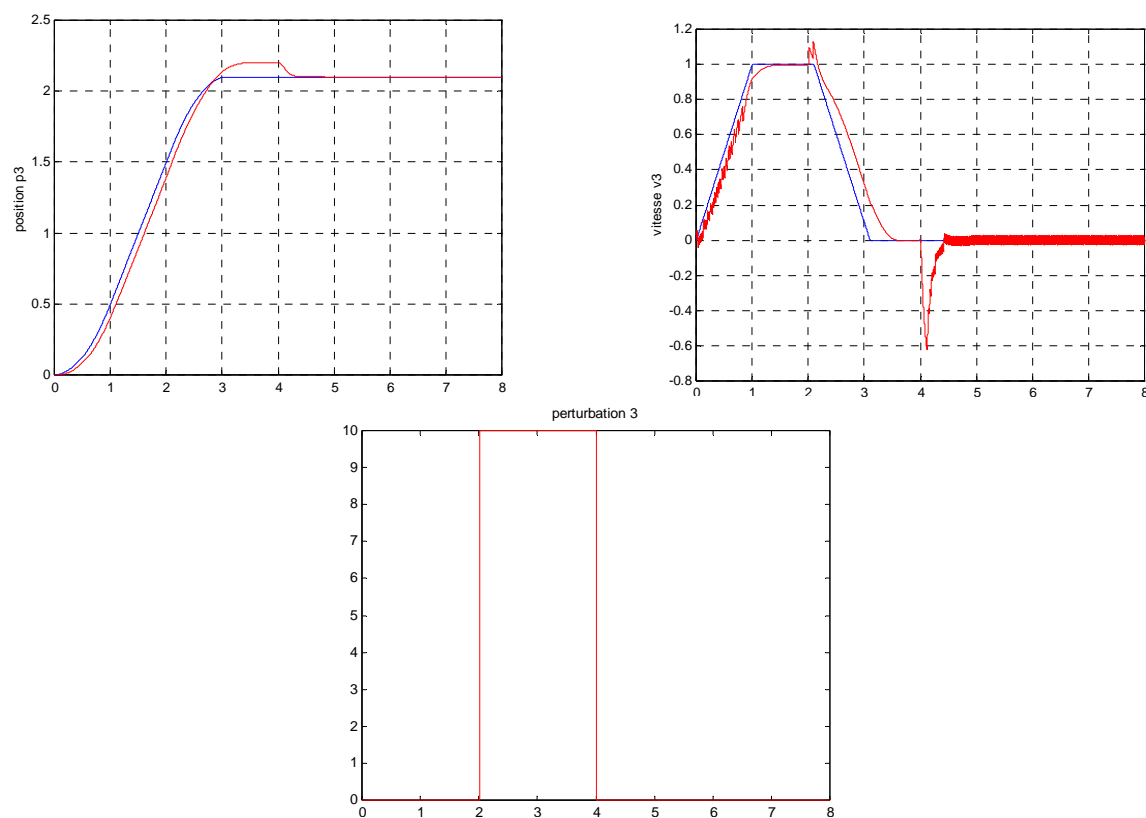
Figure 4.12 : Mode de régulation pour SCARA avec  $R=1$ (segment 1)



Segment 1



### Segment 2



### Segment 3

Figure 4.13 : Robustesse du robot SCARA vis-à-vis la charge transportée et les signaux de perturbation externes

#### 4.7 CONCLUSION

La commande à structure variable discrète par un mode de quasi glissement selon l'approche de la loi de la convergence a été implémentée pour les deux types de système. Pour le modèle mathématique du robot linéarisé et discrétisé et puis pour le modèle dynamique. Ainsi cette technique a été testée pour les deux modes de fonctionnement du robot (régulation et poursuite de trajectoire).

La rapidité et la robustesse face aux variations paramétriques, la charge transportée et les signaux de perturbation externes de cette technique ont bien été mises en évidence.

Les résultats de la simulation montrent la grande sensibilité des deux types de systèmes envers la période de l'échantillonnage. Une sensibilité qui se traduit par un mouvement de zigzag le long de la trajectoire d'état et autour du point d'équilibre, ce mouvement s'intensifie pour de longues périodes d'échantillonnages.

Lorsque la période d'échantillonnage diminue le système tend vers un mode de glissement du domaine continue.

L'augmentation de la période échantillonnage induit une diminution de la précision en mode de glissement et en régime permanent donc le bon choix de cette dernière est très important.

