RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université SAAD DAHLEB DE BLIDA
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

En mathématiques

Spécialité : **Recherche Opérationnelle**

Optimisation de Portefeuille de Réplication financier

Par

Dey Imene

Devant le jury composé de :

S. Manseur	*MCB, U.S.D Blida 1*	*Promoteur*
N. Messaoudi	*MCB, U.S.D Blida 1*	*Présidente*
N. Meddah	*MCB, U.S.D Blida1*	*Examinatrice*

Blida, 2019/2020

ملخص

في هذه الرسالة، نحن مهتمون بتمثيل وحل مشكلة استنساخ حافظة مالية، بهدف تقريب القيمة الحالية لحافظة النسخ إلى القيمة الحالية للحافظة التي سيتم نسخها، وذلك بمراعاة ظروف السوق الحالية والمستقبلية

تُعرّف مشكلة نسخ المحفظة المالية بأنها مشكلة تقريب غير خطي، والتي تتمثل نمذجتها الرياضياتية في مشكلة تربيعية ذات قيود خطية

لحل هذا النوع من المشاكل، نستخدم خوارزميات رياضياتية فعالة.

الهدف من هذه المقاربة هو تطبيق أساليب التقريب الغير خطي لحل مشكلة نسخ محفظة مالية

نقترح استخدام خوارزمية التدرج المسقط للمشكلة التربيعية ذات القيود الإيجابية أو الصفرية، وتطبيق خوارزميات Uzawa و Arrow Hurwicz للمشكلة التربيعية ذات القيود الخطية.

Résumé

Dans ce mémoire, on s'intérèsse à la représentation et la résolution du problème de la réplication d'un portefeuille financier, dont l'objectif est d'approximer la valeur actuelle du portefeuille de réplication à la valeur actuelle de portefeuille à répliquer, en respectant les conditions du marché d'aujourd'hui et de futur.

Le problème de réplication de portefeuille est défini comme un problème d'optimisation non linéaire, quadratique à contraintes linéaires.

Afin de résoudre ce type de problème, nous appliquons des méthodes d'optimisation non linéaires bassées sur des algorithmes mathématiques.

Nous proposons d'utiliser l'algorithme du Gradient projeté au problème quadratique de contraintes positives ou nulles, et l'application des algorithmes d'Arrow-Hurwicz et Uzawa pour le problème quadratique à contraintes linéaires.

À l'aide d'une programmation informatique basée sur des techniques de résolution et d'amélioration mathématique, nous essayons de simplifier et accélérer la résolution du problème en temps réel.

Nous reportons des résultats numériques obtenus en testant ce programme sur un exemple type de ce problème.

ABSTRACT

In this thesis, we are interested in the representation and the resolution of the problem of the replicating financial portfolio, whose objective is to approximate the current value of the replicating portfolio to the current value of the portfolio to be replicated, in respecting current and future market conditions.

The portfolio replication problem is defined as a non-linear optimization problem, whose mathematical modeling is a quadratic problem with linear constraints.

In order to solve this type of problem, we use efficient mathematical algorithms.

The aim of this approach is the application of non linear optimization methods to resolve the problem of replicating financial portfolio.

We propose to use the algorithm of the Gradient projected to the quadratic problem of positive or zero constraints, and the application of the algorithms of Arrow-Hurwicz and Uzawa for the quadratic problem of linear constraints.

Using computer programming based on mathematical resolution and improvement techniques, we try to simplify and speed up the resolution of the problem in real time.

We report numerical results obtained by testing this program on a typical example of this problem.

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier, Allah le tout puissant, pour m'avoir guidé à la connaissance et le savoir.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur Salah Manseur, Maitre de Conférences B à l'université de Blida, pour m'avoir encadrée et guidée tout au long de ce mémoire. Il m'a permis de réaliser ce travail en me manifestant sa confiance et en m'encourageant dans mon travail, et surtout pour avoir toujours été à l'écoute de mes problèmes.

Je tiens à remercier particulièrement Monsieur Abdelaziz Mataoui, Analyste Quantitatif - RFS de France pour son aide inestimable dans ce travail.

J'adresse mes remerciements à mon enseignant, Monsieur M.Chelali, Professeur à l'université de Blida, pour m'avoir fait partager ses connaissances, ainsi que pour ses nombreux conseils et ses idées précieuses.

J'adresse mes remerciements à Madame Messaoudi N. qui m'a fait l'honneur d'accepter d'être Précidente du jury.

Mes sincères remerciements à Madame Meddah N. d'avoir accepter de juger mon travail.

Je ne saurais terminer sans mentionner tout ce que je dois à mes parents et à mes deux soeurs Manel et Sarah, et mon frère Aymen, qui m'ont toujours soutenue et supportée. Sans eux ce travail n'aurait pu voir le jour. Enfin, je remercie toutes les personnes qui m'ont aidée par leur soutien et leur confiance à accomplir ce modeste travail.

List of Figures

List of Tables

Contents

Introduction

La recherche opérationnelle (RO), discipline dédiée à l'analyse des phénomènes organisationnels pour l'élaboration de meilleures décisions, est aujourd'hui considérée comme une branche à part entière des mathématiques appliquées. La RO, comme on la surnomme, se situe en fait au carrefour de plusieurs sciences comme l'économie, la gestion, les mathématiques et l'informatique. La recherche opérationnelle recouvre des méthodes et techniques rationnelles pour trouver la meilleure façon faire des choix et aboutir au résultat visé au meilleur résultat possible. C'est ce que l'on appelle une aide à la décision. A partir d'une modélisation pour analyser et maitriser des situations complexes permet à un décideur de mesurer les enjeux et de choisir l'option la plus efficace. Bien que le champ d'application traditionnel de la recherche opérationnelle demeure autour des métiers de l'industrie, de nombreux problèmes émergent dans les secteurs de la finance, de la banque et de l'assurance, faisant apparaître un besoin d'aide à la décision.

Dans ce travail, nous nous intéressons au problème de la réplication d'un portefeuille financier des prets bancaires. Ce problème est issu de domaine de la gestion des portefeuilles.

La gestion du portefeuille est l'organisation des actifs financiers d'un investisseur pour réduire le risque et maximiser le rendement. Cela implique de prendre des décisions calculées concernant les investissements et d'utiliser des stratégies de négociation.

La réplication d'un portefeuille est une approche qui consiste à construire un nouveau portefeuille, appelée poretfeuille répliqué, dans le but d'approximer la valeur de marché de portefeuille de milliers de Deals (prets) par ce nouveau portfeuille mais de taille beaucoup plus petite, en respectant les conditions de marché.

Il y a donc lieu d'optimiser (minimiser) le nombre des deals (prêts) de portefeuille de réplication sous certaines conditions à remplir qu'on verra plus loin. Notre travail se portera essentiellement sur ce volet.

Au premier chapitre nous présentons quelque définitions sur les instruments financiers, en particuliers, les obligations, les prêts, la courbe de taux d'intérêts, les Stress-Test et Sensibilité. Les principales notions et leur développement mathématique qui vont nous aider tout au long de ce mémoire.

Le deuxième chapitre est consacré au problème de la réplication du portefeuille, ainsi que sa formulation mathématique, qui se présente comme un problème quadratique à contraintes linéaires, dont sa résolution nous amène à utiliser certains algorithmes mathématiques.

Au troisième chapitre, nous présentons les outils mathématiques de résolution, commençons par les méthodes numériques de minimisation avec contraintes ainsi que les méthodes de dualité. Ensuite nous proposons la résolution du problème quadratique à contraintes positives ou nulles et à contraintes linéaires d'inégalités, en appliquant la méthode du gradient projeté et l'algorithme d'UZAWA et ARROW-HRWICZ.

Le chapitre quatre est consacr à l'implémentation des techniques d'amélioration et de résolution. Nous donnons aussi un exemple de test ainsi que les algorithmes de programmation informatique. Les résultats obtenus seront illustré sur un exemple type de problème. Un code de programmation C++ sera donné en Annexe.

Enfin, nous terminons par une conclusion générale.

Chapitre 1 :

Notions sur les instruments financiers

1.1.Introduction:
[1,5,8,9]

Un actif ou un instrument financier génère des flux monétaires (Cash-flows) futures. Lorsque ces flux sont parfaitement connus, on parle d'actifs à revenu fixe, et cela désigne typiquement les obligations à taux fixe.

Les insturments financiers sont très divers et leur complexité s'accroit de jour en jour. Il est plus difficile de dresser une typologie de ces instruments.

Dans ce chapitre, nous discutons des actifs de base (les obligations), et des produits dérivés (STRESS-TEST et Sensibilté des taux d'intérets). Nous présentons aussi leurs définitions et leur développement mathématique, qu'il est important de rappeler avant d'aborder le problème de la réplication d'un portefeuille financier.

1.2.Notions sur les instruments financiers:

1.2.1Quelques définitions:[1,5,8,17]

1. Obligation:

C'est un titre de créance négociable permettant à l'entreprise (ou un individu) d'obtenir des fonds pendant une durée déterminée et entraînant l'obligation de payer un intérêt (coupon) et de rembourser le principal selon des modalités de l'émission (à l'échéance ou par amortissement).

Les obligations peuvent faire l'objet d'une cotation en bourse, ce qui permettrait à l'investisseur de revendre ses obligations avant leur échéance ou d'acheter de nouvelles obligations sur le marché.

En effet, quand un investisseur achète une obligation, il prete en réalité une somme d'argent à l'emetteur de l'obligation et celui-ci contracte une dette. Illustrons ceci sur la figure suivante:

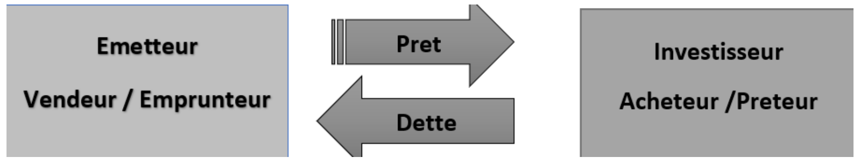

Figure 1: 1.1.Obligation

2.Les principales caractéristiques des obligations:

-Prix d'emission: correspond à l'argent que l'investisseur prête à l'émetteur.

-L'échéance: La durée de vie de l'obligation, le temps compris entre la date à laquelle les intérêts commencent à courir, et le dernier flux en capital,notée T.

-La valeur nominale: représente une fraction du montant de l'emprunt obligataire et est identique pour tous les titres relevant d'une même émission. Par ailleurs, la valeur nominale sert de base au calcul des intérêts, notée V_n.

-Les intérêts d'une obligation payés par l'emprunteur, notés C s'appelent les coupons.

-Les obligations sont aussi connues sous le nom des titres à revenu fixe,car la plupart des obligations rapportent un revenu régulier au preteur, qui correspond au taux d'interet de l'obligation.

C : coupon(intérêt).

V_n: La valeur nominale(le capital N).

T : L'échéance(la maturité) en années.

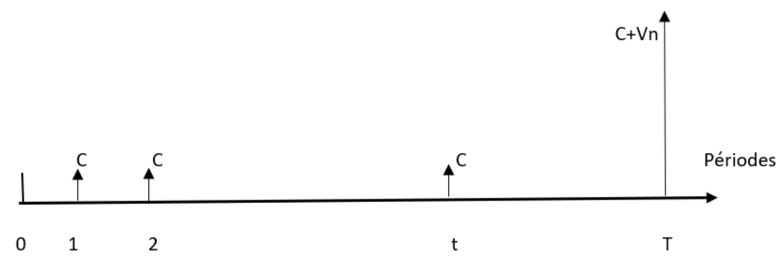

Figure 2: 1.2.1.Représentation des Cash-flows d'une obligation ordinaires.

1.2.2 Flux Monétaires(Cash-flows):

Définition:

Les flux monétaires(cash-flows) à revenu fixe sont des flux d'intérets consants et l'amortissement du capital,ces flux sont connus lors de la conclusion du contrat et sont capitalisés à des périodes connues et réguliers pendant toute la durée de vie de l'obligation, plus le nominal à l'échéance.

À l'émission du titre, les conditions de paiement des intérèts sont précisées (les coupons) et le remboursement du capital.

On note F_t le flux versé au détenteur du titre à la date t , il est calculé par la formule suivante :

pour $t = 1, ..., T$:

$$F = F_t^1 + F_t^2 \tag{1-1}$$

où F_t^1 et F_t^2 : l'amortissement du capital et l'intérêt (le coupon), versés à la date t.

Il existe plusieurs modalités de remboursement, citons les:

-Types des remboursements:

1-Remboursement in fine :

La première possibilité de remboursement se fait à la date d'échéance est nommée emprunt remboursé in fine.

Dans le cas du remboursement in fine, seul l'intérêt échu est payé à la fin de chaque période. Il est proportionnel à la dette et fonction de la durée (souvent proportionnel) et le nominal est remboursé à l'échéance.

Le flux de capital est nul à la date $t = 1, ...T - 1$ et égale à la valeur nominale V_n à l'échéance T.

Soit r le taux d'intérêt fixé lors de la conclusion du contrat.

Le flux d'intérêt à la date t est : $(t = 1, ..., T)$.

$$F_t^2 = C = r \textbf{ x } V_n \tag{1-2}$$

D'où on a la somme des cash-flows, qui représente la futur valeur de l'obligation ,égale à :

$$F = C + C + ... + C + (C + V_n) \tag{1-3}$$

Voici un dessin illustratif :

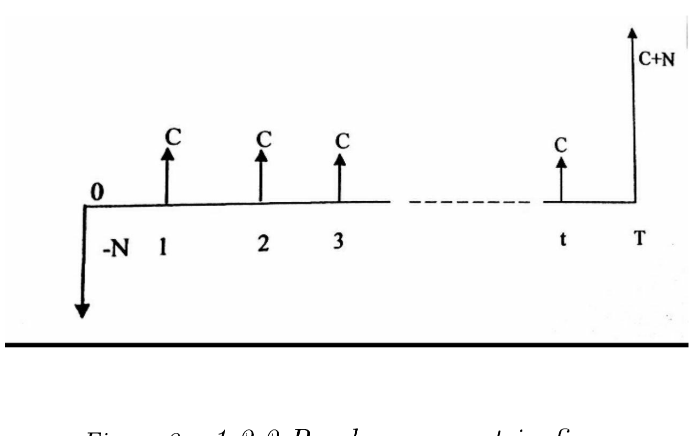

Figure 3: 1.2.2.Remboursement in fine.

Exemple:

Un investisseur achète ajourd'hui une obligation à 1000 DA qui donne droit au versement d'un coupon tous les ans, égal à 3%. Ce dernier souhaite savoir la valeur acquise par cet investissment au bout d'un an, de deux ans,etc.

En utilisant la formule (1-3), on obtient:

Sachant que :

C =1000 x 0.03 et $V_N = 1000$

1.Au bout d'un an :

$F = (1000 \text{ x } 0,03) + 1000 = 1030DA.$

2.Au bout de deux ans :

$F = (1000 \text{ x } 0,03) + (1000 \text{ x } 0,03) + 1000 = 1000 \text{ x } (1 + 2 \text{ x } 0,03) = 1060DA.$

3.Au bout de dix ans on obtient:

$F = 1000 \text{ x } (1 + 10 \text{ x } 0,03) = 1300DA.$

2-Amortissement constant:

Soit la même portion de capital remboursée chaque année.

Le flux de capital : $F_t^1 = \frac{V_n}{T}$ à toutes les dates $t = 1, ..., T$.

Et le flux d''intérêt à la date $t = 1, ..., T$:

$$F_t^2 = rV_n(1 - \frac{t-1}{T}) \tag{1-5}$$

D'où

$$F = \frac{V_n}{T} + rV_n(1 - \frac{t-1}{T}) \tag{1-6}$$

Illustrons la différence entre le remboursement in fine et constant , dans la figure ci-dessous:

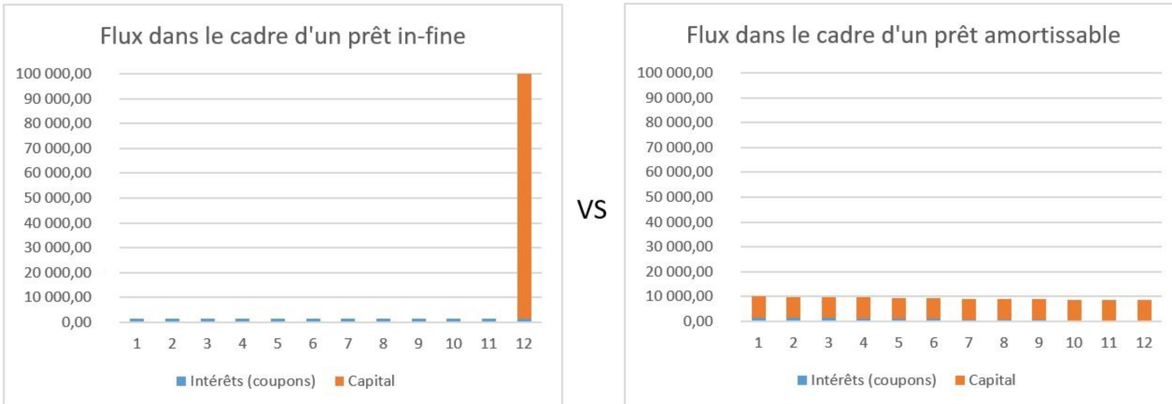

Figure 4: 1.2.2.2Différence entre remboursement in fine et constant.

