

**UNIVERSITE AMAR THELIDJI LAGHOUAT**



**MEMOIRE**

Pour l'Obtention du diplôme de **MAGISTERE** en Génie Civil

Option : **Matériaux et structures**

Présenté par :  
**BELLAKEHAL HIZIA**

**THEME**

**Modélisation non linéaire par éléments finis  
des poutres en BA renforcées par des plaques**

Soutenu publiquement le .....Devant le jury composé de :

<b>Dr. M.S. Goual</b>	Maître de Conférence à l'UAT Laghouat	Président
<b>Dr. M. Bouhicha</b>	Professeur à l'UAT Laghouat	Rapporteur
<b>Mr M.F. Lakhdari</b>	MA.CC. A l'UAT Laghouat	Rapporteur
<b>Dr. S. Kenai</b>	Professeur à l'Université de Blida	Examineur
<b>Dr. M. Sayehi</b>	MA.CC. à l'Université de Djelfa	Examineur

**UNIVERSITE AMAR THELIDJI LAGHOUAT**



**MEMOIRE**

Pour l'Obtention du diplôme de MAGISTERE en Génie Civil

Option : Matériaux et structures

Présenté par :  
**BELLAKEHAL HIZIA**

**THEME**

**Modélisation non linéaire par éléments finis  
des poutres en BA renforcées par des plaques**

Soutenu publiquement le .....Devant le jury composé de :

<b>Dr. M.S. Goual</b>	Maître de Conférence à l'UAT Laghouat	Président
<b>Dr. M. Bouhicha</b>	Professeur à l'UAT Laghouat	Rapporteur
<b>Mr M.F. Lakhdari</b>	MACC. Al'UAT Laghouat	Rapporteur
<b>Dr. S. Kenai</b>	Professeur à l'Université de Blida	Examineur
<b>Dr. M. Sayehi</b>	MACC. à l'Université de Djelfa	Examineur

## *Remerciements*

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à **Mr M. BOUHICHA**, Professeur à l'université de Laghouat, pour la proposition du sujet de ce mémoire et pour ces conseils tout au long de ce travail.

Je tiens à exprimer toutes mes reconnaissances à **Mr M.F. LAKHDARI** Maître assistant chargé de cours à l'université de Laghouat pour sa contribution dans la réalisation de ce travail.

Je tiens à remercier **Mr M.S. Goual**, Maître de conférence à l'université de Laghouat, qui ma fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire.

Je remercie très sincèrement **Mr S. Kenai**, Professeur à l'Université de Blida, d'avoir accepter de participer au jury de soutenance de mon mémoire.

Mes plus vifs remerciements vont également à **Mr M. Sayehi** Maître de conférence à l'Université de Djelfa, qui m'a fait l'honneur de participer au jugement de ce travail.

Enfin, je remercie tous les gents qu'ils m'ont encouragés et soutenir moralement durant mes études.

## RESUME

La problématique du renforcement ou de la réparation des structures en béton armé endommagées par des sollicitations plus ou moins sévères, qui se présente comme une alternative à leur démolition pure et simple, se pose avec acuité aux maîtres d'ouvrages impliqués compte tenu des implications financières et fonctionnelles qui découlent de l'une ou l'autre de ces décisions qui dépendent autant de la précision des diagnostics établis que du coût des techniques de réparations disponibles sur le marché.

Parmi ces techniques, celle qui s'impose économiquement et techniquement de plus en plus et de façon indiscutable grâce au développement des adhésifs synthétisés basés sur les résines époxydes est celle qui utilise le collage extérieur des plaques d'acier ou de FRP.

Cependant et malgré ses succès pratiques certains aspects liés au comportement des structures réparées par ces techniques ne sont pas encore maîtrisés de façon satisfaisante ce qui a incité plusieurs chercheurs à se pencher sur la question en proposant des modèles analytiques et numériques traitant divers aspects du problème.

C'est justement à ce niveau que nous proposons notre contribution qui consiste à élaborer un modèle numérique non linéaire basé sur la MEF et utilisant le logiciel bien connu ANSYS capable de rendre compte du comportement non linéaire des poutres en béton armé renforcées par collage extérieur sur la face tendue de plaques en FRP et en acier.

Après une première partie consacrée à la revue bibliographique sur le thème nous avons exposé en second lieu les modèles des matériaux non linéaires des poutres en béton armé. Enfin et après avoir présenté les principaux types d'éléments et les modèles des matériaux utilisables par le logiciel ANSYS en la matière, nous avons procédé à l'élaboration et à la validation de notre modèle numérique non linéaire. La dernière étape présente l'ensemble des résultats obtenus ainsi que leur interprétation qui nous permet de confirmer les performances observées sur le terrain et prévues par les expérimentateurs de cette nouvelle technique.

## ملخص

إن مسألة ترميم الهياكل الخرسانية المتضررة بسبب تعرضها لتأثيرات حادة تعتبر بديل لا مناص منه عوضا عن إعادة إنشائها من جديد. إن تنوع تقنيات الترميم يحتم على أصحاب المشاريع اختيار الوسيلة الأنجع من حيث الكلفة و النوعية في أن واحد, و هذا انطلاقا من دراسة تشخيصية دقيقة. من بين هذه التقنيات تقنية الإصاق الخارجي لصفائح من الحديد أو من ال FRP التي عرفت نجاحا كبيرا بسبب التطور الملحوظ لمواد الإصاق المصنعة.

رغم النجاح التطبيقي لهذه التقنية إلا أن الجانب النظري بقي لحد الآن يستدعي البحث عن نماذج تحليلية و رقمية لمعالجة مختلف الجوانب المتعلقة بسلوك الهياكل الخرسانية المرممة بهذه التقنية. مساهمتنا في هذا الميدان تتمثل في إعداد نموذج رقمي غير خطي يعتمد على طريقة العناصر المنتهية و استعمال برمجيات ال ANSYS القادرة على دراسة السلوك غير الخطي لعوارض من الخرسانة المسلحة و مقواة خارجيا بواسطة لصق صفيحة من الحديد أو من ال FRP على سطحها الممدد. لقد قمنا بإثبات صحة النموذج المنجز بمقارنة نتائجه مع نتائج إحدى الدراسات التجريبية التي أجريت سابقا. إن النتائج المتحصل عليها من خلال هذا النموذج تؤيد الخصائص و الملاحظات التجريبية الخاصة بسلوك هذه العوارض.

## *Abstract :*

Strengthening and repairing severely damaged reinforced concrete structures constitutes a viable alternative to their demolition and replacement. However, deciding on the way to proceed with such structures; repair or demolish? depends on a prior establishing of an accurate diagnostic of the structure and the cost of repairing it. The technique of repairing structures by external bonding of steel or FRP plates is considered as one of the most economically and technically apt method that are available nowadays. This is due to the development of synthesized adhesives that are based on epoxy resins.

Even though, considerable progress has been achieved in enhancing the performance of this technique, many aspects related to the behaviour of structures repaired using this technique remained unclear. These have incited researchers into carrying experimental, analytical and numerical studies that culminated in proposing various models that are capable of predicting different aspects of this behaviour. The study presented herein is aimed at developing a numerical model using FEM and the ANSYS software that is capable in simulating the non linear behaviour of reinforced concrete beams strengthened by bonded plates. The model developed was validated with experimental results found in the literature. It was found that the model reproduced most experimentally observed features of the behavior of these beams.

# SOMMAIRE

LISTE DES FIGURES	
LISTE DES TABLEAUX	
LISTE DES NOTATIONS	

## Chapitre I

Introduction .....	1
--------------------	---

## Chapitre II

### Revue Bibliographique

2.1 Introduction .....	5
2.2 Réparation des poutres en béton par collage des plaques .....	5
2.3 Travaux expérimentaux .....	6
2.3.1 Résultats .....	6
2.3.2 Etude paramétrique .....	9
2.4 Travaux analytiques .....	10
2.4.1 Calcul des contraintes à l'interface Béton/ Plaque .....	11
2.4.2 Dimensionnement de la plaque.....	8
2.4.3 Rupture locale par décollement de la plaque .....	34
2.4.4 Synthèse .....	45
2.5 Modélisation par éléments finis .....	46
2.5.1 Synthèse .....	60

## Chapitre III

### Modélisation non Linéaire des Poutres en Béton Armé

3.1 Introduction .....	61
3.2 Sources de non linéarité .....	61
3.3 Lois constitutives des matériaux .....	63
3.3.1 Lois constitutive du béton .....	64

3.3.2	Loi constitutive de l'acier .....	72
3.3.3	Comportement biaxial du béton armé .....	73
3.3.4	Loi constitutive des plaques de renforcement .....	82
3.3.5	Ecriture incrémentale des lois constitutives .....	83
3.3.6	Interface plaque béton .....	88
3.4	Technique de solution du système d'équations .....	91
3.5	Algorithme de solution .....	94

## Chapitre IV

### Modélisation des Poutres par le Biais du Logiciel ANSYS

4.1	Introduction .....	97
4.2	Type des éléments .....	97
4.2.1	Acier de ferrailage .....	97
4.2.2	Plaque d'acier et de CFRP .....	97
4.2.3	Béton armé .....	98
4.3	Modèles des matériaux .....	99
4.3.1	Aciers de ferrailage et plaque d'acier .....	99
4.3.2	Plaque composite FRP .....	100
4.3.3	Béton .....	101
4.4	Résolution numérique du système non linéaire .....	112
4.4.1	Incrémentation .....	112
4.4.2	Itération .....	112
4.4.3	Solution .....	113
4.4.2	Convergence .....	113

## Chapitre V

### Etudes Expérimentales et Numériques des Poutres

5.1	Introduction .....	114
5.2	Montage et résultats expérimentaux .....	114
5.2.1	Poutre en BA non renforcée (F01) et poutre renforcée par une plaque d'acier (F11) .....	114
5.2.2	Poutre en BA renforcée par une plaque de CFRP .....	117

5.3 Modélisation numérique .....	119
5.3.1 Poutre en BA non renforcée (F01) .....	119
5.3.2 Poutre en BA renforcée par une plaque d'acier (F11) .....	122
5.3.3 Poutre en BA renforcée par plaque de CFRP .....	127

## **Chapitre VI**

### **Conclusion**

Conclusion .....	130
------------------	-----

BIBLIOGRAPHIE .....	131
---------------------	-----

## *Liste des figures*

<b>Figure 2.1</b> : Poutre en béton armé renforcée par collage de plaques .	6
<b>Figure 2.2</b> : Mécanismes de rupture typiques des poutres renforcées par collage de plaques en FRP.	8
<b>Figure 2.3</b> : Modèle constitutif du béton.	12
<b>Figure 2.4</b> : Modèle constitutif de l'acier.	12
<b>Figure 2.5</b> : Modèle analytique discret.	13
<b>Figure 2.6</b> : Equilibre d'un élément de la plaque.	14
<b>Figure 2.7</b> : Le modèle théorique pour cette étude.	19
<b>Figure 2.8</b> : Un petit élément de la plaque de FRP de longueur dx.	22
<b>Figure 2.9</b> : Une partie infinitésimale du béton et du composite.	23
<b>Figure 2.10</b> : Cisaillement pur.	24
<b>Figure 2.11</b> : Contraintes de traction constantes dans le béton.	25
<b>Figure 2.12</b> : Poutre renforcée sous flexion. Trois cas principaux.	26
<b>Figure 2.13</b> : Relation Contrainte N Déformation des matériaux : a) Béton en compression, b) Acier en compression et en traction, c) Composite FRP.	29
<b>Figure 2.14</b> : Section en BA renforcée par FRP.	29
<b>Figure 2.15</b> : Déformation et contrainte à travers la hauteur d'une poutre en BA renforcée par une plaque FRP	32
<b>Figure 2.16</b> : Distribution de déformation et de contrainte à travers la hauteur d'une poutre rectangulaire en BA renforcée par l'épaisseur minimale de la plaque FRP.	33
<b>Figure 2.17</b> : Le mode de rupture admis dû au décollement prématuré de la plaque :	34
a) Schéma de fissures stables de béton ;	
b) Le comportement d'une bielle individuelle dans le béton d'enrobage.	
<b>Figure 2.18</b> : Diagramme de contrainte et de déformation pour une section rectangulaire.	36
<b>Figure 2.19</b> : Section, dimension, déformation et contrainte (Distribution parabolique des contraintes).	37
<b>Figure 2.20</b> : Section, dimension, déformation et contrainte (Distribution uniforme des contraintes).	38
<b>Figure 2.21</b> : Mode de rupture supposé de décollement de la plaque :	39
a) - schémas des fissures flexionnelles stables.	
b) - Comportement d'une bielle de béton entre deux fissures flexionnelles adjacentes.	
<b>Figure 2.22</b> : les paramètres les plus significatifs utilisés dans le modèle de Robert.	42
<b>Figure 2.23</b> : Localisation des fissures de cisaillement.	43
<b>Figure 2.24</b> : Détail et arrangement des plaques laminées collées des poutres testées.	44
<b>Figure 2.25</b> : Critère d'Ottosen.	47
<b>Figure 2.26</b> : Comportement normal de la liaison béton N acier.	48
<b>Figure 2.27</b> : Comportement tangentiel de la liaison béton N acier.	48
<b>Figure 2.28</b> : Modèles constitutifs du béton.	52
<b>Figure 2.29</b> : Modèle de rigidification de la zone tendue d'un élément en BA.	52
<b>Figure 2.30</b> : Modèle de rigidification au cisaillement d'un élément en BA.	52
<b>Figure 2.31</b> : Relation Contrainte - déformation d'adoucissement.	53
<b>Figure 2.32</b> : Relation contrainte N déformation du béton.	55
<b>Figure 2.33</b> : Equilibre de la plaque composite de renforcement.	56
<b>Figure 2.34</b> : Equilibre de la couche adhésive.	56
<b>Figure 2.35</b> : Equilibre de l'interface couche d'adhésif / plaque composite de renforcement.	57
<b>Figure 2.36</b> : Longueur de diffusion $l_d$ .	58
<b>Figure 3.1</b> : Corps solide.	61

Figure 3.2 : Cheminement de calcul. ....	62
Figure 3.3 : Courbe ( $\sigma - \varepsilon$ ) du béton sous contrainte de compression. ....	65
Figure 3.4 : Comportement uniaxiale du béton en traction.....	66
Figure 3.5 : Résistance biaxiale du béton (Kupfer et al. [83]). ....	70
Figure 3.6 : Courbe contrainte N déformation d'un chargement monotonique de traction des barres d'acier. ....	72
Figure 3.7 : Courbe contrainte N déformation de l'acier adoptée dans la MEF.....	73
Figure 3.8 : Courbe typique charge N flèche d'une poutre en béton armé.....	73
Figure 3.9 : Effet de la fissuration dans une poutre en béton armé.....	74
(a) partie de la poutre.           (d) contrainte de traction dans le béton.	
(b) Diagramme du moment.       (e) contrainte de traction dans l'acier.	
(c) Contrainte d'adhérence.   (f) Rigidité de la poutre.	
Figure 3.10 : <i>tension N stiffening</i> : Comportement du béton tendu. ....	75
Figure 3.11 : <i>tension N stiffening</i> : Comportement de l'acier tendu. ....	75
Figure 3.12 : Modèle de fissuration. ....	76
Figure 3.13 : Notation pour le MCFT. ....	77
Figure 3.14 : Diagramme $\sigma_2 - \varepsilon_2$ (MCFT).....	78
Figure 3.15 : Diagramme $\sigma_1 - \varepsilon_1$ (MCFT).....	78
Figure 3.16 : Notations du DSFM.....	79
Figure 3.17 : Diagramme $\sigma_2 - \varepsilon_2$ (DSFM).....	79
Figure 3.18 : Diagramme $\sigma_s - \varepsilon_s$ (STM).....	81
Figure 3.19 : Eléments de contact. ....	82
Figure 3.20 : Contrainte d'adhérence N glissement $\delta$ (mm). ....	82
Figure 3.21 : Diagramme contrainte N déformation pour une plaque de FRP. ....	82
Figure 3.22 : Elément de béton. ....	84
Figure 3.23 : Elément du béton soumis à $\sigma_1$ traction et $\sigma_2$ compression. ....	85
Figure 3.24 : Rotation des axes des contraintes principales ....	86
Figure 3.25: Model continu de l'acier.....	87
Figure 3.26 : Modèle d'acier discret. ....	87
Figure 3.27 : Modélisation de la couche d'adhésif. ....	88
Figure 3.28 : Type d'élément d'interface utilisé. ....	88
Figure 3.29 : Elément d'interface à six nœuds. ....	89
Figure 3.30 : Processus itératif et incrément de la charge. ....	91
Figure 3.31 : Méthode de Newton Raphson. ....	92
Figure 3.32 : Solution multiple pour un modèle avec des lois d'adoucissement. ....	93
Figure 3.33 : Divergence de la méthode de Newton Raphson pour les modèles avec adoucissement. ....	93
Figure 3.34 : Méthode de Newton Raphson modifiée. ....	94
Figure 3.35 : Organigramme de solution. ....	96
Figure 4.1 : Link8 N Elément linéaire 3-D ....	97
Figure 4.2 : Solid45 N Elément Solide 3-D ....	98
Figure 4.3 : Solid65 N Elément Solide 3-D du béton armé ....	99
Figure 4.4 : Connectivité des éléments : (a) élément solide du béton et l'élément linéaire (b) éléments solides du béton et l'élément de la plaque. ....	99
Figure 4.5 : Courbe contrainte N déformation pour l'acier de ferraille. ....	100
Figure 4.6 : Courbe contrainte N déformation pour le FRP.....	101
Figure 4.7 : Courbe contrainte N déformation uniaxiale de compression et de traction du béton. ....	101
Figure 4.8 : La résistance dans les conditions de fissuration ....	104
Figure 4.9 : Surface de rupture dans le plan des contraintes principales ....	108
Figure 4.10 : Profile de la Surface de rupture ....	110

<b>Figure 4.11</b> : Surface de charge dans le plan des contraintes principales .....	112
<b>Figure 5.1</b> Montage expérimental de la poutre F01 et F11 .....	115
<b>Figure 5.2</b> : Courbe Charge N flèche à mi-travée. ....	116
<b>Figure 5.3</b> : Courbe Charge N déformation du béton comprimé à mi-travée. ....	116
<b>Figure 5.4</b> : Courbe Charge N déformation de la plaque d'acier .....	116
<b>Figure 5.5</b> : Montage expérimental .....	117
<b>Figure 5.6</b> : Courbe moment N Flèche .....	119
<b>Figure 5.7</b> : Courbe moment N déformation du béton comprimé.....	119
<b>Figure 5.8</b> : Courbe moment N déformation de la plaque de CFRP .....	119
<b>Figure 5.9</b> Modélisation numérique de la poutre F01 .....	120
<b>Figure 5.10</b> : Courbe Charge N Flèche de la Poutre F01 .....	121
<b>Figure 5.11</b> : Comparaison de la flèche dans des différents points de la poutre F01.....	122
<b>Figure 5.12</b> : Courbe Charge N Déformation du béton comprimé de la Poutre F01 .....	121
<b>Figure 5.13</b> : Schéma de fissuration du béton de la poutre F01.....	122
<b>Figure 5.14</b> Modélisation numérique de la poutre F11 .....	123
<b>Figure 5.15</b> : Courbe Charge N Flèche Poutre F11 (plaque bidimensionnelle).....	125
<b>Figure 5.16</b> : Courbe Charge N Flèche Poutre F11 (plaque unidimensionnelle) .....	125
<b>Figure 5.17</b> : Courbe Charge N Déformation du béton comprimé (plaque bidimensionnelle) F11 .....	125
<b>Figure 5.18</b> : Courbe Charge N Déformation du béton comprimé (plaque unidimensionnelle) F11 ..	125
<b>Figure 19</b> : Courbe Charge N Déformation de la plaque (plaque bidimensionnelle) F11 .....	125
<b>Figure 5.20</b> : Courbe Charge N Déformation de la plaque (plaque unidimensionnelle) F11 .....	125
<b>Figure 5.21</b> : Schéma de fissuration du béton de la poutre F11 .....	126
<b>Figure 5.22</b> : Courbe Charge N Flèche des poutres F01 et F11.....	126
<b>Figure 5.23</b> : Courbe Charge N Déformation du béton comprimé des poutres F01 et F11 .....	126
<b>Figure 5.24</b> Modélisation numérique de la poutre S6-PRE3 .....	127
<b>Figure 5.25</b> : Courbe Moment appliqué N Flèche Poutre S6-PRE3 .....	128
<b>Figure 5.26</b> : Courbe Moment appliqué N Déformation du béton comprimé. Poutre S6-PRE3. ....	128
<b>Figure 5.27</b> : Courbe Moment appliqué N Déformation de la plaque CFRP. Poutre S6-PRE3 .....	129
<b>Figure 5.28</b> : Schéma de fissuration du béton de la poutre S6-PRE3 .....	129

## *Liste des tableaux*

<b>Tableau 3.1 :</b> Modèle de rupture pour l'interface. ....	90
<b>Tableau 5.1 :</b> Propriétés des matériaux .....	115
<b>Tableau 5-2 :</b> Charges et déformations des poutres $F_{01}$ , $F_{11}$ . ....	116
<b>Tableau 5.3 :</b> Charges et déformations de la poutre S5-PRE1. ....	118
<b>Tableau 5.4 :</b> Topologie de la maille. Poutre F01 .....	120
<b>Tableau 5.5 :</b> Valeurs à mi-travée à 100KN. ....	120
<b>Tableau 5.6 :</b> Charges et déformations de la poutre F01. ....	121
<b>Tableau 5.7 :</b> Topologie de la maille. Poutre F11 .....	123
<b>Tableau 5.8 :</b> Valeurs à mi-travée à 100 KN. Poutre F11 .....	123
<b>Tableau 5.9 :</b> Charges et déformations de la poutre F11. ....	123
<b>Tableau 5.10 :</b> Topologie de la maille. Poutre S6-PRE3 .....	127
<b>Tableau 5.11 :</b> Valeurs à mi-travée à $M = 25 \text{ KN.m}$ .....	128
<b>Tableau 5.12 :</b> Charges et déformations de la poutre S6-PRE3. ....	128

## Liste des notations

- A : Section transversale  
 $A_s$  : Section d'armatures.  
 $A_p$  : Section de la plaque composite  
 $A_{st}$  : Section des aciers transversaux.  
b : Largeur de la poutre.  
 $b_p$  : Largeur de la plaque  
C : Cohésion.  
[C] : Matrice de comportement  
d : Hauteur utile.  
[D] : Matrice d'élasticité  
 $D^{cr}$  : Matrice de propriétés de matériau fissuré.  
[D<sup>ep</sup>] : Matrice élasto N plastique  
E : Module de Young.  
 $E_0$  : Module d'élasticité initiale  
 $E_p$  : Module d'élasticité de la plaque.  
 $E_s$  : Module d'élasticité d'acier.  
 $E_t$  : Module tangentiel.  
 $f_c'$  : Résistance maximale du béton comprimé.  
 $f_p$  : Contrainte de traction dans la plaque.  
 $f_{pu}$  : Contrainte ultime de traction dans la plaque de FRP.  
 $f_t$  : Résistance à la traction du béton.  
 $f_y$  : Limite élastique des aciers.  
G : Module de cisaillement  
 $G_a$  : Module de cisaillement de la couche adhésif.  
 $G_f$  : Energie de rupture.  
 $G_f^I$  : Énergie de rupture du mode I.  
 $G_f^{II}$  : Énergie de rupture du mode II.  
h : Hauteur de la poutre.  
h' : Hauteur d'enrobage.  
 $h_p$  : Hauteur effective de la plaque d'acier.  
I : Moment d'inertie.  
 $I_1$  : Premier invariant de contrainte.  
 $I_2$  : Deuxième invariant de contrainte déviatorique.  
K : module de glissement.  
[K] : Matrice de rigidité.  
 $K_n$  : Rigidité normale.  
 $K_s$  : Rigidité tangentielle.  
l : Longueur de la moitié de la plaque.  
L : Longueur de la poutre  
 $l_{eff}$  : La longueur effective de collage  
 $M_T(o)$  : Le moment de flexion appliqué à l'extrémité de la plaque.  
N : Force normale  
 $N_i$  : Fonctions de forme parabolique.  
q : Force uniformément répartie.  
[R] : Matrice de rotation.

$s$  : Espacement des cadres.  
 $S$  : Glissement.  
 $S$  : Moment statique.  
 $t_a$  : Epaisseur de l'adhésif  
 $t_p$  : Epaisseur de la plaque.  
 $U_C$  : Déplacement horizontal du béton à l'interface.  
 $U_P$  : Déplacement moyen de la plaque.  
 $V_T(x)$  : Effort tranchant.  
 $y$  : Position de l'axe neutre de la section  
 $z$  : Longueur non collée.  
 $\alpha$  : Paramètres de la rigidification de la zone tendue.  
 $\beta$  : Facteur de conservation de cisaillement.  
 $\Delta s^{cr}$  : Incrément de contrainte normale de fissuration.  
 $\Delta e^{cr}$  : Incrément de déformation normale de fissuration.  
 $\varepsilon$  : Déformation totale.  
 $\varepsilon_1$  : Déformation de traction dans la direction 1.  
 $\varepsilon_c$  : Déformation du béton comprimé correspondante à  $f_c'$ .  
 $\varepsilon_{cu}$  : Déformation ultime du béton.  
 $\varepsilon_m$  : Paramètres de la rigidification de la zone tendue.  
 $\varepsilon_P$  : Déformation moyenne dans la plaque.  
 $\varepsilon_s$  : Déformation des barres d'acier.  
 $\varepsilon_{tu}$  : Déformation ultime du béton tendu.  
 $\varepsilon_{ty}$  : Déformation du béton tendu correspondante à  $f_t$ .  
 $\varepsilon_Y$  : Déformation des aciers correspondante à  $f_Y$ .  
 $\phi$  : Angle de frottement interne.  
 $\gamma$  : Déformation tangentielle.  
 $\nu$  : Coefficient de poisson.  
 $\rho_S$  : Pourcentage des aciers longitudinaux  
 $\sigma$  : Contrainte normale.  
 $\sigma_{appl}$  : Charge extérieure appliquée.  
 $\sigma_s$  : Contrainte normale des barres tendues.  
 $\sigma'_s$  : Contrainte normale des barres comprimées.  
 $\Sigma O_{bars}$  : La somme des périmètres des barres principales  
 $\tau$  : Contrainte de cisaillement.

*Chapitre I*  
*Introduction*

Les progrès accomplis par la science ont permis à l'homme de réaliser des performances dans tous les domaines, celui de la construction étant celui qu'en donne toutes les dimensions. Cependant, malgré cette extraordinaire performance, ces constructions ont été menacées par plusieurs facteurs nuisibles comme : la corrosion des aciers d'armatures, fissuration du béton, des changements d'affectation qui imposent de nouvelles charges, un mauvais dimensionnement, l'évolution des normes, des accidents (choc contre un élément de structure), l'endommagement par un tremblement de terre, la prolongation de la durée de vie d'un ouvrage, etc.

Ces facteurs font qu'il est peut être nécessaire de renforcer ou de réparer un ouvrage. A titre d'exemple, et pour les seuls USA les dépenses de la réparation ont largement dépassés les dépenses des constructions nouvelles. En Août 2000, parmi les 587.755 ponts officiellement inventoriés, 167.993 ont été jugés soit structurellement déficients ou fonctionnellement surannés, soit les deux à la fois [1].

Sur cette tendance, et depuis plusieurs années, la réparation et le renforcement d'ouvrage en béton armé prennent de plus en plus d'importance dans la construction. Et le problème de la durabilité se pose en terme de maintenance et de réhabilitation. Les méthodes de renforcement classiques, tels que l'augmentation de la section par l'ajout de nouvelles barres d'armature et d'un nouveau béton lié à l'ancienne structure, sont souvent très complexes à réaliser, très onéreuses, et nécessite une intervention lourde sur la structure [2, 3]. Grâce aux progrès effectués dans le domaine des adhésifs au milieu du siècle passé, une nouvelle option se présentait aux ingénieurs : le renforcement de structure par collage externe. Dès le milieu des années soixante, on a commencé à appliquer des lames d'acier sur des structures en béton. Ces lames étaient collées à la surface du béton à l'aide d'une résine époxy. Cette méthode constituait une avancée majeure dans le domaine de la réparation car elle simplifie grandement le travail par rapport aux méthodes traditionnelles. Cependant, le collage des plaques d'acier au béton présente des inconvénients tels que le risque de corrosion du joint (Acier / Adhésive) et le poids excessif de la matière. Ces problèmes augmentent les coûts d'installation et d'entretien.

Dés lors, les chercheurs ont tentés de trouver des matériaux de substitution qui régleraient ce problème, et se sont tournés vers les matériaux non métalliques, en particulier les FRP (Fiber Reinforced Polymer). La technique de collage des plaques d'acier ou des FRP, par des adhésifs de base époxyde sur les faces tendues des poutres en béton armé (BA) se développe rapidement. Ce procédé a été utilisé en Europe pendant plusieurs années, et devient largement accepté aux Etats-Unis.

Les plaques de FRP, les tissus (*fabrics*), ou les tiges (*rods*) offrent plusieurs avantages comme:

- a) avantages structuraux: Les matériaux de FRP ayant une très haute résistance, et un rapport de (résistance / poids) plus élevée que l'acier ou le béton. Par conséquent, la résistance et la rigidité peuvent être augmentées sans augmentation significative du poids propre;
- b) avantages de durabilité: Les matériaux de FRP offrent une résistance élevée contre la corrosion et d'autres éléments agressifs;
- c) avantages économiques: Le temps et le coût d'installation sont moindres que les techniques de réparation traditionnelles.

Dans la réaction à cette tendance, plusieurs recherches récentes concernant les structures en béton ont été concentrées au domaine de la réhabilitation et la réparation. Un nombre significatif de recherches a été fait ces dernières années pour caractériser les propriétés et le comportement des matériaux de FRP en tant qu'un renforcement externe pour la flexion et le cisaillement. Cela afin d'examiner les diverses issues liées au comportement des éléments et des structures renforcées en FRP, et pour développer l'analyse et les méthodes de calcul de ces éléments.

Plusieurs investigations expérimentales ont été rapportées sur le comportement à la flexion des poutres en béton renforcées par le collage extérieur des plaques composites. La première utilisation des FRP dans le domaine de la construction a été effectuée en Japon suivie des USA puis l'Europe. Les fibres généralement utilisées sont en verre, en carbone ou en aramide, sous forme de tissus unidirectionnels ou bidimensionnels, de lamelles ou de barres. De nombreuses études ont déjà été menées sur l'utilisation des FRP pour le confinement de colonnes, le renforcement en flexion de poutres ou de dalles, ou le renforcement à l'effort tranchant de poutres. Pour le renforcement à la flexion, ce sont en général des lamelles qui sont utilisées. Les fibres de carbone, grâce à leur module d'élasticité relativement élevé, sont en général utilisées pour ce cas. La majorité des investigations ont montré une amélioration dans le comportement des poutres aux états limites ultimes et de service.

De point de vue analytique, une évaluation quantitative rigoureuse du comportement d'une structure en béton remise en état réparé présente un défi formidable. Une reformulation étendue des algorithmes non linéaires est exigée pour permettre ce qui suit : la considération de changement de la configuration

structurale; La superposition des parties précédemment chargées ou endommagées d'une structure avec des nouveaux éléments supplémentaires non sollicités; modélisation constitutive appropriée des matériaux de réparation; et l'inclusion des contraintes résiduelles et des déformations différentielles à travers l'interface de réparation.

Vu que les recherches dans le côté expérimental sont très avancées dans ce domaine, nous avons consacré notre contribution dans le côté numérique. Bien que le thème ait fait l'objet de nombreuses études, certains aspects du comportement d'ensemble des structures en béton armé renforcées par collage de plaques extérieur restent encore à éclairer tel que : le comportement du béton en traction, les différents paramètres de liaisons, d'adhérence et d'interfaces entre les matériaux sont en effet complexes à modéliser ou sont encore mal connus. Là encore, la plus part des études déjà réalisées font des simplifications. Notre contribution consiste à trouver un outil de calcul qui nous permet d'évaluer les contraintes et les déformations afin de dimensionner ce type de structures, et d'analyser en détail les comportements physiques des matériaux. Le recours à l'analyse non linéaire par la méthode des éléments finis est la procédure la plus appropriée pour répondre à ces attentes. Vu le progrès important dans le domaine d'informatique, nous avons utilisés le logiciel ANSYS. C'est un programme de calcul extrêmement puissant qui nous permet de modéliser le comportement des structures en béton armé. En utilisant une discrétisation tridimensionnelle, nous avons choisis les types des éléments, ainsi les modèles des matériaux les plus convenables dans la modélisation des différents matériaux de la poutre renforcée. Cela est accompli après un tour d'horizon que nous avons effectué sur les travaux expérimentaux, analytiques et numériques élaborés dans la revue bibliographique, ainsi que sur les différents modèles des matériaux utilisés pour la modélisation de comportement du composite béton armé renforcé.

Dans cette optique, ce mémoire est organisée comme suit :

- Le premier chapitre est cette introduction où nous avons rapidement présenté le problème à étudier, définie la technique de réparation et présenté l'organisation du mémoire.
- Le deuxième chapitre comportera un tour d'horizon sur les travaux de recherche traitant la technique de réparation des poutres par collage des plaques.
- Dans le troisième chapitre nous avons passé brièvement en revue les modèles non linéaires des matériaux utilisés dans l'analyse des poutres en béton armé. Un tour d'horizon sur les sources de données non linéaires ainsi que les stratégies de solutions du système non linéaires sont aussi présentés.

- Dans le quatrième chapitre, on présentera les types des éléments utilisés ainsi que les modèles des matériaux incorporés dans le logiciel ANSYS pour modéliser le comportement non linéaires des poutres en béton armé renforcées par collage de plaques.
- Le cinquième et dernier chapitre est consacré à l'étude de simulation. Au cours de ce travail, toutes les simulations ont été faites sous le logiciel ANSYS. Les résultats obtenus pour les deux types de renforcement et pour les lois de comportements définies au quatrième chapitre seront présentés, interprétés et comparés aux résultats expérimentaux.
- Pour finir, nous donnerons les conclusions et les remarques sur le travail réalisé et les perspectives de développement futures dans le dernier chapitre.

*Chapitre II*

*Revue Bibliographique*

## 2.1 Introduction :

Le développement des adhésifs synthétisés basés sur les résines époxydes offre de nouvelles possibilités pour le collage des matériaux structuraux. La technique de réparation par collage extérieur des plaques d'acier ou de FRP, technique la plus répandue actuellement, présente un choix économiquement viable. Dans ce chapitre, un exposé des travaux expérimentaux, analytiques et numériques les plus remarquables dans le domaine sera utilisé afin de tenter de faire le point sur cette technique.

## 2.2 Réparation des poutres en béton par collage des plaques :

L'un des défis les plus importants que rencontre le domaine de la construction est le nombre impressionnant d'ouvrages en état de détérioration plus ou moins avancée, et qui nécessitent l'établissement d'un diagnostic assez précis. Ce diagnostic peut éventuellement aider les gestionnaires à décider sur le sort des structures endommagées. Vu les contraintes budgétaires ainsi que le nombre croissant des structures endommagées, le recours aux techniques de réparation est devenu de plus en plus une alternative viable à celle qui consiste dans la démolition et le remplacement de la structure. Parmi ces techniques nous citons :

- Réparation par couture directe de barres d'acier
- Réparation par colmatage
- Technique de Dry Pack
- Utilisation du béton à fibres
- Colmatage par joint customare souple "flexible scaling"
- Injection "Grouting"
- Technique de chemilage – Auto-réparation "judicious neglect" – Peinture de résine (contre corrosion). ... etc. [2, 3].

Malgré leur diversité et leur vaste utilisation, ces techniques de réparation souffrent de leur limitation due aux raisons suivantes :

- Le coût de la matière première de réparation,
- L'état avancé d'endommagement,
- Problème de durabilité de réparation,
- Problème de compatibilité entre l'ancien matériau et le nouveau matériau,
- Les conditions d'environnement.