Pour une commande glissante discrète, il est impossible de générer une commande adéquate et nécessaire pour garder l'état du système sur la surface de glissement à cause du maintien constant de la commande entre deux périodes d'échantillonnages.

La commande à structure variable discrète est moins robuste par rapport à celle du domaine continu et elle ne possède pas la propriété de l'invariance.

## CONCLUSION GENERALE

Notre travail avait pour but d'analyser et de résoudre des problèmes de commande pour les systèmes dynamiques décrits par des modèles mathématiques.

Dans ce cadre, nous avons calculé les modèles mathématiques de robot SCARA RP41 tels que le modèle géométrique, le modèle cinématique et le modèle dynamique, ainsi nous avons spécifié le domaine d'utilisation de chaque modèle.

Le modèle géométrique couvre le domaine des tâches qui exigent beaucoup de précision, mais ne prend pas en compte le temps d'exécution, le modèle cinématique englobe les applications d'asservissement en vitesse tandis que le modèle dynamique est spécifié pour les applications où des exigences sur la rapidité et le temps d'exécution (exécution en temps réel) sont stricte. Donc ce n'est qu'à partir de ce modèle dynamique, une telle commande peut être élaborée.

Nous avons utilisé la commande à structure variable par mode de glissement dans le domaine continu. Cette technique de commande réputée robuste est connue pour sa puissance de point de vue rapidité, performance et insensibilité aux variations paramétriques et aux perturbations externes.

Après avoir implémenté les différentes extensions du correcteur à structure variable par mode de glissement, pour entraîner le robot SCARA à effectuer des mouvements en mode de régulation ainsi qu'en mode de poursuite de trajectoires, des résultats de simulation ont montré la robustesse des différentes extensions de la Commande à Structure Variable (CSV) vis-à-vis des variations paramétriques, des signaux de perturbation externes et la charge transportée, sachant que les gains des correcteurs sont calculés à partir du modèle dynamique simplifié.

D'autre part, l'insertion de la fonction de saturation au niveau de la composante discontinue de la commande a permis également de réduire les broutements.

Bien qu'ayant divers avantages, cette commande possède également certains inconvénients tels que le problème de broutement qui persiste toujours, car sa réduction se fait avec une perte de précision, d'autre part il n'y a pas une loi qui permet de calculer les coefficients de la surface de glissement et les gains de la commande discontinue.

Par la suite, nous nous sommes intéressés à la discrétisation du mode glissant, afin de commander notre système.

Dans les systèmes échantillonnés, les grandeurs échantillonnées et mesurées ainsi que la commande sont maintenues constantes pendant toute la période d'échantillonnage à l'aide d'un bloqueur d'ordre zéro.

La différence principale entre une commande à structure variable continue (CSVC) par mode de glissement et une commande à structure variable discrète (CSVD) par mode de quasi glissement est que la première est appliquée à n'importe quel instant, dès que la trajectoire d'état traverse l'hypersurface de commutation, par contre la deuxième, sa structure ne change qu'aux instants d'échantillonnage, où cette dernière est calculée, appliquée et maintenue constante durant toute la période d'échantillonnage; cette limitation est l'origine d'un mouvement de zigzag du point représentatif du système le long du mode de glissement et autour du point d'équilibre. Ce nouveau comportement peut rendre le système instable.

Plusieurs approches sont proposées afin de donner de nouveaux théorèmes, définitions et conditions d'existence et de convergence d'une commande glissante discrète.

Nous avons choisi l'approche de SARPTURK pour l'application de la CSVD sur le modèle dynamique linéarisé et discrétisé du robot SCARA, et d'après les résultats de la simulation nous avons constaté la grande sensibilité d'une CSVD vis-à-vis de la période d'échantillonnage, des variations paramétriques et des signaux de perturbation externes.

En suite, nous avons appliqué une autre approche qui est celle de la loi de convergence sur le modèle dynamique linéarisé et discrétisé du robot SCARA, puis sur son modèle dynamique, dans ce cas, nous avons remarqué que les deux types de systèmes sont sensibles à la période d'échantillonnage. Une sensibilité qui se traduit par des oscillations autour de la trajectoire désirée, l'amplitude de ces oscillations est proportionnelle à la

période d'échantillonnage, donc le choix de cette dernière est très délicat. Par contre la robustesse envers les variations paramétriques, la charge transportée et les signaux de perturbations externes est toujours vérifiée.