3-Remboursement zéro-coupon :([14,15])

La particularité d'une obligation à coupon zéro est de faire une croix sur le versement des coupons ,c'est à dire :

La totalité des intérêts acquis est versée en une seule fois, à l'échéance de l'emprunt obligataire. Entre-temps, aucun coupon intermédiaire n'est versé. Les coupons sont "capitalisés" durant toute la durée de vie de l'obligation.

Les seuls deux flux tombent en 0 et T de valeurs respectives égalent à : $-V_n$ et $V_n + C$

Avec :

$$C = V_n((1 + r)^T - 1) \tag{1-7}$$

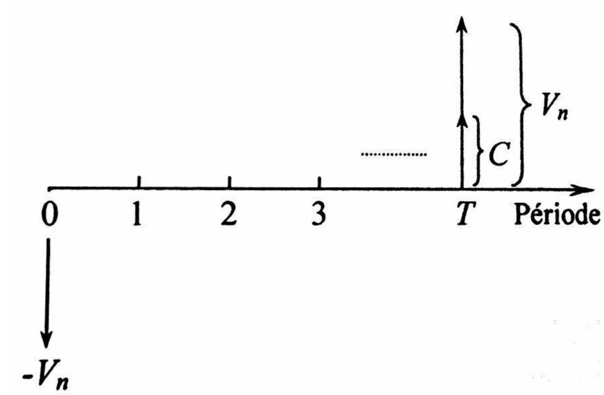

Figure 5: 1.2.3.Remboursement Zéro-coupon

Exemple :

À partir de l'exemple précédent , on obtient la formule suivante pour calculer la valeur future d'une obligation :

$F = V_n(1 + r)^T$.

Alors ,au bout de dix ans :

$F = 1000$ x $(1 + 0,03)^{10} = 1343,91DA$.

1.3.Actualisation des flux monétaires:([5,9])

L'actualisation de flux monétaires joue un rôle essentiel dans plusieurs situations (détermination de la valeur marchande d'une dette). Avec un peu d'expérience, on constate rapidement que la difficulté ne provient pas des concepts mathématiques sous-jacents, mais bien de la détermination du taux d'actualisation à utiliser. Une fois les montants projetés (coupons), il faut déterminer le taux d'actualisation qui reflète le "risque" que les flux monétaires futurs se réalisent, c'est-à-dire :

Le principe de base est que 1000 DA aujourd'hui n'a pas la même valeur (en termes de ce qu'il peut acheter) qu'il aura l'an prochain.

La plupart des gens sont familiers avec l'idée d'investir une somme d'argent de sorte qu'elle suscite de l'intérêt. Si 1000 DA ont été investies à un taux de 7%, il saurait croître en conséquence, de sorte que dans une période de quatre ans, il serait de 1311 DA.

0	1	2	3	4
1.000	1.070	1.145	1.225	1.311

Table 1: 1.3.Exemple d'actualisation des flux monétaires.

L'inflation économique a l'effet inverse. 1000 DA placées dans une boîte sous le matelas va diminuer en valeur. Si l'inflation était de 7 %, sa valeur diminuerait en conséquence.

0	1	2	3	4
1.000	935	873	816	763

Table 2: 1.3..Résultats d'actualisation des flux monétaires.

Définition :

L'actualisation est une méthode aui permet de calculer la valeur actuelle en $(t = 0)$ d'un cash-flow F_t à recevoir dans l'avenir en t.

Exemple :

Combien dois-je placer aujourd'hui au taux de 8% pour avoir 10 000 Euro dans 3 ans ?

On a $V_n = V_0(1 + r)^T$.

D'où : $V_0 = 10000(1 + 0,08)^{-3} = 7938 Euro$.

1.3.1-La valeur actuelle d'une obligation :

La valeur actuelle est la somme des cash-flows actualisés , elle est donnée par la formule suivante :

$$VA = \sum_{t=1}^{T} \frac{F_t}{(1+r)^t} \tag{1-8}$$

où F_t: le flux monétaire versé à la date t

et r : le taux d'actualisation , correspond au taux de rentabilité souhaité par l'entreprise (coût du capital finançant le projet) et s'exprime en pourcentage.

Ainsi, le prix d'une obligation est la somme des valeurs actuelles (en $t = 0$) des flux monétaires futurs, il est donné par :

$$P(r) = VA = \sum_{t=1}^{T} \frac{F_t}{(1+r)^t} \tag{1-9}$$

Dans le graphe ci-dessous , on va illustrer l'évolution de prix d'une obligation en fonction d'actualisation , on va d'abord définir la notion suivante :

*Si la valeur d'émission et la valeur nominale sont égales ($V_e = V_n$), on dit que l'obligation est émise au pair. Le taux actuariel de l'obligation est égal au taux d'intérêt nominale.

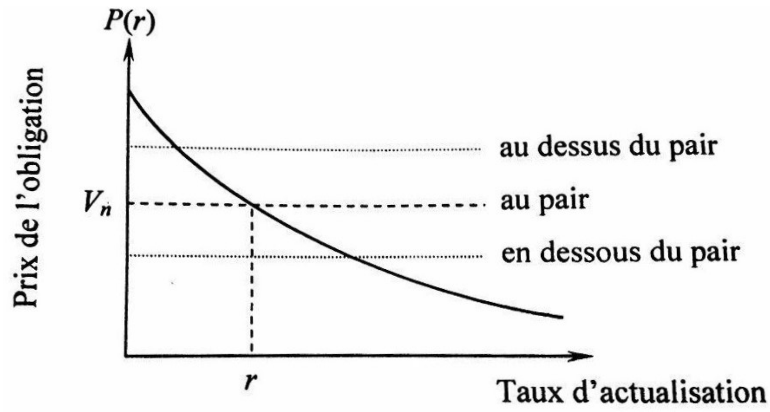

Figure 6: 1.3.1.Evolution de prix d'une obligation .

Exemple :

On veut calculer la valeur actuelle d'une obligation de 5 ans d'échéance , de 1000 DA de nominal sachant que le taux nominal est de 6%, et le taux d'actualisation est de 9%.

Les flux monétaires de l'obligation sont regroupés dans le tableau suivant :

Année	1	2	3	4	5
Flux monétaire	60	60	60	60	1060

Table 3: 1.3.1..Flux monétaires d'obligation

D'où la valeur actuelle est :

$$VA = \frac{60}{1+0,09} + \frac{60}{(1+0,09)^2} + ... + \frac{1060}{(1,09)^5} = 904,31DA.$$

1.3.2-La valeur actuelle nette VAN:([19],[20])

La valeur actuelle nette, VAN en abrégé, est un indicateur financier qui peut être utilisé pour apprécier la rentabilité d'un investissement.Elle est également définie par la différence entre la somme des cash-flows, actualisés à la date $(t = 0)$ et le capital investi (Prix d'achat) P_0:

$$VAN(r) = -P_0 + \sum_{t=1}^{T} \frac{F_t}{(1+r)^t} \tag{1-10}$$

**Utilité de la valeur actuelle nette (VAN):*

La valeur actuelle nette permet d'étudier la rentabilité d'un investissement, est-ce que les attentes de rendement fixées par les investisseurs pourront être satisfaites ? Il s'agit d'un indicateur qui a son importance sur la prise de décision concernant le lancement d'un projet ou d'un investissement.

Alors,pour qu'elle soit rentable, il faut que le VAN soit positive pour un taux d'actualisation r donné .

Exemple :

Imaginons un investissement de 10 000 € qui doit rapporter l'année suivante 2 000 €, puis 2 500 € et ensuite 3 000 € les 3 années suivantes. Quelle sera la Valeur Actuelle Nette à la fin de l'opération, si l'on considère un taux d'actualisation de 10% ?

$VAN = -10000 + \frac{2000}{(1+\frac{10}{100})^1} + \frac{2500}{(1+\frac{10}{100})^2} + \frac{3000}{(1+\frac{10}{100})^3} + \frac{3000}{(1+\frac{10}{100})^4} + \frac{3000}{(1+\frac{10}{100})^5}$

$VAN = 50.046258638565.$

La valeur actuelle nette est égale à : 50,05.

1.3.3-Le taux de rendement interne 'TRI ':

Le taux de rendement interne (aussi appelé taux actuariel) ,TRI en abrégé, représente le taux d'actualisation qui annule la valeur actuelle nette VAN. Formulons ceci comme suit :

$$VAN(TRI) = 0$$

Il s'agit de la solution de l'équation suivante :

$$-P_0 + \sum_{t=1}^{T} \frac{F_t}{(1+r)^t} = 0 \qquad \text{(1-11)}$$

qui est une équation non linéaire en r.

Exemple:

Un entrepreneur fait l'achat d'une obligation. Cette obligation lui coute 100 DA et devrait lui rapporter 115 DA au bout d'un an.Quel est la rentabilité de cet investissement ?

Il apparait évident de dire que celle-ci est de 15 %. Ce taux de 15% n'est autre que le taux de rentabilité interne de cet investissement.En utilisant la formule du TRI citée plus haut, on obtient :

$VAN = -100 + \frac{115}{1+TRI} = 0 \Longleftrightarrow 100 = \frac{115}{1+TRI}$

Ceci implique :

$TRI = \frac{115}{100} - 1 \Longleftrightarrow TRI = 0,15.$

Imaginons désormais que cette obligation coute toujours 100 DA à l'acquisition , mais qu'elle rapporte 70DA en première année, puis 70DA en deuxième année.On peut chercher à calculer le taux de rentabilité interne en résolvant l'équation suivante :

$VAN = -100 + \frac{70}{1+TRI} + \frac{70}{(1+TRI)^2} = 0$

$\Longleftrightarrow TRI = 25,69\%$.

Si l'exigence de rentabilité de notre entrepreneur était inférieure à 25,69%, alors cet investissement serait attractif. Dans le cas contraire, il devrait rejeter cette acquisition.

1.3.4-Portefeuille obligataire:[5]

Définition:

*Un portefeuille obligataire est un ensemble d'obligations.

*La valeur actuelle du portefeuille:

Pour un portefeuille P composé de N obligations, la valeur actuelle du portefeuille est égale à la somme des valeurs actuelles des obligations qui le compose:

$$PV = \sum_{i=1}^{N} VA_i \tag{1-12}$$

où PV est la valeur actuelle du portefeuille , VA est la valeur actuelle de l'obligation i.

1.3.5-Les courbes des taux d'intérêt:([5,16])

La courbe des taux correspond à une représentation graphique des rendements offerts par les titres obligataires d'un même émetteur selon leur échéance T , de la plus courte à la plus longue.

Dans la partie précédente , on a supposé que le taux d'actualisation est unique, c'est à dire, la courbe de taux est plate, mais en pratique cette courbe est très rarement plate.

On note l'ensemble de taux d'intérêt par r_t avec $t =$ 0,...,T , indiquant le taux d'aujourd'hui à $t = 0$ pour l'échéance T ans.

On distingue plusieurs types de courbes selon les taux correspondants :

1) Les courbes de marché:

IElles sont construites à partir des cotations de marché d'instruments.

Exemple: on trouve les courbes des taux de rendement à maturité qui sont construites à partir des taux de rendement des obligations.

2)Les courbes implicites:

Elles sont dérivées indirectement à partir des cotations de marché d'instruments comme la courbe des taux zéro-coupon, la courbe de taux forwards...etc.

a) Courbe des taux zéro-coupon :[16]

Définition:

Un instrument financier "zéro-coupon"est un instrument qui ne donne lieu à aucun paiement intermédiaire d'intérêts. On dit aussi qu'il n'y a pas de détachement de coupon intermédiaire .

On ne dispose donc que de 2 flux :

- Flux initial :$-V_n$.
- Flux final de remboursement: $V_n + C$.

On appelle taux zéro-coupon, le taux actuariel de cet instrument.

Exemple:[16]

Pour simplifier, nous raisonnerons sur un montant de départ de 100DA.

Supposons que l'on note les taux suivants sur le marché :

1 an = 3,50%

2 ans = 4,75 %

3 ans = 5,50%

Pour le an, le problème ne se pose pas car il n'y a pas de flux intermédiaire.

Pour le 2 ans, nous avons un flux intermédiaire :

Ce flux (4,75) devra être actualisé au taux zéro-coupon du 1 an (3,50%).

On se retrouve donc avec l'équation suivante qui donne pour résultat $t_2 = 4,78\%$.

$$100 = \frac{4,75}{(1+0,035)^1} + \frac{104,75}{(1+t_2)^2}$$

Pour le 3 ans, nous avons 2 flux intermédiaires. le premier flux doit être actualisé au taux zéro-coupon

On doit donc résoudre l'équation suivante qui donne pour résultat $t_3 = 5,57\%$

$$100 = \frac{5,50}{(1+0,035)^1} + \frac{104,75}{(1+0.0478)^2} + \frac{105,50}{(1+t_3)^3}$$

		Taux ASK	Montant	Taux d'actualisation
100 DA	Durée	Taux couponnés	Coupon	Zéro coupon
1 an	1	3,50%	3,50 DA	3,50%
2 ans	2	4,75%	4,75 DA	4,78%
3 ans	3	5,50%	5,50 DA	5,57%
4 ans	4	5,60%	5,60 DA	5,66%
5 ans	5	5,80%	5,80 DA	5,87%
6 ans	6	6,00%	6,00 DA	6,10%
7 ans	7	6,40%	6,40 DA	6,58%
8 ans	8	6,80%	6,80 DA	7,08%
9 ans	9	7,00%	7,00 DA	7,33%
10 ans	10	7,02%	7,02 DA	7,33%

Table 4: 1.3.5.Calcul de taux d'actualisation.

Le graphique ainsi obtenu met en évidence la courbe couponnée et la courbe zéro coupon.

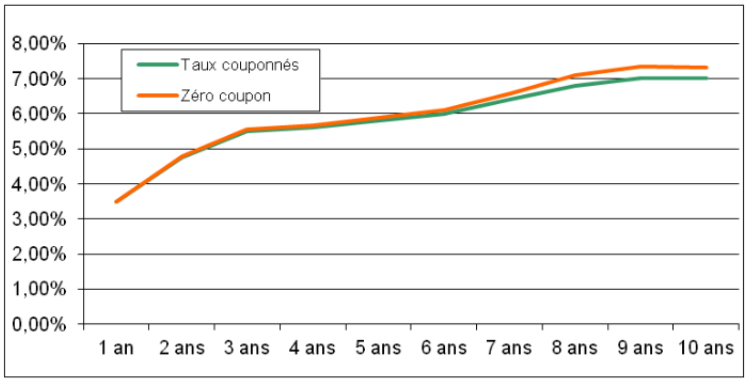

Figure 7: 1.3.5.a.Courbe de taux zéro-coupon.

b)Courbe de taux forwards:

La courbe des taux zéro-coupon contient de nombreuses informations sur les taux qui prévaudraient dans le futur. On peut en effet déduire, à partir des taux zéro-coupon de différentes échéances, les fameux taux forward. Ceci peut être particulièrement utile pour les investisseurs, qui peuvent alors constater les attentes du marché en matière de taux d'intérêts futurs, et prendre par exemple certaines décisions de trésorerie ou de d'investissement.

Exemple simple:[16]

Supposons qu'un investisseur soit confronté à un taux zéro-coupon 1 an de 4% et à un taux zéro-coupon 2 ans de 5%. On en déduit qu'un investissement de 100DA dans une obligation 1 an zéro-coupon croîtra jusqu'à devenir l'équivalent de $100e^{0,04} = 104,08$DA.

De même, 100€ placés dans une obligation 2 ans zéro-coupon donneront $100e^{0,052} = 110,52$DA.

La question que doit se poser l'investisseur est la suivante : si, à la fin d'un investissement d'un an, il investissait à un nouveau pour une période d'un an, quel serait le taux auquel il aurait droit pour ce second investissement ? La réponse doit satisfaire l'égalité :

$$104,08e^{taux1andans1an} = 110,52$$

On obtient :

$$taux1andans1an = 6\%$$

En d'autres termes, investir 100DA à 4% pour une première période d'un an, puis réinvestir la somme obtenue à 6%, équivaut à placer son argent deux ans d'affilée à 5%. Le taux de 6% est ce qu'on appelle le Taux forward "1 an dans 1 an".