Depuis les années 1990s la technique de réparation par collage des plaques composites est reconnue comme une méthode de renforcement assez avantageuse. Ce procédé permet d'augmenter la capacité portante de toute la structure. Il permet, selon les dispositions retenues, d'accroître la résistance aux efforts de traction et aux moments fléchissants. Ce procédé peut concerner [4 - 6] :

- Les structures pour lesquelles on envisage des modifications de chargement.
- Les structures comportant des erreurs (insuffisance de ferrailage, ferrailage mal placé, ... etc.)
- Les structures endommagées par accident ou soumises aux attaques par des éléments agressifs.

La réparation des ouvrages est un domaine de recherche d'actualité où beaucoup de travaux expérimentaux, analytiques et numériques ont été entrepris pour comprendre les mécanismes mis en jeu dans les différentes techniques de réparation. Dans ce que suit, un tour d'horizon sur les travaux de recherche traitant la technique de réparation des poutres par collage de plaques sera donné.

### 2.3 Travaux expérimentaux :

De nombreux résultats expérimentaux ont démontré la faisabilité et la possibilité d'utilisation du collage extérieur des plaques synthétiques au moyen des résines époxyde pour augmenter la résistance au cisaillement et à la flexion des poutres en BA.

Le collage est effectué sur la face tendue de la poutre ou sur les cotés latéraux (Figure 2.1), cette géométrie d'assemblage permettant au joint adhésif de travailler au cisaillement dans son plan. La résistance de l'adhésif est caractérisée par sa contrainte de cisaillement à la rupture.

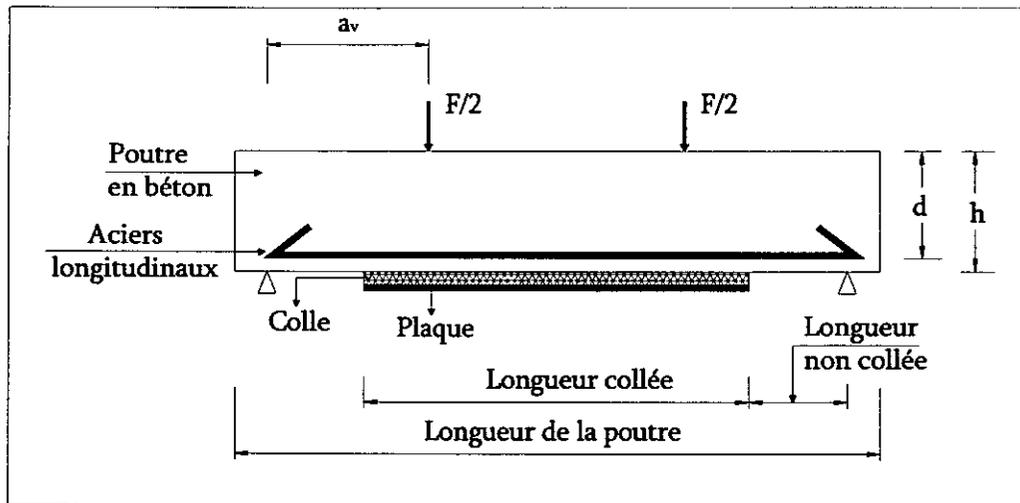


Figure 2.1 : Poutre en béton armé renforcée par collage de plaques.

#### 2.3.1 Résultats :

Les conclusions les plus notables rapportés par la bibliographie des études expérimentales effectuées pour cerner le comportement des poutres en BA renforcées par collage de plaques sont comme suit :

##### 1 - Résistance, Rigidité et Force portante:

La majorité des poutres renforcées ont montré une augmentation significative de la capacité portante ultime et de la rigidité flexionnelle, surtout lorsque les aciers internes entrent en phase de plastification [7 - 17]. Ainsi la résistance au cisaillement est influencée très favorablement par l'utilisation des plaques de CFRP [18], l'effet de renforcement pouvant atteindre 300% [19]. Cette augmentation de la résistance au cisaillement peut se justifier par l'augmentation de la résistance au cisaillement à travers l'interaction des agrégats due à la présence du FRP [20 - 23]. L'effet de la plaque n'est pas seulement d'augmenter la rigidité de la poutre mais aussi de donner une meilleure contribution du béton tendu [9].

Le moment ultime de la première fissure des poutres renforcées est supérieur à celui des poutres non renforcées, l'augmentation maximum du moment ultime de la première fissure et du moment ultime de la poutre sont respectivement de 150 % et de 230 %, l'augmentation maximale de la rigidité de la poutre renforcée est de 110% [24].

La résistance au cisaillement de l'élément renforcé augmente de 11 % à 34 % par rapport à celle de l'élément non renforcé. Cette variation dépend du système ou des techniques utilisées pour la réparation [20]. La résistance au cisaillement dépend essentiellement du joint entre le béton et le FRP [8, 21 - 23].

Il y a une différence significative entre la contrainte axiale dans la plaque et la contrainte axiale dans le béton adjacent, ceci est dû à la présence de déformation de cisaillement importante dans l'adhésif au voisinage des fissures à mi-travée [25]. La contrainte de cisaillement inter-faciale dans la couche adhésive atteint sa valeur maximale dans l'extrémité de la plaque, puis diminue progressivement lorsqu'on s'éloigne des extrémités [13]. La supposition de compatibilité de déformation doit être appliquée dans la détermination des contraintes de cisaillement inter-faciale [25].

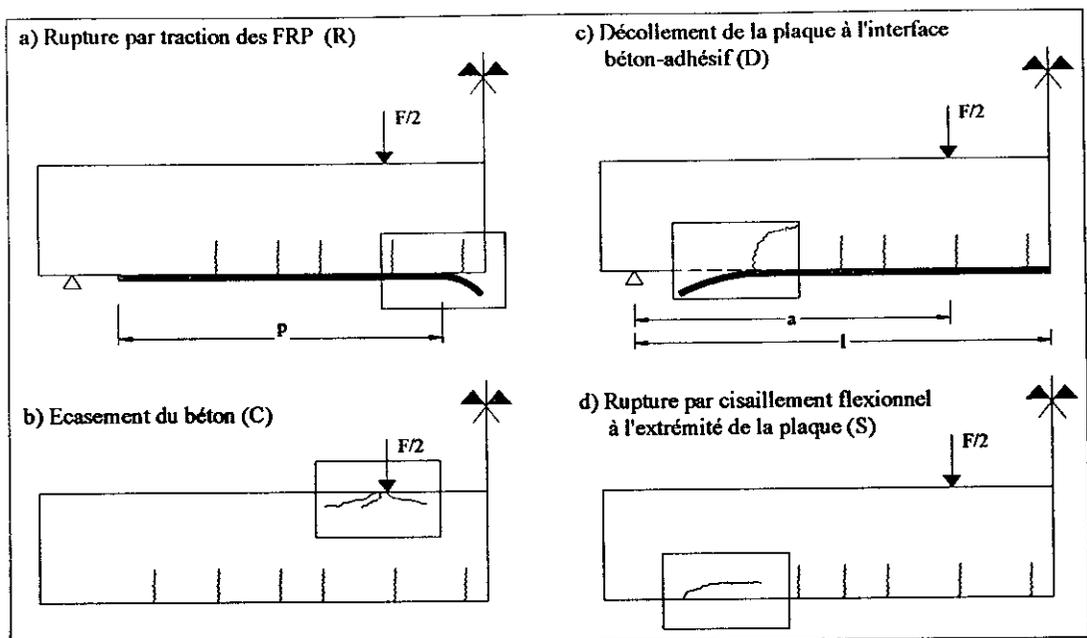
La ductilité de la plaque diminue avec l'augmentation de sa rigidité, les plaques de CFRP unidirectionnelles sont les plus rigides [26].

## 2 - Mécanisme de fissuration et de ruine :

Il y a quatre (04) mécanismes de rupture possibles qui peuvent apparaître lors de la déformation des poutres renforcées par collage de plaques et chargées sur quatre points, ces mécanismes sont résumés comme suit :

- Rupture par traction des FRP (Figure 2.2.a) lorsque la déformation de la plaque dépasse sa valeur ultime dans la zone de moment maximum [27]. Cette rupture apparaît après plastification des aciers longitudinaux.
- Ecrasement du béton (Figure 2.2.b) lorsque la déformation de compression du béton dépasse sa valeur ultime dans la zone de moment maximum. Les poutres renforcées atteignent leurs résistances maximales et se rompent par écrasement du béton suivi par la plastification des aciers de ferraillement comme dans le cas dans les poutres en béton armé [27]. La plaque n'atteint sa résistance ultime que lorsque le béton et l'acier de ferraillement atteignent leurs résistances ultimes [9]. L'apparition de la première fissure est retardée [14], le schéma de fissuration est similaire à celui de la poutre non renforcée pour les charges de service, alors que pour les grandes charges il est significativement différent [10, 12].
- Le mode de rupture le plus dominant est le décollement de la plaque ou des feuilles du FRP (Figure 2.2.c) avec ou sans un endommagement léger de la surface du béton. Ce décollement est dû à la rupture de l'interface *béton / adhésif* qui se produit lors de l'apparition des fissures de cisaillement flexionnelles [16, 17, 24, 25, 28, 29], ou à la concentration des contraintes au voisinage de l'extrémité de la plaque [30]. Ce mécanisme de rupture peut s'amorcer à n'importe quelle fissure de cisaillement flexionnelle, puis il se propage vers l'extrémité de la plaque [27]. Si la surface du béton est bien préparée et le joint est bien garni, dans ce cas le mode de rupture sera par la flexion classique ou par la rupture des CFRP [17, 31, 32]. Par conséquent le renforcement par la CFRP transforme la rupture des poutres en une rupture classique par flexion ductile à une rupture prématurée. Ce qui conduit à la diminution de la ductilité. Il est nécessaire d'optimiser cette technique de renforcement par l'utilisation d'un système d'ancrage [7 - 9]. Il paraît que la résistance du béton est un facteur majeur qui influence le décollement, tandis que la déformation de la plaque et la section des aciers longitudinaux et transversaux sont moins influents [16].
- Rupture par cisaillement flexionnel (Figure 2.2.d) la rupture des poutres renforcées extérieurement s'amorce par l'apparition des fissures de cisaillement aux endroits adjacents aux extrémités de la plaque pour une charge comprise entre 70% et 80% de la charge ultime, ces fissures se propagent ensuite vers la mi-travée. Finalement, une propagation brusque des fissures horizontales apparaît dans le béton enrobage le long de l'interface *Béton / Acier*, qui est la surface la plus faible. Ce qui conduit à la ruine de la poutre lorsque ces fissures deviennent larges [10, 13, 27].

Les deux premiers mécanismes sont plus économiques, car ils permettent l'exploitation totale de la résistance de FRP. Mais les deux derniers sont des mécanismes brusques et apparaissent à une valeur de charge inférieure à celle exigée par les équations conventionnelles de calcul [27].



**Figure 2.2** : Mécanismes de rupture typiques des poutres renforcées par collage de plaques en FRP.

Les paramètres contrôlant les différents modes de rupture sont la capacité flexionnelle  $P_f$  et la capacité de cisaillement  $P_s$ . Si  $P_f < P_s$ , la rupture se produira probablement par flexion de poutre de béton ou par décollement de la plaque d'acier (suivant la charge de rupture la plus faible de chacun des deux modes). Si  $P_f > P_s$  la rupture se produira par cisaillement diagonal. Le décollement et le cisaillement diagonal sont des modes de rupture brusques, et devraient être évités. Les paramètres qui favorisent ces modes de rupture sont l'épaisseur de la plaque et la distance entre le point d'appuis et l'extrémité de la plaque [33].

La déformation de traction, la flèche, la courbure, la rotation, les ouvertures des fissures diminuent avec l'utilisation du renforcement, ce qui conduit à l'amélioration de la performance en service [7, 9, 13 - 15, 24]. Le nombre des fissures à la charge ultime de la poutre renforcée est supérieur à celui de la poutre non renforcée, la fissuration est donc plus répartie [10, 24].

Il est évident que le mode de rupture, la charge ultime et la capacité au cisaillement sont affectés par la distance  $a_v$  entre l'appui et le point d'application de la charge. Le moment ultime et la capacité au cisaillement augmentent avec l'augmentation du rapport ( $a_v / d$ ). Pour un rapport inférieur à six le mode de rupture est le décollement de la plaque, la séparation de la plaque est causée par le transfert de la contrainte normale et la contrainte de cisaillement de l'adhésif vers le béton dans la zone d'extrémité de la plaque. [15, 21, 24]

Le renforcement des éléments existant en béton armé par collage des plaques sur les faces tendues est nécessaire pour les différentes raisons :

- Réduction de la flèche en service (critère de rigidité)
- Amélioration de la charge portante maximale (critère de résistance)
- Limitation de la largeur et de la distribution des fissures dans le béton (critère de durabilité)

Cependant, ces performances sont sensibles à la variation des plusieurs paramètres. C'est pour cette raison qu'une étude paramétrique s'impose, afin de déterminer l'influence de ces paramètres sur le comportement de la poutre.

### 2.3.2 Etude paramétrique :

#### 1- Effet du type de plaques :

La dégradation des joints des éprouvettes réparées par des tissus en polymère renforcés par des fibres en carbone (CFRP) est plus importante que celles réparées par des tissus en polymère renforcés par des fibres d'aramide (AFRP) ou de verre (GFRP) [29]. Les poutres renforcées par GFRP ont un comportement de type plastique, tandis que les poutres renforcées par CFRP ont un comportement linéaire jusqu'à la rupture [7].

#### 2- Effet de l'ancrage :

L'utilisation des systèmes d'ancrage pour fixer le renforcement à la poutre améliore la capacité de cisaillement et la ductilité [15, 16, 18]. L'ancrage peut empêcher le déplacement vertical de l'extrémité de la plaque, mais n'empêche par le glissement horizontal le long de la travée [16].

#### 3- Effet de l'épaisseur et la largeur de la plaque :

L'épaisseur de la plaque a un effet considérable sur la transmission de la charge entre les différents composants de la poutre, sur la capacité portante de la poutre, et sur le mode de rupture [13, 34]. L'augmentation de l'épaisseur de la plaque au-delà d'un certain seuil, cause le décollement prématuré de l'extrémité de la plaque et la diminution de la ductilité [8, 11, 12]. La largeur de la plaque n'a aucune influence sur la résistance du joint [28], mais a un effet considérable sur la diminution des déformations maximales de la poutre, ce qui indique que l'exploitation de la plaque n'est pas totale. Pour une utilisation optimale, la plaque doit être ancrée aux extrémités afin d'éviter le décollement [24].

La contrainte de cisaillement inter-faciale dans l'extrémité de la plaque augmente avec l'épaisseur de la plaque [13]. Le rapport entre la largeur de la plaque et son épaisseur est très important dans la définition de la contrainte agissante dans le joint aux extrémités de la plaque [34].

#### 4- Effet de la longueur de la plaque :

Les résultats trouvés dans la littérature et se rapportant à ce sujet se contredisent. Certains chercheurs [28, 31, 35] ont trouvé que la longueur de la plaque n'influe pas sur la capacité portante de la plaque à condition que la plaque soit convenablement ancrée. D'un autre côté, d'autres chercheurs ont montré que plus les extrémités de la plaque sont proches des appuis, plus la résistance de la poutre augmente [11]. Il semble aussi que l'état de surface du joint affecte la charge ultime et la rigidité de la poutre [26].

#### 5- Effet de l'emplacement des plaques :

Le renforcement des poutres au cisaillement par collage des plaques latérales améliore non seulement la capacité de la poutre au cisaillement, mais également sa capacité de compression. Ainsi, l'apparition des fissures diagonales est retardée et leur développement est limité. Le renforcement latéral a un effet bénéfique sur la ductilité des poutres, et améliore la résistance ultime des poutres endommagées ou des poutres insuffisamment ferrillées transversalement. Les essais conduits ont montré que la contribution des plaques dans la résistance au cisaillement augmente avec la section des plaques latérales [36 - 38].

La section des armatures transversales des poutres n'a aucun effet sur le décollement de la plaque CFRP. L'utilisation du renforcement latéral par collage extérieur des plaques dans la zone comprimée avec le renforcement de la face tendue, augmente la capacité de cisaillement et la capacité flexionnelle de la poutre [16, 39].

#### 6- Effet de l'épaisseur de la colle :

L'utilisation d'une couche d'adhésif épaisse permet un déplacement relatif considérable entre la plaque et le béton tendu dans les endroits des fissures. D'autre part, pour les poutres pré-fissurées, les couches épaisses causent un transfert de charge graduel entre le béton et la plaque, et minimisent l'apparition des nouvelles fissures. Donc l'épaisseur de l'adhésif affecte la déformation locale [40].

Partant de l'observation que la colle ne se fissure pas préalablement à la poutre, il est légitime de prendre en considération sa collaboration dans la résistance à la traction du composite, et de faire les calculs en conséquence [9].

Les matériaux composites à matrice polymère et à renforts textiles carbone ou verre (CFRP ou GFRP) présentent des avantages considérables dans le domaine du bâtiment et des travaux publics lorsqu'il s'agit d'assurer la protection, la réparation et le renforcement d'ouvrages ou d'éléments d'ouvrages tels que poutre, poteau, dalle en BA, ou béton précontraint ... etc. Les principaux avantages de ce matériau et de ce mode de fixation sont:

- Contraintes et déformation de rupture très élevées (3500 MPa).
- Grande résistance à la vibration.
- Grande résistance à la fatigue sous les cycles traction – traction
- La répartition des contraintes de liaison sur une surface importante.
- La possibilité d'optimiser la géométrie et les dimensions de collage.
- La légèreté de l'assemblage : Les matériaux de FRP ayant une très haute résistance, et un rapport de (résistance / poids) plus élevé que pour l'acier ou le béton; par conséquent, la résistance et la rigidité peuvent être augmentées sans augmentation significative du poids propre (sa densité varie entre  $1200 \div 2600 \text{ kg /mm}^2$ ).
- Les plaques FRP procurent à la poutre des propriétés d'isolation et d'étanchéité contre les éléments agressifs qui peuvent attaquer le composite poutre – plaque.
- Le temps d'installation et le coût sont moindres que pour les techniques de réparation traditionnelles.

#### 2.4 Travaux analytiques :

Un effort considérable a été consacré au développement de modèles analytiques capables de prédire correctement la réponse des structures en béton soumises à des chargements variables. Les anciens modèles sont basés sur la théorie de l'élasticité. Les modèles récemment proposés utilisent, entre autres, les théories générales de la mécanique des solides en plasticité, la théorie de l'endommagement et la mécanique de la rupture [41]. Dans ce qui suit, nous présenterons individuellement les modèles analytiques remarquables qui ont été développés pour l'étude des poutres renforcées.

##### 2.4.1 Calcul des contraintes à l'interface Béton/ Plaque :

1°/ Arduini et Nanni [27, 42] ont développé un modèle analytique pour analyser la distribution des contraintes normales et tangentielles dans l'interface Colle /Béton. Ce modèle permet l'étude de l'effet de la rigidité et l'épaisseur de l'adhésif. Le modèle analytique conçu pour prédire le comportement d'un élément en béton armé renforcé par le collage d'une plaque en FRP sur sa face tendue et soumis à la flexion quatre points. Ce modèle évalue aussi l'influence des différents paramètres sur le comportement

d'ensemble de l'élément. La démarche suivie consiste à considérer l'équilibre d'un tronçon infinitésimal de l'élément, et postulé sur les hypothèses suivantes :

- Une section plane reste plane pendant le chargement.
- La surface de charge de Mohr – Coulomb à l'interface *Colle / Béton* ne change pas suite à la présence des fissures flexionnelles, c.à.d. qu'il n'existe pas une interaction entre la contrainte normale horizontale, la contrainte de cisaillement, et la contrainte normale verticale.
- L'interface *Colle / FRP* est plus forte que l'interface *Colle / Béton*.
- Les couches de l'adhésif et de la plaque sont minces, donc les contraintes dues au moment de flexion agissant sur elles sont négligeables.

Les lois constitutives sont les suivantes :

**Béton** : Le modèle constitutif du béton est présenté dans la figure 2.3. La courbe est constituée par deux branches, l'équation de la partie parabolique est donnée par :

$$\sigma = f_c' \left( \frac{2\varepsilon}{\varepsilon_c} - \left[ \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} \right]^2 \right) \tag{2.1}$$

$\varepsilon, \sigma$  : déformation et contrainte de compression.

La loi de comportement du béton comprimé est non linéaire, et tient compte de l'effet de confinement dû aux cadres transversaux (Figure 2.3). Puisque l'écrasement du béton est influencé par l'effet de confinement, les paramètres critiques de la nouvelle relation sont donnés par :

$$\begin{aligned} f_c^* &= f_c' (1 + 2.5\alpha\varpi_w) \\ \varepsilon_c^* &= 2f_c^* / E & \varepsilon_{cu}^* &= \varepsilon_{cu}^{0.1\alpha\varpi_w} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Où : 
$$\varpi_w = \frac{6.83 A_s f_Y}{b.s.f_c'}$$

$\alpha$  : Facteur de réduction qui dépend du type, et du nombre des cadres. (dans cette étude  $\alpha$  est pris égale à 0.27)

$E$  : Module de Young du béton.

$A_s$  : Section des armatures transversales.

$f_Y$  : Résistance limite de l'acier.

$b$  : Largeur de la poutre.

$s$  : Espacement des cadres.

$f_c'$  : Contrainte de compression du béton non confiné.

$f_c^*$  : Contrainte de compression du béton confiné

$f_{cu}$  : Contrainte ultime de compression du béton confiné ( $f_{cu} = 0.2f_c^*$ )

$\varepsilon_c$  : Déformation de compression du béton non confiné qui correspond à  $f_c'$  ( $\varepsilon_c = 2f_c' / E$ ).

$\varepsilon_c^*$  : Déformation de compression du béton confiné qui correspond à  $f_c^*$ .

$\varepsilon_{cu}$  : Déformation ultime de compression du béton non confiné ( $\varepsilon_{cu} = 0.0035$ ).

$\varepsilon_{cu}^*$  : Déformation ultime de compression du béton confiné.

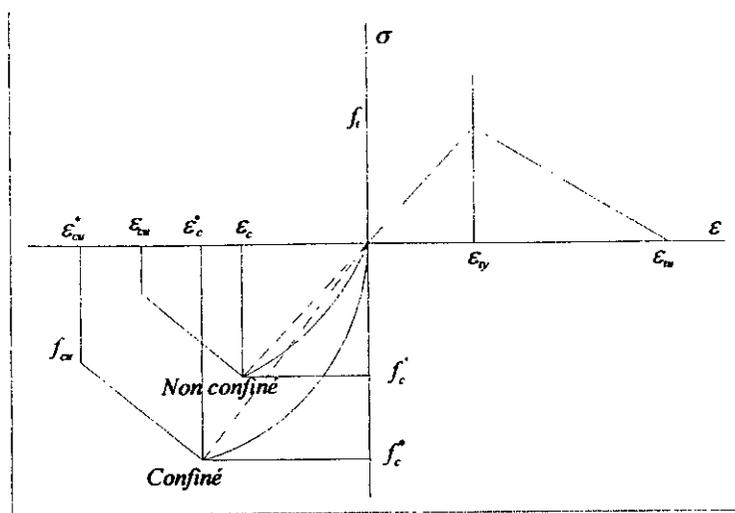


Figure 2.3 : Modèle constitutif du béton.[42]

Le comportement du béton à la traction est considéré de type linéaire fragile avec adoucissement. La valeur de la contrainte est égale à 90 % de la résistance à la traction par fendage,  $\epsilon_{ty}$  est égale à  $f_t / E$ , tandis que  $\epsilon_{tu}$  est prise arbitrairement égale à 0.008. (Figure 2.3)

Acier : Les armatures de ferrailage sont modélisées en supposant un comportement élastique écrouissable (Figure 2.4)

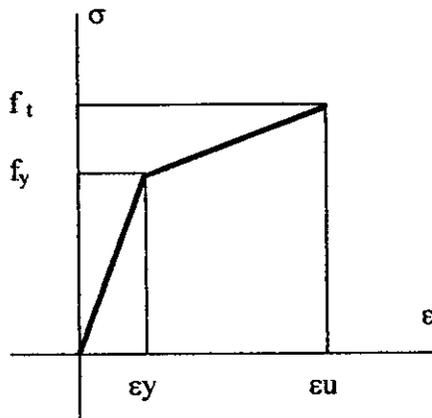


Figure 2.4 : Modèle constitutif de l'acier. [42]

Colle : Le comportement isotrope élastique avec une adhésion parfaite dans les deux interfaces est admis pour la colle.

Plaque / Béton : Le comportement est supposé linéaire élastique jusqu'à la rupture.

Pour chaque segment  $dx$  les équations d'équilibre des forces normales, et des moments fléchissants sont satisfaites.

La distribution de contrainte de cisaillement à l'interface Colle / Béton pour chaque segment  $dx$  est triangulaire et sa valeur maximale est calculée par (Figure 2.5):

$$(\tau_{ol,j})_{\max} = (N_{j+1} + N_{a,j+1} - N_j - N_{aj}) \frac{6}{b \cdot dx} \quad 2.3$$

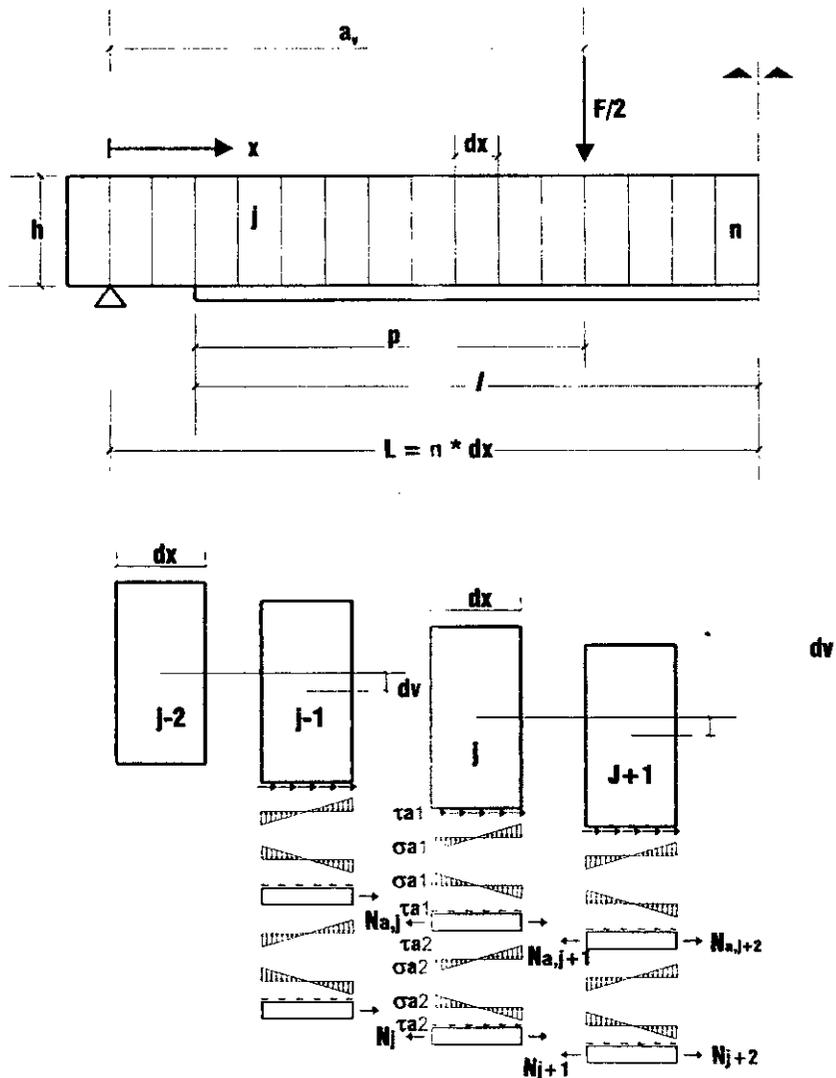


Figure 2.5: Modèle analytique discret. [42]

Où :

$b$  : Largeur de la poutre ;

$dx$  : Longueur de l'élément fini.

$N_j$  : La force normale (horizontale) dans la plaque FRP dans le segment  $j$  .

$N_{a,j}$  : La force normale (horizontale) dans la colle dans le segment  $j$ .

La distribution de la contrainte normale dans la même interface est aussi triangulaire, et sa valeur maximale dans les extrémités de l'élément est calculée par :

$$(\sigma_{ol,j})_{\max} = \left[ (N_{j+1} - N_j) (dv_j + t_a + t_p / 2) + (N_{a,j+1} - N_{a,j}) (dv_j + t_a / 2) \right] \frac{6}{b \cdot dx^2} \quad 2.4$$

Les indices  $a$  et  $p$  indiquent respectivement l'adhésif et la plaque de FRP.

$dv_j$  : L'incrément du déplacement relatif vertical de segment  $j$ .

$t$  : Epaisseur.

Les résultats analytiques de calcul de déformation montrent une meilleure corrélation avec les résultats expérimentaux. Ce qui justifie la supposition du joint parfait *Adhésif/Béton* et *Adhésif/Plaque de FRP*. La rigidité élevée après plastification “*post-yielding*” de modèle analytique est probablement justifiée par l’existence des glissements dans les deux interfaces dans les directions horizontale et verticale en même temps.

2°/ Le modèle proposé par Ye [43] utilise un procédé itératif pour étudier le transfert des contraintes de cisaillement dans les interfaces d’une poutre en béton armé renforcée sur la face tendue par une plaque en FRP (Figure 2.6)

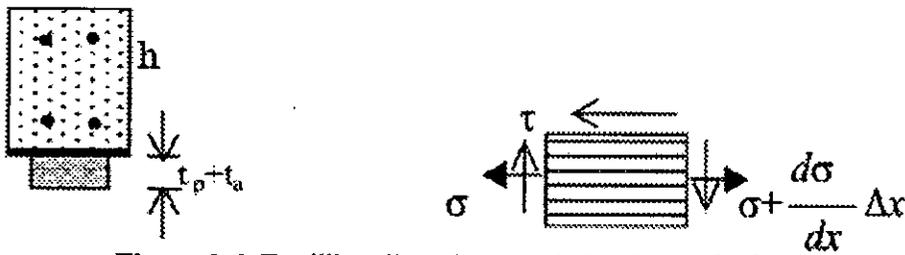


Figure 2.6: Equilibre d'un élément de la plaque. [43]

Pour modéliser le joint entre le béton et la plaque composite un calcul approximatif d'équilibre d'un élément d'interface a été utilisé. Pour une couche d'adhésif mince, la déformation tangentielle à l'interface *Béton / Plaque* est approximativement égale à :

$$\gamma = \frac{u_c(x) - u_p(x)}{t_a} \tag{2.5}$$

- $u_c$  : Déplacement horizontal du béton à l'interface
- $u_p$  : Déplacement moyen de la plaque
- $t_a$  : Epaisseur de la couche d'adhésif.
- $x$  : Coordonnée longitudinale à partir de l'extrémité de la plaque.

Donc la contrainte de cisaillement à l'interface est :

$$\tau(x) = G_a \frac{|u_p(x) - u_c(x)|}{t_a} \tag{2.6}$$

$G_a$  : Module de cisaillement de la couche adhésif.

La dérivée de la contrainte de cisaillement par rapport à  $x$  nous donne :

$$\frac{d\tau(x)}{dx} = \frac{G_a}{t_a} (\varepsilon_p - \varepsilon_c^+) = \frac{G_a}{t_a} \left( \frac{\sigma}{E_p} - \varepsilon_c^+ \right) \tag{2.7}$$

Où  $\varepsilon_c^+$  : Déformation maximale de traction du béton.

$\varepsilon_p$  : Déformation de la plaque FRP à l'interface.

$\sigma$  : Contrainte normale longitudinale

$E_p$  : Module d'élasticité de la plaque.

D'après la figure 2.6 l'équilibre horizontal de l'élément de la plaque nous donne :

$$\frac{d\sigma(x)}{dx} = \frac{\tau(x)}{t_p} \tag{2.8}$$

Où :  $t_p$  est l'épaisseur de la plaque.

La solution générale des équations 2.7 et 2.8 peut se présenter comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma \\ \tau \end{Bmatrix} = \exp[Kx] \begin{Bmatrix} \sigma_0 \\ \tau_0 \end{Bmatrix} + \int_0^x \exp[K(x-\xi)] \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -G_a \varepsilon_c^+(\xi) / t_a \end{Bmatrix} d\xi \quad 2.9$$

- $K$  est une matrice d'ordre 2
- $\sigma_0$  et  $\tau_0$  sont les contraintes normale longitudinale et de cisaillement à l'extrémité de la plaque ( $x=0$ ).

L'exponentielle de la matrice  $Kx$  peut être exprimée explicitement comme :

$$\exp[Kx] = \begin{bmatrix} \cosh(\alpha x) & \sinh(\alpha x) / \alpha t_p \\ G_a \sinh(\alpha x) / \alpha E_p t_a & \cosh(\alpha x) \end{bmatrix} \quad 2.10$$

Où :

$$\alpha = \sqrt{\frac{G_a}{E_p t_p t_a}}$$

Après substitution et application des conditions aux limites (pour :  $x=0$ ,  $\sigma_0=0$  et pour :  $x=l_p$ ,  $\tau_0=0$ ) on obtient :

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_0 \cosh(\alpha x) - \int_0^x \frac{G_a}{t_a} \cosh \alpha(x-\xi) \varepsilon_c^+(\xi) d\xi \\ \sigma &= \frac{\tau_0}{\alpha t_p} \sinh(\alpha x) - \int_0^x \frac{G_a}{\alpha t_p} \sinh \alpha(x-\xi) \varepsilon_c^+(\xi) d\xi \end{aligned} \quad 2.11$$

$$\text{Où : } \tau_0 = \frac{1}{\cosh(\alpha l_p)} \int_0^{l_p} \frac{G_a}{t_a} \cosh \alpha(l_p - \xi) \varepsilon_c^+(\xi) d\xi$$

$l_p$  : la longueur de la moitié de la plaque.

Les résultats de cette méthode montrent que la contrainte de cisaillement à l'extrémité de la plaque augmente lorsque :

- a) on utilise une couche d'adhésif mince
- b) la rigidité de la plaque (module de Young) est élevée.
- c) il y a une grande distance entre l'extrémité de la plaque et l'appui de la poutre.

Une étude comparative indique que cette méthode analytique est en bon accord avec les résultats de l'analyse par la MEF.

3°/ Le travail de **De Lorenzis, Miller, et Nanni [28]** : présente une approche simplifiée pour le calcul des contraintes de cisaillement dans le joint *plaque / béton* des poutres soumises à la flexion et renforcées par collage des plaque en FRP. Le modèle développé a permis d'évaluer l'expression de la charge d'arrachement et la longueur effective de collage.

L'analyse du joint adhésif dans le domaine élastique linéaire peut être gouvernée au moyen d'une approche simple de cisaillement. L'équation différentielle qui gouverne le joint est comme suit :

$$\frac{d^2S}{dx^2} - \frac{1}{t.E} \tau(S(x)) = 0 \tag{2.12}$$

Où -  $S$  : Le glissement

- $\tau$  : La contrainte de joint (bond stress)
- $x$  : Coordonnée le long de longueur collée de la plaque
- $t$  et  $E$  : Sont l'épaisseur et le module élastique du FRP respectivement.

L'équation 2.12 est basée sur les équations d'équilibre et de compatibilité d'un élément fini de la plaque de longueur  $dx$ , avec les suppositions que:

- 1) Le comportement de la plaque du FRP est linéaire élastique
- 2) La déformation du béton est négligeable devant celle du FRP
- 3) L'adhésif est soumis seulement aux forces de cisaillement.

A des niveaux de charges modérées, un comportement linéaire de contrainte-glissement de joint peut être adopté:

$$\tau = K \cdot S \tag{2.13}$$

On va résoudre l'équation 2.12, en substituant  $\tau$ , et en appliquant les conditions aux limites ( $\varepsilon(0) = 0$  ;  $\varepsilon(l) = \sigma_{appl} / E$ ), on obtient les formules suivantes :

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{\sigma_{appl}}{\alpha.E.\sinh \alpha l} \cdot \cosh \alpha x \\ \varepsilon(x) &= \frac{\sigma_{appl}}{E.\sinh \alpha l} \cdot \sinh \alpha x \\ \tau(x) &= K \cdot S(x) \end{aligned} \tag{2.14}$$

Avec :

$$\alpha = \sqrt{\frac{K}{t.E}}$$

- Où :
- $\varepsilon(x)$  : La déformation de la plaque.
  - $\sigma_{appl}$  : La charge extérieure appliquée.
  - $l$  : La longueur collée.