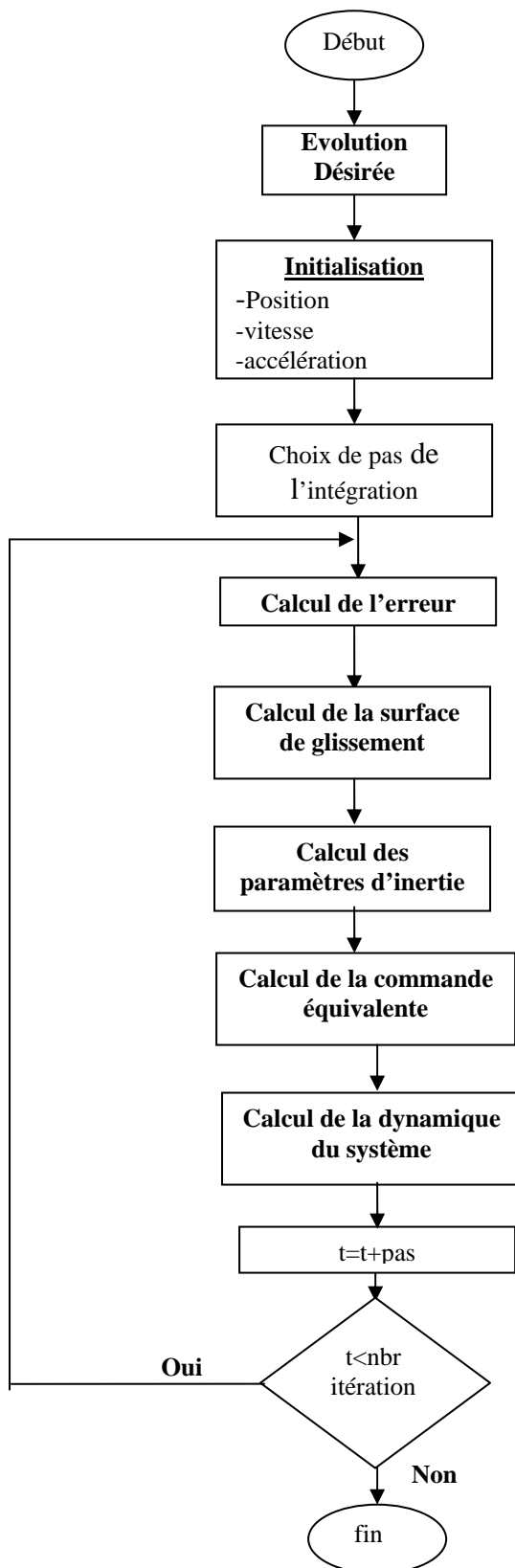
Nos perspectives concernant ce travail sont

Pour le domaine continu, l'utilisation de la technique de la Commande à Structure Variable Généralisée (CSVG) pour la réduction du broutement, puisque pour cette dernière, la discontinuité de la commande est au niveau de sa dérivée.

Dans le domaine discret, la résolution complète du technique de commande discrète et la solution du problème des zigzags dus à la période de l'échantillonnage.

## ANNEXE

## ❖ Organigramme de la commande à structure variable





Preuve des théorèmes du chapitre 3 section (3.4)

❖ Preuve du théorème 1

Lorsque le régime glissant est établi  $\Delta S = 0$

d'où :  $S_k = S_{k+1} = S_{k+2} \dots$

donc on peut écrire :  $G.x_{k+1} = G.x_k = G.f.x_k + G.B.u_k$

❖ Preuve du théorème 2

Substituant (3.30) et (3.31) dans (3.29) :

on obtient :  $\Delta S_{k+1} = G.B.F_D.x_k$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} S_k \Delta S_{k+1} &= S_k.(G.B).F_D.x_k \\ &= S_k.(G.B)[f_1, f_2, \dots, f_n].x_k \\ &= S_k.(G.B) \sum_{j=1}^n f_i.x_{kj} \end{aligned}$$

Si  $f_i$  est égal à  $f_0$  ou à  $-f_0$  alors :

$$\begin{aligned} S_k \Delta S_{k+1} &\leq - \sum_{i=1}^n \delta_i |f_i| \\ &\leq - \frac{1}{2} (G\Gamma)^2 \left( \sum_{j=1}^n |f_i| |x_{k,j}| \right)^2 \\ &\leq - \frac{1}{2} (\Delta S_{k+1})^2 \end{aligned}$$

On aboutit à la condition d'existence des régimes glissants  $V_{k+1} < V_k$ .