Définition:

Le risque de taux est le risque qu'encourt un investissement, qui est celui de perdre en valeur si les taux montent.Comme vu précédement la valeur d'une obligation va à contre sens du taux.

1.3.6-Swap de taux d'intérêt:

1)Définition:[5,8]

Un swap de taux d'intérêt est un contrat bilatéral dans lequel les parties s'accordent pour échanger des flux d'intérêts fixes contre des flux variables, en général dans la même devise. Lorsqu'une des deux parties s'engage dans un swap dit "payeur", elle s'engage à verser un taux d'intérêt fixe, appelé " taux de swap". Elle obtient, en échange, le versement périodique de taux variables, indexés sur une référence telle que le LIBOR(London Inter Bank Offered Rate).

Note importante:

2)Obligation à taux fixe:

Les obligations à taux fixe ont un coupon qui est constant. En général, le coupon versé en t ans , résulte d'une formule telle que : pour tout $t = 1, ..., T$.

$$C_t = C = kV_n$$

3)Obligation à taux variable :

Les obligations à taux variable ont un coupon qui varie en fonction du niveau des taux prévalant sur le marché. En général, le coupon versé en t ans, résulte d'une formule telle que: pour tout $t = 1, ..., T$.

$$C_t = V_n f_t \tag{1-13}$$

avec f_t :le taux forward de la période t.

Aucun échange monétaire n'a lieu lors de la conclusion d'un swap. Par ailleurs, la valeur monétaire d'un swap, en date initiale, doit être nulle. Autrement dit, ni l'une ni l'autre des contreparties ne peut se sentir avantagée économiquement quant aux termes du contrat. Bien entendu, cette valeur peut évoluer après la conclusion du swap. Une contrepartie s'étant par exemple engagée à verser un taux fixe en l'échange d'un taux variable verra son swap augmenter en valeur si les taux d'intérêts remontent brutalement. D'une certaine manière, les swaps peuvent être interprétés comme une somme de contrats forward.

Exemple:

Soit un swap conclu entre une entreprise A et une entreprise B, sur une période de 2 ans et un nominal de EUR 2 millions. L'entreprise A s'est engagée à payer trimestriellement un taux swap de 2% à l'entreprise B. En échange, elle reçoit de celle-ci, tous les 3 mois, le taux EURIBOR 3 mois.(taux d'echange pendant 3 mois)

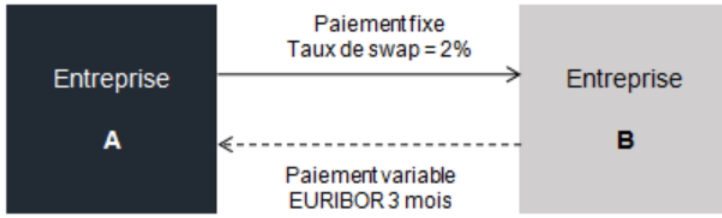

Figure 8: 1.3.6.Exemple de Swap.

Le tableau suivant récapitule l'ensemble des flux découlant du swap, en fonction de l'évolution du taux EURIBOR 3 mois. Lors de la conclusion du swap, seul le solde du premier échange est connu. Le taux EURIBOR 3 mois est en effet déjà connu en date initiale (1.80%), et celui-ci s'applique pour le trimestre à venir. Au bout de trois mois, le nouveau taux EURIBOR 3 mois sera observé, puis versé trois mois plus tard. Et ainsi de suite.

t	Taux de swap	EURIBOR 3 mois	Montant fixe	Montant variable	Gain (Perte)
0	2,00%	1,80%	-	-	-
1	2,00%	1,90%	10 000	9 000	-1 000
2	2,00%	2,00%	10 000	9 500	-500
3	2,00%	2,20%	10 000	10 000	0
4	2,00%	2,60%	10 000	11 000	1 000
5	2,00%	2,60%	10 000	13 000	3 000
6	2,00%	2,40%	10 000	13 000	3 000
...	...	...	...	...	...

Table 5: 1.3.6.2.Exemple de calcul de Swap.

Le taux EURIBOR 3 mois s'élevant à 1.80% en date initiale, alors que le taux fixe est de 2,00%, l'entreprise A devra payer:

$$(2,00\% - 1,80\%)\,\text{x}\,\frac{90}{360}\text{x}\ 2000000 = 1000EUR$$

à l'entreprise B à la fin du premier trimestre.

Dès que les taux dépassent le taux swap, le solde du swap en fin de trimestre devient positif, c'est à dire en faveur de l'entreprise A.

1.3.7-Calcul de sensibilté :[12]

Défintion :

La sensibilité d'une obligation en bourse correspond à la variation du prix d'une obligation engendrée par une hausse ou baisse des taux d'intérêts d'un point de base (0.01%). La sensibilité concerne donc les produits de taux qui sont fonction de l'évolution de la courbe des taux. Contrairement aux idées reçues, le cours d'une obligation monte lorsque les taux baissent et le cours baisse lorsque les taux montent. Le montant des intérêts versés au détenteur d'une obligation reste fixe et c'est le cours de l'obligation qui doit s'ajuster en cas de mouvement des taux. Si une obligation possède une sensibilité de 3, cela signifie que la valeur de l'obligation prendra 3% lorsque les taux baisseront de 1%. A l'inverse, si les taux montent de 1%, le cours de l'obligation perdra 3%.

Plus la sensibilité est forte, plus l'obligation est risquée.

Le principal facteur d'influence sur la sensibilité d'une obligation, c'est sa durée de vie. Pour une obligation, on parle de maturité. Plus cette maturité est élevée, plus la sensibilité de l'obligation est forte. L'impact d'une variation de taux d'intérêt est donc plus forte pour les obligations à forte sensibilité.

Calcul de la sensibilité:

La sensibilité de la valeur actuelle aux variations de la courbe des taux est exprimée par le vecteur gradient :

On sait que la valeur actuelle de l'obligation est donnée par :

$$VA = \sum_{t=1}^{T} \frac{F_t}{(1+r_t)^t} \tag{1-14}$$

Alors, la sensibilité est donnée par la formule suivante :

$$\left[\frac{dVA}{dr_t}(r_1, ..., r_T)\right] \tag{1-15}$$

avec $t = 1, ..., T$.

1.3.8-Stress Test:[13,14]

Les stress tests (aussi appelée test de résistance) sont établis de façon à tester la solidité d'un système financier(portefeuilles,entreprises,banques), la manoeuvre consiste à soumettre ce système à des conditions difficiles(hausse des taux,baisse des taux,catastrophes naturelles,conflits militaires ou toutes autre situation imprévue),depuis la crise des subprimes en 2008 toutes les banques et institutions financière sont soummées de passer systématiquement un stress test tous les ans ou deux afin d'éviter un effondrement de tout le système financier.

On distingue deux classes de stress test:

1) les test micro prudentiels pour évaluer la résistance d'un système de manière isolée à l'instar d'un portefeuille.

2) Les test macro prudentiels pour évaluer la résistance d'un ensemble de systèmes liés entre eux, comme le système financier mondial.

1.3.9-Le profit and loss :[11]

Un perte et profit (profit and loss) (PL) est une façon de modéliser un projet ou une affaire donnée afin de connaitre ou d'anticiper les éventuelles marges (gains,pertes) de pertes ou bénéfices.

1.4.Conclusion:

Dans ce chapitre, nous avons présenté les différentes notions sur les instruments financiers, en particulier, les obligations et les STRESS-TEST et la Sensibilité de taux d'intéret. Nous avons donné des exemples illustratifs des méthodes de calculs de ces derniers. Ces notions sont intéressantes pour aborder le problème de réplication de portefeuille.Il est considéré comme un problème d'optimisation non linéaire (Voir chapitre 3), et qui est résolu par des méthodes duales d'optimisation que nous allons les définir dans le chapitre 3.

Chapitre 2 :

Position du problème

2.1.Introduction:

Dans cette partie, on s'intérèsse à donner une présentation de problème de réplication d'un portefeuille financier et définir les méthodes de résolution adaptées à ce dernier.

On commence d'abord, par définir le problème de réplication de portefeuille, puis expliquer le but de cette approche. Ensuite on passe à la modélisation mathématique du problème.

2.2-Présentation du problème:[10],

Depuis 1950 : la gestion moderne repose sur la théorie moderne du choix de portefeuille dont le point de départ est dû à Harry Markowitz :[10]

"The process of selecting a portfolio may be divided in two stages. The first stage starts with observation and experience and ends with beliefs about the future performances of available securities. The second stage starts with the relevant beliefs about future performances and ends with the choice of portfolio" Harry Markowitz

La réplication d'un portefeuille de Cash flows avec un autre ensemble de cashflows sont fréquemment utilisés dans les problèmes de prix (pricing) et les couvertures(Hedging). Par exemple, répliquer dépôts avec des obligations négociables permet au trésorier de déterminer un montant approximatif la juste valeur des dépôts et de mettre en place des plans de couverture. Dans ces applications, la réplication des dépôts avec des instruments négociables est cruciale,comme cela reformule le problème de la tarification et de la couverture des dépôts comme un problème standard de marché d'évaluation et couverture des instruments. Dans un contexte d'assurance, un portefeuille de réplication est également utilisé pour remplacer les polices non négociables par un portefeuille de cashflows négociables offrant la meilleure couverture. Là encore, la transformation des éléments de bilan non échangeables en répliques d'instruments négociables permet de couvrir des régimes et d'autres formes d'analyse, tels que la gestion des actifs et des passifs, à mettre en œuvre en ce qui concerne le portefeuille de réplication négocié sur le marché. Quand l'application d'un portefeuille de réplication, une question clé est de savoir quels instruments d'actif devraient être utilisé pour la réplication afin d'obtenir un écart de cahsflows minimal. Ayant déterminé l'ensemble des actifs à utiliser pour la réplication, l'étape clé suivante consiste à déterminer un modèle pour la mesure des erreurs de réplication et d'autres caractéristiques de la réplication portefeuille, comme le coût. Dans notre travail, nous décrivons un programme d'optimisation non linéaire efficace approche de la réplication des cashflows, la non-faisabilité d'un portefeuille d'actifs donné indique simplement un mauvais choix d'instruments de réplication, ou un mauvais choix de contraintes. Pour les problèmes réalisables, l'optimisation non linéaire trouve le portefeuille à coût minimal de l'ensemble réalisable. L'approche d'optimisation des cashflows avec des contraintes d'inéquation des cashflows a des avantages par rapport aux approches simples de la réplication des cashflows qui minimisent directement l'écart de cashflows entre les portefeuilles.

Comment le secteur financier utilise la réplication des portefeuilles:

Le concept de réplication de portefeuilles sert à plusieurs fins. Globalement, il existe deux principales applications de la technique du portefeuille de réplication:

1. Calcul du capital économique: En raison de leur nature stochastique, les calculs de capital économique nécessitent une puissance de calcul importante. Le portefeuille répliquant comme représentation de l'assurance passif réduit considérablement les temps d'exécution pour estimer l'impact des changements économiques sur la valeur du portefeuille de passifs.

2. Couverture et gestion des risques financiers: D'autres applications du porte-

feuille de réplication se trouvent dans les domaines de la gestion des risques financiers et rapport financier.

2.3-Définition d'un portefeuille de réplication :

Un portefeuille de réplication est un portefeuille de deals (prêts) dont la valeur de marché se rapproche de la valeur de marché constante d'un portefeuille de deals (prêts) donné, sous les conditions de marché d'Ajourd'hui, et de futur.

Le but de cette approche est d'approximer un portefeuille de plusieurs milliers de deals par un autre portefeuille de deals mais de taille beaucoup plus petite.

2.4-Génération d'un portefeuille:

Notre démarche consiste à la création d'un nouveau portefeuille de Réplication, pour cela on doit générer un portefeuille de L deals (Loans).

Pour simplifier, on prend la même devise (DZD), et même périodicité (1Year(Y) : 1 an).

Remarque :

Un taux périodique est le taux d'intérêt applicable à une période inférieure à un an, par exemple pour une durée de 1, 3 ,6 ou 12 mois.

-Et soit N le nombre de deals (Loans) à répliquer.

- Avec D_i est le i-ème deal (loan) répliqué avec $i = 1, ..., N$.

2.5-Position du problème :

Notre problème, noté (*) est de trouver la combinaison des poids (weights) , notés $(w_i)_{i=1,..,N}$ des N deals répliqués tel que profit and loss PL des deals répliqués s'approche le plus possible de la PL du portefeuille :

Alors, on doit d'abord définir la valeur actuelle (Present value) :

$$PV = \sum_{k=1}^{K} F_k \cdot e^{-r_k T_k} \tag{2-1}$$

pour K cashflows , r_k: taux d'intérêt de k-ème cashflow , T_k: les dates des cashflow,F_k: le k-ème cashflow.

Afin de calculer le taux d'intérêt r_k à la date T_k, on interpole linéairement de la courbe de taux entre deux dates de la courbe de taux, $t_1$et t_2: $t_1 \leq T_k \leq t_2$.

Alors, pour calculer PV des deals répliqués ,on peut adopter la méthode des stress test ou la méthode des sensibilités déjà défini au chapitre précédent.

2.5.1.Méthode des STRESS TEST:

On a besoin des notations suivantes:

- M présente le nombre des stress test.

-S_j est le j-ième stress test avec $j = 1, ..., M$

Un stress test parallèle de valeur h sur la courbe de taux ($h = 50BP$ "Basic Point" $1BP = 0,0001$ ou $0,01\%$)

$$PV_j^{D_i} = PV(r_1 + h, r_2 + h, ..., r_M + h) = \sum_{k=1}^{K} F_k^{D_i} \cdot e^{-(r_k+h)T_k} \tag{2-2}$$

pour $j = 1, ..., M$.

$PV_j^{D_i}$: est la PV du deal D_i du portefeuille avec les conditions stressées.

Et :

$$PV_0^{D_i} = PV(r_1, ..., r_k) = \sum_{k=1}^{K} F_k^{D_i}.e^{-r_k T_k} \tag{2-3}$$

soit $PV_0^{D_i}$ la PV du deal D_i du portefeuille avec les conditions initiales.

- Posons PL^{D_i} le vecteur Profit/Loss des deals répliqués D_i pour les M stress tests $(S_j)_{j=1,...,M}$, i.e : $PL^{D_i} = (PL_j^{D_i})_j$

Avec : $PL_j^{D_i}$est le Profit/Loss des deals répliqués D_i pour le stress test S_j, qui est défini par :

$$PL_j^{D_i} = PV_j^{D_i} - PV_0^{D_i} \tag{2-4}$$

Maintenant, on définit le vecteur Profit/Loss de portefeuille , notée par $PL^P = (PL_j^P)_j$.

Avec :

$$PL_j^P = PV_j^P - PV_0^P \tag{2-5}$$

est le Profit/Loss du portefeuille coresspondant au stress test S_j.

Sachant que :

$$PV_j^P = \sum_{i=1}^{L} PV_j^{D_i} \tag{2-6}$$

et :

$$PV_0^P = \sum_{i=1}^{L} PV_0^{D_i} \tag{2-7}$$

avec L ; le nombre des deals (Loans) du portefeuille P.

2.5.2.Méthode de la Sensibilité :

Nous utilisons les mêmes notations abordées dans la partie précédente.

Comme déjà défini au chapitre précédent, le processus de sensibilité est donné par la variation de valeur actuelle PV (Present Value) par rapport à la variation de taux d'intérêts (présenté par la courbe de taux) qui est égale à :

Pour tout $j = 1, ..., M$ (M est le nombre des taux d'intérêts),on a :

$$\frac{\partial PV^{D_i}}{\partial r_j} = PV^{D_i}(r_1, ..., r_j + 1BP, ..., r_M) - PV^{D_i}(r_1, ..., r_j, ..., r_M) \qquad \text{(2-8)}$$

Avec $(r_1, ..., r_M)$ est la courbe de taux d'intérêts.