L'approche précédente a été appliquée précédemment à l'analyse des joints des plaques FRP. Dans ce cas le module de glissement  $K$  peut être établi au moyen d'un modèle simple de cisaillement comme le rapport entre le module du cisaillement de l'adhésif  $G$ , et l'épaisseur de la couche adhésive.

La longueur effective de collage peut être exprimée comme suit :

$$l_{eff} = \frac{\sqrt{2E.t.G_f}}{\tau_m} \tag{2.15}$$

$G_f$ : Energie de rupture par unité de surface du joint.

$\tau_m$  : Valeur maximale de  $\tau$  dans la courbe  $\tau$  - glissement, c.à.d. la résistance locale de joint.

$$\tau_m = 0.0184\sqrt{t.E}$$

Un accord raisonnable avec les résultats expérimentaux a été constaté, surtout pour les éprouvettes avec pli laminé. Il paraît que la rigidité du laminé influence favorablement la charge de rupture de joint.

4°/ Teng et Smith [44] ont proposé une solution analytique pour prédire les contraintes d'interface qu'ils ont appelé " solution analytique de Smith et Teng ". En considérant une poutre simplement appuyée soumise à une charge uniformément répartie, les auteurs ont développé une expression pour les contraintes à l'interface moyennant les suppositions suivantes :

- Modèle linéaire élastique
- Seules les déformations axiales sont considérés, celles dues au cisaillement sont négligées.
- Distribution uniforme des contraintes à travers l'épaisseur de l'adhésif.

L'équation différentielle gouvernante de la contrainte de cisaillement d'interface,  $\tau$ , est donnée par :

$$\frac{d^2 \tau(x)}{dx^2} - \frac{G_a b_p}{t_a} \times \left( \frac{(y_c + y_p)(y_c + y_p + t_a)}{E_c I_c + E_p I_p} + \frac{1}{E_c A_c} + \frac{1}{E_p A_p} \right) \tau(x) = - \frac{G_a}{t_a} \left( \frac{y_c + y_p}{E_c I_c + E_p I_p} \right) V_T(x) \quad 2.16$$

Les indices c, a et p correspondent à la poutre de BA, l'adhésif et à la plaque respectivement.

- b, E, A et I : Largeur, module de Young, section transversale et le moment d'inertie.
- $t_a$  : Epaisseur de l'adhésif
- $G_a$  : Module de cisaillement de l'adhésif
- $y_1$  : La distance entre le centre de gravité de la poutre et sa base
- $y_2$  : La distance entre le centre de gravité de la plaque et sa face supérieure.
- La coordonné (x) est la distance le long de la plaque à partir de son extrémité.
- $V_T(x)$  : Force de cisaillement dans chaque point le long de la plaque.

L'équation différentielle gouvernante de la contrainte normale d'interface,  $\sigma(x)$ , est donnée par :

$$\frac{d^4 \sigma(x)}{dx^4} - \frac{E_a b_p}{t_a} \times \left( \frac{1}{E_c I_c} + \frac{1}{E_p I_p} \right) \sigma(x) = - \frac{E_a b_p}{t_a} \left( \frac{y_c}{E_c I_c} - \frac{y_p}{E_p I_p} \right) \frac{d\tau(x)}{dx} - \frac{E_a}{t_a} \frac{1}{E_c I_c} q \quad 2.17$$

Où q : est la charge uniformément répartie. La solution qui résulte pour la contrainte de cisaillement d'interface et qui est applicable dans toute la longueur de la plaque, est donnée par :

$$\tau(x) = m_1 V_T(x) + \frac{m_2}{\lambda} M_T(0) \cdot e^{-\lambda x} - \frac{m_1}{\lambda} q \cdot e^{-\lambda x} \quad 2.18$$

Où :

$$\lambda^2 = \frac{G_a b_p}{t_a} \times \left( \frac{(y_1 + y_2)(y_1 + y_2 + t_a)}{E_1 I_1 + E_2 I_2} + \frac{1}{E_1 A_1} + \frac{1}{E_2 A_2} \right)$$

$$m_1 = \frac{G_a}{t_a} \frac{1}{\lambda^2} \times \left( \frac{y_c + y_p}{E_c I_c + E_p I_p} \right)$$

$$m_2 = \frac{G_a}{t_a} \frac{y_c}{E_c I_c}$$

Et  $M_T(0)$  : Le moment de flexion appliqué à l'extrémité de la plaque.

La solution qui résulte pour la contrainte normale d'interface est donnée par :

$$\sigma(x) = e^{-\lambda x} [C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x)] - n_1 \frac{d\tau(x)}{dx} - n_2 q \quad 2.19$$

Où :

$$\beta = \sqrt{\frac{E_a b_p}{4t_a} \left( \frac{1}{E_c I_c} + \frac{1}{E_p I_p} \right)}$$

$$n_1 = \left( \frac{y_c E_p I_p - y_p E_c I_c}{E_c I_c + E_p I_p} \right)$$

$$n_2 = \frac{E_p I_p}{b_p (E_c I_c + E_p I_p)}$$

$$C_1 = \frac{E_a}{2\beta^2 t_a} \frac{1}{E_c I_c} [V_T(0) + \beta M_T(0)] - \frac{n_3}{2\beta^2} \tau(0) + \frac{n_1}{2\beta^2} \left( \frac{d^4 \tau(x)}{dx^4} \Big|_{x=0} + \beta \frac{d^3 \tau(x)}{dx^3} \Big|_{x=0} \right)$$

$$C_2 = \frac{E_a}{2\beta^2 t_a} \frac{1}{E_c I_c} M_T(0) - \frac{n_1}{2\beta^2} \frac{d^3 \tau(x)}{dx^3} \Big|_{x=0}$$

Les résultats de la solution analytique approximative de **Smith et Teng** indiquent que les valeurs des contraintes normales et des contraintes de cisaillement dans les interfaces *Béton/Adhésif* et *adhésif / Plaque* sont raisonnablement comparables avec les résultats numériques par la MEF, sauf au voisinage de l'extrémité de la plaque.

5°/ **Lau et al. [45]** ont présenté un modèle théorique pour déterminer les contraintes de cisaillement et de décollement de la couche adhésive, et la force axiale dans la plaque de FRP, pour des poutres en béton sans ferrailage interne, renforcées par collage extérieur des plaques en FRP sur la face tendue, et appuyées sur trois points. Pour simplifier le calcul les suppositions suivantes sont imposées :

- Le comportement du béton, de l'adhésif, et de la plaque est élastique, linéaire, et isotrope.
- Aucun glissement n'est permis dans l'interface du joint adhésif (càd, un joint parfait entre la plaque et le béton).
- Les contraintes dans la couche d'adhésif et dans la plaque ne changent pas à travers l'épaisseur parce que la plaque et la colle sont supposées minces.
- La rigidité flexionnelle de la poutre renforcée est supérieure à celle de la plaque.

Contrainte de cisaillement dans l'adhésif :

L'équation de compatibilité de la contrainte de cisaillement est donnée par : (Figure2.7)

$$\tau_a(x) = \frac{G_a}{t_a} [u_p(x) - u_c(x)] \tag{2.20}$$

$G_a ; t_a$  : Module de cisaillement et épaisseur de la couche d'adhésif.

$u_c ; u_p$  : Le déplacement du béton et le déplacement de la plaque de FRP à l'interface.

En dérivant l'équation 2.20 par rapport à x on obtient :

$$\frac{d\tau_a(x)}{dx} = \frac{G_a}{t_a} [\varepsilon_p(x) - \varepsilon_c(x)] \tag{2.21}$$

La déformation de traction dans la fibre inférieure du béton est donnée par :

$$\varepsilon_c(x) = \frac{1}{E_c b h^2} [6M_c(x) - N_c(x)h] \tag{2.22}$$

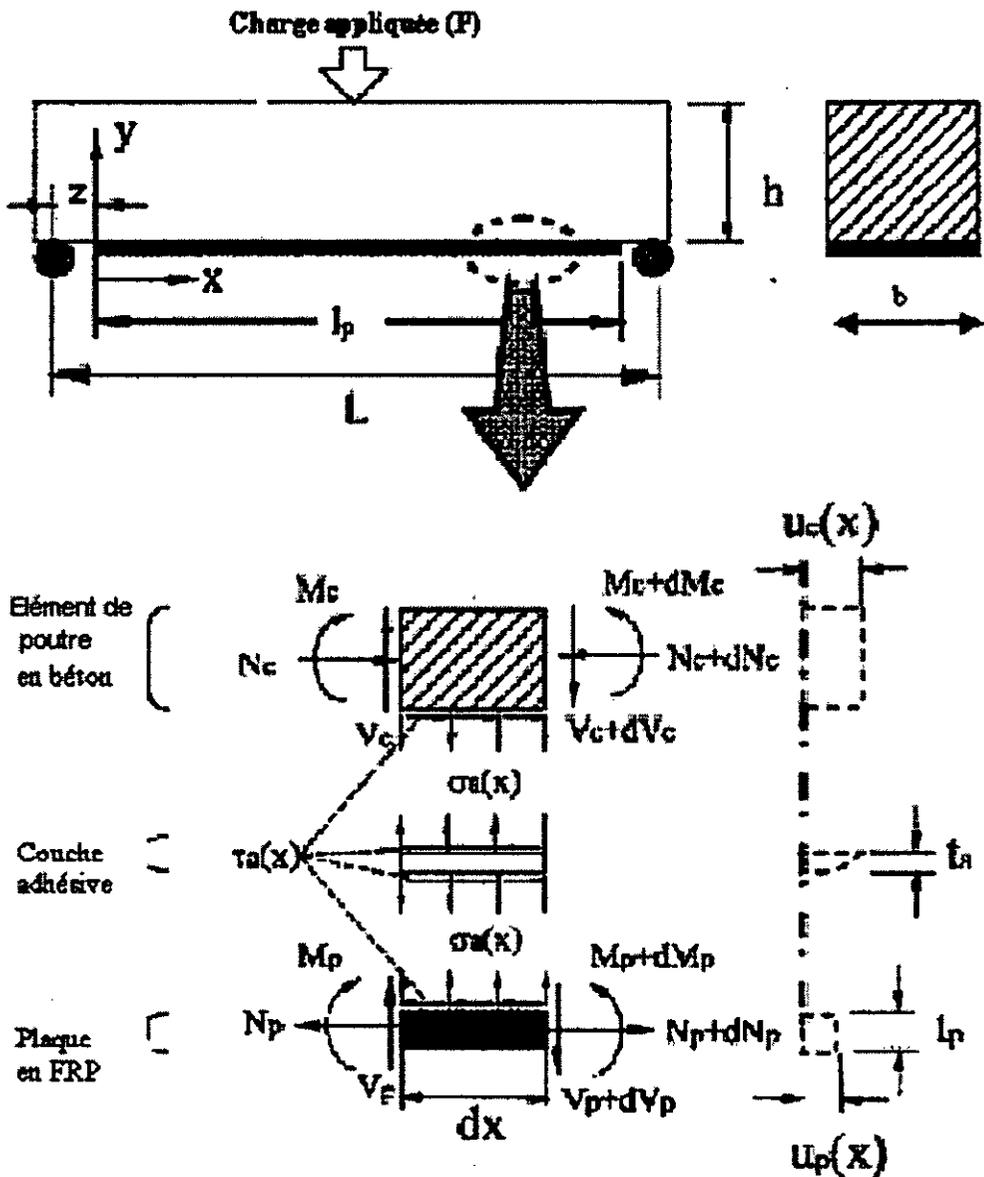
La déformation de traction dans la plaque est donnée par :

$$\varepsilon_p(x) = \frac{N_p(x)}{bt_p E_{eff}} \tag{2.23}$$

$E_c$  ;  $E_{eff}$  : le module d'élasticité du béton, et le module effectif de la plaque.

L'équation 2.23 n'est valide que dans le cas où les propriétés matérielles de la plaque sont isotropes et homogènes ; dans le cas contraire, la théorie des plaques laminées "laminare theory" est utilisée pour déterminer la déformation de la plaque, c.à.d :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A^x & B^x \\ C^x & D^x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ k \end{Bmatrix} \tag{2.24}$$



Mécanisme de contraintes pour le béton renforcé par un laminé en FRP.

Figure 2.7 : Le modèle théorique pour cette étude.[45]

Une grande simplification dans l'analyse des plaques apparaît lorsque l'on suppose que les matrices de couplage (membrane – flexion) **B** et **C** sont nulles, et aucun moment extérieur n'est appliqué à la plaque. Donc on peut simplifier l'équation 2.24 à la forme suivante :

$$\{\varepsilon^0\} = [A^x] \{N\}_p \quad 2.25$$

Avec :

$$\{\varepsilon^0\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{et :} \quad \{N\}_p = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix}_p$$

Dans cette étude seule la force axiale dans l'axe longitudinale de la poutre a été considérée. c.à.d :  $N_y = N_{xy} = 0$ . Donc la déformation de la plaque peut s'écrire comme suit :

$$\varepsilon_p(x) = A_{11}^x N_x \frac{1}{b} \quad 2.26$$

Le moment de flexion de la poutre et la force axiale dans le béton sont déterminés par :

$$dM_c(x) = R_b dx - \tau_a(x) b dx \frac{h}{2} \quad 2.27$$

$$dN_c(x) = \tau_a(x) b dx \quad 2.28$$

Où  $R_b$  : Réaction d'appuis =  $P / 2$ .  
 $\tau_a$  : contrainte de cisaillement dans l'adhésif.

La force de traction dans la plaque est déterminée par :

$$dN_p(x) = \tau_a(x) b dx \quad 2.13$$

En dérivant l'équation 2.21 par rapport à  $x$ , puis en substituant ces forces et ces déformations. On obtient l'équation suivante:

$$\frac{d^2 \tau_a(x)}{dx^2} = \frac{G_a b}{t_a} \left( \frac{A_{11}^x}{b} + \frac{4}{bhE_c} \right) \tau_a(x) - \frac{6R_b G_a}{E_c bh^2 t_a} \quad 2.30$$

La solution mathématique de cette équation est donnée par :

$$\tau_a(x) = C_1 \cosh(\beta x) + C_2 \sinh(\beta x) + \eta_0 \quad 2.31$$

Après application des conditions aux limites ( $N_p(0) = N_c(0) = 0$ ,  $\tau_a(lp/2) = 0$ ,  $M_c(0) = R_b z$ ), et simplification. La contrainte de cisaillement sera égale à :

$$\tau_a(x) = C_1 e^{-\beta x} + \eta_0 \quad 2.32$$

Où :

$$C_1 = \frac{6G_a R_b z}{E_c t_a b h^2 \beta} \tanh\left(\frac{\beta l_p}{2}\right) \quad \eta_0 = \frac{6R_b G_a}{E_c b h^2 t_a \beta^2} \quad \beta = \sqrt{\frac{G_a b}{t_a} \left( \frac{A_{11}^x}{b} + \frac{4}{bhE_c} \right)}$$

$l_p$  : Longueur de la plaque.

$z$  : Distance entre l'extrémité de la plaque et l'appui (longueur non collée).

La force axiale dans la plaque  $N_p$  sera calculée par l'intégration de l'équation 2.29, et l'application des conditions aux limites ( $N_p(0) = 0$ ) :

$$N_p(x) = C_1 \left( \frac{b}{\beta} (1 - e^{-\beta x}) + \frac{b}{z\beta} x \right) \quad 2.33$$

En général, la valeur maximale de la contrainte de cisaillement dans l'adhésif se produit à  $x = 0$ , alors que la valeur maximale de la force axiale ajoutée à la plaque sera pour  $x = l_p/2$ , donc :

$$\begin{aligned} \tau_{a,\max} &= C_1 + \eta_0 \\ N_{p,\max} &= \frac{C_1 b}{\beta} \left( 1 + \frac{l}{2z} \right) \end{aligned} \quad 2.34$$

### Contrainte de décollement de l'adhésif :

La contrainte de décollement dans la couche adhésif dans n'importe quel point  $x$  de la poutre est définie par :

$$\sigma_a^z(x) = E_a \frac{v_p^z(x) - v_c^z(x)}{t_a} \quad 2.35$$

$\sigma_a^z$ ,  $v^z$  : La contrainte de décollement et la déformation des matériaux dans la direction  $z$ .

Les indices  $a$ ,  $p$ , et  $c$  représentent l'adhésif, la plaque de FRP et le béton.

Appliquant les équations de compatibilité et les équations d'équilibres montrées dans la figure 2.8, ainsi que les conditions aux limites ( $M_c(0) = R_b z$ ), et après simplification, la contrainte de décollement dans l'adhésif est donnée par :

$$\begin{aligned} \sigma_a^z(x) = \frac{E_a}{t_a} \left\{ \frac{1}{2\lambda^3} \left[ \frac{(\omega t_p)^2}{2I_p} (C_1 + \eta_0) - 2H_2 \lambda^3 - \frac{\xi_{v1}}{E_c I_c} - \frac{\beta^3}{4\lambda^4 + \beta^4} (4\lambda^4 \xi_{v2} + \xi_{v3}) \right] e^{-\lambda x} \cos(\lambda x) \right. \\ \left. - \frac{1}{2\lambda^2} \left[ \frac{\beta^2}{4\lambda^4 + \beta^4} \left( \frac{4\lambda^4}{E_c I_c} \left( \frac{bh}{2\beta^3} C_1 \right) - \frac{C_1 \beta (bt_p)^2 A_{11}^{-1}}{2I_p} \right) \frac{1}{E_c I_c} \left( R_b z - \frac{bh C_1}{2\beta} \right) e^{-\lambda x} \sin(\lambda x) \right] \right. \\ \left. + K_1 \xi_{v1}(x) + K_2 \xi_{v2} e^{-\beta x} + K_3 \xi_{v3} e^{-\beta x} + \frac{1}{E_c I_c} \left\{ \frac{1}{6} R_b x^3 + \frac{bh}{2\beta^3} C_1 e^{-\beta x} - \frac{bh}{12} \eta_0 x^3 + \frac{1}{2} Dx^2 + Fx + G \right\} \right\} \quad 2.36 \end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned} \lambda^4 &= \frac{1}{4} \left\{ \frac{E_a b^2 t_p A_{11}^{-1}}{I_p t_a} \right\} \\ \xi_{v1}(x) &= \frac{1}{E_c I_c} \left( \frac{1}{6} R_b x^3 - \frac{bh}{12} \eta_0 x^3 + \frac{1}{2} Dx^2 + Fx + G \right) \end{aligned}$$

$$\xi_{v2} = -\frac{1}{E_c I_c} \left( \frac{bh}{2\beta^3} C_1 \right)$$

$$\xi_{v3} = -\frac{C_1 \beta (bt_p)^2 A_{11}^{-1}}{2I_p}$$

$$H_2 = \frac{1}{2\lambda^2} \left[ \frac{\beta^2}{4\lambda^4 + \beta^4} \left[ \frac{\lambda^4}{E_c I_c} \left( \frac{bh}{2\beta^3} C_1 \right) - \frac{C_1 \beta (bt_p)^2 A_{11}^{-1}}{2I_p} \right] - \frac{1}{E_c I_c} \left( R_b z - \frac{bh}{2\beta} C_1 \right) \right]$$

$$K_1 = 1 \quad K_2 = \frac{4\lambda^4}{4\lambda^4 + \beta^4} \quad K_3 = \frac{1}{4\lambda^4 + \beta^4}$$

$$D = R_b z - \frac{bh C_1}{2\beta} \quad G = \frac{R_b (3l^2 z - 4z^3)}{24} + \frac{zh}{2\beta^3} C_1$$

$$F = -\frac{1}{z} \left\{ \frac{1}{6} R_b z^3 - \frac{bh}{2\beta^3} C_1 e^{\beta z} - \frac{bh}{12} \eta_0 z^3 - \frac{1}{2} D z^2 - G \right\}$$

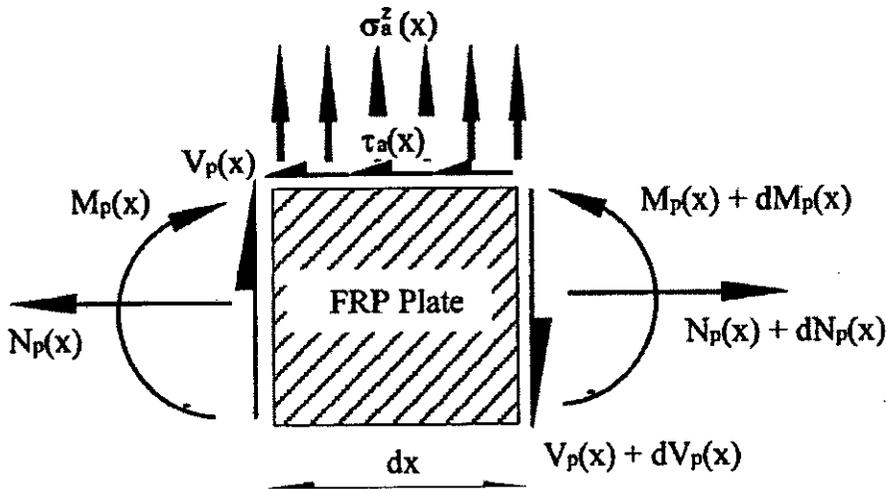


Figure 2.8 : Un petit élément de la plaque de FRP de longueur dx.[45]

Dans le cas des poutres initialement fissurées ce modèle n'est pas applicable, car, les lois de l'élasticité ne sont pas valides.

Une modélisation par la MEF a été utilisée pour comparer les résultats obtenus. Il en ressort que les résultats obtenus par ce modèle théorique sont bien comparables avec les résultats numériques. On conclut que les contraintes maximales de cisaillement et de décollement augmentent avec l'augmentation du module du FRP, le module de cisaillement de l'adhésif et l'épaisseur de la plaque. Elles augmentent aussi avec la diminution de l'épaisseur de l'adhésif.

La contrainte maximale de cisaillement est atteinte à l'extrémité de la plaque, puis elle diminue progressivement jusqu'à zéro au centre de la poutre. Ainsi la contrainte de décollement atteint sa valeur maximale à l'extrémité de la plaque, puis elle diminue brusquement par des valeurs négatives. Ensuite elle s'annule dans la région du centre de la poutre.

6°/ Sierra – Ruitz et al. [46] ont présenté des solutions analytiques pour la contrainte de cisaillement dans l'adhésif et la contrainte longitudinale dans la plaque composite pour trois cas de chargement différents. L'objectif de leur travail était de développer des solutions de forme fermée de la contrainte de cisaillement dans l'adhésif et de la contrainte de traction dans la plaque pour les différents cas de chargement. Les expressions ont été par la suite simplifiées. Le modèle est basé sur les suppositions suivantes :

- Le béton n'est pas fissuré.
- La rigidité du béton est largement supérieure à la rigidité de la plaque composite.
- La déformation de cisaillement le long de l'épaisseur de l'adhésif est constante.
- Les matériaux se comportent d'une manière élastique linéaire.
- La contrainte longitudinale se trouve uniquement dans la plaque composite.

En premier lieu l'équation d'équilibre d'un tronçon de la poutre est présentée indépendamment des conditions extérieures de chargement introduites dans les parties suivantes. Considérant l'équilibre d'un élément infinitésimal de la plaque composite collée sur le béton, montré dans la figure 2.9 :

$$\tau \cdot dx + df_p = 0$$

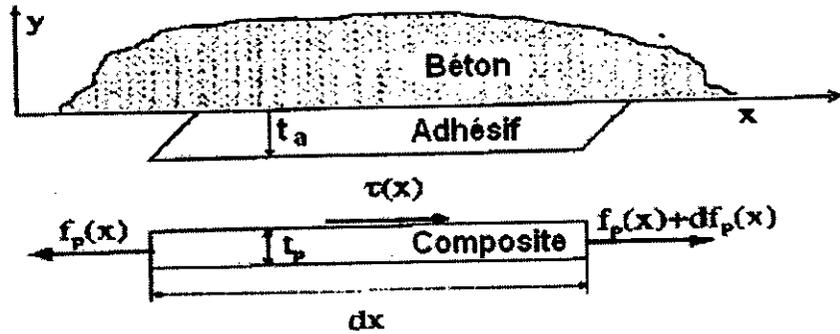


Figure 2.9 : Une partie infinitésimale du béton et du composite.[46]

Où

- $\tau$  : Contrainte de cisaillement dans l'adhésif,
- $f_p$  : Force de traction par unité de largeur dans la plaque.

La déformation de cisaillement dans l'adhésif est :  $\gamma = \frac{\Delta u}{t_a}$

$\Delta u$  représente le glissement au niveau de l'interface égal au déplacement relatif entre le béton et la plaque, compte tenu que les deux matériaux sont de déformabilités différentes.

Donc :  $\Delta u = u_c(x) - u_p(x)$ .

$u_c$  : Déplacement longitudinal le long du béton.

$u_p$  : Déplacement longitudinal le long du composite.

De plus :  $\gamma = \frac{\tau}{G_a}$

$u_p(x)$  peut donc s'écrire comme suit :

$$u_p(x) = u_c(x) - \Delta u = u_c(x) - t_a \gamma = u_c(x) - t_a \frac{\tau}{G_a}$$

En dérivant l'équation précédente par rapport à  $x$  on obtient :

$$\varepsilon_p(x) = \varepsilon_c(x) - \frac{t_a}{G_a} \frac{d\tau}{dx} = \varepsilon_c(x) + \frac{t_a}{G_a} \frac{d^2 f_p(x)}{dx^2} \quad 2.37$$

D'autre part :

$$\varepsilon_p(x) = \frac{\sigma_p(x)}{E_p} = \frac{f_p(x)}{t_p E_p} \quad 2.38$$

$f_p$  : Force de traction par unité de largeur du composite.

$E_p$  : Module d'élasticité du composite.

D'où :

$$\frac{d^2 f_p}{dx^2} - \frac{1}{l_0^2} f_p = -\frac{\varepsilon_c(x) G_a}{t_a} \quad 2.39$$

Avec :

$$l_0 = \sqrt{\frac{E_p t_a t_p}{G_a}}$$

Il faut noter que la solution de l'équation 2.39 dépend de  $\varepsilon_c(x)$  qui est la déformation longitudinale du béton sur lequel la plaque est collée, ainsi que des conditions aux limites. Donc il y a plusieurs solutions de l'équation 2.39 :

1- **Cisaillement pur** (Figure 2.10) : Puisque la rigidité du béton est supposée largement supérieure à celle de la plaque, on peut considérer que  $\varepsilon_c(x) = 0$ . L'équation 2.15 devient :

$$\frac{d^2 f_p}{dx^2} - \frac{1}{l_0^2} f_p = 0$$

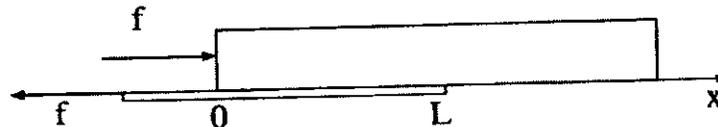


Figure 2.10: Cisaillement pur.

La solution de cette équation après application des conditions aux limites ( $f_p(0) = f$  et  $f_p(L) = 0$ ) est donnée par :

$$\tau(x) = \frac{f \cosh((L-x)/l_0)}{l_0 \sinh(L/l_0)} \quad 2.40$$

$$f_p(x) = f \frac{\sinh((L-x)/l_0)}{\sinh(L/l_0)}$$

$L$  : Longueur d'ancrage.

Une formule simplifiée proposée par les auteurs est donnée par :

$$\begin{aligned} \tau(x) &= \frac{f}{l_0} \exp\left(\frac{-x}{l_0}\right) \\ f_p(x) &= f \exp\left(\frac{-x}{l_0}\right) \end{aligned} \tag{2.41}$$

2- **Déformation longitudinale constante dans le béton** : Le cas de déformation de traction constante dans le béton apparaît lorsqu' on applique une contrainte constante sur le béton renforcé par une plaque composite (Figure 2.11), par exemple le retrait ou la dilatation du béton sous la variation de température.

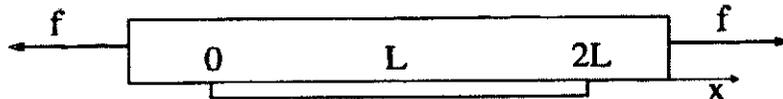


Figure 2.11 : Contraintes de traction constantes dans le béton.

La déformation constante correspondante du béton sera notée :  $\epsilon_C(x) = \epsilon_{C0}$ . La solution de l'équation 2.39 dans ce cas prend la forme suivante :

$$f_p(x) = A \sinh\left(\frac{x}{l_0}\right) + B \cosh\left(\frac{x}{l_0}\right) + C \tag{2.42}$$

La constante C est égale à  $(E_P t_P \epsilon_{C0})$  représentant la force par unité de largeur ( $f_{P0}$ ), qui doit être retransmise par la plaque lorsqu' elle est soumise à la même déformation que le béton  $\epsilon_{C0}$  ( $x = 0$ ).

Après simplification et application des conditions aux limites ( $f_p(0) = 0$  et  $\tau(L) = 0$ ) on aura :

$$\begin{aligned} \tau(x) &= -\frac{f_{P0}}{l_0} \frac{\sinh((L-x)/l_0)}{\cosh(L/l_0)} \\ f_p(x) &= f_{P0} \left( 1 - \frac{\cosh((L-x)/l_0)}{\cosh(L/l_0)} \right) \end{aligned} \tag{2.43}$$

Une formule simplifiée proposée par les auteurs est donnée par :

$$\begin{aligned} \tau(x) &= -\frac{f_{P0}}{l_0} \exp\left(\frac{-x}{l_0}\right) \\ f_p(x) &= f_{P0} \left( 1 - \exp\left(\frac{-x}{l_0}\right) \right) \end{aligned} \tag{2.44}$$

On remarque que l'expression de la contrainte de cisaillement est presque similaire à celle obtenue dans le cas de chargement précédent.

3 - **Flexion** : Dans le cas des poutres soumises à la flexion, la déformation de béton  $\epsilon_C(x)$  dépend du type de chargement (Figure 2.12). En général cette déformation s'écrit sous :

$$\varepsilon_c(x) = a_1 x^2 + a_2 x' + a_3 = -\frac{\delta M(x)}{E_p I} \quad 2.45$$

Où :  $M(x)$  : Moment de flexion

$I$  : Moment d'inertie de la section composite équivalente

$\delta$  : Distance entre l'axe neutre de la poutre et la face supérieure.

On distingue trois cas (Figure 2.12):

- Poutres sous moment fléchissant constant  $M_0$  (cas a) :  $a_1 = a_2 = 0$  et  $a_3 = -M_0(\delta/E_p I)$ .
- Poutres sous moment de trois points (cas b) :  $a_1 = a_3 = 0$  et  $a_2 = -F(\delta/2E_p I)$ .
- Poutres sous charge uniformément répartie (cas c) :  $a_1 = q(\delta/2E_p I)$ ,  
 $a_2 = q(L+z)(\delta/2E_p I)$ ,  $a_3 = 0$ .

L'équation différentielle 2.39 devient :

$$\frac{d^2 f_p}{dx^2} - \frac{1}{l_0^2} f_p = -\frac{G_a}{t_a} (a_1 x^2 + (2da_1 + a_2)x + a_1 d^2 + a_2 d + a_3) \quad 2.56$$

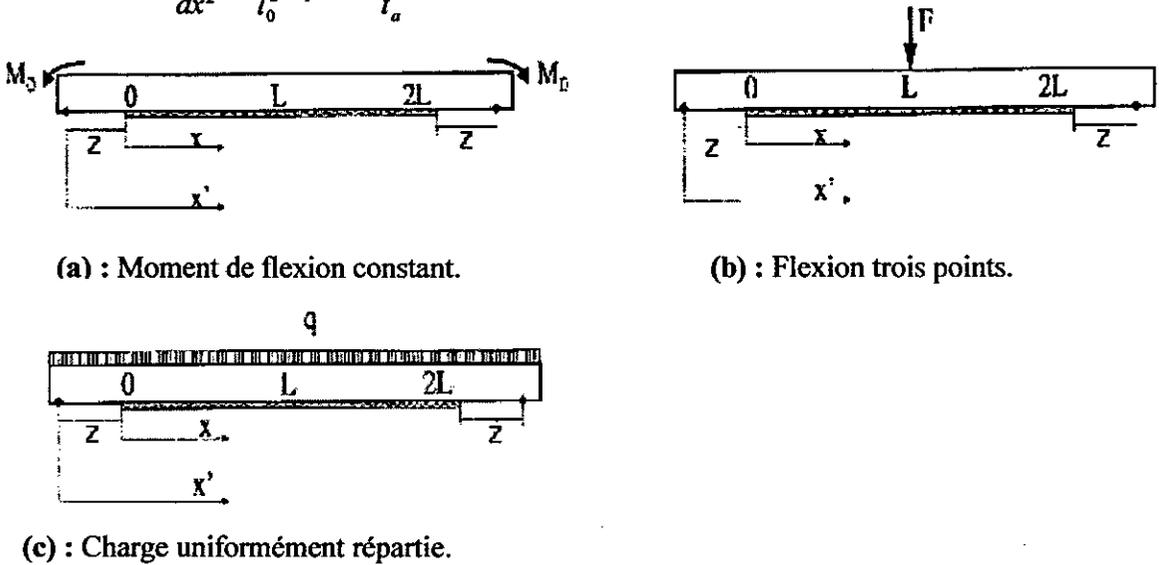


Figure 2.12: Poutre renforcée sous flexion. Trois cas principaux.

La solution générale est :

$$f_p(x) = A \sinh\left(\frac{x}{l_0}\right) + B \cosh\left(\frac{x}{l_0}\right) + b_1 x^2 + b_2 x + b_3 \quad 2.47$$

Avec :

$$b_1 = l_0^2 \frac{G_a}{t_a} a_1 \quad b_2 = l_0^2 \frac{G_a}{t_a} (2za_1 + a_2) \quad b_3 = l_0^2 \left( \frac{G_a}{t_a} (a_1 z^2 + a_2 z + a_3) + 2b_1 \right)$$

Après l'application des conditions aux limites ( $f_p(0) = 0$  et  $\tau(L) = 0$ ) on aura :

$$f_p(x) = \left( b_3 \tanh\left(\frac{L}{l_0}\right) - \frac{2b_1 l_0 L + b_2 l_0}{\cosh(L/l_0)} \right) \sinh\left(\frac{x}{l_0}\right) - b_3 \cosh\left(\frac{x}{l_0}\right) + b_1 x^2 + b_2 x + b_3 \quad 2.48$$

$$\tau(x) = -\frac{1}{l_0} \left( b_3 \tanh\left(\frac{L}{l_0}\right) - \frac{2b_1 l_0 L + b_2 l_0}{\cosh(L/l_0)} \right) \cosh\left(\frac{x}{l_0}\right) + \frac{b_3}{l_0} \sinh\left(\frac{x}{l_0}\right) - 2b_1 x - b_2 \quad 2.49$$

Une formule simplifiée proposée par l'auteur est donnée par :

$$\tau(x) = \underbrace{-\left(\frac{f_{p0}}{l_0} - 2b_1 l_0\right) \exp\left(\frac{-x}{l_0}\right)}_{\tau_1(x)} \underbrace{- 2b_1 x - b_2}_{\tau_2(x)} \quad 2.50$$

$$f_p(x) = -\left(f_{p0} + 2b_1 l_0^2\right) \exp\left(\frac{-x}{l_0}\right) + b_1 x^2 + b_2 x + b_3$$

Où  $f_{p0}$  est la force de traction par unité de largeur, qui doit apparaître dans la plaque sous une déformation longitudinale  $\epsilon_c$  imposée par le béton à  $x = 0$ .

La partie  $\tau_1(x)$  est presque similaire à la contrainte de cisaillement présentée dans les deux cas de chargement précédents. La seule différence est dans le terme additionnel  $(2 b_1 l_0)$  dû à la deuxième dérivée du moment fléchissant  $M$ . Donc,  $\tau_1(x)$  est similaire aux contraintes précédentes seulement dans le cas où le moment est linéaire (cas a et b où le terme  $2 b_1 l_0$  sera nul).  $\tau_2(x)$  est la contrainte de cisaillement usuelle qui apparaît dans les poutres fléchies. On peut montrer, dans le cadre de la théorie des poutres, que  $\tau_2(x)$  est la contrainte de cisaillement entre le béton et la plaque.