Maintenant dans le cas où  $S_k.x_{k,j} < \delta_i$  ( $S_k \neq 0$ ) alors  $f_i$  prend une valeur nulle.

Dans ce cas

$$\Delta S_{k+1} = G.B.F_D.x_k = 0 \text{ et } S_{k+1} = S_k \neq 0$$

Si  $|S_k.x_{ki}| < \delta_i$  alors on peut dire que  $G.x_k$  est proche de zéro et que  $x_k$  convergera vers sa valeur finale.

Concédons le cas où  $|G.B.S_k.x_{ki}| < S_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) où tout les  $f_i$  sont nuls et seule la

$$\Delta S_{k+1} = 0$$

qui induit  $S_k = S_{k+1} \neq 0$  donc on peut écrire la condition suivante :  $V_k = V_{k+1}$

Soit T une matrice tels que  $x_k = T\bar{x}_k$

$\bar{x}_k$  : est le vecteur d'état final

T : est un ensemble de vecteurs colonnes  $t_i$

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} \dots t_{1n} \\ \dots \dots \dots \\ t_{n1} \dots t_{nn} \end{bmatrix}$$

qui satisfait :

$$G.t_1 = 1 \quad \text{pour } i = 1$$

$$G.t_2 = 0 \quad \text{pour } i \neq 1$$

D'après le théorème 1, les variables d'état sur  $S_k = 0$  satisfont  $\bar{x}_{ki} \rightarrow 0$  pour  $i = 1 \dots n$

Par conséquent  $S_k = G.x_k \rightarrow \bar{x}_{k1}$

Si on substitue  $S_k$  dans  $(G.B)S_k.x_{ki}$ , alors pour  $k \rightarrow \infty$   $(G.B)S_k.x_{ki} \rightarrow (G.B)t_{1i}.\bar{x}_{k1}$ , pour

$$i=1, \dots, n, \text{ d'un autre côté : } \delta_i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n n(G.B)^2 . |x_{ki}| |x_{kj}| . f_0$$

$$\text{Peut être approchée par : } \frac{1}{2} (G.B)^2 |t_{1i}| |t_{1j}| . f_0$$

$$\text{L'équation (3.36) peut être majorée } G.B|t_{1i}|.x_{k1}^2 \text{ puisque, } 0 < f_0 < \left| \frac{2}{G.\Gamma \cdot \sum_{j=1}^n |t_{1j}|} \right|$$

$|G.B.S_k.x_{ki}| > \delta_i$  quand  $k \rightarrow \infty$  se qui contre dit  $V_k = V_{k+1}$ . Par conséquent la trajectoire d'état ne peut satisfaire  $\Delta S_{k+1} = 0$  le long du mode de glissement, alors que :

$$S_k \rightarrow 0 \quad \text{pour } k \rightarrow 0$$

$$x_k \rightarrow 0 \quad \text{pour } k \rightarrow \infty$$

Cela démontre qu'en mode de glissement, le point représentatif de l'évolution du système ne peut être maintenu sur l'hypersurface de glissement, par conséquent son comportement est oscillatoire le long de cette hypersurface.

Preuve des théorèmes du chapitre 3 section (3.9)

❖ Preuve du théorème 1

Pour  $|S_n| > \sigma T$  et selon l'équation (3.79.a) nous avons  $|\Delta S_n| < |S_n|$  et  $|\Delta S_{n-1}| < |S_n|$

en multipliant par  $S_n$  on aura  $|S_n \cdot \Delta S_n| < |S_n|^2$  et  $|S_n \cdot \Delta S_{n-1}| < |S_n|^2$ .

Se qui implique  $(-S_n \cdot \Delta S_n < |S_n|^2)$  et  $(-S_n \cdot \Delta S_{n-1} < |S_n|^2)$  ;

c'est  $-S_n \cdot S_{n+1} + S_n^2 < S_n^2$  et  $S_n^2 - S_n \cdot S_{n-1} < S_n^2$

Ce qui prouve que  $S_n \cdot S_{n+1} > 0$  et  $S_n \cdot S_{n-1} > 0$ .

❖ Preuve du théorème 2

Pour  $|S_n| > \sigma T$  et à partir du théorème 1 :

On déduit l'équation (3.79.a) dans  $S_n S_{n+1} > 0$ , se qui implique que :  $S_n S_{n+1} = |S_n| |S_{n+1}|$ .