Sachant que $1BP = 0.0001$, on trouve:

$$PV^{D_i}(r_1, ..., r_j + 1BP, ..., r_M) = \sum_{k=1, k\neq j}^{K} F_k^{D_i}.e^{-r_k T_k} + F_j^{D_i} \cdot e^{-(r_j+0.0001).T_j} \qquad \text{(2-9)}$$

Et :

$$PV^{D_i}(r_1, ..., r_j, ..., r_M) = \sum_{k=1}^{K} F_k^{D_i}.e^{-r_k T_k} \qquad \text{(2-10)}$$

Pour le portefeuille P, on exprime la sensibilité comme suit:

pour tout $j = 1, ..., M$.

$$\frac{\partial PV^{P}}{\partial r_j} = PV^{p}(r_1, ..., r_j + 1BP, ..., r_M) - PV^{P}(r_1, ..., r_j, ..., r_M) \qquad \text{(2-11)}$$

Avec:

$$PV^{p}(r_1, ..., r_j + 1BP, ..., r_M) = \sum_{i=1}^{L} PV^{D_i}(r_1, ..., r_j + 1BP, ..., r_M) \tag{2-12}$$

Et:

$$PV^{P}(r_1, ..., r_j, ..., r_M) = \sum_{i=1}^{L} PV^{D_i}(r_1, ..., r_j, ..., r_M) \tag{2-13}$$

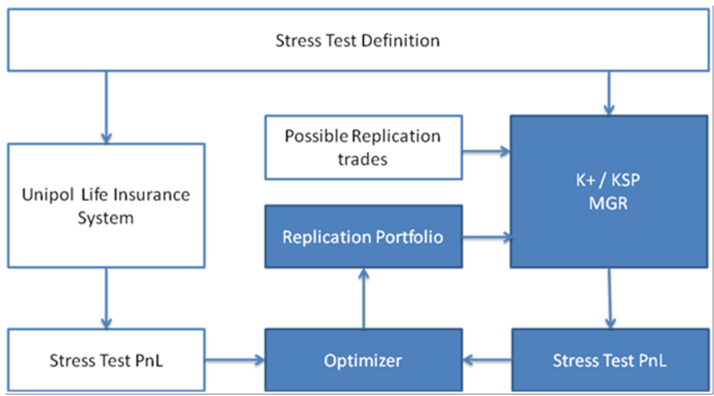

Figure 9: 2.5.Déscription du plan de travail.

2.6.Modélisation mathématique:

Le problème (*) consiste donc à minimiser la distance suivante entre PL^P et les PL^{D_i} multipliés par les poids w_i ,ce qui est équivalent à :

$$Min_{w\geqslant 0}\left[\frac{1}{2}\left\|PL^P - \sum_{i=1}^{N} w_i PL^{D_i}\right\|^2\right] \tag{*}$$

Appelée la fonction objectif associée au problème .

2.6.1.STRESS TEST:

D'après le résultat trouvé dans la partie (2-5) , la fonction objectif $(*)$ devient :

$$Min_{w\geqslant 0}\left[\frac{1}{2}\left\|PL^{P}-\sum_{i=1}^{N}w_{i}PL^{D_{i}}\right\|^{2}\right]=Min_{w\geq 0}\left[\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{M}\left(PL_{j}^{P}-\sum_{i=1}^{N}w_{i}PL_{j}^{D_{i}}\right)^{2}\right]$$

Remplaçons les valeurs PL_j^Pet $PL_j^{D_i}$ par les relations (2-4) et (2-5) on obtient :

$$(*)\Leftrightarrow Min_{w\geq 0}\left[\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{M}\left((\sum_{i=1}^{N}w_{i}PV_{0}^{D_{i}}-PV_{0}^{P})-(\sum_{i=1}^{N}w_{i}PV_{j}^{D_{i}}-PV_{j}^{P})\right)^{2}\right]\quad (**)$$

Remarque Importante :

Le problème de la réplication (*) peut-être exprimer par minimisation de la distance entre les PV de portefeuille initiale P et le portefeuille des deals répliqués D_i , sous les contraintes suivantes :

1) Les contraintes :

Posons :

Pour tout $j=1,...,M$

$$(\sum_{i=1}^{N}w_{i}PV_{j}^{D_{i}}-PV_{j}^{P})\leq(\sum_{i=1}^{N}w_{i}PV_{0}^{D_{i}}-PV_{0}^{P})$$

Ceci implique :

Pour tout $j=1,...,M$

$$(\sum_{i=1}^{N}w_{i}PV_{j}^{D_{i}}-\sum_{i=1}^{N}w_{i}PV_{0}^{D_{i}})\leq(PV_{j}^{P}-PV_{0}^{P})$$

Alors, en utilisant les résultats (2-4)et (2-5) , on obtient :

$$\sum_{i=1}^{N} w_i PL^{D_i} \leq PL^P \tag{2-14}$$

L'expression (2-14) présente les contraintes de notre problème (*) .

2)La fonction objectif :

D'après les contraintes trouvées ci-dessus , la fonction objectif devient :

$$Min_{w\geq 0}\left[\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N} w_i PV_0^{D_i} - PV_0^P\right)^2\right] \tag{*}$$

D'où , le problème (*) s'écrit comme :

$$(P1) : \begin{cases} Min_{w\geq 0}\left[\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N} w_i PV_0^{D_i} - PV_0^P\right)^2\right] \\ \\ \sum_{i=1}^{N} w_i PL^{D_i} \leq PL^P \end{cases}$$

C'est un problème d'Optimisation non linéaire. Il peut se résoudre par la méthode itérative d'Uzawa , présentée dans le chapitre suivant .

2.6.2.Sensibilité:

En utilisant le résultat trouvé dans le paragraphe 2) , on obtient:

1) les contraintes :

Posons :

Pour tout $j = 1, ..., M$:

$$\sum_{i=1}^{N} w_i \frac{\partial PV^{D_i}}{\partial r_j} \leq \frac{\partial PV^P}{\partial r_j} \tag{2-15}$$

2)La fonction objectif :

Dans ce cas , on considère la même fonction utilisée en stress-test , l'expression $(*)$:

$$Min_{w\geq 0}\left[\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N} w_i PV_0^{D_i} - PV_0^P\right)^2\right]$$

D'où, le problème devient :

$$(P2) : \begin{cases} Min_{w\geq 0}\left[\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N} w_i PV_0^{D_i} - PV_0^P\right)^2\right] \\ \\ \sum_{i=1}^{N} w_i \frac{\partial PV^{D_i}}{\partial r_j} \leq \frac{\partial PV^P}{\partial r_j} \qquad\qquad j = \overline{1, M} \end{cases}$$

Il peut être résolu par la méthode itérative d'Uzawa , voir chapitre suivant .

2.6.3.Représentation matricielle du problème en utilisant les Stress-Test :

Soit la fonction objectif , déjà décrite par l'expression (*) :

$$Min_{w\geqslant 0}\left[\frac{1}{2}\left\|PL^P - \sum_{i=1}^{N} w_i PL^{D_i}\right\|^2\right] = Min_{w\geq 0}\left[\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{M}\left(PL_j^P - \sum_{i=1}^{N} w_i PL_j^{D_i}\right)^2\right]$$

Avec $j = 1, ..., M$, Mest le nombre des Stress-Test et $i = 1, ..., N$, N est le nombre des deals répliqués.

Soit le vecteur $w = (w_i)_{i=1,..,N} = (w_1, w_2, ..., w_N)^T$, le vecteur des variables de poids qu'on cherche à déterminer.

Posons : Soit la matrice A d'ordre M x N défini par : $A_{ji} = PL_j^{D_i}$ pour $i = 1, ..., N$ et $j = 1, ..., M$.

Et : le vecteur b d'ordre M x 1 avec : $b_j = PL_j^P$.

D'ou la fonction objectif s'éxprime comme suit :

$$(5) \Leftrightarrow Min_{w \geq 0} \left[\frac{1}{2} \|Aw - b\|^2 \right]$$

Ce problème, appelé problème quadratique à variables positives ou nulles, peut-être résolu par une méthode itérative appelée : Méthode du Gradient Projeté. (Voir le prochain chapitre).

2.7.Conclusion:

Dans ce chapitre, nous avons présenté la formulation mathématique du problème de la réplication d'un portefeuille financier. La modélisation mathématique du problème, nous a conduit à un programme de résolution. Nous avons ramené ce problème à un problème résolvable par une méthode approchée, ensuite à la résolution d'un problème quadratique et un problème à contraintes linéaires. Pour les résoudre, nous avons proposé l'application de l'algorithme de Gradient-projeté et la méthode d'Arrow-Hurwicz que nous allons les définir dans le prochain chapitre.

Chapitre 3 :

Méthodes d'Optimisation non linéaire avec contraintes

3.1.Introduction:

Dans ce chapitre, on s'interèsse à la résolution des problèmes mathématiques, à l'aide des méthodes d'optimisation avec contraintes.

Parmis ces méthodes, on présente les méthodes duales grace à leurs simplicités et les avantages qu'elles offrent par rapport aux méthodes directes.

Nous allons présenter les principales notions de l'optimisation non linéaire, avec contraintes égalités et inégalités, citons les techniques d'UZAWA, d'ARROW-HURWICZ et Lagrangien augmenté ainsi que leurs applications dans le cas quadratique. Ensuite, nous abordons les méthodes numériques de minimisation d'une fonction à un seul paramètre.

3.2.Notions fondamentales :[6,7]

3.2.1.Position du problème:

Le problème d'optimisation non linéaire consiste à minimiser une fonction f définie de $\Re^n$ dans $\Re^m$(avec $m < n$), sur un certain domaine D telle que :

$$D = \{x \in R^n / g_i(x) \leq ou = ou \geq 0, i = 1, ..., m\}.$$

$$(P) \begin{cases} Min_x \quad f(x) \\ x \in D \end{cases}$$

avec :

x : vecteur de composantes $(x_1, x_2, ..., x_n)$, qui sont les inconnues du problème.

g_i pour tout $i = 1, ..., m$, appelés les contraintes associées au problème (P).

Considérons f et g_i $\forall i = 1, ...m$ des fonctions continues et différentiables.

Alors , distinguons les deux cas des contraintes suivants :

3.2.2. Cas des contraintes égalités:

Définissons le problème comme suit :

$$(P'):\begin{cases} Min_x f(x) \\ g_i(x) = 0 \quad\quad i = 1, ..., m \end{cases}$$

Le théorème fondamental suivant donne une condition nécessaire d'optimalité pour le problème (P').

**Théorème 1:[7]*

Si x^*un vecteur de $\Re^n$ est un optimum local de f sur D, alors $\exists$ un vecteur $\lambda^*\in\Re^m$ tel que :

$$\begin{cases} \nabla f\left(x^*\right) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^*.\nabla g_i\left(x^*\right) = 0 \\ g_i\left(x^*\right) = 0 \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \forall i \in I \end{cases}$$

Posons :

$$L\left(x, \lambda\right) = f\left(x\right) + \lambda^T.g\left(x\right) = f\left(x\right) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i.g_i\left(x\right)$$

appelée Lagrangien du problème (P'), alors la condition nécessaire d'optimalité s'écrit comme :

$$\begin{cases} L_x\left(x^*, \lambda^*\right) = \nabla_x L(x^*, \lambda^*) = 0 \\ L_\lambda(x^*, \lambda^*) = 0 \end{cases}$$

Où $L_\lambda$représente les contraintes de notre problème (P').

Remarque:

Définition:

On dit qu'un point $x^* \in \Re^n$ un point régulier de D (l'espace défini par ces contraintes) si les gradients $\nabla g_i(x^*)$sont indépendants.

(i)Les deux conditions $L_x = 0$ et $L_\lambda = 0$ constituent un ensemble (n+m) équations non linéaires a priori suffisant pour déterminer les (n+m) inconnues x^* et λ^*,il restera de vérifier que l'on a bien obtenu l'extrémum local recherché.

(ii)Passons maintenant à la condition suffisante d'optimalité :

**Théorème 2:[6]*

Soit $x^* \in \Re^n$ un point régulier, on suppose que f et $g \in C^2$, si x^*est un minimum local de f sur D, alors $\exists$ $\lambda^* \in \Re^m$ tel que :

$$\begin{cases} L_x\left(x^*, \lambda^*\right) = 0 \\ L_\lambda(x^*, \lambda^*) = 0 \end{cases}$$

et de plus :

$L_{xx}\left(x^*, \lambda^*\right)$ est une matrice symétrique définie positive.

2.Cas des contraintes inégalités:

Le problème que l'on désire résoudre est le suivant :

$$(P") \begin{cases} Min_x f(x) \\ g_i(x) \leq 0 \quad\quad i = 1, .., m \end{cases}$$

Définition:

Une contrainte $g_i(x) \leq 0$ est dite active (saturé) au point x^*si :

$$g_i\left(x^*\right) = 0.$$

Cette définition implique que pour tout vecteur x^* ,on peut introduire l'ensemble :

$$act\left(x^*\right) = \left\{i/g_i\left(x^*\right) = 0\right\}$$

**Théorème 3: Conditions nécessaires du premier ordre:[7]*

1) Soit x^*un point régulier des contraintes $g_i(x) \leq 0$ pour $i = 1, ..., m$.

Si $x^*\in R^n$ est un minimum local de f sur D (l'espace défini par ces contraintes), alors $\exists$ un vecteur $\lambda^* \in R_+^m$ tel que :

$$\begin{cases} \nabla f\left(x^*\right) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^*.\nabla g_i\left(x^*\right) = 0 \\ \sum_{i=1}^m \lambda_i^*.g_i\left(x^*\right) = 0 \\ g_i(x^*) \leq 0 \quad\quad\quad\quad i = 1, .., m \end{cases}$$

Remarque :

-Si la contrainte i n'est pas active ,i.e : $g_i\left(x^*\right) \prec 0$ alors nécessairement $\lambda_i^* = 0$.

-Si $\lambda_i^*\succ 0$, alors la contrainte est forcément active en x^*:$g_i(x^*) = 0$.

2) Les conditions d'optimalité sont regroupées comme suit :

$$\begin{cases} L_x\left(x^*,\lambda^*\right)=0 \\ L_\lambda\left(x^*,\lambda^*\right)\leq 0 \\ \lambda^T L_\lambda\left(x^*,\lambda^*\right)=0 \end{cases}$$

Appelées les conditions de Karush,Kuhn-Tucker (KKT).

3)La condition suffisante d'optimalité associée à ce problème est donnée par :
$L_{xx}(x^*,\lambda^*)$ est symétrique définie positive.

-Interprétation géométrique:

Les conditions de KKT se pretent à une interprétation géométrique très simple,illustré par la figure ci-dessous :

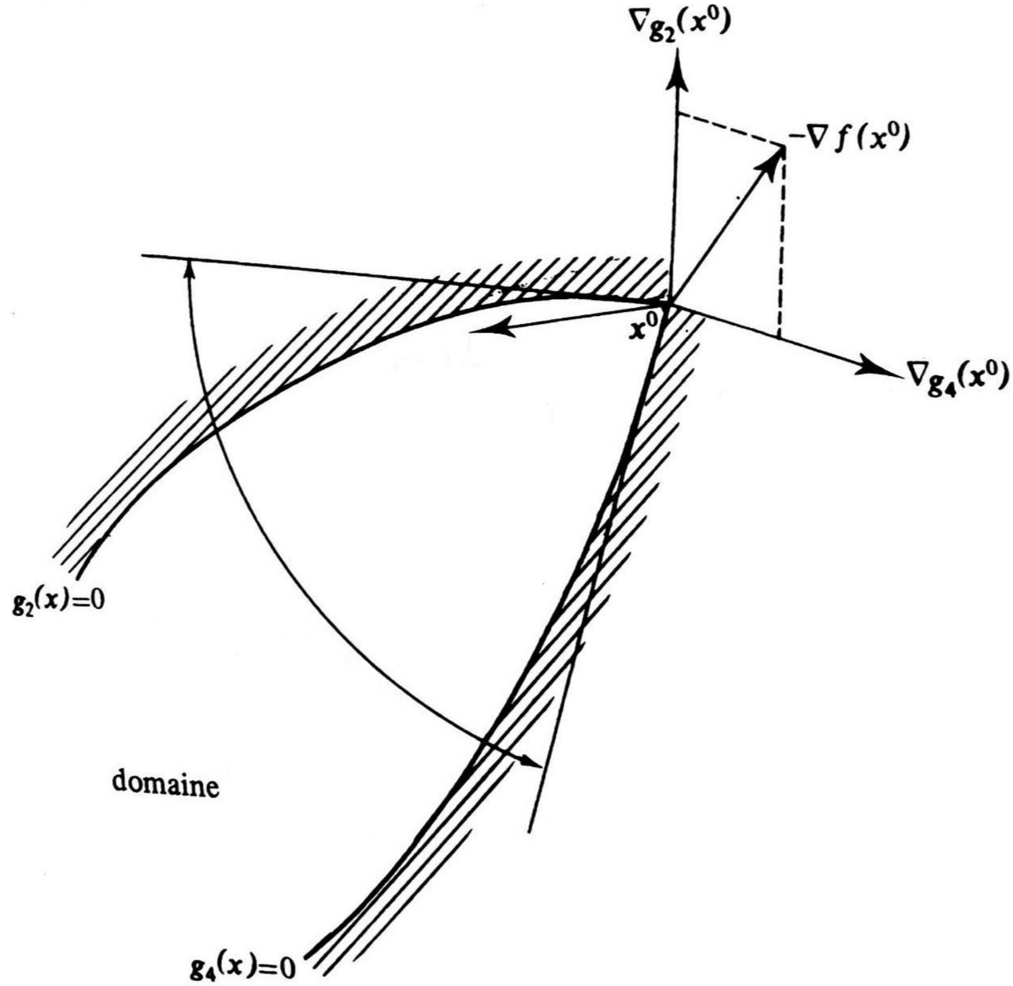

Figure 10: 3.2.Illustration des conditions KKT

Remarque :

-D'après les conditions nécessaires d'optimalité, il faut résoudre $(n+m)$ équations à $(n+m)$ inconnues.