On conclut que les expressions simplifiées dans les trois cas de chargement sont équivalentes. Ce qui conduit à une analyse unifiée des contraintes de cisaillement dans le point correspondant au pic. Pratiquement cette contrainte diminue lorsque l'extrémité de la plaque se rapproche du point d'appuis. Les expressions finales simplifiées de  $\tau(x)$  et  $f_p(x)$  s'écrivent sous :

$$\tau(x) = \underbrace{-\frac{f_{p0}}{l_0} \exp\left(\frac{-x}{l_0}\right)}_{\tau_1(x)} \underbrace{- 2b_1 x - b_2}_{\tau_2(x)} \quad 2.51$$

$$\tau(x) = G_a \frac{|u_P(x) - u_C(x)|}{l_a}$$

7°/ Yang et Ye [47] ont présenté une formule fermée pour calculer les contraintes normales et tangentielles dans l'interface béton / plaque des poutres en BA pré-fissurées, sollicitées par une force axiale et des moments appliqués aux extrémités de la poutre. La poutre renforcée est représentée par quatre couches : la plaque, l'adhésif, le béton fissuré et le béton non fissuré. L'équilibre de chaque couche est considéré séparément, ainsi que les conditions aux limites. La contrainte normale et la contrainte de cisaillement ont été développées en séries de Fourier. Les coefficients de la série de Fourier ont été déterminés en appliquant le principe du minimum d'énergie. Les hypothèses admises sont :

- Le comportement du béton et de la plaque est élastique et homogène.
- Le joint d'interaction entre le béton et la plaque est parfait, c.à.d. pas de glissement ou décollement jusqu'à la rupture de joint.

### 2.4.2 Dimensionnement de la plaque :

1°/ Ashour [48] a présenté une méthode analytique simple pour estimer la résistance flexionnelle des poutres en BA renforcées par collage extérieur de plaques en FRP. La méthode est basée sur la compatibilité des déformations et l'équilibre des forces. Une limite supérieure et une limite inférieure de la taille de la plaque ont été imposées afin de maintenir un comportement ductile de la section du BA renforcée.

Les lois constitutives des matériaux sont :

#### Béton :

La courbe contrainte – déformation est montrée dans la figure 2.13a, la relation est donnée par :

$$\sigma_c = E_c \varepsilon_c - \frac{E_c}{2\varepsilon_0} \varepsilon_c^2 \quad \varepsilon_c < \varepsilon_0$$

$$\sigma_c = 0.67 f_{cu} \quad \varepsilon_0 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu}$$

- $E_c (= 5500 \sqrt{f_{cu}} \text{ N/mm}^2)$  : module tangent initial du béton,
- $\varepsilon_0 (= 0.00024 \sqrt{f_{cu}})$  : déformation à l'extrémité de la partie parabolique du diagramme contrainte - déformation,
- $\varepsilon_{cu} = 0.0035$  : déformation ultime de béton.

Pour le calcul du moment ultime, le béton se fissure à la traction, donc la résistance à la traction du béton est ignorée.

#### Acier de ferrailage :

Le comportement de l'acier en compression et en traction est supposé élastique parfaitement plastique comme le montre la figure 2.13b. La relation contrainte – déformation est donnée par :

$$\sigma_s = E_s \varepsilon_s \quad \varepsilon_s < \varepsilon_y$$

$$\sigma_s = f_y \quad \varepsilon_s \geq \varepsilon_y$$

#### Plaque FRP :

La relation contrainte – déformation d'une plaque de fibre unidirectionnelle, comme la figure 2.13c le montre, est linéaire jusqu'à la rupture, et est donnée par :

$$f_p = E_p \varepsilon_p \quad \varepsilon_p < \varepsilon_{pu}$$

$$f_p = 0 \quad \varepsilon_p \geq \varepsilon_{pu}$$

Il est supposé que la rupture prématurée, tel que le décollement ou la séparation de la plaque laminée FRP, est empêchée et les seuls modes de rupture étudiés sont ceux de la rupture par flexion.

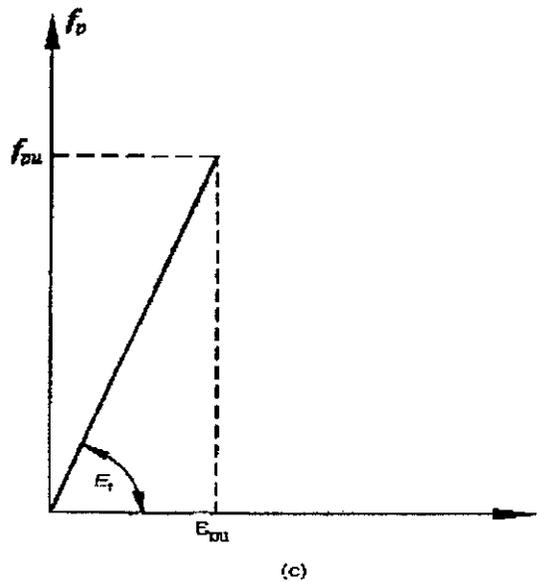
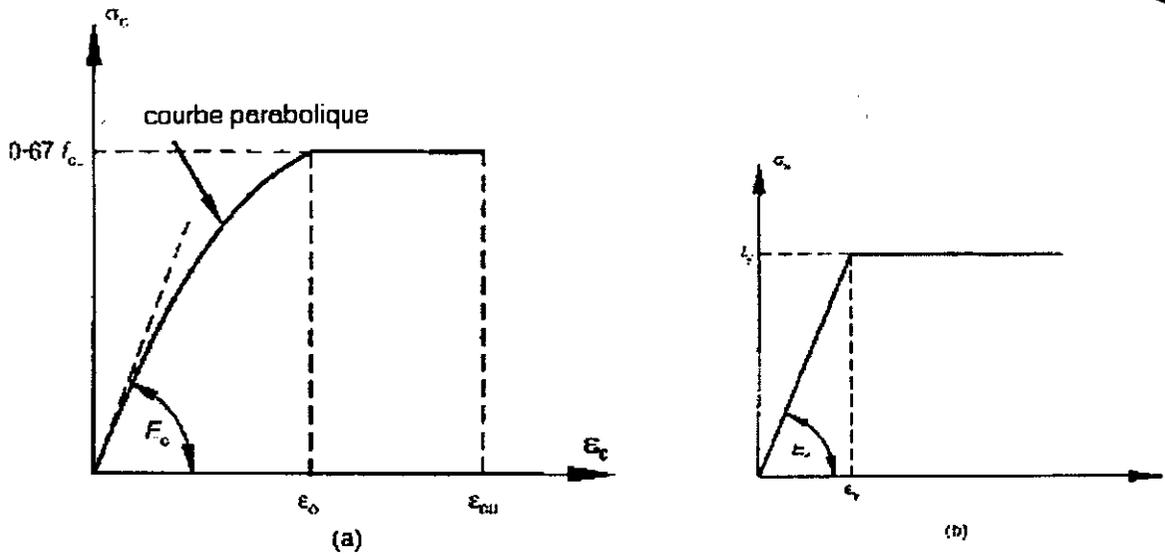


Figure 2.13 : Relation Contrainte - Déformation des matériaux [48] :  
 a) Béton en compression,  
 b) Acier en compression et en traction,  
 c) Composite FRP.

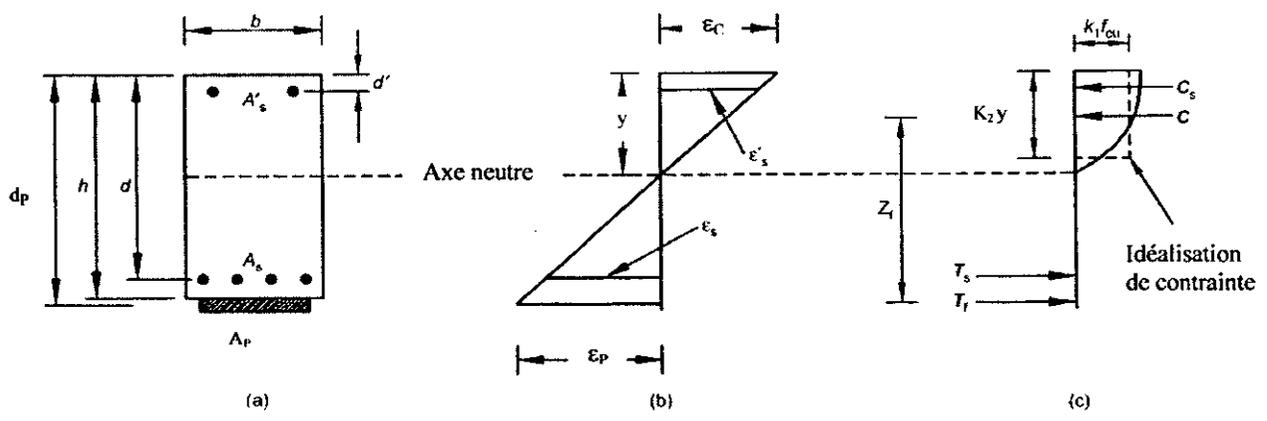


Figure 2.14 : Section en BA renforcée par FRP. [48]

En appliquant les conditions de compatibilité de déformation représentées sur les diagrammes montrés dans la Figure 2.14b on obtient :

$$\varepsilon_s = \frac{d-y}{y} \varepsilon_c \quad 2.52$$

$$\varepsilon'_s = \frac{y-d'}{y} \varepsilon_c \quad 2.53$$

$$\varepsilon_p = \frac{d_p - y}{y} \varepsilon_c \quad 2.54$$

A la rupture  $\varepsilon_c = \varepsilon_{CU} = 0.0035$ , et  $\varepsilon_p = \varepsilon_{PU}$ .

Après détermination des déformations dans le béton, acier d'armature et la plaque de FRP, les contraintes  $\sigma_c$  du béton,  $\sigma_s$  de l'acier tendu,  $\sigma'_s$  de l'acier comprimé,  $f_p$  de la plaque FRP, sont calculées en utilisant les lois constitutives précédentes. La distribution des contraintes de compression peut être idéalisée par la distribution rectangulaire montrée en pointillé dans la figure 2.14c, où le paramètre  $k_1$  représente le rapport entre la contrainte de compression moyenne et la résistance du béton  $f_{CU}$ , le paramètre  $k_2$  représente le rapport entre la hauteur du bloc rectangulaire de contrainte idéalisée et la hauteur de l'axe neutre. Les valeurs de  $k_1$  et  $k_2$  dépendent de  $\varepsilon_c$  et  $f_{CU}$ . Les forces internes sont (Figure 2.14c) :

- Force de compression dans le béton :  $C = k_1 k_2 f_{CU} b y$
- Force de compression dans les barres d'aciers :  $C_s = A'_s \sigma'_s$
- Force de traction dans les barres d'aciers :  $T_s = A_s \sigma_s$
- Force de traction dans la plaque FRP :  $T_p = A_p f_p$

Considérant l'équilibre des forces on obtient :

$$\begin{aligned} C + C_s &= T_s + T_p \\ k_1 k_2 f_{cu} b y + A'_s \sigma'_s &= A_s \sigma_s + A_p f_p \end{aligned} \quad 2.55$$

La solution de cette équation est obtenue par tâtonnement, en supposant une valeur initiale pour  $y$ , puis on calcule les déformations, ensuite les contraintes. La valeur de  $y$  sera ajustée jusqu'à ce que les équations d'équilibre soient satisfaites. Le moment ultime calculé par rapport au centre de gravité de la plaque est donné par :

$$M_u = k_1 k_2 f_{cu} b y \left( d_p - \frac{k_2 y}{2} \right) + A'_s \sigma'_s (d_p - d') - A_s \sigma_s (d_p - d) \quad 2.56$$

Si la section de la plaque est inférieure à une certaine limite, la rupture de la poutre survient par épuisement de la résistance à la traction de la plaque qui correspond à  $\varepsilon_p = \varepsilon_{PU}$ . Dans ce cas, la section minimale de la plaque de FRP  $A_{pl}$  est calculée à partir de l'équation 2.55, en remplaçant  $\sigma_s$  par  $f_y$ , et  $f_p$  par  $f_{PU}$ .

$$A_{pl} = \frac{k_1 k_2 f_{cu} b y_l + A'_s \sigma'_s - A_s f_y}{f_{pu}}$$

Où :  $y_l$  est calculée à partir de l'équation 2.54 en remplaçant  $\varepsilon_p$  par  $\varepsilon_{PU}$  et  $\varepsilon_c$  par 0.0035 simultanément.

La section  $A_{p1}$  présente la limite inférieure de la taille de la plaque de FRP afin d'éviter la rupture par traction de la plaque. Le moment ultime correspondant à cette section minimale est calculé par :

$$M_{u1} = k_1 k_2 f_{cu} b y \left( d_p - \frac{k_2 y_1}{2} \right) + A_s' \sigma_s' (d_p - d') - A_s f_y (d_p - d) \quad 2.57$$

La section maximale de la plaque de FRP  $A_{p1}$  (correspond à  $\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}$  et  $\varepsilon_s = \varepsilon_y$ ), qui représente la limite supérieure, est calculée comme suit :

$$A_{pu} = \frac{k_1 k_2 f_{cu} b y_u + A_s' \sigma_s' - A_s f_y}{f_p} \quad 2.58$$

Avec cette section la rupture sera par plastification des aciers ou par écrasement du béton. Le moment ultime correspondant à cette section est donné par :

$$M_{uu} = k_1 k_2 f_{cu} b y_u \left( d_p - \frac{k_2 y_u}{2} \right) + A_s' \sigma_s' (d_p - d') - A_s f_y (d_p - d) \quad 2.59$$

Pour assurer la ductilité du comportement flexionnel d'une section en BA renforcée par collage extérieur de plaque en FRP il faut que la section de cette plaque ne dépasse pas la section maximale  $A_{pU}$  et le moment  $M_{U1}$  est le moment admissible de cette section.

Il a été rapporté que le mode de rupture de toutes les poutres testées est obtenu par écrasement du béton ou par la rupture de la plaque de FRP. Donc il n'y a pas de rupture prématurée. Le rapport entre les valeurs analytiques et les valeurs expérimentales de la charge de rupture est égal 0.99. Soulignant ainsi la bonne corrélation entre les résultats expérimentaux et les résultats analytiques.

2°/ **Almusallam et Al-Salloum [49]** ont présenté un modèle analytique simple pour prédire la capacité du moment nominal des poutres en béton armé renforcées extérieurement par collage des plaques en FRP. Le moment de la résistance ultime de la poutre  $M_n$  correspondant aux modes de rupture classiques, est peut être évalué en utilisant les recommandations du code ACI 318, qui suppose, en plus des suppositions conventionnelles, qu'il existe un joint parfait entre le béton et la plaque laminée. Les composantes des forces internes agissantes sur une section rectangulaire d'une poutre en béton armé renforcée par une plaque en FRP sont montrées dans la figure 2.15. Considérant l'équilibre des forces internes, on obtient une équation quadratique en fonction de la profondeur de l'axe neutre  $c$ . La solution de cette équation conduit à la détermination de  $M_n$  :

$$M_n = A_s f_y \left( d - \frac{a}{2} \right) + A_p f_p \left( h - \frac{a}{2} \right) \quad 2.60$$

Où :  $a = \beta_1 c$  et  $f_p = E_p \varepsilon_p$

$\beta_1$  : Rapport entre le bloc rectangulaire de compression et la hauteur de l'axe neutre.

$f_y$  : Contrainte de plastification des barres d'acier.

$f_p$  : Contrainte de traction dans la plaque ( $f_p < \alpha f_{pU}$ ).

$\alpha$  : Facteur de réduction de contrainte pour les plaques FRP = 0.67.

$f_{pU}$  : Contrainte ultime de traction dans la plaque de FRP.

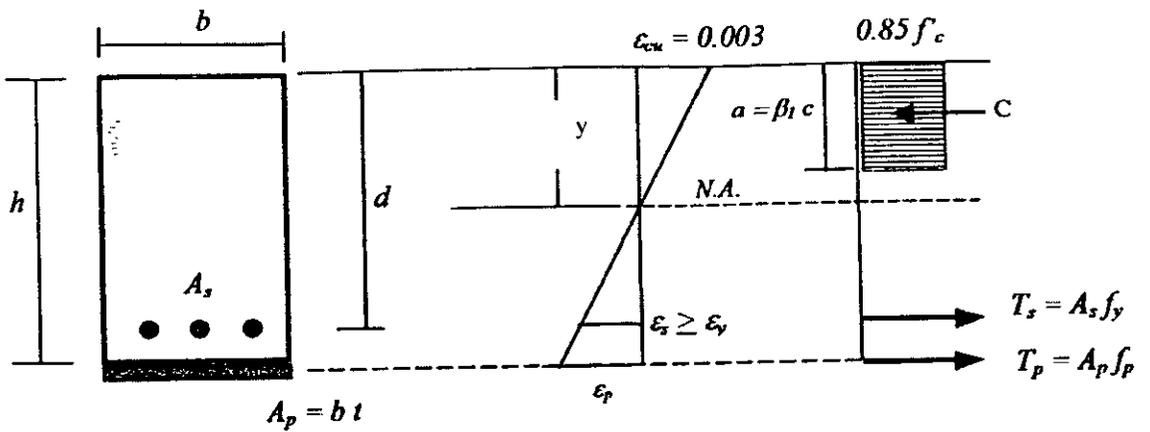


Figure 2.15 : Déformation et contrainte à travers la hauteur d'une poutre en BA renforcée par une plaque en FRP [49]

Calcul de l'épaisseur de la plaque :

La section d'équilibre de la plaque de renforcement est calculée en supposant sur une variation linéaire de déformation (Figure 2.15), On suppose que la plastification des aciers ( $\epsilon_s = \epsilon_y$ ) apparaîtra simultanément avec l'écrasement de béton  $\epsilon_{cu} = 0.003$ . La section d'équilibre de la plaque de FRP,  $A_{pb}$ , est obtenue en écrivant l'équation de l'équilibre de la section. Si on suppose que la largeur de la plaque est égale à la largeur de la poutre  $b$ , la section d'équilibre de la plaque sera donc :  $A_{pb} = t_{pb} b$  (où  $t_{pb}$  est l'épaisseur de la plaque correspond à l'équilibre).

La hauteur de l'axe neutre de la section est donnée par :

$$y = \frac{0.003d}{\epsilon_y + 0.003}$$

Et la contrainte dans la plaque  $f_p$  :

$$f_p = 0.003 E_p \frac{h-y}{y}$$

L'équilibre des forces conduit à l'évaluation de l'épaisseur d'équilibre de la plaque,  $t_{pb}$ , comme suit :

$$t_{pb} = \frac{0.85 f_c \cdot \beta_1 \cdot y - \rho_s \cdot d f_y}{f_p} \tag{2.61}$$

$\rho_s$  : Rapport des aciers de ferrailage =  $A_s / bd$ .

Pour assurer la rupture par plastification des aciers, un facteur de réduction de 0.75 est imposé par le code ACI. Donc l'épaisseur maximale admissible de la plaque  $t_{max}$ , est :

$$t_{max} = 0.75 t_{pb} = \frac{2.55 f_c \cdot \beta_1 \cdot y - 3 \rho_s \cdot d f_y}{4 f_p} \tag{2.62}$$

L'utilisation des épaisseurs supérieures à  $t_{max}$  conduit à la rupture par compression indésirable de la poutre. Le moment ultime maximum correspondant à  $t_{max}$  est donnée par :

$$M_n(\max) = A_s f_y \left( d - \frac{a}{2} \right) + (b t_{\max}) f_p \left( h - \frac{a}{2} \right) \quad 2.63$$

L'épaisseur minimale admissible est définie comme étant l'épaisseur de la plaque pour laquelle l'effondrement de la poutre est dû essentiellement à la rupture par traction de la plaque. Supposant que la résistance ultime de la plaque est  $f_{PU}$ , la pseudo-résistance de plastification  $f_{PY}$  est supposée être égale à  $0.67 f_{PU}$ . Par conséquent la rupture par traction de la plaque sera atteinte lorsque :  $\epsilon_P = \epsilon_{PY} = (f_{PY} / E_P)$  (Figure 2.16)

La hauteur de l'axe neutre d'après la figure 2.16 est donnée par :

$$y = \frac{0.003h}{0.003 + \epsilon_{PY}}$$

L'équilibre des forces conduit à l'évaluation de l'épaisseur minimale admissible de la plaque,  $t_{\min}$ , comme suit :

$$t_{\min} = \frac{2.55 f'_c \cdot \beta_1 \cdot y - 3 \rho_s \cdot d f_y}{2 f_{PU}} \quad 2.64$$

L'utilisation des épaisseurs inférieures à  $t_{\min}$  conduit à la rupture de la plaque par traction, qui est un type de rupture indésirable.

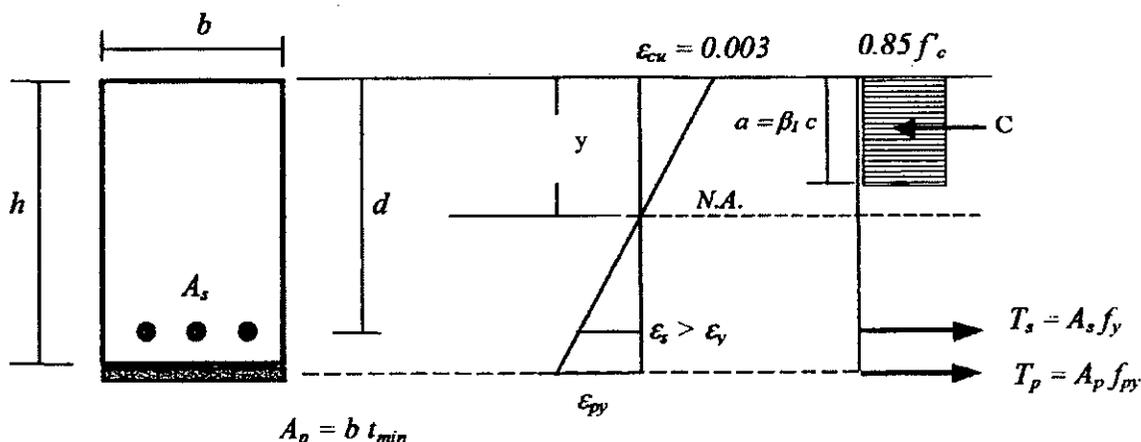


Figure 2.16 : Distribution de déformation et de contrainte à travers la hauteur d'une poutre rectangulaire en BA renforcée par l'épaisseur minimale de la plaque FRP.

En pratique on a besoin d'augmenter la capacité du moment à une valeur donnée  $M_n$ , le renforcement par collage des plaques de FRP est l'une des solutions utilisées pour arriver à la capacité nécessaire. Donc on doit déterminer l'épaisseur de la plaque correspondant à la valeur de  $M_n$ . Considérant la poutre de la figure 2.15, la section de la plaque peut être obtenue par l'équation 2.60, d'où :

$$A_p = \frac{M_n - A_s f_y \left( d - \frac{\beta_1 \cdot y}{2} \right)}{0.003 E_p \left( \frac{h-y}{y} \right) \left( h - \frac{\beta_1 \cdot y}{2} \right)} \quad 2.65$$

D'autre part, à partir de condition d'équilibre des forces, la section de la plaque  $A_p$  est donnée par :

$$A_p = \frac{0.85 f'_c b \beta_1 y - A_s f_y}{0.003 E_p \left( \frac{h-y}{y} \right)} \quad 2.66$$

En égalant ces deux dernières équations, on obtient la position de l'axe neutre :

$$y = c = \frac{h}{\beta_1} - \sqrt{\left( \frac{h}{\beta_1} \right)^2 - 2 \left[ \frac{M_n + A_s f_y (h-d)}{0.85 f'_c b \beta_1^2} \right]}$$

Donc la valeur de l'épaisseur de la plaque correspondant à un moment  $M_n$  est donnée par :

$$t_p = \frac{0.85 f'_c \beta_1 y^2 - \rho_s d f_y y}{0.003 E_p (h-y)} \quad 2.67$$

Il faut noter que la valeur de  $t_p$  doit être comprise entre  $t_{max}$  et  $t_{min}$ .

La capacité nominale calculée par ce modèle ainsi que l'épaisseur de la plaque sont en bon accord avec les résultats expérimentaux.

### 2.4.3 Rupture locale par décollement de la plaque :

1°/ Hassanen et Raof [50] ont développé un modèle semi-empirique capable d'estimer la contrainte critique de la plaque (Acier ou FRP) au-delà de laquelle un décollement de cette dernière aura lieu. Ce modèle est basé sur la détermination des espacements maximaux et minimaux des fissures stables. Avec la détermination des espacements des fissures, il est possible donc, d'estimer des valeurs raisonnables pour les contraintes critiques de traction dans le point A (voir figure 2.17).

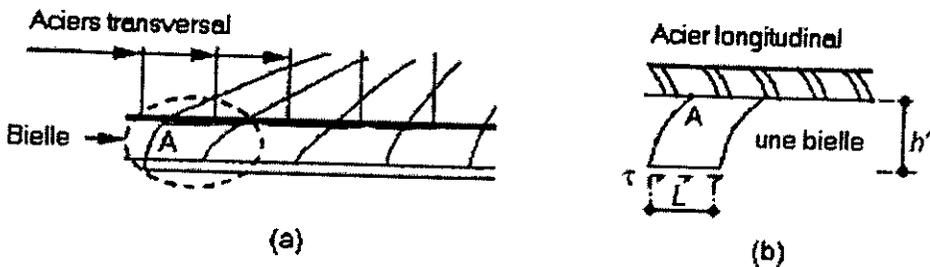


Figure 2.17 : Le mode de rupture admis dû au décollement prématuré de la plaque [50] :  
 a) Schéma de fissures stables de béton ;  
 b) Le comportement d'une bielle individuelle dans le béton d'enrobage.

L'espacement maximum des fissures est supposé égal à deux fois l'espacement minimum. Par la détermination des espacements il est possible d'estimer la valeur de la contrainte critique de traction de la plaque  $\sigma_A$  dans le point A (Figure 2.17b), on suppose qu'une bielle (région située entre deux fissures stables adjacentes) peut se traiter comme un cantilever sollicité par les contraintes de cisaillement  $\tau$  à l'interface Béton / Plaque. Le décollement prématuré de la plaque s'amorce lorsque  $\sigma_A$  atteint la résistance de traction du béton  $f_t$ .

En considérant une longueur effective de la plaque  $L_P$  sur laquelle la distribution des contraintes tangentielles  $\tau$  est uniforme, il n'est pas difficile de calculer une limite supérieure et une limite inférieure de la valeur de la contrainte de traction dans la plaque  $\sigma_{\min}$  et  $\sigma_{\max}$  (directement sous le point d'application de la charge) correspondant aux espacements maximum et minimum des fissures stables, avec :  $\sigma_{\max} = 2 \sigma_{\min}$ . L'expression de  $\sigma_{\min}$  est donnée par :

$$\sigma_{\min} = 0.154 \frac{L_P h_1 b^2 \sqrt{f_{cu}}}{h' b_p l_p (\Sigma O_{bars} + b_p)} \quad 2.68$$

Où :

- $t_p$  et  $b_p$  : Epaisseur et largeur de la plaque.
- $b$  : Largeur de la poutre.
- $h'$  : Hauteur d'enrobage.
- $f_{cu}$  : Résistance du béton.
- $\Sigma O_{bars}$  : La somme des périmètres des barres longitudinales
- $2h_1$  : Hauteur supposée pour la zone tendue du béton
- $L_P$  : Longueur effective collée de la plaque à l'intérieur de la travée (poutre appuyée sur quatre points)

Pour les poutres renforcées par une plaque d'acier,  $L_P$  est donnée par la limite inférieure  $L_{P,2}$ , où :

$$L_{P,2} = l_{\min}^P (21 - 0.25 l_{\min}^P) \quad l_{\min}^P \leq 72 \quad 2.69$$

Ou :  $L_{P,2} = 3 l_{\min}^P \quad l_{\min}^P > 72$

$l_{\min}^P$  présente la valeur estimée pour l'espacement minimum des fissures stables donné par :

$$l_{\min}^P = \frac{A_e f_t}{u (\Sigma O_{bars} + b_p)} \quad 2.70$$

- $u$  : Contrainte moyenne du joint *Acier / béton* =  $0.28 \sqrt{f_{cu}}$ .
- $f_t$  : Résistance à la traction déterminé par l'essai de fendage =  $0.36 \sqrt{f_{cu}}$ .
- $A_e$  : Surface effective de la zone tendue du béton.

Dans le cas où la plaque d'acier est remplacée par une plaque en FRP, les formules précédentes restent valables, sauf que l'équation de  $L_P$  sera remplacée par :

$$L_{P,2} = l_{\min}^P (24 - 0.5 l_{\min}^P) \quad l_{\min}^P \leq 40 \quad 2.71$$

Ou :  $L_{P,2} = 4 l_{\min}^P \quad l_{\min}^P > 40$

Après la détermination de  $\sigma_{\min}$  et  $\sigma_{\max}$ , il est donc simple de prédire, dans le point d'application de la charge, la limite inférieure et supérieure du moment de décollement de la plaque  $M_{peel,l}$  et  $M_{peel,u}$ , respectivement. Cela est fait par un procédé itératif traditionnel basé sur le calcul de la position de l'axe neutre (AN) d'une section soumise à la flexion. Il est à noter que la contribution du béton tendu dans la résistance n'a pas été négligée.

Pour éviter le calcul itératif, les auteurs ont proposé une méthode simplifiée pour calculer la charge de décollement avec une précision raisonnable. Celle-ci est basée sur l'estimation de la profondeur de l'axe neutre en supposant une distribution linéaire des contraintes à travers la profondeur de la poutre. La profondeur de l'axe neutre est donnée par (Figure 2.18) :

$$y = d \left( -(\alpha_{sc}(\rho'_s + \rho_s) + \rho_p \alpha_{pc}) + \sqrt{(\alpha_{sc}(\rho'_s + \rho_s) + \rho_p \alpha_{pc})^2 + 2 \left( \alpha_{sc} \left( \rho'_s \frac{d'}{d} + \rho_s \right) + \rho_p \alpha_{pc} \frac{D}{d} \right)} \right) \quad 2.72$$

Avec :  $\rho'_s = A'_s / bd$        $\rho_s = A_s / bd$        $\rho_p = A_p / bd$

$\alpha_{sc}$  : Rapport modulaire =  $E_s/E_c$

$\alpha_{pc}$  : Rapport modulaire =  $E_p/E_c$

$E_s, E_c, E_p$  : Module d'élasticité de l'acier, du béton et de la plaque FRP respectivement.

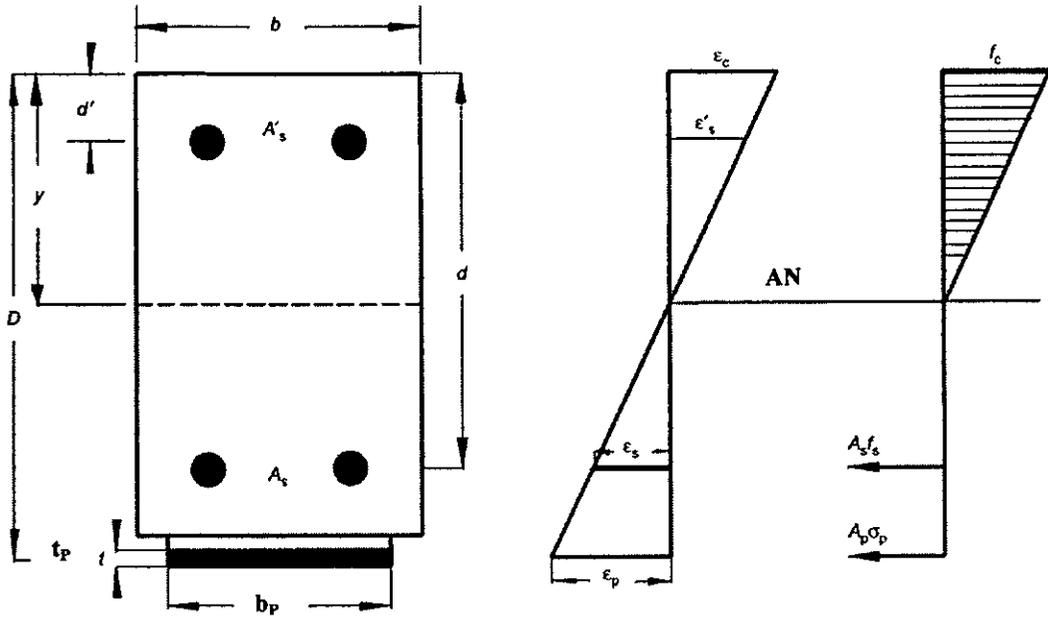


Figure 2.18 : Diagramme de contrainte et de déformation pour une section rectangulaire. [50]

Pour le calcul de la position de l'axe neutre, une bonne corrélation a été trouvée entre les résultats de la méthode simplifiée et les résultats d'une méthode itérative plus exacte, surtout pour le cas des plaques d'acier. Dans le cas des FRP, l'effet de module de Young ( $E_s > E_p \Rightarrow \epsilon_s < \epsilon_p$  pour le même niveau de contrainte) conduit à une légère déviation de la distribution linéaire des contraintes de compression, cette déviation conduit à la déviation des résultats de l'estimation de l'axe neutre.

Pour le calcul du moment de décollement deux méthodes simplifiées ont été proposées. La première suppose une distribution parabolique de la contrainte de compression, tandis que la deuxième suppose une distribution linéaire. Dans les deux méthodes la contribution du béton tendue est négligée. La déformation du béton comprimée est donnée par :

$$\epsilon_c = \epsilon_p \frac{y}{D - y} \leq 0.0035$$

$$\epsilon_p = \sigma_p / E_p$$

- Cas de distribution parabolique des contraintes : deux cas sont considérés suivant la déformation du béton  $\epsilon_c$  (Figure 2.19). Si  $\epsilon_c \leq \beta$ , ( $\beta = 2.44 \times 10^{-4} \sqrt{f_{cu}}$ ), la limite inférieure du moment de décollement de la plaque est donnée par :

$$M_{peel-p} = y^2 b \left( \frac{E_c \epsilon_c}{3} + \frac{0.67 f_{cu} - E_c \beta}{4 \beta^2} \epsilon_c^2 \right) + A'_s \sigma'_s (y - d') + A_s \sigma_s (d - y) + A_p \sigma_{S(\min)} (D - y) \quad 2.73$$

Avec :  $\sigma_{S(\min)} = \sigma_p$ .

$\sigma'_s$  : Contrainte axiale des barres comprimées.

$\sigma_s$  : Contrainte axiale des barres tendues.