A partir de (3.79.b) alors :  $|S_n| |S_{n+1}| - |S_n|^2 < -\eta T |S_n|$

En éliminant  $|S_n|$  des deux cotés on trouve  $|S_{n+1}| < |S_n| - \eta T$ .

❖ Preuve du théorème 3

Cette preuve sera proposée en deux étapes :

1. Si  $|S_n| \leq 2\sigma T$  alors  $|S_k| \leq 2\sigma T$  pour tout  $k \geq n$ .

On partitionne la région  $|S_n| \leq 2\sigma T$  dans :

(a)  $\sigma T \leq |S_n| \leq 2\sigma T$

(b)  $|S_n| \leq \sigma T$

Dans la sous région (a)  $|S_n| > \sigma T$ , et du théorème 2, nous avons  $|S_{n+1}| < |S_n| - \eta T$ .

Donc  $|S_n| \leq 2\sigma T$ , tel que :

$$|S_{n+1}| < |S_n| - \eta T \leq 2\sigma T - \eta T < 2\sigma T.$$

Dans la sous région (b) avec  $|S_n| \leq \sigma T$ , de l'équation (3.79.a) nous avons  $|S_{n+1}| - |S_n| < \sigma T$  :

qui résulte dans  $|S_{n+1}| \leq 2\sigma T$  par conséquent, si  $|S_n| \leq 2\sigma T$  alors  $|S_k| \leq 2\sigma T$  pour tout

$k \geq n$ .

2. Il existe un temps fini  $n$  tels que  $|S_n| \leq 2\sigma T$ .

Si  $|S_0| \leq 2\sigma T$ , alors la déclaration est vraie et  $n=0$ , pour le cas  $|S_0| \leq 2\sigma T$

On prolonge  $|S_0| = 2.\sigma.T + m.\eta.T + \gamma.\eta.T$  pour  $m=0,1,2,\dots$  et  $0 < \gamma < 1$

D'un autre côté nous assumons qu'il n'existe pas plusieurs  $n$  ( temps finie) tels que

$$|S_n| \leq 2.\sigma.T \text{ cela veut dire que } |S_k| > 2.\sigma.T \text{ pour tout } S_k.$$

Du théorème 2 et d'après  $|S_k| > \sigma.T$ , nous avons :

$$|S_1| < |S_0| - \eta.T$$

$$|S_2| < |S_1| - \eta.T$$

.

.

$$|S_{k+1}| < |S_k| - \eta.T$$

On déduire

$$|S_{k+1}| < |S_0| - (k+1).\eta.T = 2.\sigma.T + (m-k-1).\eta.T + \gamma.\eta.T$$

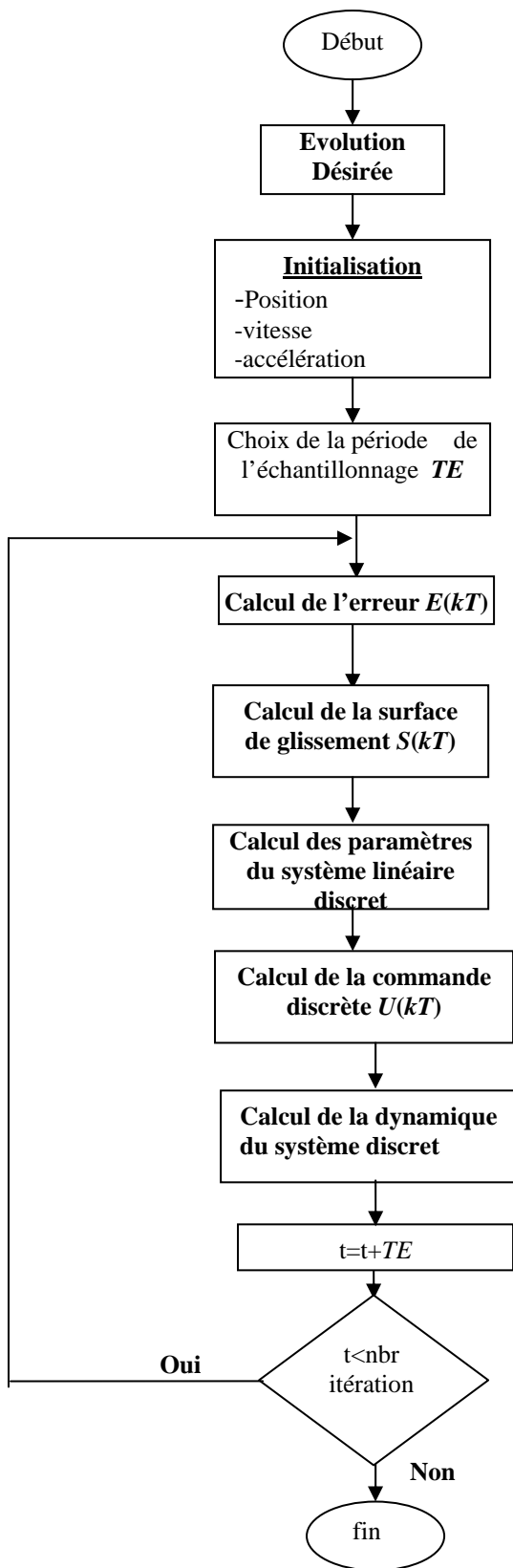
Pour  $k=m$ ,  $|S_{m+1}| < 2.\sigma.T - (1-\gamma).\eta.T \leq 2.\sigma.T$ . avidement, la supposition n'est pas vraie, i.e