3.3.Méthodes de Résolution:

On va citer des méthodes ,qui facilitent la résolution des problème (P') et $(P")$.

3.3.1.Méthode du gradient projeté:[6]

Soit le problème (P") défini ci-dessus.

Une idée assez naturelle, pour adapter les méthodes d'optimisation sans contraintes aux problèmes avec contraintes, est de projeter à chaque étape le déplacement sur la frontière du domaine, afin de s'assurer que le nouveau point obtenu appartienne à l'ensemble des solutions réalisables.

-Principe de la méthode du Gradient:

On génère une suite de points $x^0, x^1, ..., x^k$convergeant vers un optimum local de f.

A chaque étape k, x^{k+1}est défini par :

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k d_k$$

où $\alpha_k$est le pas de déplacement ($\alpha_k \succ 0$) et $d_k$est une direction de déplacement qui est généralement égale à : $d_k = -\nabla f\left(x^k\right)$.

Alors, dans le cas du problème avec contraintes, on projete sur le domaine D le point obtenu à chaque étape k, i.e:

pour $k = 0, 1, 2, ...$

$$x^{k+1} = P_D\left(x^k - \alpha_k \nabla f\left(x^k\right)\right)$$

Remarque importante:

Le problème de projection constitue lui-même un problème d'optimisation avec contraintes. Donc, on doit résoudre tel type de problème à chaque itération k.

En effet, cette méthode peut etre appliquée dans ces cas particuliers, où le problème devient simple:

-Cas particuliers:

Cas 1:

Définissons le domaine comme suit :

$D_1 = \{x \in R^n / x_i \geq 0, i = 1, ..., n\}$

posons :

$$\tilde{x}^{k+1} = x^k - \alpha_k \nabla f \left(x^k\right)$$

Dans ce cas :

$$x_i^{k+1} = \begin{cases} 0 & \tilde{x}_i^{k+1} \prec 0 \\ \tilde{x}_i^{k+1} & \tilde{x}_i^{k+1} \geq 0 \end{cases}$$

Cas 2:

Soit D_2 le domaine d'étude tel que :

$D_2 = \{x \in R^n / a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, ..., n\}$

Dans ce cas :

$$x_i^{k+1} = \begin{cases} \tilde{x}_i^{k+1} & a_i \leq \tilde{x}_i^{k+1} \leq b_i \\ a_i & \tilde{x}_i^{k+1} \prec a_i \\ b_i & \tilde{x}_i^{k+1} \succ b_i \end{cases}$$

3.4.Méthode des directions admissibles:([6],[7])

L'idée consiste à adapter le principe des méthodes d'optimisation sans contraintes pour tenir compte des limitations imposées par la présence des contraintes. Plus exactement, on choisit un point de départ, satisfaisant les contraintes et on recherche une direction d de déplacement réalisable c'est à dire:

a)Un petit déplacement dans cette direction ne fait pas sortir de l'ensemble D.
b) La fonction diminue.

Posons :

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k d_k$$

Posons :

$$I_k = \{i/g_i(x^k) = 0\}$$

d_k est admissible si :
$g_i(x^{k+1}) = g_i(x^k) + \alpha_k \nabla^T g_i(x^k) d_k \leq 0.$

et , d_k est une direction de descente si :
$f(x^{k+1}) - f(x^k) = \alpha_k \nabla^T f(x^k) d_k \leq 0.$

D'où, on obtient :

$$\begin{cases} Min_{d_k}(\nabla^T f(x^k)d_k) \\ \nabla^T g_i(x^k)d_k \leq 0 \qquad i \in I_k \\ \| d_k \| = 1 \end{cases}$$

C'est un problème d'optimisation linéaire, qu'on doit le résoudre à chaque itération k.

De plus, il reste à trouver α_k optimal.

Test d'arret :
$\nabla^T f(x^k).d_k \succ 0$.

Maintenant, on va introduire la notion de dualité pour résoudre les problèmes (P') et $(P")$.

<u>*3.5.Méthodes duales (Lagrangiennes) :([6],[7])*</u>

Considérons le problème $(P")$:

$$(P") : \begin{cases} Minf\,(x) \\ g_i\,(x) \leq 0 \quad i = 1, ..., m \end{cases}$$

Les méthodes duales reposent sur le concept de maximiser la fonction duale du problème primale $(P")$.

Soit $L(x,\lambda)$le Lagrangien associé au problème $(P")$ défini ci-dessus.

3.5.1.Définition et Propriétés:

Soit $x^* \in R^n$et $\lambda^* \in R_+^m$, on dit que (x^*,λ^*) est un point-selle de la fonction $L(x,\lambda)$ si :

$$\forall x \in R^n, \forall \lambda \in R_+^m : L(x^*,\lambda) \leq L(x^*,\lambda^*) \leq L(x,\lambda^*)$$

i.e : x^* est un minimum sur R^n, et λ^* est un maximum sur R_+^m de L.

3.5.2.Théorème de point selle:([6],[7])

On dit que le point (x^*,λ^*) est un point-selle de $L(x,\lambda)$ si et seulement si :

1. $L(x^*,\lambda^*)$=$min_x L(x,\lambda^*)$
2. $g_i(x^*) \leq 0$, $i = 1, ..., m$
3. $\lambda_i^*.g_i(x^*) = 0$, $i = 1, ..., m$.

Voici une figure illustratif: [7]

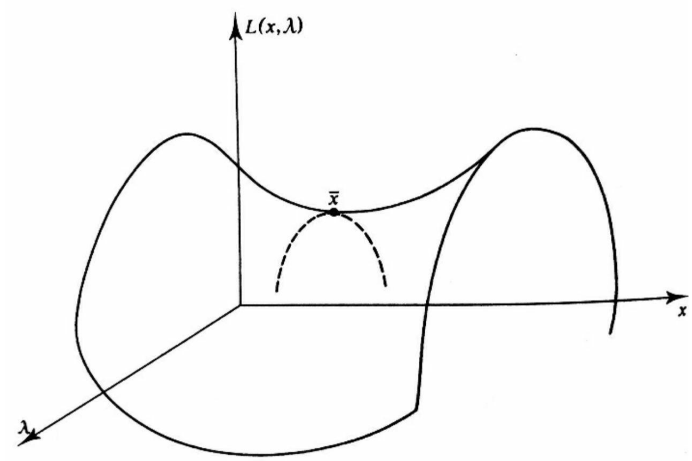

Figure 11: 3.5.Illustration de la notion de point-selle $\bar{x}$.

Ce théorème engendre ce résultat :

Théorème: [6]

Si (x^*, λ^*)est un point selle de $L(x, \lambda)$, alors x^* est solution du problème $(P")$.

Définissons la fonction suivante :

$$H(\lambda) = min_{x \in R^n} L(x, \lambda)$$

Appelée la fonction duale associée au problème $(P")$.

La recherche du point-selle peut se faire en résolvant le problème:

$$max_{\lambda \geq 0} H(\lambda) = max_{\lambda}(min_x L(x, \lambda))$$

3.5.3.Méthode d'Uzawa :([6],[7])

L'algorithme d'Uzawa est un algorithme de gradient à pas constant α , appliqué à la fonctionelle $H(\lambda)$, supposée différentiable,issue du problème (P"),elle utilise le principe suivant :

À chaque itération k, le Lagrangien est minimisé en x et maximisé en λ.

Procédure d'Uzawa: 3.5.3:

a) poser $k=0, \lambda^0 \in R^{m+}, x^0 \in R^n, \alpha \succ 0, \epsilon \succ 0$.

b) Déterminer x^{k+1}solution de $Min_{x \in R^n} L(x^k, \lambda)$ (Résolution du problème sans contraintes)

c) Calculer $\lambda^{k+1} = max\left(0, \lambda^k + \alpha.\nabla H\left(\lambda^k\right)\right)$.

d) Si: $\parallel \lambda^{k+1} - \lambda^k \parallel \prec \epsilon$. arreter.

e)Sinon, faire $k \leftarrow k+1$et retourner en (b).

3.5.4.Méthode d'Arrow-Hurwicz:([6],[7])

Une variante plus simple de l'algorithme d'Uzawa consiste à ne mettre en oeuvre "qu'a un seul pas de gardient" (en général , un pas fixe) dans la minimisation en x.C'est l'algorithme d'Arrow-Hurwicz.

C'est à dire ,à chaque itération k ,au lieu de minimiser complètement la fonction $L(x, \lambda^k)$, la méthode consiste à se déplacer alternativement dans l'espace des variables primales et dans l'espace des variables duales.

Procédure d'Arrow-Hurwicz : 3.5.4 :

a) poser $k=0, \lambda^0 \in R^{m+}, x^0 \in R^n, \alpha \succ 0, \rho \succ 0, \epsilon \succ 0$.

b) déterminer $x^{k+1} = x^k - \rho.\nabla_x L\left(x^k, \lambda^k\right)$.

c) calculer : $\lambda^{k+1} = max\left(0, \lambda^k + \alpha.g\left(x^{k+1}\right)\right)$.

d) Si: $\parallel \lambda^{k+1} - \lambda^k \parallel \prec \epsilon$. arreter.

e) sinon ,faire $k \leftarrow k+1$et retourner en (b).

Remarque:

1)Dans le cas des contraintes égalités, la résolution du problème (P') revient à maximiser la fonction $H(\lambda)$ dans R^m.

On définit le problème duale comme suit :

$$max_{\lambda \in R^m} H(\lambda) = max_{\lambda \in R^m} min_x L(x, \lambda)$$

3.6.Application au problème quadratique à contraintes linéaires:

La résolution du problème quadratique constitue la partie la plus importante dans le problème de la réplication d'un portefeuille.Donc ,on va utiliser les algorithmes efficaces et simples,déjà illustré ci-dessous.

Soit le problème quadratique suivant :

$$(Q) : \begin{cases} Min_x \frac{1}{2} x^T A x - b^T x & A : SDP \\ Dx - d = 0 & rang D = m, D : m \text{ x } n \end{cases}$$

Calculons le Lagrangien associé au problème (Q) :

$L(x, \lambda) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x + \lambda^T (Dx - d)$.

Avec :

$$arg(min_x L(x, \lambda)) = A^{-1}(b - D^T \lambda).$$

On obtient $H(\lambda)$:

$$H(\lambda) = min_x L(x,\lambda) = -\frac{1}{2}(D^T\lambda - b)^T A^{-1}(D^T\lambda - b) - \lambda^T d$$

D'où ,les algorithmes:

3.6.1.Algorithme de la méthode d'Uzawa :

1) Données : $\lambda^0 \in R^{m+}, \alpha \succ 0, \epsilon \succ 0,\ k = 0.$
2) $x^{k+1} = A^{-1}\left(b - D^T.\lambda^k\right).$
3) $\lambda^{k+1} = \lambda^k + \alpha.\left(Dx^{k+1} - d\right).$
4) Test d'arret :
$\parallel \lambda^{k+1} - \lambda^k \parallel \prec \epsilon.$

3.6.2.Algorithme de la méthode d'Arrow-Hurwicz:

1) Données : $\lambda^0 \in R^{m+}, x^0 \in R^n, \alpha \succ 0, \rho \succ 0, \epsilon \succ 0,\ k = 0.$
2) $x^{k+1} = x^k - \rho.\left(Ax^k - b + D^T.\lambda^k\right).$
3) $\lambda^{k+1} = \lambda^k + \alpha.\left(Dx^{k+1} - d\right).$
4) Test d'arret :
$\parallel \lambda^{k+1} - \lambda^k \parallel \prec \epsilon.$

*Théorème de convergence: [6,7]

Si Aest une matrice de taille n x n symétrique défini positive, et D est une matrice de taille m x n ,de rang m. Alors, pour tout $\alpha \in \left]0, \frac{\lambda_1(A)}{\|D\|^2}\right[$, $\lambda_1(A)$ est la plus petite valeur propre de A, les suites x^{k+1}, λ^{k+1} engendrées par la méthode d'Uzawa convergent vers x^* et λ^* respectivement, c'est-à-dire (x^*, λ^*) le point selle du lagrangien.

3.7.Méthode du Lagrangien augmenté:([6],[7])

Cette approche consiste à introduire un nouveau lagrangien perturbé qui conduise à une fonctionelle duale différentiable pour laquelle un algorithme à pas grand est utilisable.

Soit le problème suivant:

$$(P): \begin{cases} Min_x f(x) \\ g(x) \leq 0 \end{cases}$$

On appelle Lagrangien augmenté associée au problème (P), la fonctionelle :

$$L_c(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T . g(x) + \frac{c}{2} \parallel g(x) \parallel^2, c = cste \succ 0$$

L'algorithme :

a) poser $k = 0, \lambda^0 \in R^{m+}, \alpha \succ 0, c \succ 0, \epsilon \succ 0.$

b) Déterminer x^{k+1}solution de $min_{x \in R^n} L_c\left(x, \lambda^k\right)$.

c) Calculer $\lambda^{k+1} = max\left(0, \lambda^k + \alpha.\nabla H_c\left(\lambda^k\right)\right).$

d) Si $\parallel \lambda^{k+1} - \lambda^k \parallel \prec \epsilon$, arreter.

e) sinon, faire $k \leftarrow k + 1$et retourner en (b).

Remarque Importante:

Le choix du paramètre α optimal ,qui représente le pas des algorithmes précédents , constitut un point important dans la résolution de problème (P). Ce qui mène à la recherche d'un pas satisfaisant .

3.8.Minimisation d'une fonction à un seul paramètre:

Problème :

$$min_{0 \leq \alpha \leq \alpha_{max}} f(\alpha)$$

c-à-d : trouver $\alpha^* \in [0, \alpha_{max}]$ tel que $f(\alpha^*) \leq f(\alpha)\ \forall\alpha \in [0, \alpha_{max}]$.

3.8.1. Règle d'Armijo :[18]

Au lieu de chercher un paramètre optimal, chose qui n'est pas évidente , cette règle consiste à chercher α qui satisfait une certaine condition donnée par :

Si f est de classe C^2 et de Hessiene $\nabla^2 f$ définie positive au voisinage de x^k alors :
En fixant $\epsilon \in]0,1[$, $\exists\ \alpha > 0$ suffisament petit tel que :

$$f(x^k + \alpha d^k) - f(x^k) \leq \epsilon.\alpha\nabla f(x^k).d$$

avec d: la direction de descente.
appelée condition d'Armijo.

3.8.2.La règle de Backtracking géométrique :

En fixant $s > 0$, $\sigma, \beta \in]0,1[$, il s'agit de choisir $\alpha^t = \beta^{m_t}s$ où $m_t$est le premier entier non nul tel que :

$$f(x^t + \beta^m s d^t) - f(x^t) \leq -\sigma\beta^m s \parallel \nabla f(x^t) \parallel^2$$

où $d^t = \nabla f(x^t)$ est une direction de descente .

En pratique on fait souvent les choix:

* $s = 1$.

*$\beta = 1/2$ ou $\beta = 1/10$.

*$\sigma \in [10^{-5}, 10^{-1}]$.

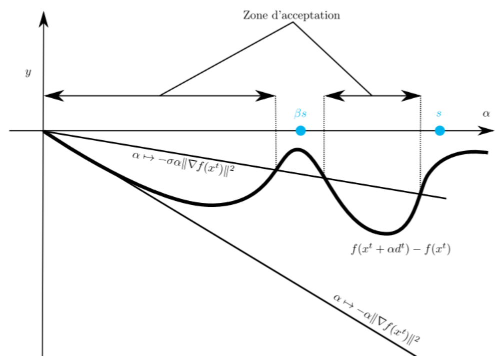

Figure 12: 3.8.Règle d'Armijo

3.9.Conclusion:

Dans ce chapitre, nous avons présenté des méthodes d'optimisation duales, basée sur les techniques de lagrangien pour la résolution des problèmes d'optimisation sous contraintes. Pour la résolution de problèmes quadratiques à contraintes linéaires d'inégalités, l'algorithme Gradient projeté, d'Uzawa et d'Arrow-Hurwicz apparait très performant. Cependant, cette performance est dépendante de deux facteurs qui contrôlent l'algorithme (α et ρ). La convergence de l'algorithme est d'autant plus rapide que α est grand, mais pratiquement, le choix de α est un problème délicat. Pour cela, nous avons utiliser la règle d'Armijo qui permet de calculer un pas satisfaisant car il joue un rôle important pour réduire énormément le nombre d'itérations effectuées par l'algorithme.