Dans le cas où ,  $\epsilon_c \geq \beta$ , la limite inférieure du moment de décollement de la plaque est donnée par :

$$M_{peel-p} = 0.335 f_{cu} \cdot b (y^2 - y_1^2) + y^2 b \left( \frac{E_c \epsilon_c}{3} + \frac{0.67 f_{cu} - E_c \beta}{4} \right) + A'_s \sigma'_s (y - d') + A_s \sigma_s (d - y) + A_p \sigma_{S(\min)} (D - y) \quad 2.74$$

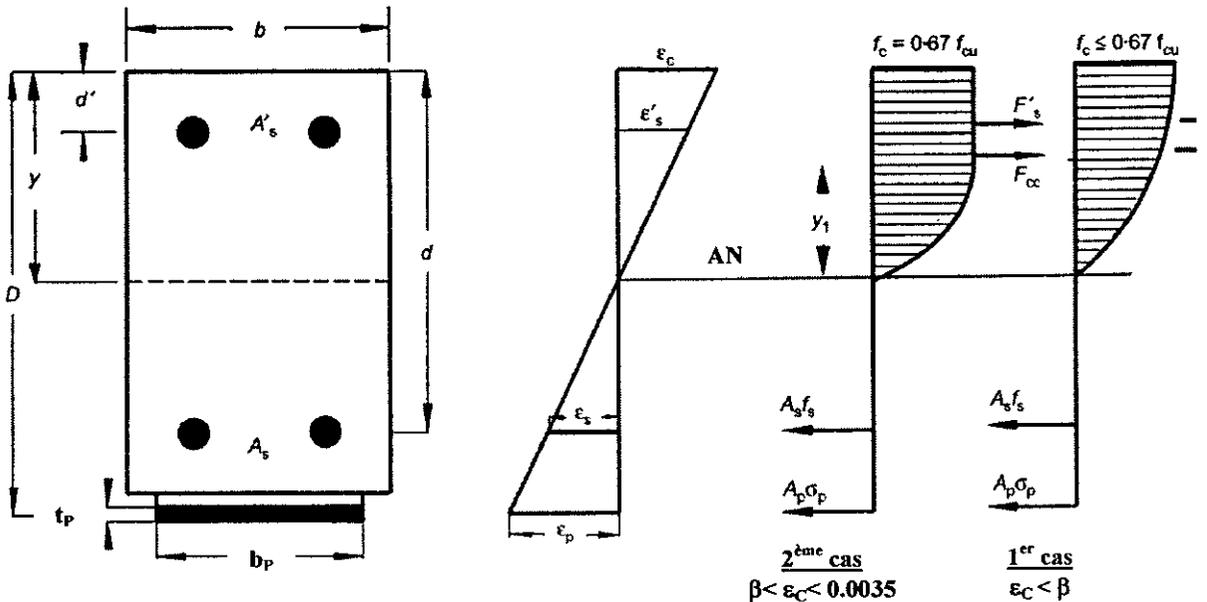


Figure 2.19 : Section, dimension, déformation et contrainte (Distribution parabolique des contraintes)[50]

La comparaison de cette méthode avec une méthode itérative montre une meilleure corrélation dans le calcul de la limite inférieure du moment de décollement de la plaque.

- Cas d'une distribution uniforme des contraintes :

La méthode précédente a été simplifiée comme suit : la courbe de contrainte de compression parabolique sera remplacée par un bloc de contrainte uniforme égale à la contrainte maximale correspondant à la déformation ultime de compression (Figure 2.20). L'axe neutre est le même que celui calculé précédemment. La limite inférieure du moment de décollement de la plaque est calculée par :

$$M_{peel-R} = A_s \sigma_s \left( d - \frac{a}{2} \right) + A_p \sigma_{s(\min)} \left( D - \frac{a}{2} \right) + A'_s \sigma'_s \left( \frac{a}{2} - d' \right) \quad 2.75$$

Le paramètre  $a$  est montré dans la figure 2.20. Par l'équilibre des forces,  $a$  est donné par :

$$a = \frac{A_s \sigma_s + A_p \sigma_{s(\min)} - A'_s \sigma'_s}{\sigma_c} \quad 2.76$$

où :

$$\sigma_c = \begin{cases} 0.67 f_{cu} & \beta < \varepsilon_c \leq 0.0035 \\ E_c \varepsilon_c + \frac{0.67 f_{cu} - E_c \beta}{\beta^2} \varepsilon_c^2 & \varepsilon_c \leq \beta \end{cases}$$

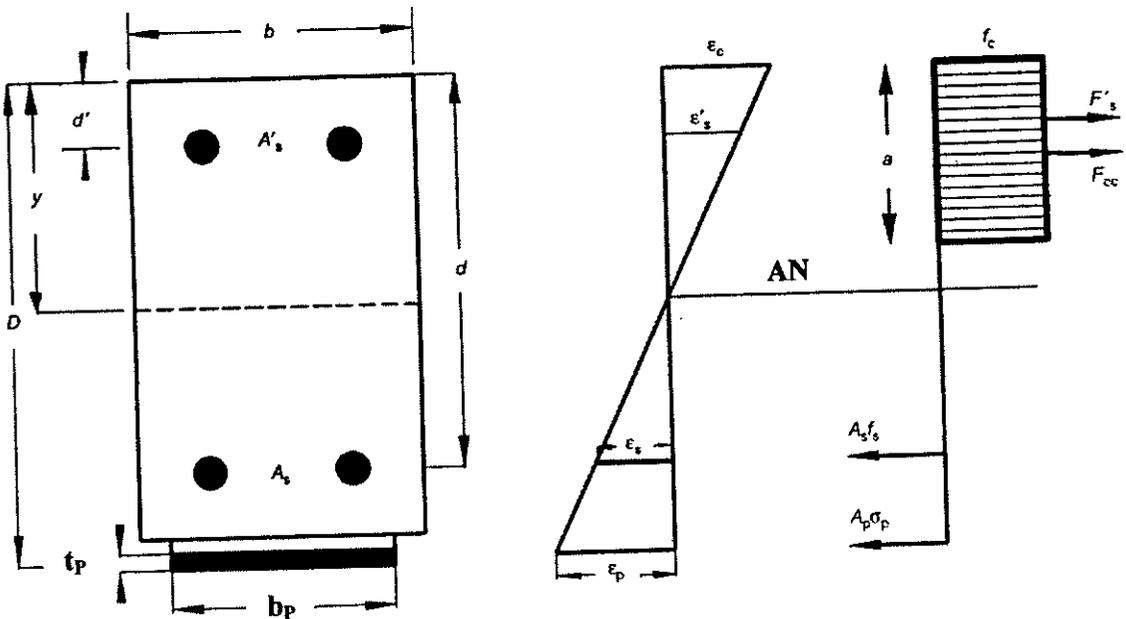
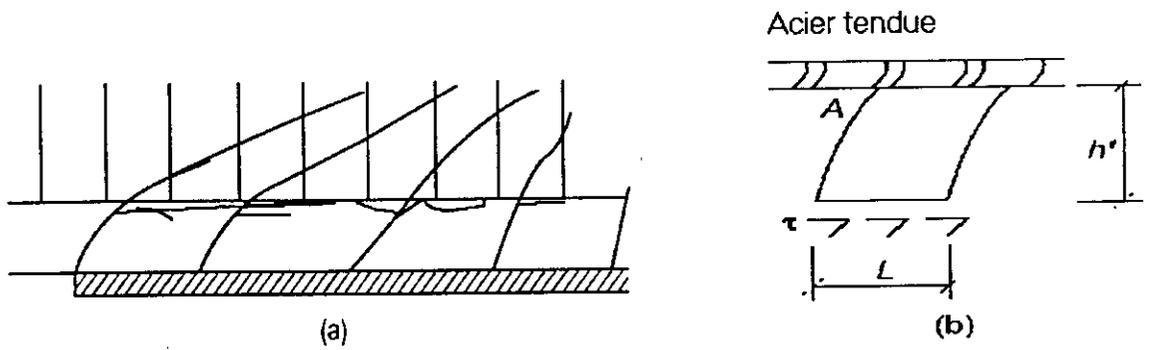


Figure 2.20 : Section, dimension, déformation et contrainte (Distribution uniforme des contraintes).[50]

La comparaison de cette méthode avec une méthode itérative montre une meilleure corrélation dans le calcul de la limite inférieure du moment de décollement de la plaque. Cette méthode est applicable aussi pour les poutres renforcées par les plaques de FRP. Ainsi, il y a une similarité remarquable entre cette méthode et la méthode de distribution parabolique des contraintes.

En conclusion les deux méthodes simplifiées sont applicables pour le calcul de la limite inférieure du moment de décollement des plaques en acier ou en FRP, mais la deuxième méthode est plus simple.

2°/ Raouf et Zhang [51] ont présenté un modèle théorique pour prédire la rupture prématurée par décollement de la plaque extérieure collée sur une poutre en BA. Le modèle est basé sur la formation de ce qu'on appelle "des bielles" à l'intérieur de la zone d'enrobage de la poutre (Figure 2.21).



**Figure 2.21** : Mode de rupture par décollement de la plaque [51] :  
 a) - Schémas des fissures flexionnelles stables.  
 b) - Comportement d'une bielle de béton entre deux fissures flexionnelles adjacentes.

L'espacement minimum et maximum des fissures stables  $l_{min}^P$  et  $l_{max}^P$  sont calculés respectivement par :

$$l_{min}^P = \frac{A_c f_t}{u(\Sigma O_{bars} + b_p)} \quad 2.77$$

$$l_{max}^P = 2l_{min}^P \quad 2.78$$

- Où -  $u$  : Résistance moyenne du joint Acier / Béton  
 -  $f_t$  : Résistance à la traction du béton  
 -  $b_p$  : Largeur de la plaque  
 -  $\Sigma O_{bars}$  : Périmètre de l'ensemble des barres de traction  
 -  $A_c$  : Section du béton comprimé.

Comme dans le cas de l'étude présentée dans [50], le calcul à la rupture par décollement s'articule sur l'évaluation de la contrainte  $\sigma$  dans le point A montré dans la figure 2.2. Pour un comportement élastique jusqu'à la rupture d'une bielle isolée de hauteur  $L$ , de largeur  $b$  et de longueur  $h'$ , on peut écrire :

$$\sigma_A = \frac{0.5(M_A L)}{I_A} \quad 2.79$$

Où :  $I_A = b L^3 / 12$

et :  $M_A = \tau L b_p h'$  2.80

D'où :  $\sigma_A = \frac{6\tau h' b_p}{L b}$  2.81

A l'instant de la rupture par décollement,  $\sigma_A = f_t$  donc on obtient :

$$\tau_{max} = \frac{f_t L b}{6h' b_p} \quad 2.82$$

Remplaçant  $L$  par  $l_{\min}^p$  et  $l_{\max}^p$ , la limitation supérieure et inférieure de la contrainte de cisaillement à l'interface sont respectivement :

$$\tau_{\max} = \frac{f_t l_{\min}^p b}{3h' b_p} \quad \tau_{\min} = \frac{f_t l_{\min}^p b}{6h' b_p} \quad 2.83$$

Dans la région entre le point d'application de la charge et l'extrémité de la plaque ( $L_p$ ), la contrainte de cisaillement  $\tau$  est équilibrée par la contrainte axiale dans la plaque d'acier  $\sigma_s$ . Donc, sous le point d'application de la charge cette contrainte devient :

$$\sigma_s = \frac{\tau L_p}{t_p} \quad 2.84$$

D'après les équations 2.77, 2.83 et 2.84 la limite inférieure de la contrainte axiale de traction dans la plaque d'acier est donnée par :

$$\sigma_{s(\min)} = \frac{A_e (f_t)^2 L_p b}{6h' t_p u (\Sigma O_{bars} + b_p) b_p} \quad 2.85$$

La limite supérieure de  $\sigma_s$  est donnée par (sachant que :  $\tau_{\max} = 2\tau_{\min}$ ):

$$\sigma_{s(\max)} = 2\sigma_{s(\min)} \quad 2.86$$

Supposant que  $u = 0.28\sqrt{f_{cu}}$ . Et  $f_t = 0.36\sqrt{f_{cu}}$ . L'équation 2.85 devient :

$$\sigma_{s(\min)} = 0.154 \frac{L_p h_1 b^2 \sqrt{f_{cu}}}{h' b_p t_p (\Sigma O_{bars} + b_p)} \quad 2.87$$

Nous voyons que le décollement de la plaque est caractérisé par l'espacement des fissures stables.

Une comparaison entre ce modèle théorique et les résultats expérimentaux montre qu'il y a une bonne corrélation entre ces résultats.

3°/ Malek, Saadatmanech, et Ehsani [52] ont développé un modèle analytique pour prédire les contraintes normales et les contraintes de cisaillement à l'interface *Béton / FRP*, d'une poutre renforcée sur la face tendue par une plaque en FRP. Les équations pour calculer les valeurs maximales de ces contraintes à l'extrémité de la plaque sont comme suit :

$$\tau_{\max} = t_p (b_3 \sqrt{A} + b_2) \quad 2.88$$

$$\sigma_{n,\max} = \frac{K_n}{2\beta^3} \left( \frac{V_p}{E_p I_p} - \frac{V_c + \beta M_0}{E_c I_c} \right) + \frac{q E_p I_p}{b_p E_c I_c}$$

Avec :

$$A = \frac{G_u}{t_a t_p E_p}$$

- $b_2$  et  $b_3$  sont des paramètres
- Les indices c, p, et a indiquent respectivement le béton, la plaque de FRP, et l'adhésif.
- $t$  : Epaisseur
- $E$  : Module d'élasticité
- $I$  : Moment d'inertie
- $V$  : Force de cisaillement
- $G$  : Module de cisaillement
- $M_0$  : Moment dans la poutre à l'extrémité de la plaque due à la charge appliquée.
- $q$  : Charge appliquée.
- $K_n$  : Rigidité normale par unité de surface de l'adhésif.
- $\beta$  : est un coefficient.

Ces équations peuvent être utilisées pour dimensionner les poutres renforcées contre la rupture locale. Les paramètres dans ces équations peuvent être simplement calculés en utilisant les caractéristiques mécaniques des matériaux. D'après les auteurs, ce modèle est en bon accord avec les résultats numériques et expérimentaux.

4<sup>o</sup>/ **Maalej, Goh, et Paramasivam [53]** ont présenté une étude paramétrique en se basant sur le modèle analytique proposé par **Roberts [54]**. Le modèle de **Roberts** est le premier modèle qui a donné des équations analytiques spécifiques permettant de décrire la rupture par décollement de la plaque d'acier. Cette étude conduit à la détermination de la contrainte de cisaillement et la contrainte normale dans l'interface *FRP / Béton*. Ce modèle a été proposé initialement pour l'analyse des poutres renforcées par des plaques d'acier. L'analyse a été présentée en trois étapes. Dans la première étape les contraintes sont déterminées en supposant une action composite totale entre le béton et la plaque d'acier collée. Dans la deuxième et la troisième étapes, une analyse est entreprise pour prendre en considération les conditions aux limites actuelles dans l'extrémité « arrêt » de la plaque d'acier. La solution complète est obtenue par superposition.

Les équations qui gouvernent la distribution de la contrainte de cisaillement et de la contrainte normale sont données par :

$$\tau(x) = \frac{1}{b_a} \left[ \frac{F(x)}{I} b_p t_p (h_p - y) + \alpha \left\{ -N_{10} \sinh \alpha x + \frac{N_{10} \cosh \alpha L_p - N_{1a}}{\sinh \alpha L_p} \cosh \alpha x \right\} \right] \quad 2.89$$

$$\sigma(x) = \frac{1}{b_a} \left[ 2e^{-\gamma x} \left\{ (V_{20} \gamma + m_{20} \gamma^2) \cos \gamma x - m_{20} \gamma^2 \sin \gamma x \right\} \right] \quad 2.90$$

Où :

$$\alpha = \left[ \frac{K_s}{E_p b_p t_p} \right]^{0.5}$$

$$\gamma = \left[ \frac{K_n}{4E_p I_p} \right]^{0.25}$$

$$N_{10} = \frac{M_0}{I} b_p t_p (h_p - y)$$

$$N_{1a} = \frac{M_L}{I} b_p t_p (h_p - y)$$

$$K_s = G_a \frac{b_a}{t_a}$$

$$K_n = E_a \frac{b_a}{t_a}$$

$$m_{20} = M_0 \left( \frac{E_p I_p}{E_p I_p + E_c I_c} \right)$$

$$V_{20} = F_0 \left( \frac{E_p I_p}{E_p I_p + E_c I_c} \right) + (\tau_{10} + \tau_{20}) b_a t_a / 2$$

$$\tau_{10} = \frac{1}{b_a} \left[ \frac{F_0}{I} b_p t_p (h_p - y) \right] \quad \tau_{20} = \frac{1}{b_a} \left[ \alpha \left\{ \frac{N_{10} \cosh \alpha L_p - N_{1L}}{\sinh \alpha L_p} \right\} \right]$$

Où :

$a$  : Longueur de la plaque d'acier.

$b, t, E, I$  : Largeur, épaisseur, module élastique et le moment d'inertie. Les indices  $c, p,$  et  $a$  indiquent le béton, la plaque et l'adhésif respectivement.

$h$  : Hauteur de la poutre

$F_0, F_L$  : Force de cisaillement à :  $x = 0, x = L_p$ .

$M_0, M_L$  : Moment de flexion global à :  $x = 0, x = L_p$ .

$V_{20}$  : Force de cisaillement dans la plaque de la deuxième étape de solution ( $x = 0$ ).

$m_{20}$  : Moment de flexion dans la plaque d'acier de la deuxième étape de solution ( $x = 0$ ).

$N_{10}, N_{1L}$  : Force axiale dans la plaque d'acier de la première étape de solution à  $x = 0, x = L_p$ .

$\tau_{10}, \tau_{20}$  : Contrainte de cisaillement dans l'adhésif de la première et la deuxième étape de solution à  $x = 0$ .

$G_a$  : Module de cisaillement de l'adhésif.

$y$  : Hauteur de l'axe neutre calculée en se basant sur l'analyse d'une section fissurée.

$h_p$  : Distance entre le fibre supérieur de la poutre et le centre de gravité de la plaque d'acier.

$I$  : Moment d'inertie par rapport à l'axe neutre de la section d'acier équivalente lorsque on utilise l'analyse d'une section fissurée.

$K_n, K_s$  : Rigidité normale et rigidité de cisaillement de l'adhésif par unité de longueur.

$x$  : Distance le long de la plaque mesurée à partir de son extrémité.

$\alpha, \gamma$  : sont des coefficients.

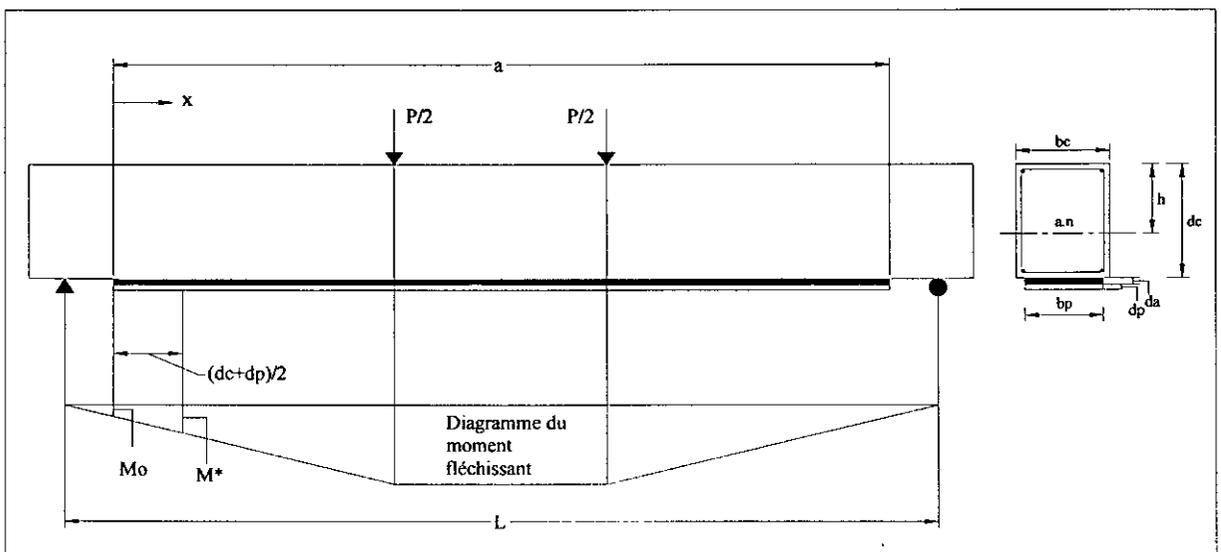


Figure 2.22 : les paramètres les plus significatifs utilisés dans le modèle de Robert.[54]

Une étude comparative entre les résultats donnés par ce modèle et les résultats expérimentaux, montre que les contraintes données par l'équation 2.89 sous estiment les contraintes réelles de 30%. Cela est dû à l'approximation faite dans la première étape. Une correction a été effectuée par Roberts, qui consiste à remplacer le moment  $M_0$  à l'extrémité de la plaque ( $x = 0$ ) par le moment  $M^*$  dans un point de la plaque situé à une distance  $x = (h = t_p) / 2$  (Fig 2.22 ). Cette correction donne des résultats satisfaisants.

La comparaison des résultats donnés par ce modèle avec les résultats expérimentaux indique une très bonne concordance dans l'estimation de la charge de rupture lorsque celle ci se produit soit par écrasement du béton comprimé ou par rupture de la plaque du FRP. Dans le cas où la rupture de la poutre survient suite au décollement de la plaque, le modèle sous estime la charge de rupture expérimentale.

5°/ Ahmed et al. [11] ont présenté un modèle analytique pour calculer la résistance au cisaillement dans l'extrémité de la plaque. L'importance de ce modèle est évidente pour le cas où la rupture de la poutre se produit par décollement de la plaque ou de l'enrobage du béton. Une étude paramétrique portant sur la section transversale de la plaque ainsi que sur sa longueur a été ensuite entreprise.

La contrainte de cisaillement à l'extrémité de la plaque est donnée par : (Figure 2.23)

$$\tau_{PES} = k^3 \sqrt[3]{3 \frac{d}{a_L} \left( 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \right)^3 \sqrt{100 \rho_s f_c}} \tag{2.91}$$

Avec :

- $k$  : Facteur égale à 0.18 pour la charge ultime, et 0.15 pour la charge de service.
- $d$  : Est la hauteur utile.
- $\rho_s$  : Est le rapport des aciers longitudinaux
- $f_c$  : Est la résistance de compression du béton
- $a_L$  : Longueur fictive donnée par :

$$a_L = \sqrt[4]{\frac{(1 - \sqrt{\rho_s})^2}{\rho_s} d z^3}$$

Le modèle suppose que la fissure de cisaillement se forme forcément à l'extrémité de la plaque.

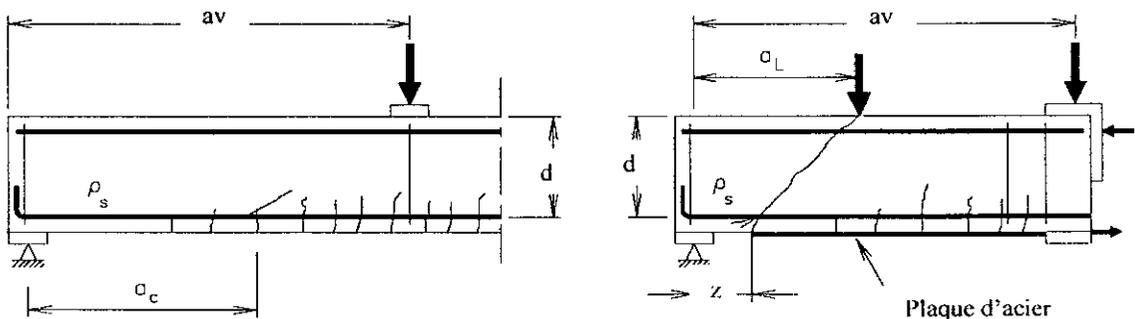


Figure 2.23: Localisation des fissures de cisaillement.[11]

Etant donné que la formule de  $\tau$  donnée précédemment est valable pour les plaques d'aciers. Les auteurs ont proposé une formule plus générale pour la contrainte de cisaillement  $\tau$  qui est valable aussi bien pour l'acier que pour les fibres de carbone (Figure 2.24), dans lesquelles la contrainte à l'extrémité de la plaque  $\tau_{FES}$  est donnée par :

$$\tau_{FES} = \tau_{PES} + \Delta\tau_{MOD} \quad 2.92$$

Avec :

$$\Delta\tau_{MOD} = \tau_{PES} bd \left( \frac{S_P}{I_P b_P} - \frac{S_F}{I_F b_a} \right) + m \left( \frac{\tau - \tau_{ref}}{bd} \right)$$

$$\tau = \left( 0.15776 \sqrt{f_C} + \frac{17.2366 \rho_s F_U d}{M_U} \right) + 0.9 \frac{A_s f_y}{sb}$$

L'expression modifiée prend en compte la différence de la contrainte de cisaillement lorsqu'on substitue la plaque d'acier par la plaque de CFRP. En plus, la contribution à la résistance au cisaillement  $\tau$  de la poutre non renforcée a été prise en compte ( $\tau$  étant calculée suivant le Code ACI).

- $m$  et  $\tau_{ref}$  : Ont pour valeurs respectives 6188.5 et 4.121 pour la charge ultime, et 7236.5 et 2.75 pour la charge de service.
- $S_F$  et  $I_F$  : Moment statique et le moment d'inertie de la section fissuré transformée en béton dans le cas de la plaque de CFRP.
- $S_P$  et  $I_P$  : Moment statique et le moment d'inertie de la section fissuré transformée au béton dans le cas de remplacement de la plaque de CFRP avec la plaque d'acier.
- $b_P$  et  $b_a$  : Largeur de la plaque et largeur de la couche époxyde respectivement.
- $A_s$  et  $f_y$  : Section et résistance des aciers transversaux.
- $s$  : Espacement des cadres transversaux.
- $F_U$  : La valeur minimale entre la capacité au cisaillement ou la capacité flexionnelle ( $P = 2F$ ).
- $M_U / F_U$  représente le " shear - span " ( $av$ ) de la poutre.
- $M_U$  : Moment maximum de la poutre =  $F_U \cdot av$

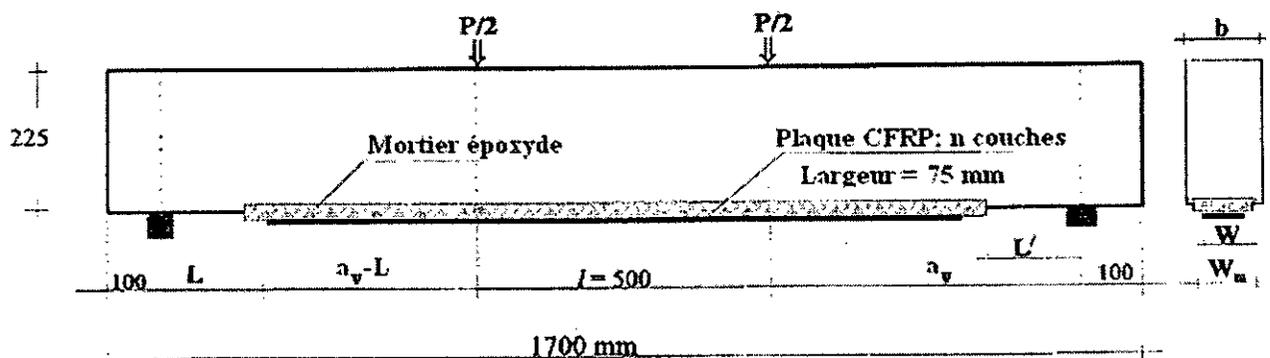


Figure 2.24 : Détail et arrangement des plaques laminées collées des poutres testées.[11]

La contrainte de cisaillement maximale générée dans l'interface entre le béton et la plaque n'est pas influencée uniquement par la résistance de traction de la surface (Pull – of strength), mais aussi par la variation de la longueur non renforcée ( $L$ ). La contrainte de cisaillement augmente lorsque cette longueur augmente. Par contre la résistance maximale de cisaillement est moins influencée par la section de la plaque. Une comparaison entre la capacité portante calculée par ce modèle modifié et celui trouvé expérimentalement montre que les résultats sont plus appréciables par rapport aux autres modèles existants.

#### 2.4.4 SYNTHÈSE :

Les modèles analytiques trouvés dans la littérature peuvent se classer en trois catégories :

##### *a- Calcul des contraintes à l'interface Béton/ Plaque :*

La détermination des contraintes au niveau des interfaces *Béton / Colle* et *Colle / Acier*, est très importante dans l'étude des poutres renforcées par des plaques collées, car le mode de rupture le plus dominant est le décollement ou le glissement prématuré de la plaque. C'est pour cela que la majorité des travaux analytiques sont orientés dans ce sens. Dans quelques travaux, la formulation commence par la considération d'un découpage de la poutre en éléments infinitésimaux, puis on applique les équations d'équilibre pour trouver la contrainte de cisaillement  $\tau$ , et les règles de la RDM pour calculer la contrainte normale  $\sigma$  à l'interface *Béton / Colle* [42, 27].

Dans d'autres travaux on utilise l'équilibre d'un élément fini et les équations de compatibilité, pour arriver à des équations différentielles en fonction des contraintes de cisaillement et des contraintes normales, ou bien en fonction de la contrainte de décollement et la force axiale selon les suppositions imposées initialement. La résolution de ces équations et l'application des conditions aux limites conduit à l'obtention des formules fermées, ou des formules dans lesquelles le calcul est effectué par des méthodes itératives. Dans ces travaux le comportement des matériaux est supposé élastique linéaire et isotrope. Et le joint est considéré comme parfait. [28, 43 - 46]

##### *b- Dimensionnement de la plaque : [48, 24]*

La théorie des poutres permet en considérant un joint parfait entre le béton et la plaque de FRP, de déterminer la déformation des armatures et de la plaque en fonction de la position de l'axe neutre. Les contraintes sont calculées en fonction des déformations en utilisant les lois constitutives des matériaux. La position de l'axe neutre est calculée par tâtonnement en utilisant l'équation de l'équilibre des forces. La section minimale de la plaque correspondante à  $\epsilon_{PU}$  est calculée en remplaçant la déformation de la plaque  $\epsilon_P$  par sa déformation ultime  $\epsilon_{PU}$ , et les contraintes dans les aciers et dans la plaque par leurs contraintes ultimes.

La section maximale de la plaque est calculée en remplaçant la déformation du béton comprimé  $\epsilon_C$  par la déformation ultime du béton  $\epsilon_{CU}$ , et la contrainte dans les aciers tendus par la contrainte ultime  $f_Y$ . Ce qui correspond au mode de rupture par traction de la plaque. Les modes de rupture prématurés ne sont pas pris en compte dans ces études. Pour assurer la ductilité de comportement il faut que la section de la plaque se situe entre la limite supérieure et la limite inférieure.

##### *c- Rupture locale par décollement de la plaque :*

Les modèles analytiques existants sont basés sur une formulation empirique ou une formulation mathématique. Notons à titre d'exemple l'étude de la référence [50, 51], où l'auteur a proposé, en se basant sur une étude expérimentale, une formule pour estimer l'espacement maximum et minimum

des fissures stables. Par la suite il a déterminé analytiquement l'expression de la contrainte de traction dans la plaque.

D'autres modèles sont basés sur une formulation mathématique. Cette formulation sert à déterminer la contrainte normale et la contrainte de cisaillement au niveau du joint [52, 53], ou à déterminer la contrainte de cisaillement à l'extrémité de la plaque. Comme le modèle proposé par Jansze [11].

## 2.5 Modélisation par éléments finis :

La méthode des éléments finis a été décrite assez largement dans la littérature pour l'analyse des structures. Nous nous limiterons dans ce qui suit à présenter son utilisation dans l'analyse du comportement des poutres en béton armé réparées par collage extérieur des plaques.

1°/ **Buyle-Bodin et al. [10]** ont présenté des travaux portant sur la modélisation des poutres en BA renforcées par collage de plaques de CFRP. La modélisation effectuée était en contraintes planes, avec l'utilisation des triangles linéaires pour représenter le béton et des éléments bars à deux nœuds pour représenter la plaque et l'acier de ferrailage. Les interfaces *Acier-Béton* et *FRP-Béton* ont été représentées moyennant des éléments types Goodman à deux nœuds

Les lois constitutives utilisées pour analyser le comportement flexionnel des poutres sont données par :

- Un modèle élasto-plastique avec adoucissement est utilisé pour le béton. Le comportement en compression est basé sur le critère de rupture d'Ottosen avec un écrouissage isotrope (Figure 2.25) ce critère peut s'écrire comme suit :

$$F(I_1, J_2, \cos 3\theta, \overline{\varepsilon_p}) = a \frac{J_2}{\tau^2} + \lambda \frac{\sqrt{J_2}}{\tau} + b \frac{I_1}{\tau} - 1 = 0 \quad 2.93$$

$\tau(\varepsilon_p)$  : Contrainte uni-axiale équivalente qui dépend de la déformation plastique équivalente.

$I_1$  : Premier invariant de contrainte.

$J_2$  : Deuxième invariant de contrainte déviatorique.

$\cos 3\theta$  : Dépend de  $J_2$  et  $J_3$ .

$\lambda$  : Dépend de  $\cos 3\theta$ ,  $K_1$  et  $K_2$  (caractéristiques du béton).

$a$  et  $b$  : Paramètres empiriques.

Dans l'état élastique la matrice de comportement  $[C]$  est égale à la matrice d'élasticité  $[D]$ . Dans l'état plastique si on suppose une plasticité associée, la matrice  $[C]$  est exprimée par :

$$[C] = [D^{ep}] = [D] - \frac{[D] \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\}^T [D]}{A + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\}^T [D] \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\}} \quad 2.94$$

Où  $A$  est un paramètre d'écrouissage qui gouverne l'évolution de la surface d'écoulement dans l'espace des contraintes durant le chargement.

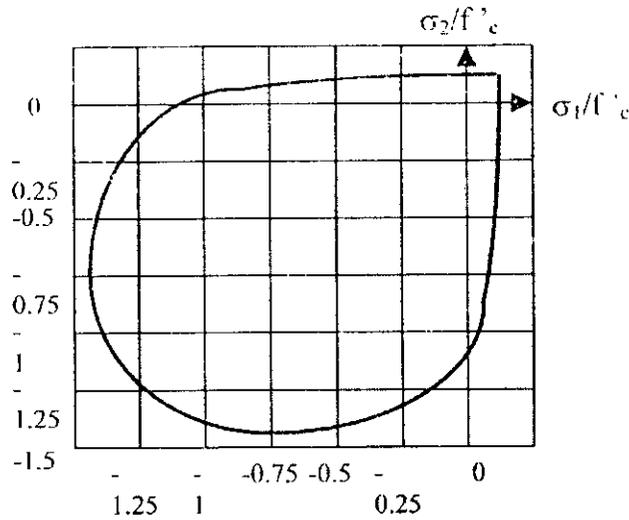


Figure 2.25: Critère d'Ottosen.[10]

Dans la traction, le béton est supposé un matériau fragile, et on considère l'approche de fissuration répartie « *smeared* ». Avec cette représentation le béton est traité comme un matériau orthotrope où les axes principaux sont parallèles et normaux à la direction de la fissure..La relation contrainte – déformation est :

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma_{x1} \\ \Delta\sigma_{y1} \\ \Delta\tau_{x1y1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_t & 0 & 0 \\ 0 & E_{ts} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\eta E_t}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_{x1} \\ \Delta\varepsilon_{y1} \\ \Delta\gamma_{x1y1} \end{Bmatrix} \tag{2.95}$$

$E_{ts}$  : Module tangentiel, après la fissuration.

$\eta$  : Coefficient qui estime la transmission des forces de cisaillement à travers la fissure ( $0 < \eta < 1$ ).

$\nu$  : Coefficient de poisson.

Pour les barres d'aciers on choisit une loi élasto-plastique parfaite.

Des tests de traction sur le CFRP ont montré que leur comportement est élastique linéaire jusqu'à la rupture. Donc une isotropie élastique est suffisante pour modéliser le CFRP, en supposant une analyse en contrainte plane.

Le comportement normal et le comportement tangentiel utilisés pour modéliser l'interface *Béton-Acier* sont montrés dans les figures (2.26) et (2.27) respectivement. Généralement, on observe une phase élastique dans le modèle mécanique. Durant cette phase, l'élément est caractérisé par deux rigidités indépendantes, rigidité normale  $K_N$  et rigidité tangentielle  $K_s$ . Le comportement plastique est présenté par une fonction de charge (Critère de Mohr-Coulomb). L'épaisseur des éléments d'interface est égale à zéro, les paramètres du modèle sont identifiés comme suit :  $K_N = 480 \text{ kN/mm}^3$ ,  $K_s = 200 \text{ kN/mm}^3$ ,  $E_f = 1000 \text{ kN/mm}^3$ ,  $\varepsilon = 0.01$ . Les valeurs des paramètres de Coulomb sont :  $C = 2 \text{ MPa}$ ,  $\phi = 10^\circ$ .

Pour modéliser les éléments d'interface *CFRP-Béton* (c.à.d la couche d'adhésif) on suppose un comportement parfaitement élastique. Dans ce cas, l'épaisseur de l'élément est égale à 1 mm, et les paramètres  $K_N$  et  $K_S$  sont nécessaires pour identifier le modèle ( $K_N = 12800 \text{ kN/mm}^3$ ,  $K_S = 2900 \text{ kN/mm}^3$ ).

Une comparaison avec les résultats expérimentaux indique que le modèle numérique est capable de prédire le comportement flexionnel des poutres renforcées en CFRP.