Il existe un temps fini  $n$  tels que  $|S_n| \leq 2.\sigma.T$ . Ce qui complète la preuve.

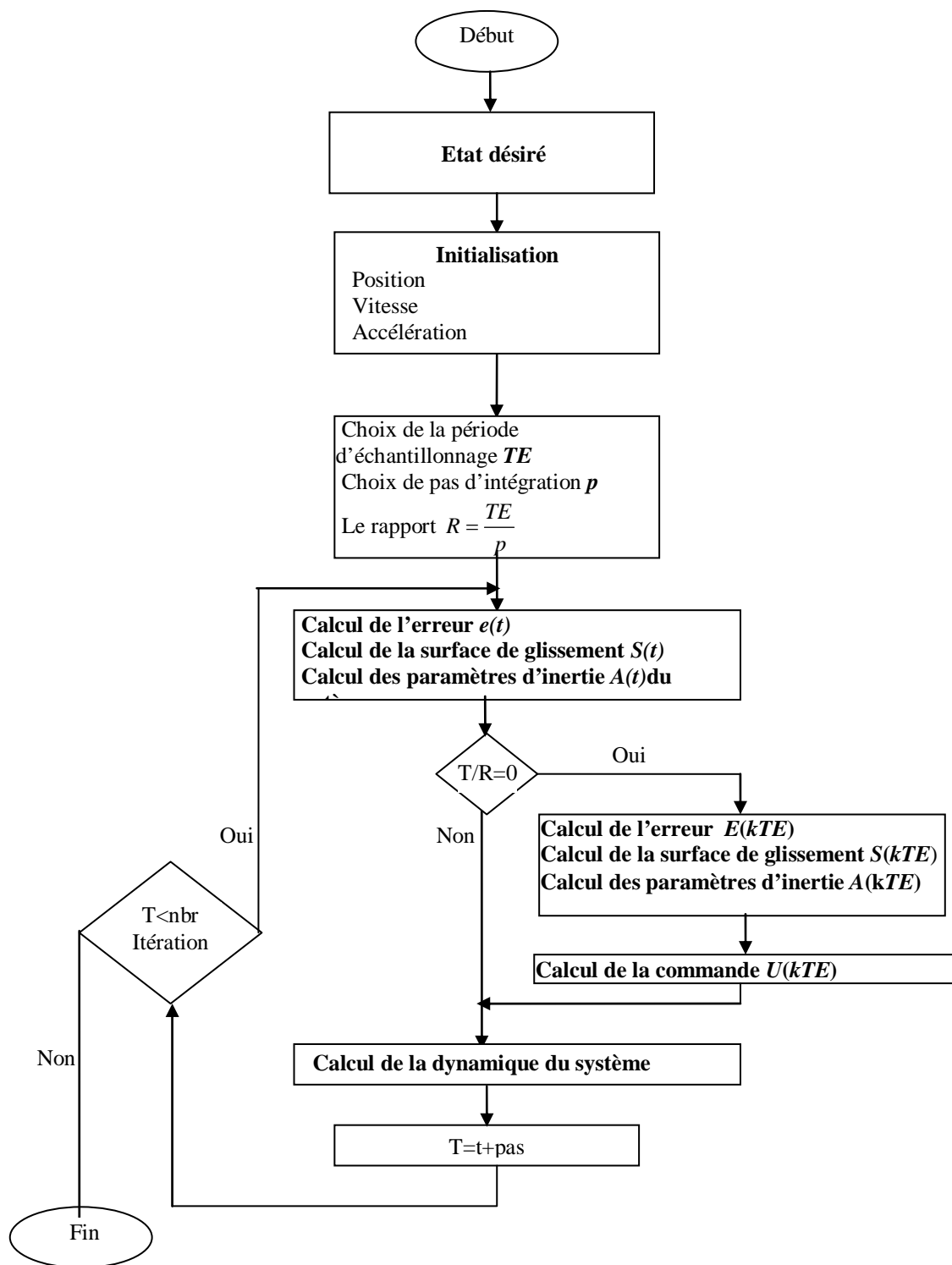
De 1 et 2 nous pouvons conclure qu'il existe un temps fini  $n$  tels que  $|S_k| \leq 2.\sigma.T$