Chapitre 4 :

Simulation et Tests

4.1.Introduction :

Dans ce chapitre, nous abordons la simulation de la méthodologie décrite au chapitre 2, et l'implémentation de cette dernière aux tests. D'abord, nous décrivons les techniques de résolution du problème, et nous donnons un exemple illustratif. En deuxième lieu, nous expliquons les différentes étapes de résolution, puis nous donnons un programme informatique qui utilisent ces techniques pour résoudre notre problème en temps réel.

4.2. Génération d'un portefeuille:

Nous avons déjà mentionné ,dans la section 2.4 qu'il est important de générer un portefeuille de Loans, et il sera mieux d'utiliser une fonction “Random”, qui crée aléatoirement un deal (Loan), puis nous allons les regrouper dans notre portefeuille.

Pour cela, nous devons prendre comme données, les variations des : Nominaux, Coupons et Echéances .

Exemple :

On veut générer un portefeuille de 10 000 Loans, tel que :

- Les différents nominaux doivent-etre de 1 Million à 250 Millions DZD.

-Des coupons différents de 1% à 10 %.

- Echéances différentes de 5Y à 10Y.

Et générer aussi un portefeuille de Réplication de 30 Loans .

À cet égard, on donne un algorithme concerne la création d'un Deal aléatoire :

4.2.1. Fonction Random :

(Voir Algorithme 4.2.1 en Annexes.)

En premier lieu, on présente les données nécessaires pour résoudre le problème de réplication (voir chapitre 2).

4.2.2. Courbe des Taux :

La courbe des taux représente plus clairement la variation des taux d'intérets en années.

Sachant qu'on a que quelque valeurs de taux précises, on va utilisé cette courbe pour chercher les valeurs inconnues des taux suivant une interpolation linéaire de la courbe.

Exemple :

Soit le tableau des valeurs des taux suivant :

Taux (%)	*2.10%*	*2.20%*	*2.45%*	*2.70%*	*2.75%*	*3.00%*	*3.20%*	*3.30%*	*3.32%*	*3.32%*
Echéances	*3M*	*6M*	*1Y*	*3Y*	*5Y*	*7Y*	*10Y*	*15Y*	*20Y*	*30Y*

Table 6: 4.2.2.Valeurs des taux aux différentes échéances

La courbe de taux correspondante est :

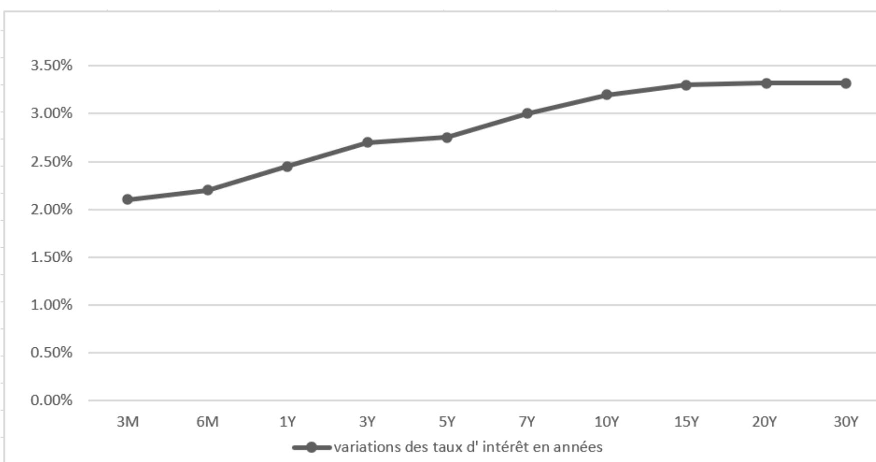

Figure 13: 4.2.2.Courbe des variation des taux d'intéret en années.

La fonction objectif (5), donnée par : (Voir chapitre 2)

$$Min_{w\geqslant 0}\left[\frac{1}{2}\left\|PL^P-\sum_{i=1}^{N}w_iPL^{D_i}\right\|^2\right]$$

Avec $PL^P=(PL_j^P)_{j=1,\ldots,M}$ et $PL^{D_i}=(PL_j^{D_i})_{j=1,\ldots,M}$.

Pour cela, on a besoin de calculer la valeur de PL (Profit &Loss) de chacun des portefeuille et les N deals à répliquer.

Il faut d'abord calculer les PV (Present Value), pour cela on a besoin des valeurs de taux au cours des années de date de début jusq'au écheance. D'où, on doit implémenter :

4.2.3.L'interpolation linéaire :[18]

L'interpolation linéaire est la méthode la plus simple pour estimer la valeur prise par une fonction continue entre deux points déterminés (interpolation). Elle consiste à utiliser pour cela la fonction affine (de la forme f(x) = m.x + b) passant par les deux points déterminés.

Principe de la formule de Taylor-Young au premier ordre: [21]

Supposons que l'on connaisse les valeurs prises par une fonction f en deux points x_a et x_b :

$f(x_a)=y_a$ et $f(x_b)=y_b$.

$$\overline{f}(x)=y_a+(x-x_a)\frac{y_b-y_a}{x_b-x_a}$$

En utilisant cette formule, on calcule les valeurs des taux d'intérets r_k, en faisant l'interpolation de la courbe sur le point (T_k,r_k) entre deux dates connues successives dans le tableau des variation des taux d'intérets en années (voir Tableau 4.2.2) tel que : $t_{k-1} \leq T_k \leq t_{k+1}$.

D'où , on obtient :

$$r_k = r_{k-1} + (T_k - T_{k-1}) \cdot \frac{r_{k+1} - r_{k-1}}{T_{k+1} - T_{k-1}} \tag{4-1}$$

Il sera plus facile de programmer cette formule pour simplifier les calculs .

Voir Algorithme 4.2.3 en Annexes.

Résultat: Un vecteur r[n] des taux d'intérets d'un deal de date de début jusqu'à l'échéance .

Exemple :

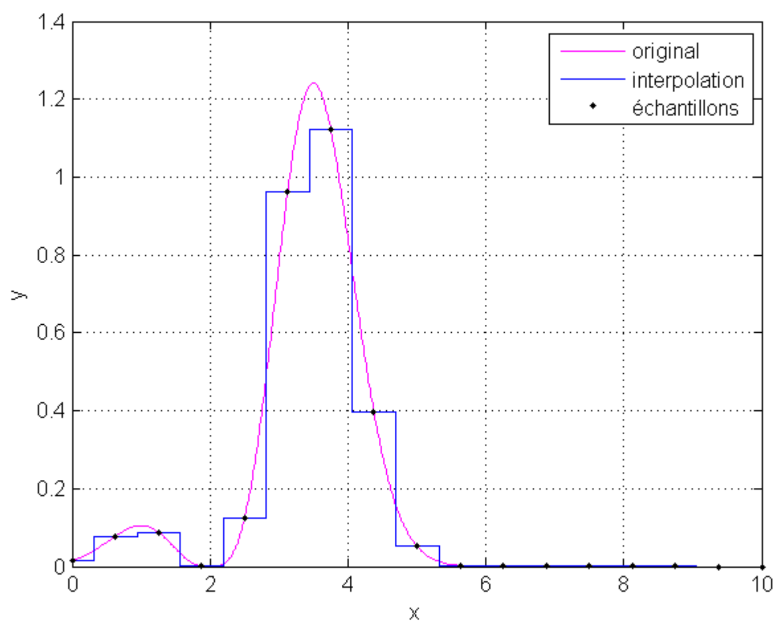

Figure 14: 4.2.2.2.Illustration d'une interpolation linéaire

En deuxième lieu, on va montrer les techniques de résolution du problème.

4.3.Techniques de résolution:

Comme on a déjà montionné dans la section 2.5 ,qu'on applique les STRESS-TEST et la Sensibilité, afin de résoudre notre problème.

4.3.1.STRESS-TEST:

On a besoin des valeurs des stress-test qu'on va appliquer sur la courbe de taux.

Sachant que 1BP (Basic Point) = 0.01%=0.0001.

Un stress-test parallèle de valeur h= 50BP, c'est -à-dire : Shift la courbe de taux par $\pm h$, le prochain exemple donne une illustration de cette dernière .

Exemple:

Pour M=4 stress test, appliquons les stress-test suivants:

$$-100BP, -50BP, +50BP, +100BP.$$

Les calculs sont regroupés dans le tableau suivant:

Echéances	*3M*	*6M*	*1Y*	*3Y*	*5Y*	*7Y*	*10Y*	*15Y*	*20Y*	*30Y*
Taux	*2.10%*	*2.20%*	*2.45%*	*2.70%*	*2.75%*	*3.00%*	*3.20%*	*3.30%*	*3.32%*	*3.32%*
ST:-100BP	*1.10%*	*1.20%*	*1.45%*	*1.70%*	*1.75%*	*2%*	*2.2%*	*2.3%*	*2.32%*	*2.32%*
ST:-50BP	*1.6%*	*1.70%*	*1.95%*	*2.2%*	*2.25%*	*2.5%*	*2.7%*	*2.8%*	*2.82%*	*2.82%*
ST:+50BP	*2.6%*	*2.7%*	*2.95%*	*3.2%*	*3.25%*	*3.5%*	*3.7%*	*3.8%*	*3.82%*	*3.82%*
ST:+100BP	*3.1%*	*3.2%*	*3.45%*	*3.7%*	*3.75%*	*4%*	*4.2%*	*4.3%*	*4.32%*	*4.32%*

Table 7: 4.3.1.Calculs des taux après stress-test.

D'où,on obtient la courbe suivante :

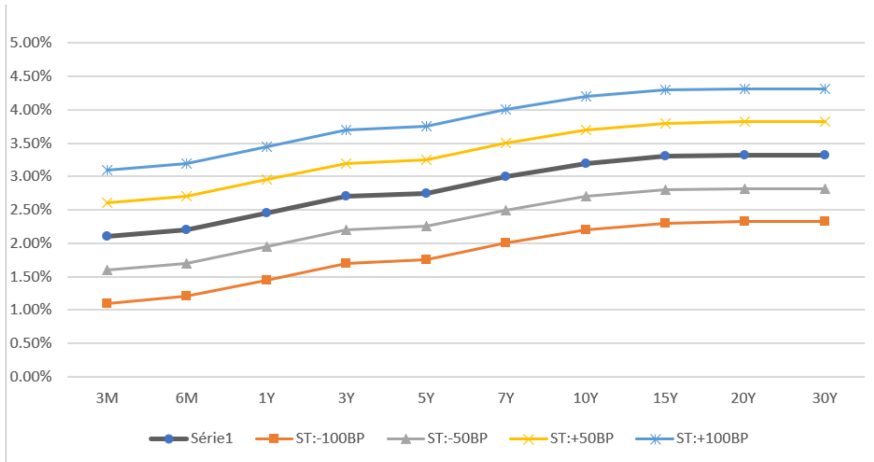

Figure 15: 4.3.1.Courbe des taux en appliquant les différents STRESS-TEST.

Il est possible de générer une fonction qui calcule les valeurs des PV stressées en utilisant seulement une valeur de départ de STRESS-TEST appelée h et un pas qui va aider à passer au STRES-TEST suivant .

Une application intelligible donne une meilleure démonstration.

<u>*Exemple:*</u>

Pour les M=4 STRESS-TEST précédents , il est facile de voir qu'on passe d'un stress à un autre d'un pas =0.005, començons par h=-100BP, sous condition $h \neq 0$.

Dans ce cas , on propose un algorithme qui utilise ce principe pour définir les STRESS-TEST dans le but de calculer les valeurs des PV stressées des différentes Deals (Loans) .

<u>*Voir Algorithme 4.3.1 en Annexes.*</u>

<u>*4.3.2.Sensibilité:*</u>

A l'aide de la définition 7.1 du chapitre 1, et des formules développées en chapitre 2, nous allons expliquer l'utilité de la méthode de sensibilité pour résoudre notre problème de réplication du portefeuille financier.

En utilisant la courbe des taux précédente, nous calculons les valeurs des taux en appliquant la sensibilité d'un point basic (1BP=0.01%).

Echéances	3M	6M	1Y	3Y	5Y	7Y	10Y	15Y	20Y	30Y
Taux	2.10%	2.20%	2.45%	2.70%	2.75%	3%	3.20%	3.30%	3.32%	3.32%
Varier 3eme taux	2.10%	2.20%	2.46%	2.70%	2.75%	3%	3.20%	3.30%	3.32%	3.32%
Varier 6eme taux	2.10%	2.20%	2.45%	2.70%	2.75%	3.01%	3.20%	3.30%	3.32%	3.32%

Table 8: 4.3.2.Exemple d'application de sensibilité sur les taux d'intérets.

Par Conséquence, on obtient la courbe suivante:

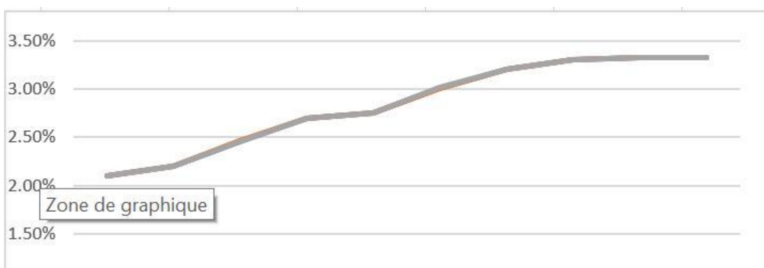

Figure 16: 4.3.2.Courbe des taux en utilisant la sensibilité.

Il est facile de voir que les 3 courbes sont identiques à cause de la petite variation des taux d'un seul Basic Point,contrairement au STRESS-TEST où les courbes changent complètement.

Pour simplifier la résolution du problème de réplication assocoiée à la méthode de sensibilité, on propose de générer une fonction algorithmique qui fait le calcul de la valeur de la sensibilité des Deals déjà décrite au chapitre 2 par la formule (4) suivante :

$$\frac{\partial PV^{D_i}}{\partial r_j} = PV^{D_i}(r_1, ..., r_j + 1BP, ..., r_M) - PV^{D_i}(r_1, ..., r_j, ..., r_M)$$

Algorithme 4.3.2:(Calcul de la valeur de sensibilité d'un Deal)

Voir Annexes.

4.4.Techniques mathématiques d'amélioration :

Il est préférable d'améliorer la rapidité de la résolution du problème de la réplication d'un portefeuille financier, pour cela nous proposons les techniques décrites ci-dessous :

4.4.1.Problème Quadratique à contrainte positive ou nulle :

Suite à la définition du problème donnée en chapitre 2, on va développer l'expression donnée ci-dessous pour ramener le problème de réplication à un problème quadratique, plus simple à résoudre en utilisant les méthodes de résolution mathématiques décrites en chapitre 3. Commençons par rappeler la formule du problème:

$$(5) \Leftrightarrow Min_{w \geq 0} \left[\frac{1}{2} \|Aw - b\|^2 \right]$$

Avec:

-$A_{ji} = PL_j^{D_i}$ pour $i = 1, ..., N$ et $j = 1, ..., M$, A : (M x N).

-$b_j = PL_j^P$, b : (M x 1).

Développons l'expression (5) :

On sait que :

$$\frac{1}{2}\|Aw-b\|^2 = \frac{1}{2}(Aw-b)^T(Aw-b).$$

Après la simplification de cette dernière, on obtient :

$$\frac{1}{2}\|Aw-b\|^2 = \frac{1}{2}w^TA^TAw - b^TAw + \frac{1}{2}b^Tb$$

Posons :

$A' = A^TA$, $b' = A^Tb$ et $c = \frac{1}{2}b^Tb = \frac{1}{2}\|b\|^2$.

Alors : A' : (N x N) et b' : (N x 1).

D'où l'expression (5)devient :

$$(5) \Leftrightarrow Min_{w\geq 0}\left(\frac{1}{2}w^TA'w - b'^Tw + c\right)$$

On s'interresse donc à la minimisation de la fonction quadratique :

$$f(w) = \frac{1}{2}w^TA'w - b'^Tw$$

sous contrainte : $w \geq 0$.

D'où :

$$(P0) : \begin{cases} Min_w f(w) \\ w \geq 0 \end{cases}$$

(Le terme c sera ajouté à la valeur de la fonction objectif après la résolution du problème .)