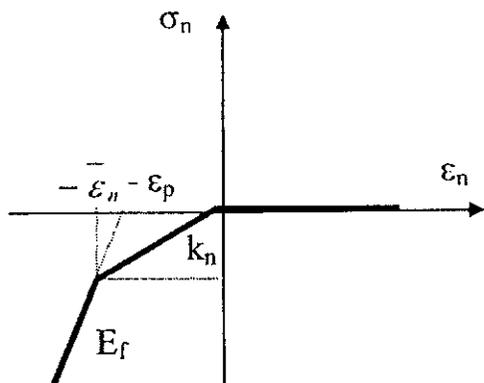


Figure 2.26 : Comportement normal de la liaison béton – acier.[10]

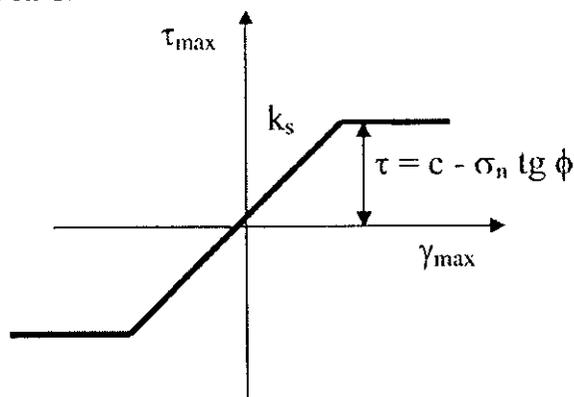


Figure 2.27 : Comportement tangentiel de la liaison béton – acier.[10]

2°/ **Arduini et Nanni [42]** ont utilisé l'analyse par éléments finis avec une approche de fissuration répartie (*smeared*) en vue de simuler numériquement les poutres en BA renforcées par des plaques en CFRP. Le béton a été modélisé par des éléments bidimensionnels carrés à 8 nœuds (50 x 50 mm). Par contre, pour les poutres renforcées par des tissus flexibles en FRP, les éléments du béton choisis sont des briques 3D à 20 nœuds (100 x 100 x 150 mm). Un joint parfait a été supposé entre le béton et le FRP.

Les lois constitutives des matériaux ont déjà été données dans la section (2.4) de ce chapitre.

Les courbes charge – flèche ; charge – déformation de la plaque de FRP et l'évolution des fissures montrent que les résultats numérique sont en bonne concordance avec les résultats expérimentaux. La solution numérique montre une rigidité légèrement inférieure à la rigidité expérimentale. Cela est dû au nombre limité des nœuds utilisés dans la simulation. Ainsi, quand des nombreuses fissures dans le béton sont ouvertes, la solution ne devient plus abordable, et la convergence ne peut pas être atteinte. Cela explique pourquoi la capacité portante indiquée par le modèle numérique est inférieure à celle du modèle expérimental.

3°/ **Ziraba et Baluch [55]** ont présenté un modèle d'éléments finis non-linéaire pour analyser le comportement au cisaillement et à la flexion des poutres en BA renforcées par collage extérieur des plaques en acier. Le modèle inclut un élément d'interface spécial afin de simuler la couche adhésive.

La réponse de l'élément d'interface sous les contraintes de traction et de cisaillement a été supposée linéaire jusqu'à la rupture de l'interface. Cette réponse est caractérisée par deux étapes : avant et après fissuration. Dans la première étape, la matrice des propriétés du matériau est prise égale :

$$[D]_{s-n} = \frac{1}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} E & \nu E & 0 \\ \nu E & E & 0 \\ 0 & 0 & G(1-\nu^2) \end{bmatrix} \tag{2.96}$$

Après la fissuration la contrainte et le module de cisaillement seront nuls. Lorsque l'épaisseur de l'interface est faible, l'élément d'interface ne peut se fissurer que le long de la ligne de la colle ou perpendiculairement à celle-ci. Si la fissuration est perpendiculaire à la ligne de la colle, la matrice  $[D]$  actualisée pour l'interface devient :

$$[D]_{s-n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0.25G \end{bmatrix} \quad 2.97$$

Sous la combinaison de la contrainte de cisaillement et la contrainte normale, l'interface peut se fissurer parallèlement à la ligne de la colle suivant le critère de rupture de Mohr-Coulomb donné par :

$$\tau = C - \sigma \tan\phi \quad 2.98$$

Si, à la rupture, la contrainte normale perpendiculaire l'axe longitudinal de la colle est une contrainte de traction, dans ce cas tous les éléments de la matrice  $[D]$  seront nuls, par contre si elle est de compression, seule la contrainte et le module de cisaillement seront nuls. Dans ce cas la matrice  $[D]$  sera :

$$[D]_{s-n} = \frac{1}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} E & \nu E & 0 \\ \nu E & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 2.99$$

Le coefficient de Poisson est supposé le même que celui du béton. Le module d'élasticité de l'interface est calculé par la relation :

$$E = 2G (1 + \nu)$$

Pour les autres matériaux, le comportement du béton à la compression a été supposé élasto-plastique. Le critère de rupture utilisé est celui de Mohr-Coulomb. C'est la règle d'écrouissage qui détermine la relation entre la contrainte et la déformation plastique effective. La relation utilisée a été extrapolée à partir d'une relation parabolique de contrainte – déformation uni-axiale donnée par :

$$\sigma = E_0 \varepsilon - 0.5 (E_0 / \varepsilon_c) \varepsilon^2 \quad 2.100$$

- $E_0$  : Module d'élasticité initiale
- $\varepsilon$  : Déformation totale
- $\varepsilon_c$  : Déformation correspondant au pic de déformation  $f'_c$ .

Pour le béton tendu l'approche de fissure répartie a été adoptée. La réponse du béton tendu a été supposée linéaire jusqu'à la rupture. Les fissures ont été supposées se former dans un plan perpendiculaire à la direction de la contrainte de traction principale maximale aussitôt que cette contrainte atteint la résistance à la traction du béton  $f_t$ .

$$f_t = 0.324 (f'_c)^{2/3}$$

L'effet de la rigidification de la zone tendue a été pris en considération. Le comportement après le pic est linéaire avec un module d'élasticité "fictif" donné par

$$E_i = \alpha f_t \left(1 - \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_m}\right) \frac{1}{\varepsilon_i} \quad \varepsilon_i \leq \varepsilon_i \leq \varepsilon_m \quad 2.101$$

$\varepsilon_i$  : Déformation de traction maximale obtenue dans le point considéré.

$\alpha$ ,  $\varepsilon_m$  : sont les paramètres de la rigidification de la zone tendue ( $0.01 < \alpha < 0.6$  et  $\varepsilon_m = 0.002$ )

Pour prendre en compte l'interaction des agrégats et l'effet de goujon entre la barre d'acier et le béton au niveau d'une fissure il faut attribuer une valeur appropriée au module de cisaillement du béton fissuré  $G^c$ . Pour un béton fissuré dans la direction 1 :

$$G_{12}^c = \begin{cases} 0.25G(1 - \varepsilon_1/0.005) & \varepsilon_1 \leq 0.005 \\ 0 & \varepsilon_1 \geq 0.005 \end{cases} \quad 2.101$$

$G$  : Module de cisaillement du béton non fissuré.

$\varepsilon_1$  : Déformation de traction dans la direction 1.

Pour un béton fissuré dans les deux directions une réduction de 50 % sera faite.

Pour la plaque d'acier et l'acier de ferrailage interne le comportement adopté suit une loi élasto-plastique avec écrouissage isotrope. Le critère de rupture est similaire au critère de Von Mises.

Le béton est représenté par un élément fini iso-paramétrique à neuf nœuds. A chaque itération pour chaque incrément de charge la matrice des propriétés matérielles est actualisée. Tous les aciers longitudinaux et transversaux sont modélisés par des éléments quadratiques discrets à trois nœuds. Ces éléments résistent uniquement aux forces axiales, et se déforment d'une manière élasto – plastique avec un écrouissage isotrope. Afin de modéliser l'interface *Béton / Colle / Acier* et l'interface *Béton / Acier interne*, des éléments d'interface à six nœuds ont été utilisés. La plaque est modélisée comme un matériau élasto – plastique à écrouissage isotrope, son comportement en compression est similaire à celui de traction. Le critère de rupture adopté est celui de Von-Mises. La discrétisation de la plaque est faite par des éléments Lagrangien iso-paramétrique à neuf nœuds. Il faut noter que cette discrétisation représente bien les contraintes d'arrachement dans l'interface *plaque / béton*.

Les résultats montrent une corrélation acceptable entre les charges ultimes basées sur le modèle de la MEF et celles obtenues expérimentalement. Il en est de même pour les courbes charge – flèche.

4°/ **Adhikary, et al [56]** ont développé une modélisation par la MEF pour analyser des poutres en BA renforcées par collage extérieur de plaques en acier sur la face tendue. Le modèle prend en considération le glissement entre le béton et la plaque d'acier, l'effet d'ancrage des extrémités (par boulonnage), le comportement non-linéaire des matériaux mis en jeu. Le modèle comporte trois éléments : un élément d'interface, un élément pour modéliser le boulon, et un élément pour modéliser l'interface du boulon.

Pour l'élément de l'interface Béton – Adhésif – Acier, la formulation par la MEF utilise un élément de l'interface adhésif à six nœuds. Seules deux composantes de contraintes sont considérées dans la formulation, la contrainte normale et la contrainte tangentielle, selon deux directions mutuellement perpendiculaires de l'interface. Le déplacement relatif entre les nœuds du béton et la plaque d'acier est pris en compte. L'épaisseur de l'élément de l'interface est supposée nulle. La relation constitutive de cet élément est donnée par :

$$\begin{Bmatrix} \tau \\ \sigma \end{Bmatrix} = [D] \{u_r, v_r\} \quad 2.103$$

$u_r$  et  $v_r$  : sont les déplacements relatifs de la plaque par rapport au béton.

La matrice constitutive  $[D]$ , en négligeant le couplage entre les déformation, est donnée par :

$$[D] = \begin{bmatrix} K_s & 0 \\ 0 & K_n \end{bmatrix} \quad 2.104$$

Où  $K_s$  et  $K_n$  sont respectivement la rigidité tangentielle et la rigidité normale de l'interface. Les valeurs de  $K_s$  et  $K_n$  déterminées pratiquement par les essais sont :  $K_s = 60$  MPa/mm;  $K_n = 144$  MPa/mm.

La matrice de rigidité de l'interface, calculée à partir du principe des travaux virtuels, est donnée par:

$$[K] = \int [B]^T [R]^T [D] [B] [R] bD \text{ et } J \, ds$$

$[R]$  : Matrice de rotation.

$[B]$  : Matrice de fonction de forme qui relie les déplacements de l'élément d'interface aux déplacements des nœuds, avec :

$$[B] = \begin{bmatrix} -N_1 & 0 & -N_2 & 0 & -N_3 & 0 & N_3 & 0 & N_2 & 0 & N_1 & 0 \\ 0 & -N_1 & 0 & -N_2 & 0 & -N_3 & 0 & N_3 & 0 & N_2 & 0 & N_1 \end{bmatrix} \quad 2.105$$

$N_i$  : sont les fonctions de forme parabolique.

Pour le béton armé, les éléments finis considérés sont des éléments à huit nœuds avec des fonctions de formes quadratiques. Tous les aciers internes sont englobés dans les éléments de BA. La plaque d'acier est aussi modélisée par des éléments à huit nœuds.

Les modèles constitutifs des différents matériaux sont :

1- *Béton armé* : Le modèle utilisé est montré dans la figure 2.28. Le concept de superposition a été adapté pour calculer la matrice de rigidité des éléments. L'élément est formulé par la combinaison de la loi constitutive du béton fissuré, représenté par le modèle de rigidification à la traction « *Tension Stiffness Model* », le modèle de compression et le modèle de transfert de cisaillement, avec celui de l'acier. Le modèle considère l'approche de fissuration répartie. Le comportement du joint entre l'acier et le béton a été modélisé en prenant en compte les effets de la rigidification de la zone tendue et la rigidification au cisaillement (Figure 2.29, Figure 2.30).

2- *Plaque d'acier* : La plaque d'acier collée sur la poutre de BA est modélisée par un matériau isotrope élastique – parfaitement plastique, gouverné par le critère de rupture de Von Mises.

3- *l'interface adhésif* : Le comportement de l'interface est supposé linéaire élastique jusqu'à la rupture. La fissuration et le décollement de l'interface sont modélisés sous forme linéaire par le critère de Mohr – Coulomb donné par :

$$\tau = C - \sigma \tan \theta$$

La valeur de  $C$  pour l'interface Béton – Adhésif – Acier est égale à 5 MPa, alors que l'angle de frottement interne  $\theta$  est égal à  $30^\circ$ .

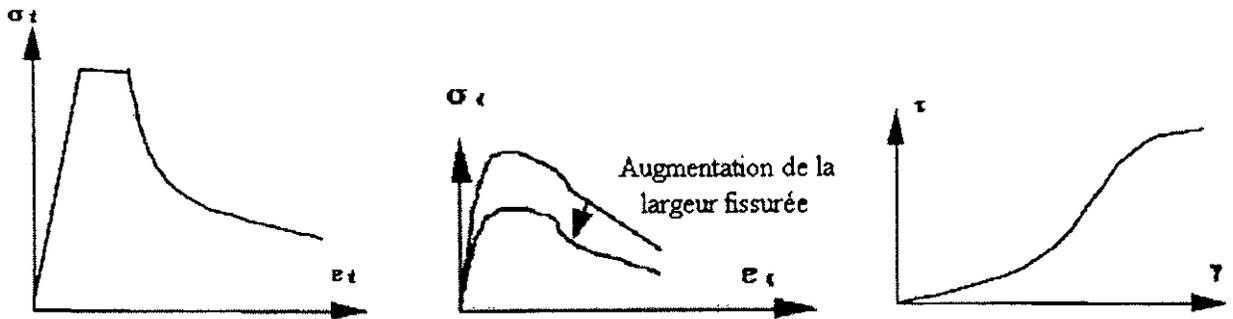


Figure 2.28 : Modèles constitutifs du béton.[56]

Une étude comparative montre que les courbes de charge – flèche et les courbes de déformation de la plaque obtenues par ce modèle sont en bon accord avec les résultats expérimentaux. Alors que les courbes obtenues par une analyse qui suppose un joint parfait entre le béton et la plaque d'acier donnent une mauvaise corrélation.

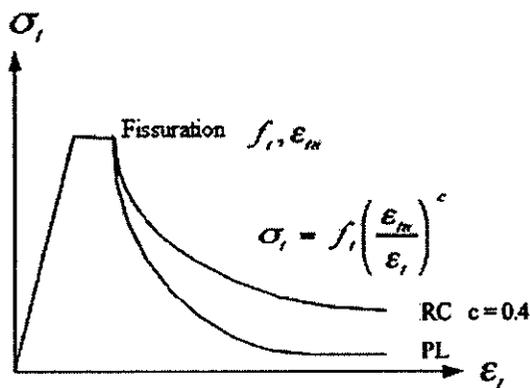


Figure 2.29 : Modèle de rigidification de la zone tendue d'un élément en BA. [56]

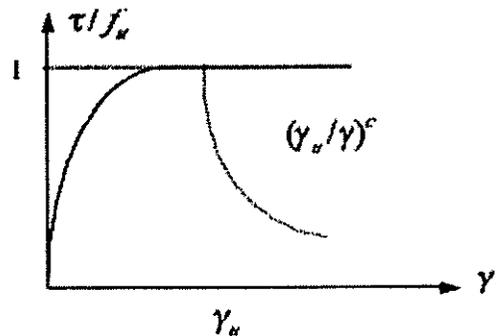


Figure 2.30 : Modèle de rigidification au cisaillement d'un élément en BA. [56]

5°/ Wu et Yin [32] ont présenté une étude du comportement à la fissuration du béton et de la rupture par décollement de l'interface des poutres en béton renforcées par collage des plaques en FRP. D'après les observations expérimentales, ce type de structures subit les modes de rupture suivants :

- 1) Fissuration dans la masse de béton
- 2) Décollement à l'interface d'adhésif
- 3) La rupture de la plaque.

Par conséquent, des modèles de rupture adéquats doivent être adoptés et qui se résument comme suit :

### 1) Fissuration du béton :

Le mode I de fissure c'est le type de rupture de béton le plus commun. Pour simuler la fissuration du béton ils ont utilisé l'approche de fissuration répartie tournante. La modélisation constitutive est décrite par la matrice  $D^{cr}$  qui relie l'incrément de contrainte et l'incrément de déformation dans les coordonnées locales du plan de fissure.

$$D^{cr} = \begin{bmatrix} D_n & 0 \\ 0 & \beta G \end{bmatrix} \quad 2.106$$

Où  $D_n$  représente le module d'adoucissement à la traction (tensile softening modulus) (voir figure 2.31).  $G$  est le module de cisaillement élastique et  $\beta$  est le facteur de conservation de cisaillement.

La courbe de contrainte – déformation choisie est une courbe d'adoucissement linéaire simplifiée. Donc,  $D_n$  peut simplement être déterminé par la résistance de traction de béton  $f_t$ , l'énergie de rupture du mode I,  $G_f$ , et la largeur de la bande fissurée  $h$ .

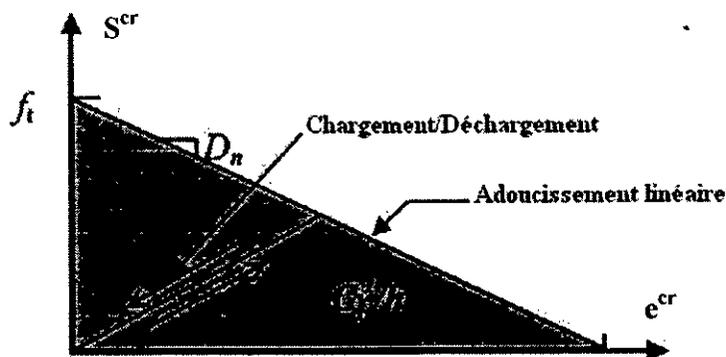


Figure 2.31 : Relation Contrainte-déformation d'adoucissement.[32]

### 2) fissures d'interface fictives dans la couche d'adhésif : (Fictitious interfacial crack within adhesive layer)

Le décollement le long de l'interface FRP-Béton est l'un des comportements de rupture les plus fréquents dans les structures de béton renforcées par les FRP. Cependant, deux types différents du décollement ont été pratiquement trouvés. Le premier type de décollement se produit dans la couche d'adhésif, qui peut être supposée comme le mode II de rupture puisque la contrainte de cisaillement dans une couche d'adhésif mince est plus dominante que la contrainte normale. L'autre type est représenté comme des fissures micro diagonales de béton au voisinage d'interface de joint.

### 3) Rupture de la plaque de FRP :

Les caractéristiques mécaniques des FRP ne permettent pas de transmettre la compression, et assurent un comportement élastique linéaire jusqu'au dépassement de la résistance à la traction. D'où, la relation contrainte-déformation des plaques FRP :

$$\sigma_{FRP} = \begin{cases} E_{FRP} \varepsilon_{FRP} & (0 < \varepsilon_{FRP} < f_{FRP} / E_{FRP}) \\ 0 & (\varepsilon_{FRP} < 0) \end{cases} \quad 2.107$$

Où :

- $f_{FRP}$  : Résistance à la traction
- $E_{FRP}$  : Module élastique
- $\sigma_{FRP}$  : Contrainte de traction
- $\varepsilon_{FRP}$  : Déformation de traction.

Afin d’analyser le mécanisme de décollement et le comportement de fissuration par la méthode des éléments finis, la poutre est discrétisée par trois types d’éléments finis : Eléments de contrainte plane à quatre (04) nœuds pour le béton, des éléments d’interface *linéaires* pour la couche d’adhésif, et des éléments barre “ *truss elements* ” pour la plaque de FRP.

Si une bonne adhésion d’interface est garantie, les situations de décollement d’interface, soit à travers la surface du béton ou dans la couche d’adhésif, peuvent être déterminés par les relations entre l’énergie de rupture du béton  $G_f^I$  et l’énergie de rupture de l’interface  $G_f^{II}$ , et entre la résistance d’adhésion  $f_b$  et la résistance à la traction du béton  $f_t$ .

L’équilibre de  $f_b$  et  $f_t$  est aussi un facteur important qui peut affecter le type de décollement et le comportement de fissuration. Avec l’augmentation de la résistance à la traction du béton  $f_t$ , le décollement de l’interface se déplace de l’interface de béton vers la couche adhésive. Un béton de résistance élevée permet la transmission d’une grande partie de contrainte de cisaillement de la plaque de FRP vers le béton avant l’apparition de décollement dans la couche d’adhésif.

Dans le cas où la résistance d’adhésion  $f_b$  est relativement grande, et si le béton est relativement fragile avec une énergie de rupture  $G_f^I$  faible, le décollement de l’interface se produit principalement à travers l’interface de béton adjacent à l’interface de joint. En augmentant l’énergie de rupture de béton, l’emplacement du décollement se déplace vers la couche adhésive. De plus, une bonne adhésion d’interface avec des grandes valeurs de  $G_f^{II}$  et  $G_f^I$  peut conduire à la rupture des plaques FRP, d’où, l’obtention d’une meilleure performance de renforcement du FRP. Par contre, une faible valeur de  $f_b$  et  $G_f^{II}$  conduit à un décollement prématuré dans la couche d’adhésif.

6°/ Ye [43] a effectué une étude numérique par la méthode des éléments finis pour étudier le transfert des contraintes de cisaillement dans les interfaces d’une poutre en béton renforcée par une plaque composite en FRP. Des éléments bidimensionnels en contraintes planes à quatre nœuds ont été utilisés. Les lois constitutives pour chaque type de matériau sont comme suit :

- La relation contrainte – déformation pour le béton en compression a été supposée non-linéaire suivant l’idéalisation de Hognestad montré dans la figure 2.32. Cette relation est donnée par :

$$\begin{aligned} \sigma_c &= f_c^* \left[ \frac{2\varepsilon_c}{\varepsilon_0} - \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} \right)^2 \right] & 0 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_0 \\ \sigma_c &= f_c^* \left[ 1 - \frac{0.15}{0.004 - \varepsilon_0} (\varepsilon_c - \varepsilon_0) \right] & \varepsilon_0 \leq \varepsilon_c \leq 0.003 \end{aligned} \quad 2.108$$

$$f_c^* = \zeta \cdot f_c$$

Où :  $f_c^*$  : Contrainte maximale de compression du béton.

$f_c'$  : Résistance de compression du béton.

$\epsilon_0$  est la déformation de béton correspondant à la contrainte maximale  $\epsilon_0 = 2f_c' / E_c$ , où  $E_c$  est le module d'élasticité du béton.

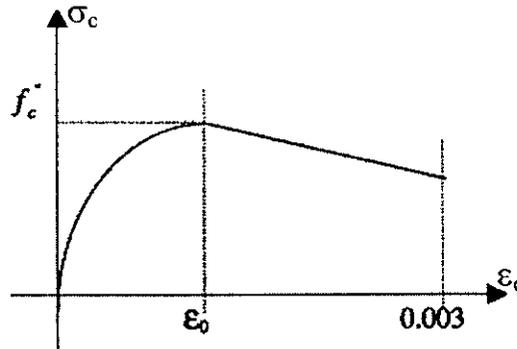


Figure 2.32 : Relation contrainte – déformation du béton.[43]

- La relation contrainte – déformation pour les barres d'acier a été supposée élastique parfaitement plastique, représenté par :

$$\sigma_s = E_s \epsilon_s \quad 0 \leq \epsilon_s \leq \epsilon_y$$

$$\sigma_s = E_s \epsilon_y \quad \epsilon_y \leq \epsilon_s$$

Où :

$\sigma_s$  : Contrainte des barres d'acier.

$\epsilon_s$  : Déformation des barres d'acier.

$E_s$  : Module d'élasticité d'acier.

$\epsilon_y$  : Déformation de plastification d'acier.

- La relation contrainte – déformation pour la plaque de FRP supposée linéaire élastique est donnée par :

$$\sigma_p = E_p \cdot \epsilon_p$$

Où :

$\sigma_p$  : Contrainte moyenne dans la plaque.

$\epsilon_p$  : Déformation moyenne dans la plaque.

$E_p$  : Module d'élasticité du FRP.

Pour modéliser le joint entre le béton et la plaque composite un calcul approximatif d'équilibre d'un élément d'interface a été utilisé (voir section 2.4 pour la même référence).



7°/ Ascione et Feo [57] ont présenté un modèle d'élément fini pour étudier la concentration des contraintes normales et tangentielles dans les extrémités de la plaque, et leur distribution le long de l'axe de la poutre.

Les contraintes de cisaillement de l'interface *Plaque /Adhésif* peuvent être calculées en considérant l'équilibre d'un élément  $dx$  de la plaque (Figure 2.33).

$$(N_p + dN_p) - N_p - \tau_{bp} dx = 0 \tag{2.109}$$

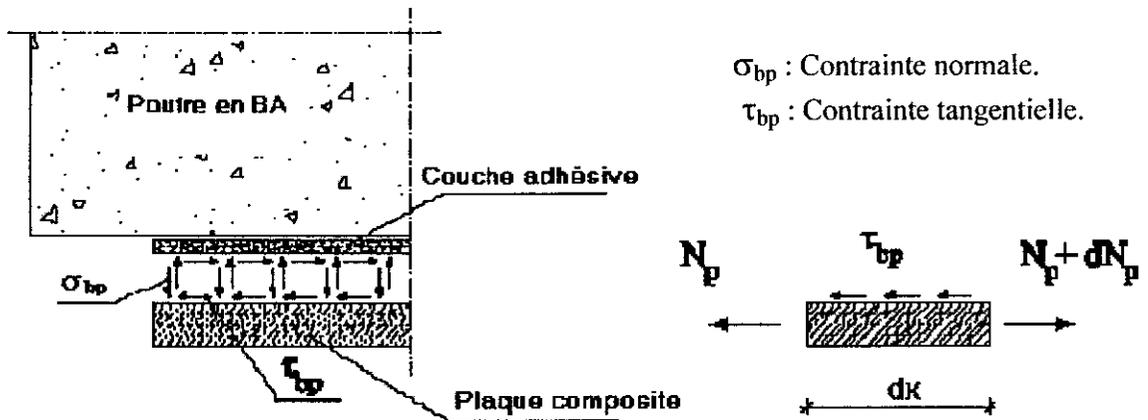


Figure 2.33 : Equilibre de la plaque composite de renforcement.[57]

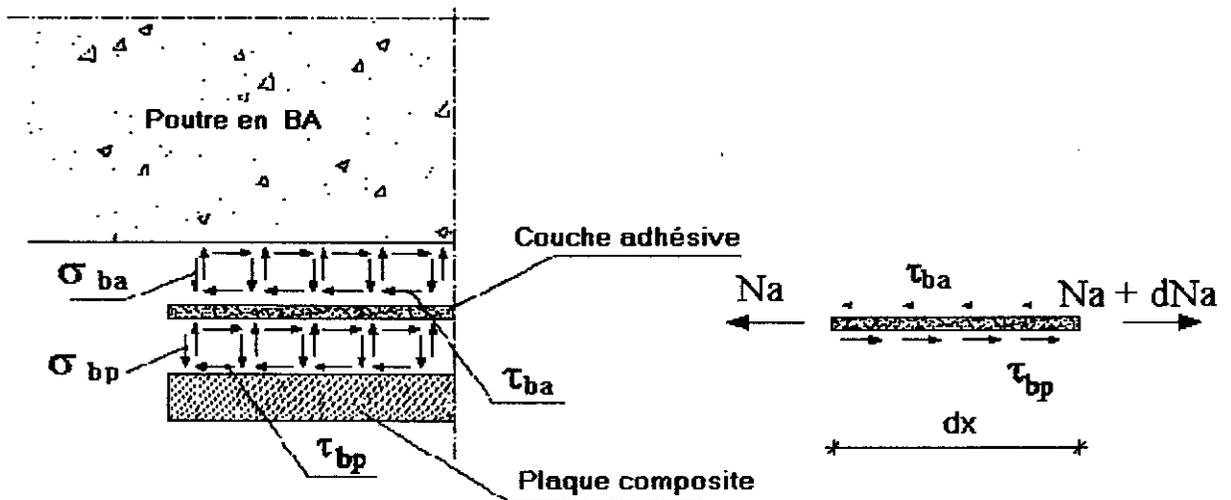


Figure 2.34 : Equilibre de la couche adhésive. [57]

D'autre part l'équilibre d'un élément d'adhésif (Figure 2.34) est exprimé par :

$$(N_a + dN_a) - N_a - \tau_{ba} dx + \tau_{bp} dx = 0 \tag{2.110}$$

L'équilibre d'un élément composite Plaque – Adhésif est exprimé par (Figure 2.35):

$$(M^* + dM^*) - M^* - (V^* + dV^*) dx + (\tau_{bp} dx)(t_a + t_p / 2) - (\sigma_{ba} dx)(dx / 2) = 0$$

Et :  $(V^* + dV^*) - V^* + \sigma_{ba} dx = 0$  2.111

$t_a$  : Epaisseur de la colle.

$t_p$  : Epaisseur de la plaque.

$\sigma_{ba}$  : Contrainte normale d'interface Béton / Adhésif.

Après simplification, la contrainte normale inter-faciale est donnée par :

$$\sigma_{ba} = -\frac{dV^*}{dx} = -(t_a + t_p / 2) \frac{d\tau_{bp}}{dx}$$
 2.112

Les propriétés des matériaux du béton et de la colle sont supposées linéaires élastiques orthotropes, avec la possibilité de différents comportements dans la traction et dans la compression "bimodular behavior". Le joint est modélisé par une distribution continue de ressorts élastiques bilinéaires. Les réactions des ressorts donnent des valeurs approximatives des contraintes interfaciales.

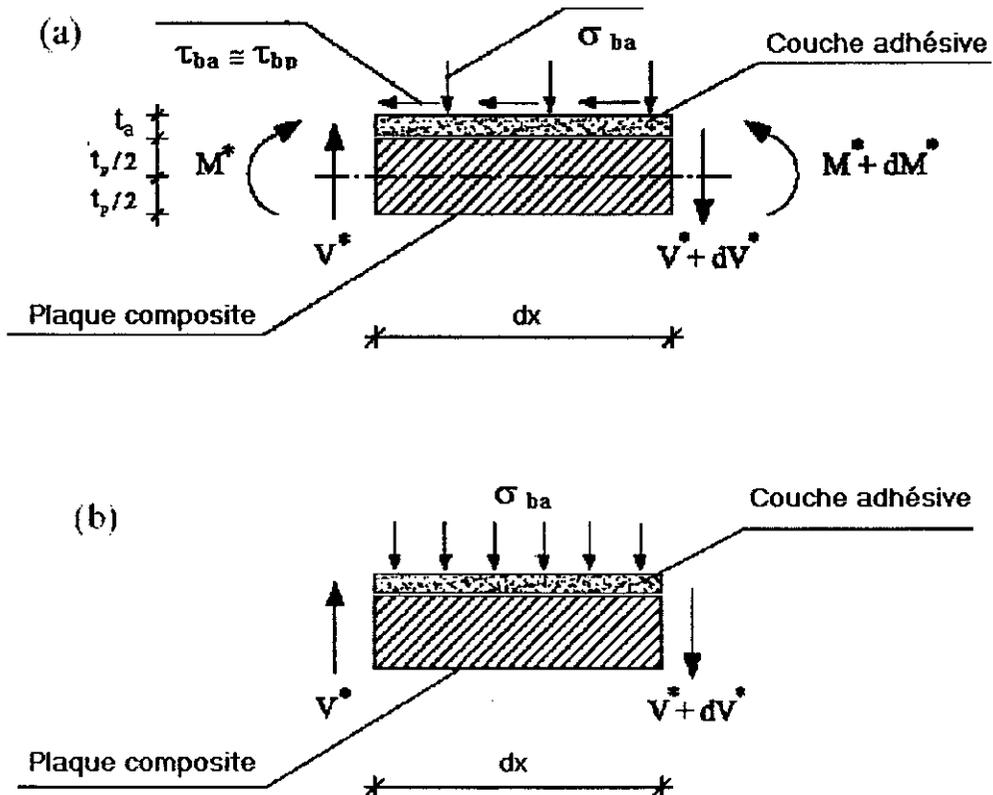


Figure 2.35 : Equilibre de l'interface couche d'adhésif / plaque composite de renforcement.[57]

Le modèle d'élément fini a été développé en utilisant des éléments Lagrangiens iso-paramétriques. Le problème discret a été résolu par la méthode de Newton-Raphson.

Afin de simuler la diffusion de contrainte d'interface dans la zone d'ancrage, il est supposé que l'épaisseur de la plaque varie de 0 à  $t_p$  sur une longueur convenable  $l_d$  (Figure 2.36)

Où :

$$l_d = \sqrt{\frac{E_p A_p}{b_p k_z}} = \sqrt{\frac{E_p}{G_a} t_p t_a} \quad 2.113$$

$E_p$  : Module de Young

$A_p$  : Section de la plaque composite

$b_p$  : Largeur de la plaque

$G_a$  : Module de cisaillement de l'adhésif.

C'est intéressant de reconnaître que la quantité  $l_d$  représente la longueur caractéristique montrée par une poutre élastique chargée axialement et attachée le long de son axe par une distribution continue de ressorts élastiques qui ont la raideur  $kz$  (par unité de longueur).

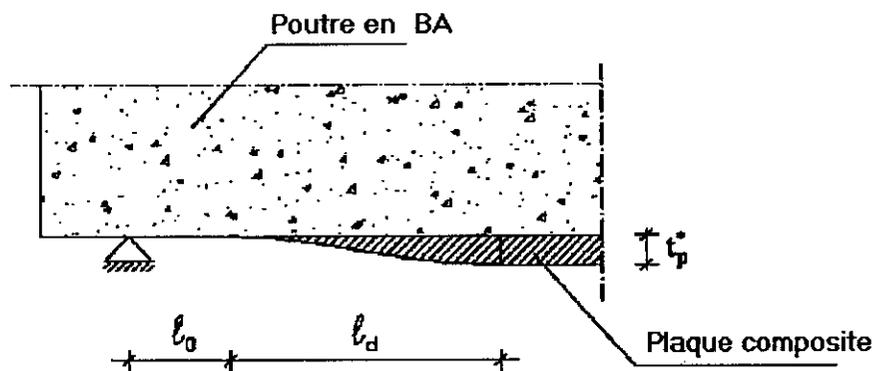


Figure 2.36 : Longueur de diffusion  $l_d$ . [57]

Une étude comparative montre que les résultats numériques sont en bon accord avec les résultats expérimentaux.

8°/ Kaliakin et al. [58] ont présenté une étude numérique basée sur la MEF pour analyser des poutres en BA de section en T renforcées extérieurement par des plaques composites. La première étape de l'étude consiste à développer un modèle numérique de poutre non renforcée qui servira de référence pour la suite de l'étude. Celle-ci comporte dans une deuxième étape de renforcées extérieurement par des plaques. Le logiciel ABAQUS a été utilisé dans les calculs.

Le modèle numérique a été élaboré en utilisant des éléments iso-paramétriques 'brick' à huit nœuds pour le béton et des éléments barres pour l'acier de ferrailage. L'utilisation des éléments à vingt nœuds pour le béton, dans une étude préliminaire, ne donne pas une différence appréciable dans les résultats. Compte tenu des constats expérimentaux, il n'a pas été nécessaire d'utiliser des éléments d'interface Acier – Béton. Les plaques ont été représentées par des éléments membranaires à quatre nœuds « Shell elements ».

Pour modéliser le comportement du béton ordinaire une relation constitutive inélastique a été utilisée. La fonction de charge a été exprimé en fonction de deux premiers invariants de contrainte. Ils ont postulé que la règle d'écoulement est associative et l'écrouissage est isotrope. Ces simplifications conduisent, parfois, à des incertitudes dans la simulation. Par exemple la supposition que l'écoulement est associatif sur estime la déformation volumétrique inélastique. Ainsi, le troisième invariant de contrainte est nécessaire pour assurer l'exactitude, car l'état de contrainte pratique est multiaxial. Finalement, lorsque le béton est sollicité au-delà de la contrainte ultime, l'utilisation d'une rigidité élastique constante dans une formulation élasto-plastique n'est pas justifiée pratiquement.