Pour tout  $k \geq n$

- ❖ Organigramme de la commande à structure variable discrète (approche de SARPTURK)



- ❖ Organigramme de la commande à structure variable discrète (approche de la loi de la convergence)



### LISTE DES SYMBOLES ET DES ABREVIATIONS

$A$	: matrice des inerties /chapitre2.
$B$	: forces centrifuges, Coriolis et frottements/chapitr2.
$C$	: force de la pesanteur.
$CI$	: $\cos(\theta_1)$ .
$CI2$	: $\cos(\theta_1 + \theta_2)$ .
$CI23$	: $\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$ .
$D$	: matrice des inerties.
$G$	: force de la pesanteur.
$H$	: forces centrifuges, Coriolis et frottements.
$I$	: moment d'inertie.
$J_j^i$	: matrice JACOBIENNE.
$Ker \nabla S$	: noyau de $\nabla S$ .
$L_h \sigma$	: dérivée directionnelle.
$L$	: lagrangien.
$L_i$	: longueur de l'élément égide $i$ .
$M_j^i$	: matrice de rotation
$M_i$	: masse du corps $i$ .
$M, K$	: gains de la commande discontinue/chapitre2, 3.
$P_j^i$	: vecteur de position de repère $i$ par rapport le repère $j$ .
$P_d$	: position désirée.
$R$	: repère.
$SI$	: $\sin(\theta_1)$ .
$SI2$	: $\sin(\theta_1 + \theta_2)$ .
$SI23$	: $\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$ .
$S(x)$	: surface de glissement.
$Span(g(x))$	: espace engendré par la base $g(x)$ .
$T_j^i$	: matrice de transformation homogène.
$T$	: énergie cinétique.
$T_{tot}$	: énergie totale.
$T_E$	: période d'échantillonnage.
$T_x X$	: espace tangent à $X$ en $x$ .
$U$	: commande.
$U^+, U^-$	: commande discontinue.
$U_{eq}$	: commande équivalente.
$V$	: fonction de LYAPUNOV/ chapitre 2.
$V$	: signal d'enté /chapitre 3.

$V_j^i$	: vitesse linéaire d'un repère de repère $i$ par rapport le repère $j$ .
$W$	: vitesse angulaire.
$X, Y, Z$	: coordonnées cartésiennes.
$\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}$	: vitesse linéaire.
$a^*, b^*$ et $c^*$	: paramètres estimés.
$e$	: erreur de position.
$\dot{e}$	: erreur d'erreur.
$f(x)$ et $g(x)$	: champs de vecteur définis sur $\mathfrak{R}^n$ .
$f_N^+$ et $f_N^-$	: projections respectives de $f^+$ et $f^-$ sur la normale à la surface.
$p$	: variable opérationnelle.
$q, \dot{q}$ et $\ddot{q}$	: position, vitesse et accélération.
$\Delta U$	: composante discontinue.
$\Delta_S(x)$	: sous espace de $T_x X$ .
$\Gamma$	: forces et couples.
$\Omega_j^i$	: vitesse de rotation d'un repère de repère $i$ par rapport le repère $j$ .
$\Phi$	: fonction de la saturation.
$\theta_i$	: angle de rotation.
$\alpha, \beta$ et $\delta$	: gain de la commande discontinue.
$\lambda$	: coefficient de la surface de glissement.
$\zeta$	: vecteur de perturbation.