Il est déjà mentionné qu'on va résoudre le problème $(P0)$ par la méthode du Gradient Projeté (Voir chapitre 3).

Dans ce cas, la solution approchée w^* sera exprimée comme suit : (Voir chapitre 3)

$$w_i^{k+1} = \begin{cases} 0 & \tilde{w_i}^{k+1} \prec 0 \\ \tilde{w_i}^{k+1} & \tilde{w_i}^{k+1} \geq 0 \end{cases}$$

Tel que:

$$\tilde{w}^{k+1} = w^k - \alpha_k \nabla f\left(w^k\right).$$

Sachant que les weights $\left(w^k\right)_k$ doit etre entre 0 et 1 donc, on suggère de faire l'une des deux techniques suivantes:

1) La normalisation:

On propose de déviser la solution trouvée w^k par sa norme ; d'où la solution devient :

$$w^k = \frac{w^k}{\|w^k\|}$$

ce qui rend la valeur de la solution entre 0 et 1.

2) L'ajout d'une contrainte :

Etant donnée la contrainte suivante :

$$0 \leq w \leq 1$$

L'ajout de cette contrainte à notre problème $(P0)$ nous donne :

$$(P0') : \begin{cases} Min_w f(w) \\ 0 \leq w \leq 1 \end{cases}$$

On a déjà traité au chapitre 3, un problème de type $(P0')$ (Voir Méthode Gradient Projeté : cas 2), qui peut etre résolu comme suit :

$$w_i^{k+1} = \begin{cases} \tilde{w_i}^{k+1} & 0 \leq \tilde{w_i}^{k+1} \leq 1 \\ 0 & \tilde{w_i}^{k+1} \prec 0 \\ 1 & \tilde{w_i}^{k+1} \succ 1 \end{cases}$$

Avec :

$$\tilde{w}^{k+1} = w^k - \alpha_k \nabla f\left(w^k\right).$$

Choix de paramètre α:

Nous cherchons à améliorer la vitesse de résolution du problème, alors il sera important de trouver un pas satisfaisant. On suggère d'utiliser la règle d'Armijo (Voir Chapitre 3). Nous allons prendre la condition d'Armijo suivante pour notre problème $(P0)$:

$$f(w^{k+1}) \leq f(w^k) - \alpha \nabla^T f(w^k).\nabla f(w^k)$$

Selon cette condition, nous proposons l'algorithme qui montre la recherche d'un pas satisfaisant suivant:

Algorithme 4.4.1: Test d'Armijo

Voir Annexes.

4.4.2.Problème à contraintes linéaires (Méthode de STRESS-TEST):

A l'aide de la définition du problème, notée $(P1)$ (Voir chapitre 2), et les méthodes de résolution mathématiques, nous occuppons de ramener le problème $(P1)$, redéfini ci-dessous, à sa simple écriture dans le but d'écourter les étapes de programmation :

$$(P1) : \begin{cases} Min_{w\geq 0}\left[\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N} w_i PV_0^{D_i} - PV_0^P\right)^2\right] \\ \\ \sum_{i=1}^{N} w_i PL^{D_i} \leq PL^P \end{cases}$$

Avec :

$PL^{D_i} = (PL_j^{D_i})_j$, et $PL^P = (PL_j^P)_j$ $i = 1,..,N$ et $j = 1,...,M$.

Notation:

Posons :

Une matrice D_1 d'ordre M x N avec $D_{1ji} = PL_j^{D_i}$ telque $i = 1,...,N$ et $j = 1,...,M$.

Un vecteur d_1 d'ordre M x 1 avec $dj = PL_j^P$.

Suivant cette notation, les contraintes deviennent :

$$\left(\sum_{i=1}^{N} w_i PL^{D_i} \leq PL^P\right) \Leftrightarrow (Dw - d_1 \leq 0)$$

On note :

$PV_0^D = (PV_0^{D_i})_{i=1,..,N}$: vecteur des PV des N deals aux conditions initiales .

$$g(w) = \left[\frac{1}{2}\left((PV_0^D)^T.w - PV_0^P\right)^2\right]$$

D'où $(P1)$ s'écrit comme :

$$(P1) : \begin{cases} Min_{w \geq 0} g(w) \\ D_1 w - d_1 \leq 0 \end{cases}$$

Le problème $(P1)$ se résoud par la méthode d'Uzawa ou Arrow-Hurwicz (Voir Chapitre 3).

Sa solution est donnée par la suite des solutions approchées: $(w^k)_k$, telque :

$$w^{k+1} = w^k - \rho.\nabla_w L\left(w^k, \lambda^k\right)$$

Avec :

$$\lambda^{k+1} = max\left(0, \lambda^k + \alpha.(D_1 w^{k+1} - d_1)\right)$$

À noter que :

$$\nabla_w L\left(w^k, \lambda^k\right) = \nabla_w g(w) + D_1^T \lambda^k = \left((PV_0^D)^T.w - PV_0^P\right).PV_0^D + D_1^T.\lambda^k$$

Alors la suite des solutions $(w^k)_k$ peut se calculer par cette expression :

$$w^{k+1} = w^k - \rho.\left(\left((PV_0^D)^T.w - PV_0^P\right).PV_0^D + D_1^T.\lambda^k\right)$$

4.4.3.Problème à contraintes linéaires (Méthode de Sensibilité):

On a déjà défini le problème de réplication associée aux variations de sensibilité des taux d'intérets, appelée $(P2)$ (Voir chapitre 2). Maintenant, on cherche à simplifier le plus possible l'expression du $(P2)$ afin d'écourter les étapes de calcul et faciliter la partie de programmation.

Rappelons d'abord de notre problème $(P2)$:

$$(P2) : \begin{cases} Min_{w\geq 0}\left[\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N} w_i PV_0^{D_i} - PV_0^P\right)^2\right] \\ \\ \sum_{i=1}^{N} w_i \frac{\partial PV^{D_i}}{\partial r_j} \leq \frac{\partial PV^P}{\partial r_j} \qquad\qquad j = \overline{1, M} \end{cases}$$

à l'aide des notations suivantes, le problème $(P2)$ s'écrit comme :

<u>*Notation:*</u>

On remarque que la fonction objectif du problème $(P1)$ et $(P2)$ sont identiques, d'où on prend :

$$g(w) = \left[\frac{1}{2}\left((PV_0^D)^T.w - PV_0^P\right)^2\right]$$

On pose :

La matrice D_2 d'ordre M x N telque : $D_{ji} = \frac{\partial PV^{D_i}}{\partial r_j}$ pour $i = 1, ..., N$ colonnes et $j = 1, ..., M$ lignes .

Le vecteur d_2 d'ordre M x 1 telque : $d_j = \frac{\partial PV^P}{\partial r_j}$ pour $j = 1, ..., M$.

D'où :

$$(P2) : \begin{cases} Min_{w\geq 0}\left[\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N} w_i PV_0^{D_i} - PV_0^P\right)^2\right] \\ \\ D_2 w - d_2 \leq 0 \end{cases}$$

Comme on a déjà mentionné au chapitre 2, le problème $(P2)$ se résoud par la méthode d'Arrow Hurwicz ou UZAWA . La solution est donnée par:

$$w^{k+1} = w^k - \rho.\nabla_w L\left(w^k, \lambda^k\right)$$

Et :

$$\nabla_w L\left(w^k, \lambda^k\right) = \left((PV_0^D)^T.w - PV_0^P\right).PV_0^D + D_2^T.\lambda^k$$

Avec le vecteur dual (λ^k) peut-etre calculé comme suit :

$$\lambda^{k+1} = max\left(0, \lambda^k + \alpha.(D_2 w^{k+1} - d_2)\right)$$

4.5.Exemple de Test:

On cherche à répliquer un portefeuille de 1000 prêts bancaires, à même periodicité =1 an, de montants nominaaux différents de 1M à 250M DZD (millions de dinars Algérien), d'échéances de 5 ans à 20 ans et de coupons différents de 1% à 10%. Pour se faire, on génère un nouveau portefeuille de réplication composé de 15 prêts bancaires, suivant la courbe de taux déjà défini en section 4.3.1.

Soit le vecteur de STRESS-TEST à utiliser :
$ST = (-0.01, -0.005, 0.005, 0.01)$ avec $M = 4$.(Voir section 4.3.1, la figure 15).
Et le vecteur de taux d'intérêt:
rate = (0.0258,0.0270,0.0272,0.0275,0.0287,0.030.0307,0.0313,0.032,0.0322,0.0324,0.0326, 0.0328,0.0330,0.0330,0.0331,0.0331,0.0332,0.0332)

4.5.1.Initialisation des paramètres du programme:

Voici la liste des paramètres à utiliser dans notre travail, nous allons les initialiser dans le tableau suivant :

Paramètre	*Désignation*	*Initialisation*
N	*nombre de deals à répliquer*	*10*
M	*nombre de Stress-Test*	*4*
L	*nombre des Deals de portefeuille*	*1000*
ST	*Vecteur des STRESS-TEST*	*(-0.01,-0.005,0.005,0.01)*
w0	*vecteur initial des weights*	*(0 ,0.5 ,0 ,0.5 ,0.25 ,0.5 ,0.75 ,0 ,0 ,0.25)*
r0	*valeur initiale de taux*	*0.02*

Table 9: 4.5.1.Initialisation des paramètres du programme

Le tableau suivant contient les paramètres de programmation mathématique pour résoudre notre problème par Gradient-projeté ou UZAWA(ARROW-HURWICZ) :

Paramètre	*Désignation*	*Initialisation*
e	précision requise sur les contraintes	0.0001
a	alpha (pas de la méthode)	0.05
ro	coefficient dual	0.1
l0	vecteur intial dual	(0,0.5,0.25,0.5)

Table 10: 4.5.1.2.Initialisation des paramètres de l'algorithme

4.5.2. Illustration de la création de Random Deals:

A l'aide de l' Algorithme 4.2.1 (Voir Annexes) nous allons générer un portefeuille de 1000 Deals aléatoirement, illustrons quelque exemples du résultat de cet algorithme:

Nominal(DZD)	Echeance(Y)	Taux
237390619	18	0.0949562
239391361	19	0.0957565
241011242	19	0.0964045
240384103	17	0.0961536
63552903	5	0.0254212
60440096	7	0.024176
62806440	6	0.0252719

Table 11: 4.5.2.Résultat de Random Deals

4.5.3.Résultat expérimentaux:

Voici un exemple illustratif de 2 itérations du programme :

Remarque: les résultats données dans les 3 tableaux (12,13,14) ci-dessous sont obtenus pour différenets exemples dû à l'utilisation de la fonction Random.

1)Méthode d'Arrow-Hurwicz (STRESS-TEST) :

Nombre d'itérations : 118

	Itération 1	Itération 117	Iteartion 118
La valeur de la fonction objectif	2102922072101930	417070977.6299387	3912264.249882026
Vecteur dual :	lambda= 0 0 46.03530559635997 89.61202509612305	Lambda= 0 0 5356.956285763908 10426.27822551485	Lambda= 0 0 5402.738647626186 10515.38470574602
Le vecteur de solution :	X= 0.1775434834835125 0.5096886672583022 0.1775434834835125 0.5096886672583022 0.5096881563353337 0.1775445053294494 0.1775450162524178 0.1775434834835125 0.1775434834835125 0.177543994406481	X= 0.1815482370776121 0.5063864345530588 0.1815482370776121 0.5063864345530588 0.5063864345530588 0.1815482370776121 0.1815482370776121 0.1815482370776121 0.1815482370776121 0.1815482370776121	X= 0.18158091922395 0.5063590914283714 0.18158091922395 0.5063590914283714 0.5063590914283714 0.18158091922395 0.18158091922395 0.18158091922395 0.18158091922395 0.18158091922395

Table 12: 4.5.3.1.Résultats de calcul par méthode d'Arrow-Hurwicz (STRESS-TEST)

2)Méthode d'Arrow-Hurwicz (SENSIBILITY) :

Nombre d'itérations :91

	Itération 1	Itération 90	Iteartion 91
La valeur de la fonction objectif	134353805907691.8	178456227.287	4178796.518
Vecteur dual :	Lambda= 0 0.5028042109360128 0.2554519283672109 0.5079536781743985	Lambda= 0 0.7523789830131873 0.7406735506615797 1.215831032212954	Lambda= 0 0.7551831939354023 0.746125479001965 1.223784710348217
Le vecteur de solution :	X= 0.2902431066636248 0.3698224638604635 0.2902431065363086 0.3698224638604635 0.3698200545959862 0.2902479250652631 0.2902503343297404 0.2902431065363086 0.2902431065363086 0.2902455158007859	X= 0.2902456176414724 0.3698208445154996 0.2902456173443015 0.3698208445154996 0.3698208445154996 0.2902456173443015 0.2902456173443015 0.2902456173443015 0.2902456173443015 0.2902456173443015	X= 0.29024561764321 0.369820844515296 0.2902456173441417 0.369820844515296 0.369820844515296 0.2902456173441417 0.2902456173441417 0.2902456173441417 0.2902456173441417 0.2902456173441417

Table 13: 4.5.3.2.Résultats de calcul par méthode d'Arrow-Hurwicz (Sensibility)

3)Méthode de GRADIENT PROJETE :

Nombre d'itérations : 73.

	Itération 1	Itération 72	Iteartion 73
La valeur de la fonction objectif	58559319841.73984	8144979309.592101	8144173357.113557
Le vecteur de solution :	X= 0.3620272871353662 0.1657247524259909 0.3620272871353662 0.1657247524259909 0.1656849806807841 0.3621068306257797 0.3621466023709864 0.3620272871353662 0.3620272871353662 0.3620670588805729	X= 0.3620704430354408 0.1656652849984339 0.3620704430354408 0.1656652849984339 0.1656652849984339 0.3620704430354408 0.3620704430354408 0.3620704430354408 0.3620704430354408 0.3620704430354408	X= 0.3620704430354408 0.165665284998434 0.3620704430354408 0.165665284998434 0.165665284998434 0.3620704430354408 0.3620704430354408 0.3620704430354408 0.3620704430354408 0.3620704430354408

Table 14: 4.5.3.3.Résultats de calcul par méthode de Gradient projeté

Exemple2:

Voici un exemple de taille beaucoup plus petite ($L = 3, N = 2$), sert à illustrer les courbes graphiques :

Deal	Nominal(Millions DZD)	Coupon	Echeance(Y)
1	231	0.0925199	14
2	194	0.0777457	5
3	231	0.0925199	14

Table 15: 4.5.3.4.constructions d'un portefeuille de taille 3

Les résulats sont regroupés dans les tableaux ci-dessous :

Arrow-Hurwicz	x0	x	λ	Fonction Objectif
Itération 1	0 0.5	0.850 0.526	0 0 1.3 2.5	49929068296666
Dernière Itération	/	x= 0.856 0.515	0 0 124.7 243.1	23517.9

Arrow(Sensinility)	x0	x	λ	Fonction Objectif
Itération 1	0 0.5	0.850 0.53	l= 0 0.500 0.250 0.500	49926400258884
Dernière Itération	/	0.851 0.525	0 0.518 0.285 0.551	17893.38

Gradient-Projeté	x0	x	Fonction Objectif
Itération 1	0 0.5	0.971 0.237	185709968.4
Dernière Itération	/	0.972 0.235	23309009.49

Table 16: 4.5.3.5.Résultats de calcul

Voici les courbes illustratives :