Dans le logiciel ABAQUS, la fissuration est considérée comme étant l'aspect le plus important dans la réponse du matériau. Les fissures apparaissent lorsque les contraintes atteignent la surface de charge. Cette surface est définie par la ligne de Coulomb. L'anisotropie introduite par la fissuration a été prise en compte dans ce modèle. Le modèle utilise l'approche de fissuration continue (ou répartie). L'inconvénient de cette approche est l'introduction de la sensibilité de la maille dans l'analyse, c.à.d les résultats ne convergent pas toujours vers un résultat unique. Le paramètre de la rigidification de la zone tendue utilisé est égal à 0.001. Le module élastique utilisé est celui défini par le code ACI Building donné par  $E_c = 57000\sqrt{f'_c}$ . La valeur moyenne de coefficient de Poisson est supposée égale à 0.20. Les barres d'acier sont modélisées comme un matériau isotrope élastique – parfaitement plastique.

Les matériaux composites sont des matériaux qui présentent une isotropie transversale. Cependant, du fait que l'épaisseur de la plaque est faible, la réponse dans le plan de la section de la plaque est négligeable. Par conséquent on peut accepter que les plaques sont des matériaux isotropes élastiques linéaires. Le coefficient de Poisson a été supposé égale à 0.35.

Une comparaison avec les résultats expérimentaux permet d'affirmer que les résultats donnés par le modèle numérique, surtout en terme de réponse Charge – Déplacement sont globalement satisfaisants. L'approche de fissuration continue utilisée dans le modèle constitutif du béton n'est pas capable de déterminer les déformations localisées dans les régions trop fissurées. Malgré qu'il est très important de connaître la valeur des déformations dans ces régions, du point de vue de calcul ceci n'est pas important, surtout lorsque les poutres sont contrôlées par le cisaillement, où la rupture de la poutre est atteinte par décollement de la plaque avant que les déformations localisées aux fissures atteignent une valeur assez large.

### 2.5.1 Synthèse :

D'après l'exposition de ces modèles numériques on peut conclure que le modèle de matériau du béton comprimé le plus utilisé est le modèle élasto-plastique avec adoucissement. Le critère de rupture fréquemment utilisé est celui de Mohr-Coulomb. Il y a d'autres critères qui donnent des résultats similaires tel que le critère de Druker-Prager, d'Ottosen et de Kupfer. Pour la traction le béton a un comportement fragile. Donc il a été modélisé par une loi linéaire élastique jusqu'à la rupture. Toutefois, pour une modélisation réelle on doit prendre en considération la rigidification de la zone tendue due à la présence des aciers « tension stiffening ». La fissuration est représentée par l'approche de fissuration continue. L'inconvénient de cette approche c'est qu'elle peut rendre le problème traité dépendant de la maille utilisée.

Les aciers de ferrailage et la plaque d'acier ont été modélisés pratiquement par une loi élasto-plastique avec écrouissage ou, pour de raison de simplification, par une loi élastique parfaitement plastique. Le critère de rupture le plus convenable pour l'acier est celui de Von Mises. Le comportement des plaques composites a été considéré élastique linéaire jusqu'à la rupture. Malgré que ces composites ne sont pas des matériaux isotropes, on peut les considérer comme des matériaux isotropes, en vue de leur faible épaisseur.

Dans la majorité des études numériques, l'interface acier – béton a été représentée par un joint parfait, à cause de l'adhésion importante entre les aciers de ferrailage et le béton.

Vu le problème de décollement et de glissement de la plaque de FRP, plusieurs recherches ont été effectuées sur la modélisation de l'interface FRP – béton. L'un des moyens de modélisation de l'interface est le développement des contraintes normales et tangentielles analytiquement et les incorporer par la suite dans un programme d'élément finis. Le comportement des éléments d'interface est identique à celui de la colle, c'est à dire un comportement élastique linéaire. Le critère de rupture généralement utilisé est celui de Mohr-Coulomb.

## *Chapitre III*

# *Modélisation non Linéaire des Poutres en Béton Armé*

### 3.1 Introduction

Plusieurs problèmes de l'analyse des contraintes peuvent être résolus d'une manière satisfaisante en utilisant un modèle linéaire de comportement. Dans ce modèle, la réponse est directement proportionnelle à la charge et les équations d'équilibre sont établies pour les conditions initiales des appuis. La solution des équations d'équilibre est unique et donne les déplacements de la structure étudiée. Cependant, les hypothèses nécessaires pour l'application du modèle linéaire ne sont pas toujours satisfaites en réalité. A titre d'exemple, le matériau supposé élastique linéaire peut exhiber un comportement plastique où la relation contrainte – déplacement n'est pas linéaire à tous les niveaux de chargement. De plus, les déplacements et les rotations peuvent devenir importantes que l'écriture des équations d'équilibre à partir de la configuration initiale de la structure seulement devienne impossible.

Pour avoir une idée précise sur le comportement d'une structure à tous les niveaux de chargement, une analyse non linéaire s'impose. Malheureusement, ce type d'analyse se heurte au problème de coût qui est 10 à 100 fois le coût d'une analyse linéaire pour le même nombre de degré de liberté. Cependant, au cours des dernières années l'utilisation du modèle non linéaire est devenue une pratique courante grâce au développement formidable de l'outil de calcul tant en termes de matériel informatique qu'en termes de logiciels disponibles.

Le présent chapitre se propose de passer brièvement en revue les modèles non linéaires des matériaux utilisées dans l'analyse des poutres en béton armé. Un tour d'horizon sur les sources de non linéarité ainsi que les stratégies de solution du système non linéaire est aussi présenté.

### 3.2 Sources de non linéarité

Soit un corps solide de volume  $\Omega$  délimité par la surface  $S = S_1 + S_2$ , soumis à un déplacement initial  $\bar{u} = \bar{u}$  et subissant une force surfacique  $\bar{X}_u$  (Figure 3.1). Sous l'effet des forces internes et externes, le cheminement de calcul des efforts dans le corps solide suit le diagramme de la figure 3.2.

Une discrétisation par la méthode des éléments finis conduit généralement à la résolution d'un système algébrique d'équations de type :

$$[K] \{u\} = \{F\} \quad 3.1$$

$\{u\}$  et  $\{F\}$  sont respectivement le vecteur des déplacements et les forces nodaux

$[K]$  est la matrice de rigidité globale du système obtenue par sommation des matrices de rigidité élémentaires  $[K]$ .

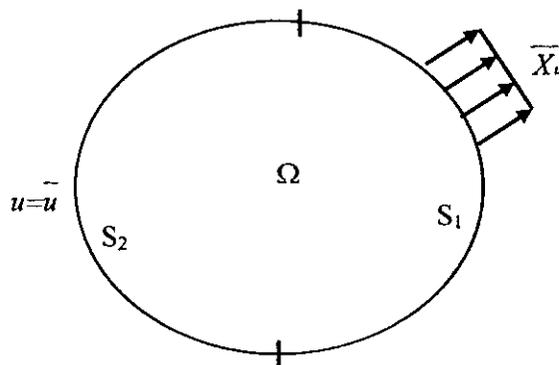


Figure 3.1 : Corps solide.

La matrice  $[K]$  est donnée par :

$$[K] = \int [B]^T [D] [B] dv \quad 3.2$$

Avec :

$[B]$  matrice de déformation liant les déplacements nodaux aux déformations nodales.

$$\{\varepsilon\} = [B] \{u\} ; [B] = [L]$$

$[L]$  : Matrice d'opérateur de dérivation,  
 $[D]$  : Matrice des propriétés des matériaux.

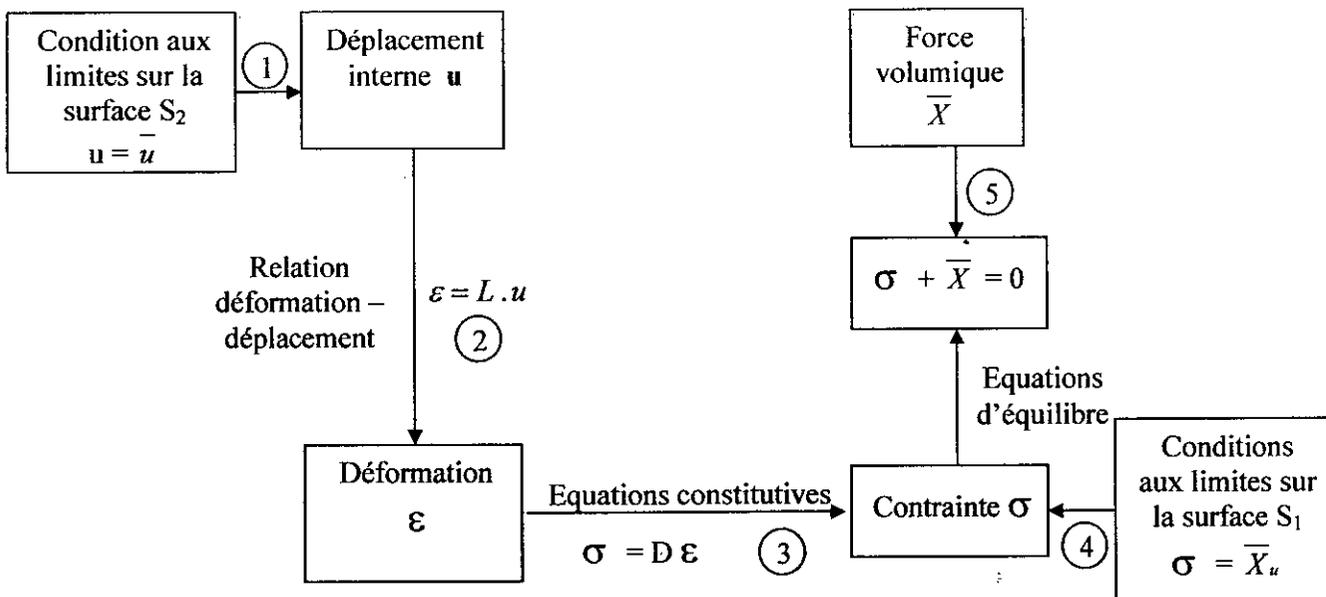


Figure 3.2 : Cheminement de calcul.

Trois sources de non linéarité sont identifiées dans la mécanique des structures :

1. Non linéarité des matériaux :

Dans ce cas la relation contrainte – déformation dans les équations constitutives (chemin 3 de la figure 3.2) n'est pas linéaire, car la matrice  $[D]$  n'est plus une matrice constante, mais dépend des états de déformations  $[\varepsilon]$  actuel et antérieur.

Ce type de problème est le plus fréquent dans le domaine du génie civil compte tenu des qualités des matériaux utilisés tels que le béton et le sol. La résolution de ce type est complexe suite aux phénomènes de rupture progressive, localisation, hystérésis ...etc.

2. Non linéarité géométrique :

Dans ce cas l'opérateur de dérivation  $[L]$  liant les déformations aux déplacements (chemin 2 de la figure 3.2) n'est pas linéaire par suite du changement de la géométrie de la structure déformée.

Ce type de problème est rencontré dans l'étude des structures minces ou très élancées. Par conséquent, la matrice  $[B]$  dans l'équation 3.2 contient des opérateurs non linéaires de dérivation et dépend des déplacements appliqués.

### 3. *Non linéarité des conditions aux limites :*

Dans ce cas les conditions aux limites cinématiques et mécaniques (chemin 1 et 4 de la figure 3.2) dépendent des déplacements appliqués. Ces cas sont rencontrés dans les structures submergées ou réservoirs lorsque la pression hydrostatique appliquée dépend des déformations des parois (conditions aux limites mécaniques variables), ou dans les problèmes de contact (conditions aux limites cinématiques variables).

### 3.3 Lois constitutives des matériaux

L'un des axes de recherche le plus important dans le domaine du béton armé est celui de développement ou de la formulation des lois constitutives capables de suivre la totalité du processus de déformation d'une structure en béton. En effet, dans une analyse non linéaire, les déplacements et par conséquent les déformations changent induisant ainsi un changement dans les propriétés des matériaux. Dans une modélisation par éléments finis, ceci se traduit par un ajustement de la matrice des propriétés  $[D]$  au fur et à mesure que les déformations changent.

La première application de la méthode des éléments finis au comportement non linéaire des poutres en béton armé revient à Ngo et scordelis [59] en suivant une approche de linéarisation. Nilson [60], par contre, a été le premier à utiliser une approche complètement non linéaire dans l'analyse par éléments finis des structures en béton armé. Depuis cette date, plusieurs travaux de recherche ont été entrepris pour modéliser le comportement non linéaire des structures en béton armé [61 - 63]. Une attention particulière a été orientée vers le comportement du béton sous l'effet des contraintes multiaxiales. Ceci est peut être le résultat de l'influence des recherches entreprises parallèlement sur le comportement du sol. Or, dans la majorité des applications du béton armé, un état de contrainte plane règne [61]. Ceci est particulièrement vrai pour les structures soumises à une flexion unidirectionnelle, cas des poutres ou pour les régions du béton situées entre les fissures où un état de contrainte biaxial voir même uniaxial prévaut. De plus, des résultats expérimentaux fiables sur le comportement du béton armé sous contraintes multiaxiales sont difficiles à trouver dans la littérature tandis que ceux relatifs au béton simple présentent beaucoup de variations [64, 65].

Au cours des trois dernières décennies, un nombre important de modèles constitutifs pour le béton, ont été proposés pour une éventuelle utilisation dans la modélisation non linéaire par éléments finis des structures en béton. Malheureusement, seul un nombre limité de ces modèles a été systématiquement testé pour vérifier s'ils peuvent prédire d'une manière fiable le comportement des structure en béton [66] ; et la plupart des codes de calcul disponibles utilisent des modèles simplifiés. Ce nombre important de modèles développés témoigne des difficultés plus au moins importantes qui entravent la formulation d'un modèle fiable pour l'analyse des structures. La majorité de la non linéarité du comportement du béton est liée à sa capacité limitée de supporter les contraintes et les déformations de traction. La fissuration du béton induira des phénomènes complexes à modéliser tels que l'engrenage des agrégats et l'effet de goujon des armatures. En plus la discontinuité physique créée par la fissuration ne peut pas être considérée d'une manière directe et adéquate dans le formalisme de la mécanique des milieux continus. Essentiellement, trois approches ont été suivies dans le développement des modèles constitutifs pour le béton armé :

- 1) Le béton et l'acier sont traités séparément et représentés par des éléments distincts dans la maille des éléments finis.

- 2) Le béton armé est considéré comme un matériau composite et par conséquent un seul élément représente le matériau avec des lois constitutives différentes pour le béton et les armatures.
- 3) Le béton armé est considéré comme un matériau homogène avec une seule loi constitutive pour le béton et l'acier.

Ngo et Scordelis [59] ont adopté la première approche dans leur modélisation des poutres tandis que Cervenka [67] semble être le premier à adopter la deuxième approche dans l'analyse des panneaux en béton. La troisième approche a vu sa première application dans l'analyse non linéaire des dalles en béton armé [68] où une loi constitutive basée sur la courbe moment – courbure a été utilisée. Afin d'éviter les problèmes rencontrés lors de la modélisation numérique des structures en béton, particulièrement celles contenant un pourcentage très élevé d'armatures, en utilisant les deux premières approches, un regain d'intérêt semble être donné à la troisième approche [69].

Dans ce qui suit, nous allons essayer de passer en revue les deux premières approches uniquement, car la plupart des modèles développés pour l'analyse non linéaire des poutres, objet de la présente étude, tombent dans les deux catégories.

### 3.3.1 Lois constitutives du béton :

L'objectif de cette section est de développer des lois constitutives ( $\sigma - \varepsilon$ ) qui soient capables de prendre en considération d'une manière adéquate la fissuration, la plastification et l'écrasement du béton.

#### 3.3.1.1 Comportement uniaxial :

La considération des courbes expérimentales contrainte – déformation uniaxiale des éprouvettes en béton soumises à un chargement en compression de courte durée peut constituer une introduction utile au problème complexe du comportement du béton sous l'effet des contraintes multiaxiales. Un tour d'horizon des travaux trouvés dans la littérature [64, 70 - 73] révèle les principaux points suivants :

- 1) La déformation moyenne du béton est le résultat de plusieurs petites déformations qui se produisent dans les différents constituants du béton.
- 2) Pour une charge donnée, la déformation plastique du premier chargement est plus grande que celle produite lorsque ce même chargement est appliqué une deuxième fois après déchargement.
- 3) Les courbes ( $\sigma - \varepsilon$ ) obtenues dépendent du contrôle de l'essai : avec incrément de contrainte ou incrément de déformation.
- 4) La partie de la courbe ( $\sigma - \varepsilon$ ) enregistrée après le pic de la contrainte (courbe d'adoucissement) semble dépendre de la machine utilisée dans l'essai.
- 5) Pour des contraintes inférieures ou égales à 30% de la contrainte de rupture, le comportement du béton est pratiquement élastique linéaire.

La figure 3.3 montre une courbe ( $\sigma - \varepsilon$ ) typique d'une éprouvette du béton soumise à la compression. Popovics [71] a proposé l'expression suivante pour la courbe ( $\sigma - \varepsilon$ ) :

$$\sigma = \sigma_0 \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^n \frac{n}{\left( n-1 + \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^n \right)} \quad 3.3$$

Pour un béton courant :

$$\begin{aligned} n &= 0.58 \sigma_0 + 1.0 & ; \sigma_0 \text{ en (MPa)} \\ \varepsilon_0 &= 9.368 \cdot 10^{-4} \sqrt{\sigma_0} \end{aligned} \quad 3.4$$

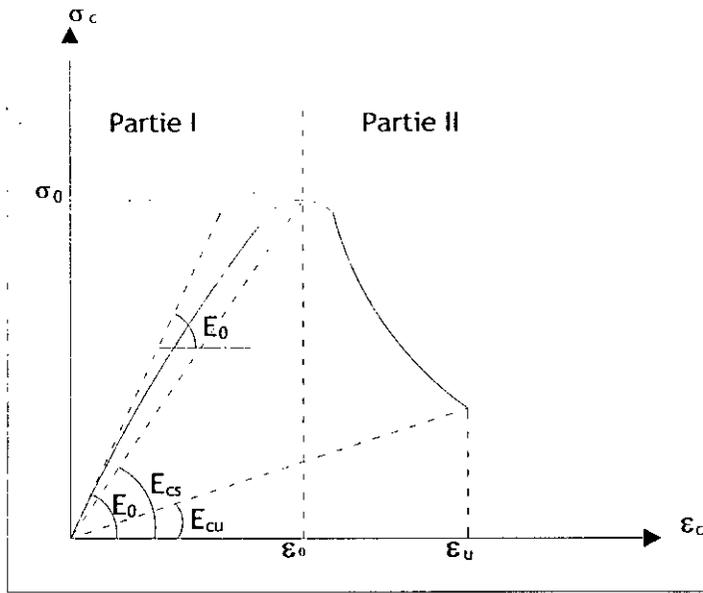


Figure 3.3 : Courbe ( $\sigma - \epsilon$ ) du béton sous contrainte de compression.

Le module d'élasticité du béton tangent peut être donc obtenu par simple dérivation de l'équation 3.3:

$$E_T = \frac{d\sigma}{d\epsilon} = \frac{\sigma_0 \left(1 - \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)^n\right) n (n-1)}{\epsilon_0 \left(n - 1 + \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)^n\right)^2} \tag{3.5}$$

Pour  $\epsilon = 0$  ; cette équation nous donne :

$$\frac{E_0}{E_{cs}} = \frac{n}{n-1}$$

Saenz [72] propose l'équation suivante pour ( $\sigma - \epsilon$ ) :

$$\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right) = \frac{\left(\frac{E_0}{E_{cs}}\right) \frac{\epsilon}{\epsilon_0}}{1 + \left(\frac{E_0}{E_{cs}} - 2\right) \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right) + \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)^2} \tag{3.6}$$

Avec :  $E_0$  = module d'élasticité initial du béton (voir figure 3.3)

$E_{cs} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}$  = module d'élasticité sécant avec  $\sigma = \sigma_0$  et  $\epsilon = \epsilon_0$  (voir figure 3.3)

Où  $\sigma_0$  est la contrainte maximale de la compression du béton.

Wang et al [73], par contre, proposent l'équation suivante :

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{A \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right) + B \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)^2}{1 + C \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right) + D \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)^2} \tag{3.7}$$

Les constantes A, B, C et D sont donnés pour les deux parties de la courbe montrée dans la figure 3.3 comme suit :

Partie I : A = 1.301 ; B = -0.836 ; C = -0.699 ; D = 0.164

Partie II : A = 0.350 ; B = -0.105 ; C = -1.650 ; D = 0.895

Pour la partie II, adoucissement, Shayanfar et al. [74] ont utilisé l'équation suivante :

$$\sigma = \sigma_0 \left( \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_0} \right) e^{\left( 1 - \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_0} \right)} \tag{3.8}$$

Le logiciel ADINA utilise l'un des modèles du béton les plus sophistiqués pour analyser les structures fabriquées à partir de ce matériau. L'équation  $(\sigma - \varepsilon)$  incorporée dans ce logiciel permet de représenter la majorité des spectre des courbes  $(\sigma - \varepsilon)$  envisageables (BHP, Confinement, ...). Elle est donnée par :

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{\left( \frac{E_0}{E_{cs}} \right) \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)}{1 + A \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right) + B \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^2 + C \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^3} \tag{3.9}$$

Avec :

$$A = \frac{\left( \frac{E_0}{E_{cu}} \right) + (P^3 - 2P^2) \left( \frac{E_0}{E_{cs}} \right) - (2P^3 - 3P^2 + 1)}{P (P^2 - 2P + 1)}$$

$$B = \frac{2E_0}{E_{cs}} - 3 - 2A$$

$$C = 2 - \frac{E_0}{E_{cs}} + A$$

$$P = \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_0}$$

La valeur de  $\varepsilon_u$  dépend entre autre de la composition du béton (béton courant, BHP ou autre), du confinement du béton et du gradient de déformation. Une valeur proche de 0.004 ou de  $4\varepsilon_0$  [76] est généralement admise pour des bétons courants non confinés [71].

Le comportement uniaxial du béton en traction est approximativement linéaire jusqu'au pic de la contrainte. Si la résistance à la traction est dépassée, des fissures perpendiculaires aux contraintes appliquées se forment et le béton dans ce plan de rupture ne supporte plus des contraintes ou supporte des contraintes réduites avec l'augmentation des déformations comme montré dans la figure 3.4.

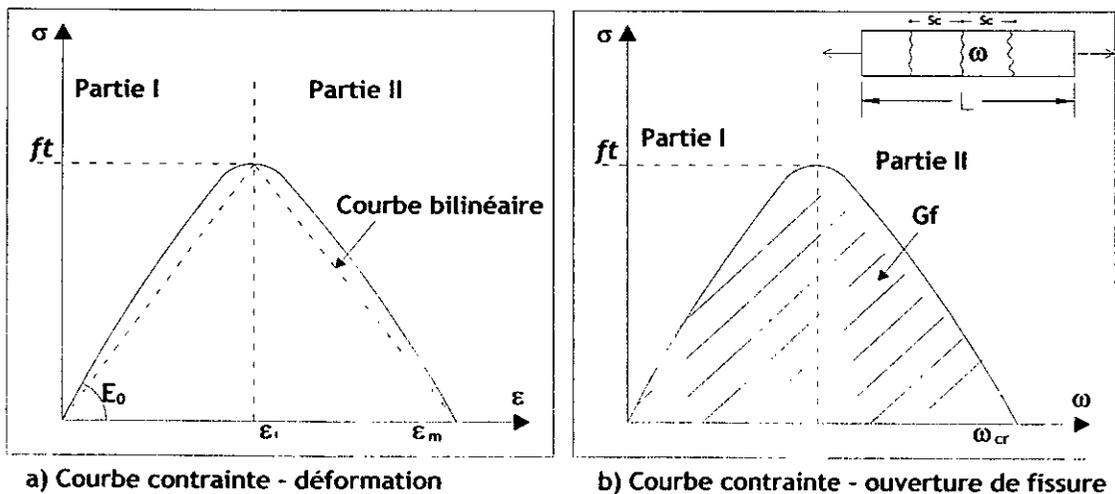


Figure 3.4 : Comportement uniaxial du béton en traction.

L'adoucissement du béton en traction est rencontré lorsque l'essai est effectué avec un contrôle de déformation. De plus, les valeurs expérimentales de  $f_t$  présentent beaucoup plus de variation que celles correspondantes à la résistance en compression  $\sigma_0$  suite aux différents modes de rupture. Dans une analyse par éléments finis, les valeurs obtenues de l'essai de fendage semblent être les plus convenables. Cependant le comportement en traction des structures en béton peut être différent de celui rencontré lors des essais normalisés suite au confinement des éléments, à la présence des armatures ...etc. Ceci est particulièrement le cas lorsque les armatures longitudinales ou transversales sont positionnées trop près de la surface du béton dans la direction de fissuration où une valeur plus petite que la résistance à la traction de l'éprouvette du béton doit être utilisée dans une analyse des éléments finis. On peut conclure donc, que la résistance effective à la traction [77] dans une structure peut être difficile à déterminer.

Les paramètres des matériaux sont clairement identifiés dans la figure 3.4, et consistent du module d'élasticité  $E_0$ , de la résistance à la traction  $f_t$ , des déformations  $\varepsilon_t$  et  $\varepsilon_m$  et l'énergie de rupture  $G_f$ . Ce dernier paramètre est l'aire du diagramme ( $\sigma - \omega$ ) et peut être donc directement obtenu à partir des essais de traction. Le module d'élasticité  $E_0$  peut être estimé en utilisant les formules proposées par les codes ou règlement du béton. Alors que la partie ascendante de la courbe (partie I de la figure 3.4) est généralement supposée linéaire, la partie descendante (partie II de la figure 3.4), par contre, est considérée soit linéaire soit d'allure exponentielle. Wang et Hsu [76] ont utilisé les équations suivantes pour décrire la courbe ( $\sigma - \varepsilon$ ) du béton en traction :

$$\sigma = E_0 \varepsilon \quad \text{si } \varepsilon \leq \varepsilon_t \quad 3.10$$

$$\sigma = f_t \left( \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon} \right)^{0.4} \quad \text{si } \varepsilon > \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_m = 10 \varepsilon_t$$

$f_t$  : Résistance à la traction.

$\varepsilon_t$  : Déformation à la traction correspond à  $f_t$ .

Une seule équation [78] peut être suffisante pour décrire la totalité de la courbe ( $\sigma - \varepsilon$ ) :

$$\sigma = f_t \left( \frac{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_t}}{a \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_t} - 1 \right)^{1.7} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_t}} \right) \quad 3.11$$

Avec  $a$  un paramètre à identifier en fonction de la résistance du béton. Les valeurs typiques pour  $G_f$  pour un béton courant varient de  $200 f_t^2/E_0$  à  $400 f_t^2/E_0$  (N/mm). Ceci donne pour des résistances courantes une valeur de  $G_f$  entre 50 et 250 N/m. Pour une analyse par éléments finis une valeur de  $G_f$  entre 100 à 150 N/m semble donner les meilleurs résultats [66, 79]. D'autre part, le règlement CEP-FIP[80] propose la formule suivante pour  $G_f$  :

$$G_f = \alpha \left( \frac{\sigma_0}{10} \right)^{0.7} \quad 3.12$$

$\sigma_0$  : résistance à la compression,

$\alpha = 0.03$  pour un béton courant

La valeur de  $\varepsilon_m$  peut être estimée en supposant que la courbe  $(\sigma - \varepsilon)$  est bilinéaire et en écrivant l'expression de  $G_f$  :

$$G_f = \frac{1}{2} f_t \varepsilon_m S_c$$

$S_c$  : espacement des fissures dans l'élément considéré.

En écrivant que  $\varepsilon_m = \alpha \varepsilon_t \Rightarrow \alpha = \frac{2G_f}{f_t \varepsilon_t S_c}$  3.13

Il devient donc apparent que les propriétés des matériaux dépendent de l'espacement des fissures, paramètre difficilement identifiable dans une analyse par éléments finis. Or, les propriétés des matériaux dans une analyse par la MEF sont imposées au niveau des points de Gauss et l'espacement entre deux points adjacents de Gauss donne la distance sur laquelle la moyenne des déformations du matériau est obtenue. Par conséquent, pour obtenir des résultats qui sont maille indépendants, il est nécessaire de prendre l'espacement  $S$  des points de Gauss dans l'évaluation de  $\varepsilon_m$  ou  $\alpha$ .

En écrivant que :  $S_c = S \Rightarrow \alpha = \frac{2G_f}{f_t \varepsilon_t S}$

Bazant [81] a suggéré que si la valeur de  $\alpha$  obtenu rend la partie II de la courbe  $(\sigma - \varepsilon)$  verticale, une valeur réduite de  $f_t$  devra être utilisée pour garder la forme bilinéaire de  $(\sigma - \varepsilon)$ . Dans ce cadre, il est à noter que l'adoucissement du béton en traction ainsi que la résistance à la traction  $f_t$  (la partie II de la figure 3.4) sont importantes pour les poutres subissent une rupture principalement par cisaillement. Pour les poutres dont la rupture se fait principalement par plastification des aciers ou écrasement du béton, les deux paramètres cités ci-dessus n'influent pas d'une manière significative sur la charge de rupture calculée par la MEF [66].

**3.3.1.2 Comportement biaxial :**

En général, un état biaxial de contraintes de compression dans le béton conduit à la fois à une augmentation de la rigidité ainsi que de la résistance (jusqu'à 25%) [82 - 84]. Ceci est dû à l'effet du coefficient de Poisson ainsi qu'au retardement de la micro-fissuration particulièrement à un niveau élevé de contrainte. Cependant, un état biaxial de contraintes opposées (traction - compression) dans le béton favorise la fissuration et par conséquent réduit la résistance à la traction et la rigidité du béton. Finalement, lorsque le béton est soumis à un état de contrainte biaxial de traction, son comportement est identique au comportement uniaxial en traction [83].

En considérant le béton comme un matériau orthotrope, les équations constitutives sont données par :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{12}}{E_2} \\ \frac{-\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon_3 = - \left( \frac{\nu_{31}}{E_1} \sigma_1 + \frac{\nu_{32}}{E_2} \sigma_2 \right)$$
3.14

Si on suppose que l'effet de  $\sigma_1$  sur  $\sigma_2$  est identique à celui sur  $\sigma_3$ , et l'effet de  $\sigma_2$  sur  $\sigma_1$  est identique à celui sur  $\sigma_3$  on a :

$$\frac{\nu_{21}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_1} \quad \text{et} \quad \frac{\nu_{12}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_2}$$

En plus si l'effets de  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sur  $\sigma_3$  sont identiques on a :  $\frac{\nu_{31}}{E_1} = \frac{\nu_{32}}{E_2}$

Ceci réduit l'équation constitutive à :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{E_1} \begin{bmatrix} 1 & -\nu_1 \\ -\nu_1 & \frac{\nu_1}{\nu_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix} \tag{3.15}$$

$$\varepsilon_3 = -\frac{\nu_1}{E_1} (\sigma_1 + \sigma_2) \quad \text{avec :} \quad \nu_1 = \nu_{21} = \nu_{31} \quad \text{et} \quad \nu_2 = \nu_{12} = \nu_{32}$$

La contrainte de cisaillement est liée à la déformation par :

$$\gamma = \left( \frac{1}{E_1} + \frac{2\nu_1}{E_1} + \frac{\nu_1}{E_1\nu_2} \right) \tau \tag{3.16}$$

Les équations 3.15 et 3.16 peuvent être aussi écrites sous la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{1-\nu_1^2} \begin{bmatrix} E_1 & E_2 \nu_1 \\ E_2 \nu_1 & E_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{Bmatrix} \tag{3.17}$$

$$\tau = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2 + 2E_2 \nu_1} \gamma$$

Si le béton est considéré comme un matériau isotrope :  $E_1 = E_2 = E$  et  $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ , l'équation 3.17 devient donc :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma \tag{3.18}$$

L'effet du coefficient de Poisson peut être facilement appréhendé en considérant le cas d'isotropie. En manipulant l'équation 3.18, on obtient les contraintes effectives initiales suivantes :

$$\sigma_1 = \frac{E \varepsilon}{1 - \nu(\sigma_2/\sigma_1)} \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \frac{E \varepsilon}{1 - \nu(\sigma_1/\sigma_2)}$$

L'examen attentif de l'équation ci-dessus conduit aux remarques suivantes :

- 1) Si les contraintes orthogonales  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont du même type (même signe) traction ou compression, la rigidité du béton augmente sous l'effet du coefficient de Poisson.
- 2) Si au contraire, ces contraintes orthogonales sont de signes opposés, traction et compression, la rigidité du béton diminue sous le même effet.

Pour prendre en compte à la fois l'effet du coefficient du Poisson et l'effet du confinement du béton responsable du retardement de la micro-fissuration, Tasuji et al. [84] ont proposé la relation ( $\sigma - \epsilon$ ) suivant :

$$\sigma_i = \frac{E_0 \epsilon_i}{(1-\nu k) \left[ 1 + \left( \left( \frac{1}{1-\nu k} \right) \frac{E_0}{E_{cs}} - 2 \right) \left( \frac{\epsilon_i}{\epsilon_0} \right) + \left( \frac{\epsilon_i}{\epsilon_0} \right)^2 \right]} \tag{3.19}$$

Avec :  $k = \sigma_j / \sigma_i =$  rapport des contraintes principales avec :  $i = 1, 2$  et  $j = 2, 1$   
 $E_0, E_{cs}$  et  $\epsilon_0$  ont été données dans la Figure 3.3

L'équation 3.19 se réduit à l'équation 3.6 de Saenz si  $\sigma_j = 0$   
 Il est à noter aussi que cette relation est capable de reproduire fidèlement, les courbes ( $\sigma - \epsilon$ ) biaxiales obtenues expérimentalement (Figure 3.5)

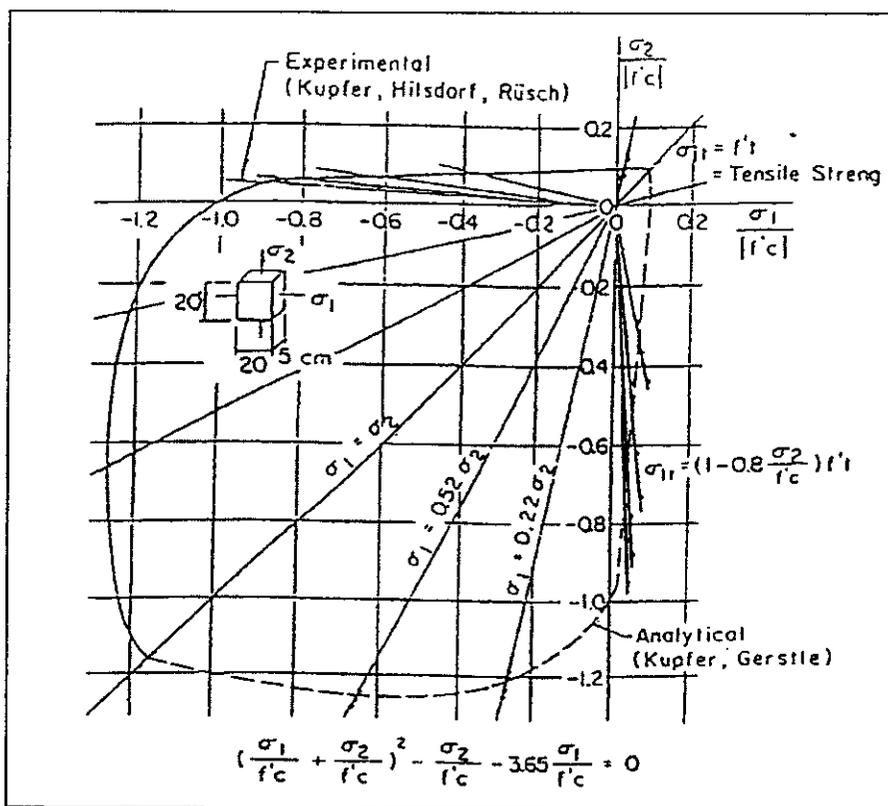


Figure 3.5 : Résistance biaxiale du béton (Kupfer et al. [83]).