## REFERENCES

1. Etienne Dombre « Analyse et Modélisation des robots manipulateurs » Paris, Edition Hermès, 2001.
2. Wisama Khalil & Etienne Dombre « Modélisation identification et commande des robots » 2<sup>ème</sup> édition revue et augmentée Paris, Hermès Publication, 1999.
3. Philippe Coiffet « «Les Robots» Modélisation et commande » ‘Tome1’, Edition Hermès, 1981.
4. J.J.Craig « Induction to robotics mechanics and control » Second édition Addison Wesley Publishing Company, 1989.
5. M.Belhocine, M.Hamerlain, K.Bouyoucef « Robot control using sliding mode »IEEE International Symposium on Intelligence Control 16-19, Istanbul, Turkey.
6. M.Hamerlain: « The new robust control using the theory of generalized variable structure » IEEE International Symposium on Industrial Electronics, 10-14 July 1995, Athens, Greece.
7. H.Sira ramirez: «On the dynamical sliding mode control of non linear systems » International Journal of control, Vol .57, N°1, pp, 1039-1061
8. F.Harashima, H.Hashimoto et K.Maruyama: « Practical robust control of robot arm using variable structure system ». Proc of IEEE, int, Cont, on robotics and automation San Fransisco, 532-538, 1986
- 9.A.Phillipov « Equations différentielle à second membre discontinue » Journal de mathématiques, Tome 51 N°1,1960.
10. A.S.Nouri « Généralisation du régime glissant et de la commande à structure variable application aux actionneurs classiques et a muscle artificiels» « Thèse de doctorat – Toulouse
11. M.Hamerlain « Commande hiérarchisée à modèle de référence et à structure variable d’un robot manipulateur à muscles artificiels» Thèse de doctorat – Toulouse .
12. H.Sira Ramirez « Differential geometric methods in variable structure control » Int jornal of control vol 48 N°48 pp1358-1390.1988.
13. J.J.Slotine « Applied nonlinear control » Englewoodd Clifs,N,J: Prentice Hall New-Jersey 1991

14. H.Buhler « Réglage par mode de glissement » Presses Polytechniques Romande.1986
- 15.V.I.Utkin « Sliding modes in control and optimisation »Springer verlag berlin 1992.
- 16.V.I.Itkin « Discontinuous control system state of art in theory an application » Institute of control sciences, Ed. MIR; Mosco.
17. H.Asada & J.J.E Slotine: « Robot analysis and control » A WILEY-InterScience publication, John Wiley and Sons 1986.
18. F.Harashima, H.Hashimoto et K.Maruyama: « Practical robust control of robot arm using variable structure system ». Proc of IEEE, int, Cont, on robotics and automation San Fransisco, 532-538, 1986
19. W.Gao «Discrete time variable structure control systems» IEEE Trans on Industrial Electronics, April 1995, Vol 41 N°2, pp 117-122.
20. W.Gao, J.C.Hung « Variable structure control on non linear systems a new approach » IEEE Trans on Industrial Electronics, Feb 1993, Vol 40 N°1, pp 45-55.
21. K.Furuta « Sliding mode of a discrete system »Sys & Contr, 1991,Letters 14, pp 145-152.
22. S.Sarpturk, Y.Istefanopoulos et O.Kaynak « On the stability of discrete time sliding mode control systems » IEEE Trans.Automatic Control, Vol 32, N°10, Fev 1993.pp930-932
23. U.Kotta « comments on the stability of discrete time sliding mode control systems »  
IEEE Trans.Automate Control Vol 34, pp 1021-1022(1989)
24. C.Y.Chan « Discrete adaptive quasi sliding mode control » Int Journal of Control 1999, Vol 75, N° 4, pp 365-373
25. H.Sira-Ramerez « Non-linear discrete varuable structure systems in quasi-sliding mode » Int.J.Control,1991,Vol.54,N°5, pp1171-1187.
26. Y.P.Chan,J.L.Chang,S.R.Chu « Pc-based sliding-mode control applied to parallel-type double inverted pendulum system» Department of Electrical and Control Engineering, National China-Timg University, Usinchu, 300, Taiwan, Republic of China.
27. Slotine « Non linear system »
28. A.Crosnier; G.Abba, B.jouvencel et R.Zapata « Automatique , ‘ Ingénierie de la commande des systèmes’ (technique de base) » Ellipses édition Marketing S.A 2001,Paris

29. S.Le.Ballois « MATLAB/SIMULINK Application à l'automatique linéaire» Ellipses édition Marketing S.A 2001,Paris.

30. O.Khalal , M.Belhocine « La commande à structure variable par mode de glissement appliquée à un robot manipulateur à trois degrés de libertés » Conférence Internationale sur la productique CIP 05 Décembre 2005 Tlemcen