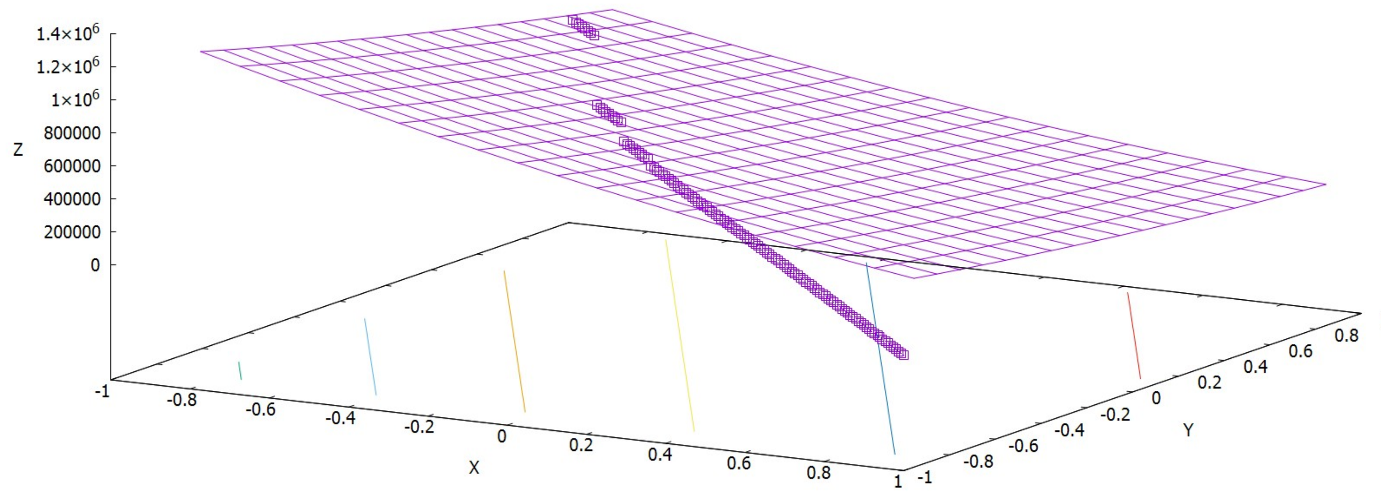

Figure 17: 4.5.3.5.Résultats graphiques de calcul:Arrow-Hurwicz

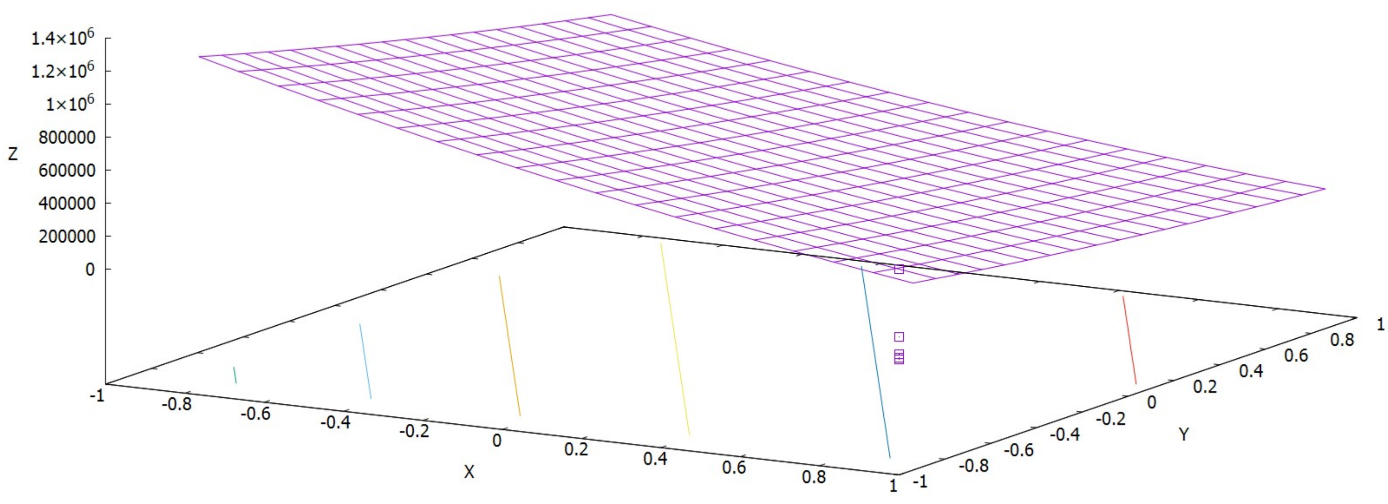

Figure 18: 4.5.3.5.Résultats graphiques de calcul:Arrow-Hurwicz(Sensibility)

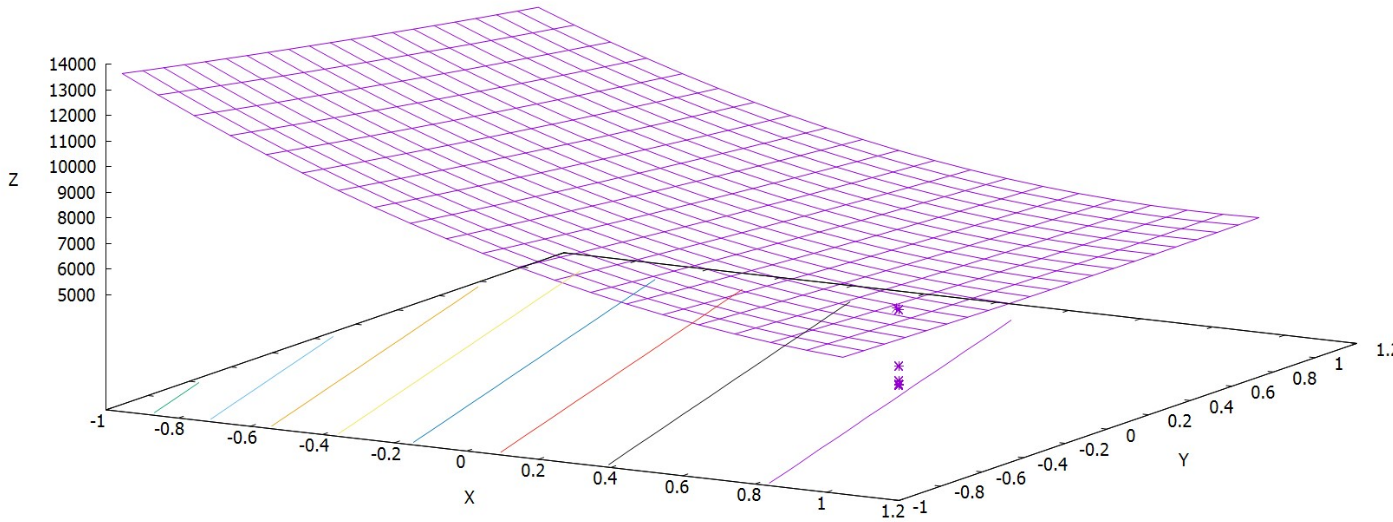

Figure 19: 4.5.3.5.Résultats graphiques de calcul:Gradient-Projeté

4.5.4.Interprétation des résultats:

Nous avons donné les valeurs des compostantes du vecteur de solution, à précision (16) à cause du petit changement dans ces valeurs qui sont entre 0 et 1. Cette précision sert à montrer les variations des valeurs du vecteur solution x.

Nous avons vu aussi l'éffet des paramètres α (pas de méthode) et ρ (pas dual) sur le changement de nombres d'itérations et la valeur de la fonction objectif.

Comme on a utilisé la méthode d'Armijo qui amène à accélérer la résolution du problème (Gradient projeté), on a aussi remarqué que les valeurs du pas sont très petites , ce qui implique le modique écart dans la valeur de la fonction objectif d'une itération à l'autre.(Tableau 14)

Il est possible aussi de limiter le nombre d'itérations au lieu de mettre une erreur de test d'arret .

On a aussi ajouté un test qui change la valeur du pas (en la divisant par 2) pour chaque dizène d'itérations, ceci a servi à donner les valeurs regroupées dans les tableaux précédents (12, 13).

4.6.Conculsion:

Dans ce chapitre, nous avons présenté et implémenté des techniques de simplification de la résolution du problème de la Réplication du portefeuille financier. Nous avons décrit des algorithmes utilisant ces techniques, et puis nous avons les regroupé pour développer un programme qui résoud le problème tou entier. Finalement nous avons traité un exemple de test pour illustrer l'efficacité de notre programme et monter la rapidité, grace à la performance des méthodes et techniques utilisées sur notre problème.

Sans aucun doute, tout le monde fait recours aux mathématiques pour faire des calculs de base dans la vie de tout les jours, que ce soit avec conscience ou pas. Pour un financier, cet outil est très précieuse est indispensable pour une bonne gestion des flux de l'argent. L'un des intérêts des mathématiques dans la finance consiste à non seulement simplifier la complexité des calculs et problèmes financiers mais aussi trouver l'aide à une décision qui vise au meilleur résultat possible.

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéréssés au problème de Réplication de portefeuille financier, dont l'objectif est d'approximer la valeur actuelle du portefeuille de réplication à la valeur actuelle de portefeuille à répliquer, en respectant les conditions du marché d'Ajourd'hui et de future. Nous avons reformulé ce problème comme un problème d'optimisation non linéaire, d'une fonction objectif quadratique à contraintes linéaires d'inégalités. La structure du problème nécessite l'utilisation d'un algorithme performant afin de le résoudre.

Le travail que nous avons réalisé au cours de ce mémoire, d'une part, nous a permis d'appliquer les méthodes duales d'optimisation en utilisant les techniques d'Arrow-Hurwicz et Gradient projeté et de proposer un algorithme performant pour la résolution du problème de réplication. D'autre part, ce travail nous a permis aussi d'élaborer un programme informatique dédié à la résolution du problème de la réplication de portefeuille.

Les résultats obtenus ont montré que l'utilisation de la méthode duale et la méthode du Gradient, s'avère efficace en posant des changements méthodiques sur ses paramètres. Ces techniques d'amélioration que nous avons implémentées, ont permis de réduire considérablement le temps de calcul effectué par le programme.

Le travail que nous avons réalisé dans ce mémoire, nous a permis d'approfondir nos connaissances théoriques et pratiques dans le domaine d'optimisation non-linéaire et d'acquérir des connaissances dans les domaines du calcul actuariel : le pricing des instruments financiers et la gestion des poretfeuilles. Nous espérons que ce modeste travail contribue à l'avancement de la recherche dans ce domaine, et que les gestionnaires financiers trouvent un outil d'aide à la décision.

Listes des symboles

Ensemble :

$\Re$ *Ensemble des nombres réels.*

$A \subset X$ *A est strictement continu dans X.*

$A \subseteq X$ *A est continu dans X.*

AUB *Réunion de sous-ensembles A et B.*

$\exists x$*: Il existe x tel que.*

$\forall x \in X$ *Quel que soit x élément de X.*

Vecteurs et Matrices :

$\Re^n$ *Produit cartésien de l'ensemble.*

$\Re^{n+}$ *L'orthant positif de l'espace* $\Re^n$.

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$*Le vecteur de* $\Re^n$ *(vecteur colonne).*

x^T *Transposé du vecteur x, (vecteur ligne).*

$x^T.y$ *Produit scalaire des vecteurs x et y.*

$\|x\|_p$ *Norme du vecteur x, où (p = 1,2,∞).*

$x \geq y$ *Chaque composante de x et supérieure ou égale à la composante correspondante de y.*

$A = (a_{ij})_{i=1,..,m,j=1,...n}$ *Matrice à m lignes et n colonnes.*

Fonctions:

$\nabla f(x)$ Si f est une fonction ($\Re^n \rightarrow \Re$) des variables $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,$\nabla f(x)$ est le gradient de la fonction f au point x.

$\nabla_x f(x, y)$ Si f est une fonction ($\Re^n \Re^{\mathrm{m}} \rightarrow \Re$) des variables $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, et $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$,$\nabla_x f(x, y)$désigne le gradient de f en x.

$\nabla^2 f(x)$ Si f est une fonction ($\Re^{\mathrm{n}} \rightarrow \Re$) des variables $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,$\nabla^2 f(x)$ désigne le hessien de f en x .

$\nabla_x^2 f(x, y)$ Si f est une fonction ($\Re^n \Re^{\mathrm{m}} \rightarrow \Re$)des variables $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, et $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $\nabla_x^2 f(x, y)$ désigne le hessien de f en x Si f est une fonction ($\Re^{\mathrm{n}} \rightarrow \Re$) des variables $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$\partial g / \partial x(x)$ désigne le jacobien de g au point x.

$Min_{x \in X} f(x)$ La valeur minimale de la fonction f dans l'ensemble X.

$Max_{x \in X} f(x)$ $Min[f(x)] = -Min[-f(x)]$.

Références bibliographiques

[1] D.Health, A, Jarrow, A. Morton, Bond peicing and the term structure of interest rate: A new methodology, Econometrica, 1992.

[2] G.Demange, J.C.Rochet, Méthodes Mathématiques de la Finance, Econometria, 1992.

[3] J.P.Bouchard, M. Potters, Théorie des risques financiers, Alea.Sacley 1997.

[4] E.Favor, Mathématiques financières et calcul d'optimisation. Dunod, Paris 1991.

[5] A. Benkaci, Problême de la couverture comptable en finance: Modélisation et Techniques de résolution, Thèse de Magistère, Blida 2008.

[6] J.C. Culioli, Introduction à l'optimisation, Ecole nationale supérieure des mines de Paris, Centre Automatique et Système, Fontainebleau, Ellipse, 1994.

[7] M. Minoux, Programmation mathématique, Théorire et algorithmes, Tome 1 et 2 Collection Technique et Scientifique des Télécommunications, Dunod,Paris 1983.

[8] A.Bentouri, Optimisation dans la couverture d'un portefeuille avec la méthode DUAL DU SIMPLEXE, thèse de Master, Blida 2016.

[9] Mondher Cherif, Stéphane DUBREUILLE, Livre : Création de valeur et Capital-investissement, Université de Reims, direction de collection : Ronald Gillet

[10] Replicating Portfolios : An Introduction: Analysis and Illustrations, Milliam Research Report, November 2009.

[21] (Jean Laborde, Tables numériques de fonctions élémentaires, éd. Dunod, 1961)

- ***Webographie:***

[11] https://www.ooreka.fr/univers/entreprise

[12] https://www.centralcharts.com/fr/

[13] https://www.lafinancepourtous.com/

[14] http://financedemarche.fr/

[15] http://boursegestionportefeuille.e-monsite.com/

[16] https://moneystore.be/

[17] http://www.ammc.ma/fr

[18] https://www.mathworks.com

[19] https://www.lecoindesentrepreneurs.fr

[20] https://calculis.net

Annexes

Algorithmes importants:

Algorithme 4.2.1:

Début:

-Poser: L : nombre des Deals dans le portefeuille.

-Random_ Loan()

—{prendre une variable random (aléatoire) s entre 0 et 1.

*— taux: absolue 0.1 veut dire 10%*s.*

*— Nominal en montant dans la devise 250 000 000*s.*

*— Echeance en année 20*s.*

—}

-Pour (i=1 à L) faire

–{D(i)=Random_ Loan().}

Fin.

Algorithme 4.2.3:

Données:

-Vecteur des taux, de taille n: Taux[n].

-Vecteur des dates corréspondantes aux valeurs de taux du vecteur Taux: Time [n].

Début:

-Poser : vecteur r[n] vide.

Pour (i=1 jusqu'à i=n ,pas 1) faire :

{-poser j=0.

—Tantque(j<n) :

————{Vérifions si le taux qu'on veut calculer "r[i]" n'existe pas déjà dans notre vecteur Taux[n].}

—Si(j==n) alors :

——poser k=0.

——Tantque(Time[k]<i+1) faire k++.

——r[i]=r[k-1]+((i+1)-Time[k-1])((r[k]-r[k-1])/(Time[k]-Time[k-1])).*

—Sinon

—-r[i]=Taux[j].

}
Fin.

Algorithme 4.3.1:
Début:
-Poser : $h = -0.01$ *, vecteur pv_ s[K] .*
-K =nombre des cash-flows, M=nombre des STRESS-TEST.
- R[K] : vecteur des taux d'intérets.
- CF[K] : vecteur des cash-flows, déjà calculés.
-j=0.
-pour(j=1 à j=M, pas 1)
–{pv_ s[j]=0;
—Pour(i=1;i <= k;i++)
—–{Si (h==0) alors
——— h = h+0.005;
*—– pv_ s[j] = pv_ s[j] + (CF(i)*exp(-(R(i)+h)*i));*
–}
– h =h + 0.005;
-}
Fin.

Algorithme 4.3.2:*(Calcul de la valeur de sensibilité d'un Deal)*

Début:
-Poser : R[M] vecteur des taux.
- CF[K] vecteur des Cash-flows.
-PV_ S[M] : vecteur des valeurs de sensibilité à calculer .
-Pour (j=1 à j=M , pas 1)
—{PV_ S(j) = 0;
—- Pour (i=1 à i=K, pas 1)
——-{ Si (i==j) alors
*——————PV_ S(j) =PV_ S(j) + CF(j) * exp ((-R(j)+0.0001)* j)) ;*
——— Sinon
*——————PV_ S(j) =PV_ S(j) + (CF(i) * exp (-R(i)* i)) ;*
——-}
— }

Fin.

Algorithme 4.4.1: Test d'Armijo

Début:

-*Poser : f1* $=f(w^{k+1})=f(w^k - \alpha_k \nabla f\left(w^k\right))$.

- *f0* $=f(w^k)$.

- *et* $d = \nabla^T f(w^k).\nabla f(w^k)$

- *a :alpha :pas fixe de départ (donnée).*

- *variable alpha : valeur de retour.*

—*Tantque* $(f1 > (f0 - a * d))$ *faire*

—-{ *a = a*delta;* }

—-*fin_ Tantque.*

—*alpha=a;*

Fin.