Cependant, puisque le rapport  $k$  n'est pas connu d'avance lors de l'évaluation de l'équation 3.19, un processus itératif est généralement nécessaire pour déterminer  $\sigma_i$ . De plus, il est implicite dans ce type de formulation que le suivi d'évolution de la rupture du béton est effectué dans l'espace des contraintes principales, ce qui complique davantage son utilisation dans les codes de calcul basés sur la MEF type déplacement.

Les modèles mathématiques couramment utilisés pour la modélisation du comportement du béton sous contraintes biaxiales peuvent être groupés en 04 catégories : modèles orthotropes, modèles élastiques non linéaires, modèles plastiques et modèles endochroniques [85].

Les modèles orthotropes sont les plus simples à utiliser et peuvent reproduire fidèlement les données expérimentales. Ils sont basés sur l'utilisation des équations 3.13 ÷ 3.19 développés précédemment. Les modèles élastiques non linéaires sont basés sur le principe d'une variation dans le module d'élasticité du béton au cours de chargement pour reproduire les résultats expérimentaux. La réponse non linéaire du béton est donc reproduite par le biais d'un processus de linéarisation, chaque tronçon linéaire possède un module de rigidité différent. Des relations entre la déformation hydrostatique et la déformation volumique et entre les contraintes et les déformations déviatoriques ont été établies [85]. De ces relations on peut déduire les expressions des modules volumiques tangents  $K$  et de cisaillement  $G$  du béton. Les équations constitutives prennent la forme suivante [83] :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = 4G \frac{3K + G}{3K + 4G} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3K + 4G}{4(3K + G)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad 3.20$$

Avec :  $\alpha = \frac{3K - 2G}{2(3K + G)}$

Ces modèles élastiques non linéaires sont donc simples à intégrer dans un programme de calcul par éléments finis. Cependant, leur utilisation se heurte au problème de discontinuité dans la courbe ( $\sigma - \varepsilon$ ) particulièrement lorsque  $\sigma$  est proche de la contrainte de rupture ( $E \approx 0$ ). Par conséquent, ces modèles ne peuvent pas reproduire le comportement du béton lorsque  $\sigma$  est proche de  $\sigma_0$  (figure 3.3) ou lorsque le béton subit un adoucissement (partie II de la figure 3.3).

Les modèles plastiques peuvent être considérés comme une généralisation des modèles cités ci-dessus. La constitution d'un modèle plastique repose sur trois hypothèses fondamentales :

- 1) La forme de la surface de charge initiale ;
- 2) L'évolution de cette surface de charge, c.à.d écrouissage ou plastification ;
- 3) La formulation d'une loi d'écoulement.

Plusieurs chercheurs [10, 55, 65 à 68, 75, 76, 85 – 87] ont utilisé ce modèle avec des critères de rupture divers (Von Mises, Mohr, Druker – Prager ...etc) pour modéliser le comportement du béton. Cependant, malgré que ce modèle soit efficace dans la représentation du comportement du béton dans la région d'écrouissage (Partie I de la figure 3.3), la région d'adoucissement (Partie II de la figure 3.3) ne peut pas être reproduite en utilisant uniquement la théorie classique de plasticité avec écrouissage qui est basée sur le postulat de Drucker statuant la stabilité des matériaux.

La théorie de plasticité endochronique est basée sur le principe du temps intrinsèque ou endochronique. Ce temps est utilisé pour mesurer le dommage subi par la structure interne du béton sous l'effet d'une déformation aléatoire [85, 90]. Pour plus de détail sur cette méthode qui est relativement compliquée, le lecteur est orienté vers la littérature spécialisée dans le domaine [61, 85, 90].

Plus récemment, le modèle microplan [91, 92] s'annonce être plus prometteur car il est capable de représenter d'une manière adéquate plusieurs aspects du comportement local du béton. Toutefois, son utilisation dans l'analyse de la structure réelle reste peu envisageable à cause des moyens de calcul prohibitifs nécessaires pour accomplir cette tâche.

3.3.2 Loi Constitutive de l'acier :

Les propriétés des armatures du béton ne dépendent pas généralement des conditions environnementales ou de l'âge comme c'est le cas du béton. Par conséquent, une seule courbe  $(\sigma - \epsilon)$  est suffisante pour définir les propriétés du matériau nécessaires dans une analyse de structure en béton armé. La figure 3.6 montre une courbe typique de  $(\sigma - \epsilon)$  de l'acier sous un chargement monotone. On constate que cette courbe est constituée de quatre segments : un comportement linéaire élastique, un palier de plasticité, un écrouissage isotrope caractérisé par une augmentation de  $\sigma$  avec  $\epsilon$ , et finalement un adoucissement jusqu'à la rupture de l'acier. L'étendue du palier de plasticité est en fonction de la résistance. Les aciers de grande résistance (teneur élevée en carbone) ont un palier plus court que l'acier doux de faible résistance. Du moment que l'acier est utilisé dans le béton sous forme de barres de section mince, il est inutile de considérer son comportement tridimensionnel. Un comportement uniaxial de l'acier est largement suffisant pour une modélisation par éléments finis où les courbes  $(\sigma - \epsilon)$  de l'acier sont généralement approchées de deux manières comme montré dans la figure 3.7. La première approche (Figure 3.7a), adoptée par le règlement BAEL, suppose que l'acier a un comportement élastique parfaitement plastique, le gain de résistance par écrouissage est négligé [67, 86]. Ceci rend cette approche plus appropriée pour les aciers avec faible teneur en carbone. Pour les autres types d'acier, l'utilisation de cette première approche sous estime la contrainte dans l'acier pour des déformations plus grandes que  $\epsilon_y$ . Or, dans certaines situations telles que celle rencontrée dans l'estimation de la ductilité d'un élément dans un calcul sismique, il est très important de connaître le comportement réel de l'élément sous des déformations plusieurs fois plus grandes que  $\epsilon_y$ . De plus, pour éviter les problèmes de convergence de la solution numérique [75] et pour mieux représenter la plastification des aciers, il est utile d'approcher la courbe  $(\sigma - \epsilon)$  de l'acier par deux segments (bilinéaire, Figure 3.7b) ou même trois segments (trilinéaire).

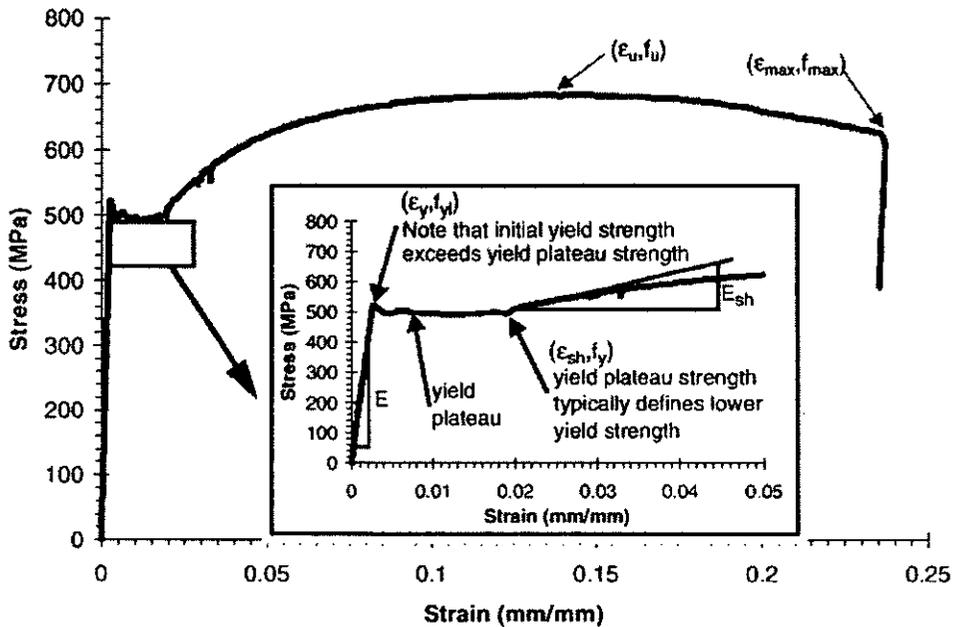


Figure 3.6 : Courbe contrainte – déformation d'un chargement monotonique de traction des barres d'acier [Naito, 1999]

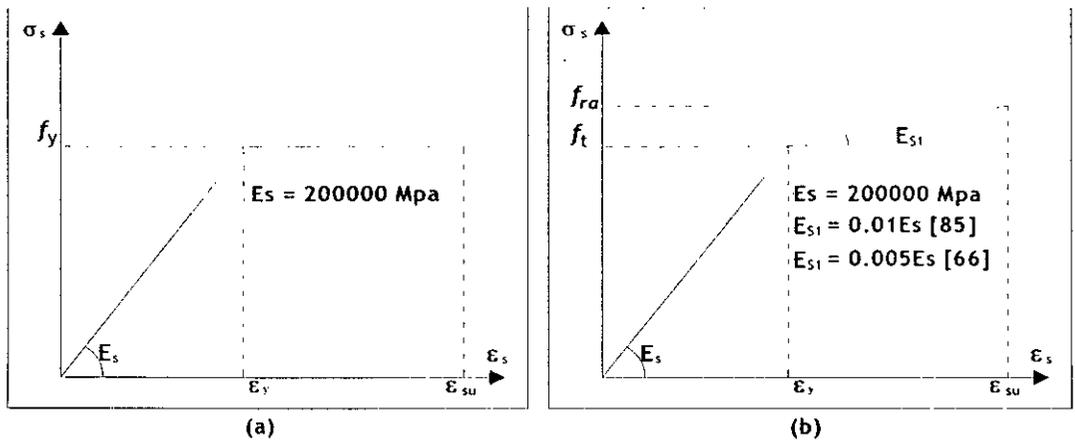


Figure 3.7 : Courbe contrainte – déformation de l’acier adoptée dans la MEF.

3.3.3 Comportement biaxial du béton armé :

L’adjonction des aciers au béton produit un matériau composite qui est le béton armé, et confère à la section du composite une résistance et une ductilité plus grande que celles d’une section de béton seul. En limitant l’ouverture des fissures, les aciers du béton armé permettent le transfert des forces de traction et de cisaillement supplémentaires. Cependant, la présence physique de ces aciers dans le béton peut agir défavorablement sur la capacité locale de la section et provoque des micro-fissures voire même des fissures visibles suite à l’empêchement des déformations liées au changement de volume de la section du béton. Par conséquent, trouver des lois constitutives pouvant représenter fidèlement ces phénomènes locaux est un travail ardu, et c’est uniquement en considérant les déformations moyennes du béton et de l’acier sur une longueur contenant ou traversée par plusieurs fissures qu’il est possible de postuler des équations constitutives liant les contraintes planes  $\sigma$  aux déformations du composite.

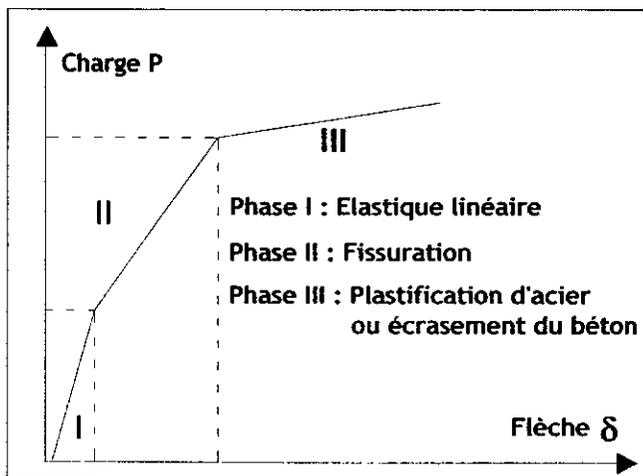


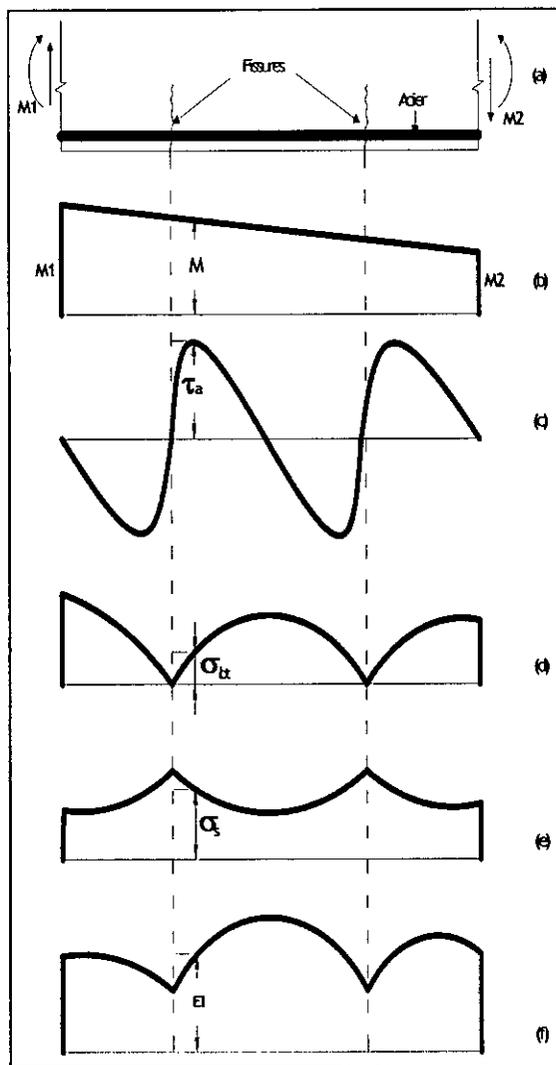
Figure 3.8 : Courbe typique charge – flèche d’une poutre en béton armé.

La figure 3.8 présente les différents stades rencontrés dans la courbe charge – flèche d’une poutre simplement appuyée en béton armé. Ces stades peuvent être groupés en trois phases de comportement : phase élastique linéaire avant fissuration, phase de propagation des fissures, et phase de plastification. Ce

comportement non-linéaire est dû essentiellement à deux phénomènes : fissuration du béton et comportement plastique de l'acier ou du béton (écrasement en compression). D'autres phénomènes liés à l'interaction entre l'acier et le béton, tel que l'adhérence et le glissement entre la barre d'acier et le béton, l'engrenage des agrégats dans les fissures, et l'effet de goujon crée par une barre traversant une fissure contribuent au comportement non linéaire de la section du composite. D'autre part, contrairement à l'acier, les propriétés mécaniques du béton dépendent de l'âge et des conditions ambiantes au cours de l'essai. Par conséquent, le modèle constitutif de la section composite doit être basé sur la superposition des lois constitutives développées séparément pour le béton et l'acier. Ce modèle constitutif doit inclure aussi des lois constitutives représentant l'interaction entre les deux matériaux (adhérence acier – béton)

### 3.3.3.1 Fissuration du béton :

La figure 3.9 montre une partie d'une poutre en béton armé fissurée soumise à la flexion simple.



**Figure 3.9 :** Effet de la fissuration dans une poutre en béton armé.  
 (a) partie de la poutre. (d) contrainte de traction dans le béton.  
 (b) Diagramme du moment. (e) contrainte de traction dans l'acier  
 (c) Contrainte d'adhérence. (f) Rigidité de la poutre.

On remarque qu'au niveau de fissures, la totalité des efforts de traction est reprise par l'acier, et dès qu'on s'éloigne des fissures le béton tendu commence à reprendre une partie de ces efforts. Ceci est dû au transfert des efforts de traction qui s'effectue des armatures au béton moyennant l'adhérence. Donc, l'adhérence entre l'acier et le béton joue un grand rôle dans la participation de la zone tendue du béton à la résistance des efforts de traction. Des fissures secondaires peuvent être créées entre les fissures primaires dans les endroit où la contrainte de traction du béton dépasse la résistance de ce dernier. Ce processus de fissuration continuera jusqu'à la fissuration systématique du béton caractérisée par des contraintes de traction dans le béton qui sont inférieures à la résistance en traction du béton dans toutes les sections de la poutre. L'interaction entre l'acier et le béton à travers l'adhérence entraîne donc une mobilisation du béton tendu découpé par les fissures. Cette mobilisation entraîne une augmentation de la rigidité de la zone tendue du béton qui est communément appelée « *tension - stiffening* ». Deux approches sont généralement suivies pour tenir compte de cette augmentation de rigidité dans une analyse par la MEF. Ces deux approches sont basées sur la modification des équations constitutives ( $\sigma - \epsilon$ ) de contraintes et déformations moyennes de l'acier ou du béton dans la section fissurée du composite. Pour le béton le phénomène *tension - stiffening* est appréhendé à travers un comportement d'adoucissement du béton tendu [85, 55] comme montré dans la figure 3.10.

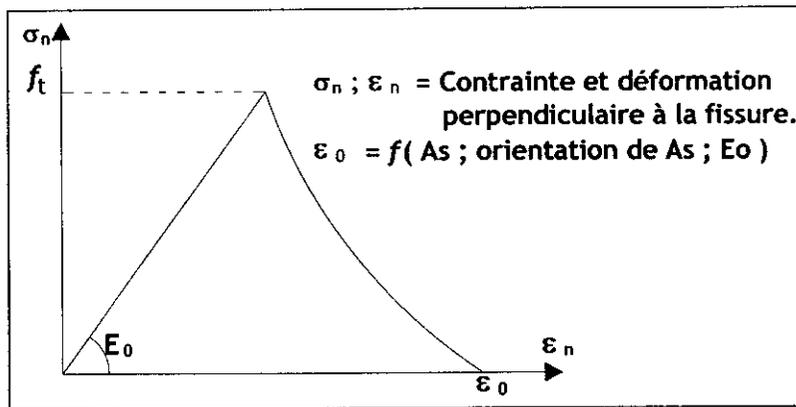


Figure 3.10 : *tension - stiffening* : Comportement du béton tendu.

Pour l'acier tendu ce même phénomène est pris en considération en augmentant la contrainte dans l'acier tendu [66, 76, 87] comme schématisé dans la figure 3.11.

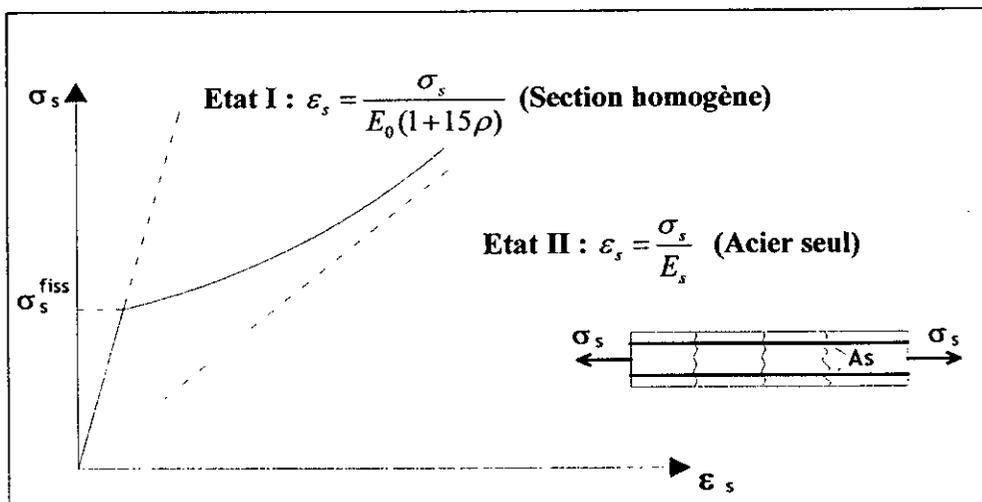


Figure 3.11 : *tension - stiffening* : Comportement de l'acier tendu.

### 3.3.3.2 Modélisation des fissures dans le béton :

Comme indiqué au début de cette section, la première application de la MEF dans l'analyse du comportement non linéaire des poutres a été entreprise par Ngo et Scordelis [59], qui ont utilisé un modèle de comportement linéaire pour analyser les poutres en béton armé avec des configurations de fissuration prédéfinies. Les fissures ont été modélisées moyennant la séparation des nœuds de la maille de MEF créant ainsi le modèle discret de fissuration montré dans la figure 3.12. Le changement de la topologie de la maille induite par la redéfinition des nœuds de la maille conduit généralement aux problèmes suivant :

- 1) Temps et moyen de calcul plus performant car la nature bandée de la matrice de rigidité est détruite.
- 2) L'orientation de la fissuration est difficile à anticiper, ce qui rend le choix de la maille plus difficile à prendre.

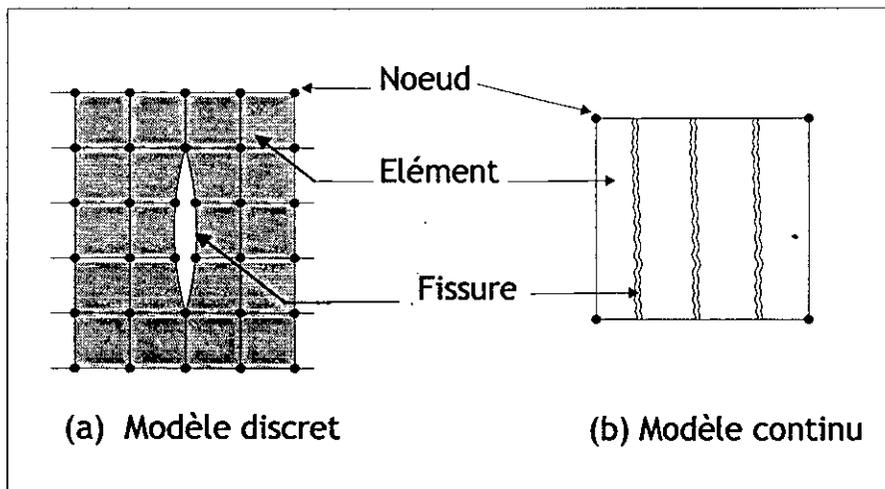


Figure 3.12 : Modèle de fissuration.

Malgré ces inconvénients, le modèle discret de fissuration est très efficace dans la modélisation du comportement des structures comprenant quelques fissures dominantes uniquement. De plus les techniques de re-maillage et de suivi de fissuration développées récemment [63] ont créé un regain d'intérêt dans ce modèle de fissuration.

Les difficultés rencontrées dans l'utilisation du modèle discret de fissuration ont conduit les chercheurs à adopter et à utiliser le modèle continu de fissuration « smeared crack ». La fissuration du béton dans ce modèle est répartie sur toute la surface de l'élément fissuré c.à.d au lieu d'une seule fissure du modèle discret, plusieurs fissures fines sont utilisées dans le modèle continu comme montré dans la figure 3.12. Le modèle de fissuration continue a été développé par Rachid [93] où la section fissurée du composite a été considérée comme un matériau élastique orthotrope avec des rigidités réduites dans le plan perpendiculaire au plan de fissuration. Cette approche continue à la fissuration permet de répartir les discontinuités dans le champ de déplacement au niveau d'une fissure sur une partie ou sur l'intégralité de l'élément, et exprimer le comportement du composite fissuré par des relations liant les contraintes aux déformations moyennes. Dans la MEF, le processus de fissuration est appréhendé au niveau des points de Gauss de l'élément où les relations ( $\sigma - \epsilon$ ) sont modifiées pour tenir compte de la détérioration de la rigidité et de la résistance suite à la fissuration. Due à sa simplicité, cette approche ou modèle de fissuration a été largement utilisée dans l'analyse des structures en béton armé. Cependant, sa généralisation souffre des points suivants :

- 1) Les résultats d'une analyse par la MEF sont dépendants de la maille utilisée, particulièrement si des éléments de grande taille sont utilisés [74, 87]. En effet, lorsqu'un élément de grand taille est fissuré c'est toute la rigidité de la structure qui sera réduite. L'utilisation des éléments à fonctions d'interpolations quadratiques ou cubiques (élément d'ordre élevé) ne résout pas le problème du moment que lorsqu'un point de Gauss est fissuré, la continuité du champ de déplacement entraînera la fissuration des autres points de Gauss de l'élément dans l'itération suivante. Ceci conduit à une plus grande détérioration de la rigidité de la structure.
- 2) L'utilisation de cette approche conduit à une répartition assez large de la fissuration de la structure étudiée. Par conséquent, les ruptures localisées, créées par quelques fissures uniquement, ne peuvent pas être modélisées correctement en utilisant cette approche.

### 3.3.3.3 Lois constitutives :

Dans ce qui suit nous allons présenter quelques modèles les plus utilisés dans les travaux de modélisation des structures en béton armé.

#### a) *Modified compression field theory (MCFT)* : [94]

La figure 3.13 montre un élément plan en béton armé fissuré. L'élément est soumis à des contraintes principales de compression  $\sigma_2$  dans la direction des fissures, et des contraintes principales de traction perpendiculaires aux fissures. Vecchio et Collins [94] ont mis en évidence la dégradation de la rigidité et de la résistance en compression du béton sous l'effet des contraintes orthogonales de traction. Ils ont considéré qu'il est possible d'utiliser les relations uniaxiales suivantes (voir figure 3.14) :

- Relation entre contrainte de compression principale et déformation :

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_0}{\beta} \left[ 2 \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0} \right) - \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0} \right)^2 \right] \quad 3.21$$

Avec :  $\beta = 0.8 - 0.34 \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \right) \geq 1.0$

$\sigma_0$  et  $\varepsilon_0$  sont données dans la figure 3.14 (à noter ici que  $\varepsilon_0 < 0$  et  $\varepsilon_1 > 0$ )

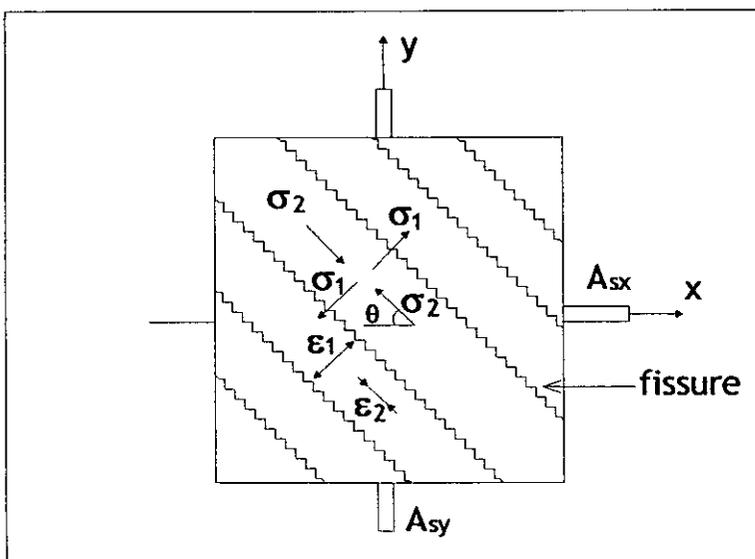


Figure 3.13 : Notation pour le MCFT.[94]

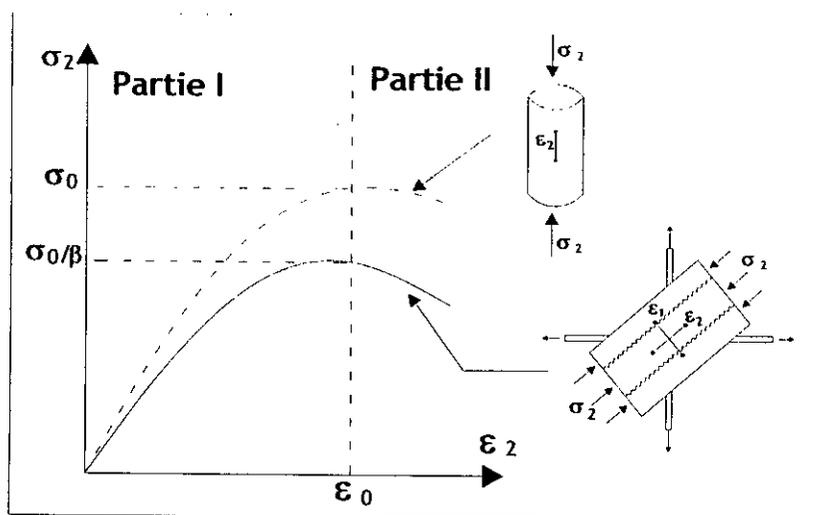


Figure 3.14 : Diagramme  $\sigma_2 - \epsilon_2$  (MCFT). [94]

- Relation entre contrainte de traction principale et déformation :

- Pour la partie I de la figure 3.15 :

$$\sigma_1 = E_0 \epsilon_1 \quad \text{si : } \epsilon_1 \leq \epsilon_t$$

- Pour la partie II :

$$\sigma_1 = \frac{f_t}{1 + \sqrt{200\epsilon_1}} \quad \text{si : } \epsilon_1 > \epsilon_t$$

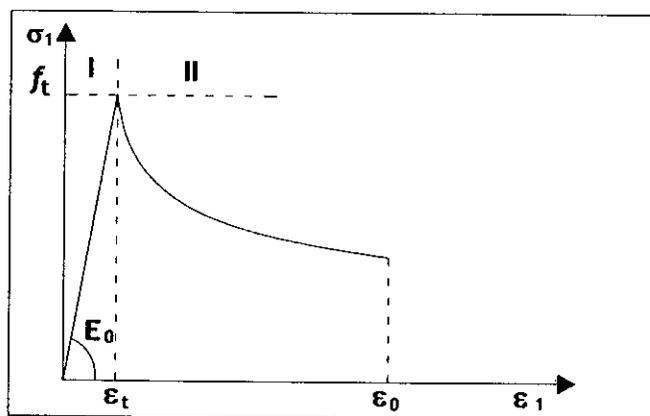


Figure 3.15 : Diagramme  $\sigma_1 - \epsilon_1$  (MCFT). [94]

***b) Distributed stress field model (DSFM): [95]***

Le DSFM est basé sur le concept du MCFT et il représente une extension de ce dernier où l'obligation de la coaxialité du vecteur des contraintes principales  $\sigma$  avec le vecteur des déformations principales  $\epsilon$  n'est plus exigée. La figure 3.16 regroupe les différentes notations utilisées pour développer les équations constitutives pour un élément en béton fissuré.

Comme dans le cas du MCFT, la présence des contraintes de traction orthogonales réduit la rigidité et la résistance à la compression du béton. La relation contrainte principale de compression et déformation est donnée par :

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_0}{\beta} \left[ \frac{n \left( \frac{\epsilon_2}{\epsilon_0} \right)}{(n-1) + \left( \frac{\epsilon_2}{\epsilon_0} \right)^{nk}} \right] \quad 3.22$$

Avec :  $n = 0.80 - \frac{\sigma_0}{17\beta}$

$k = 0.1$  si :  $\epsilon_2 < \epsilon_0$  (voir figure 3.17)

$k = 0.67 - \frac{\sigma_0}{62\beta}$  si :  $\epsilon_2 > \epsilon_0$

$\sigma_2 = 0$  : si l'ouverture de fissure  $\omega \geq 5mm$

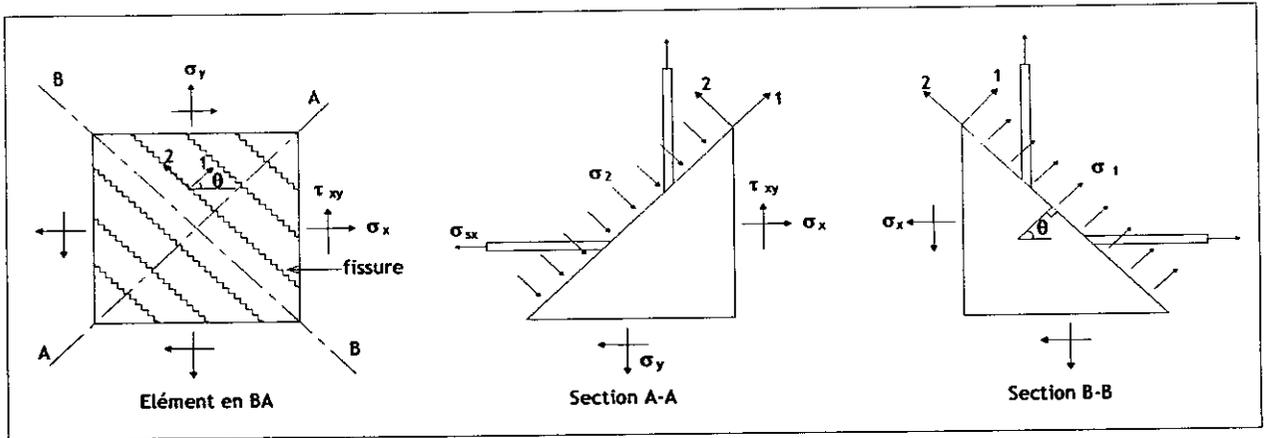


Figure 3.16 : Notations du DSFM. [95]

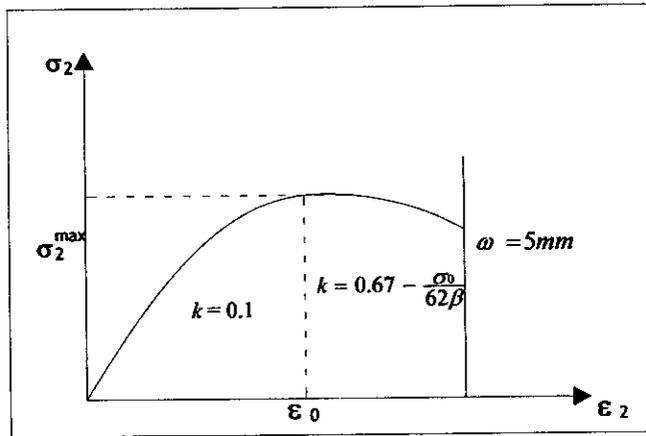


Figure 3.17 : Diagramme  $\sigma_2 - \epsilon_2$  (DSFM). [95]

Le coefficient  $\beta$  est donné par :

$$\beta = 1 + C_s \cdot C_d \geq 1.0$$

Avec :

$$C_d = 0.35 \left( -0.28 - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \right)^{0.8}$$

Ou dans une forme plus simplifiée :

$$C_d = 0.27 \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} - 0.37 \right)$$

A noter ici que  $\varepsilon_2$  et  $\varepsilon_0$  sont tous négatifs (compression)

Le paramètre  $C_s$  est utilisé pour tenir compte du glissement au niveau des fissures.

- $C_s = 0.55$  si le glissement n'est pas négligé et il n'y a pas de rotation dans la fissuration.
- $C_s = 1.0$  dans d'autres cas

Pour le cas de la relation entre les contraintes de traction principales et les déformations (Figure 3.15), la partie I de la courbe est identique au MCFT tandis que la deuxième partie est donnée par :

$$\sigma_1 = \frac{f_t}{1 + \sqrt{C_1 \varepsilon}} \tag{3.24}$$

Avec :  $C_1 = 2.2 m$

$$\frac{1}{m} = \sum_{i=1}^n \frac{4 \rho_i}{\phi_i} |\cos \theta_{ni}|$$

$n$  = nombre de nappes d'acier

$\rho_i$  = rapport de renforcement  $i = A_{si} /$  section du béton unitaire.

$\phi_i$  = diamètre des barres de renforcement  $i$ .

$\theta_{ni}$  = angle effectué par le renforcement  $i$  avec la normale à la fissure (voir figure 3.16)

c) Softened truss model (STM) : [76]

En utilisant les mêmes notations que le MCFT et le DSFM, les lois constitutives sont les suivantes :

- Relation  $\sigma_2 - \varepsilon_2$  :

$$\sigma_2 = \xi \sigma_0 \left[ 2 \left( \frac{\varepsilon_2}{\xi \varepsilon_0} \right) - \left( \frac{\varepsilon_2}{\xi \varepsilon_0} \right)^2 \right] \quad \frac{\varepsilon_2}{\xi \varepsilon_0} \leq 1 \tag{3.25}$$

$$\sigma_2 = \xi \sigma_0 \left[ 1 - \left( \frac{\frac{\varepsilon_2}{\xi \varepsilon_0} - 1}{\frac{4}{\xi} - 1} \right)^2 \right] \quad \frac{\varepsilon_2}{\xi \varepsilon_0} > 1$$

Avec :  $\xi$  = Coefficient d'adoucissement

$$\xi = \frac{5.8}{\sqrt{\sigma_0}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{400 \varepsilon_1}{\eta'}}} \leq 0.9 \quad , (\sigma_0 \text{ en MPa})$$

$$\eta = \frac{\rho_y f_y' - \sigma_y}{\rho_x f_y' - \sigma_x}$$

$\rho_y, \rho_x, f_y^y$  et  $f_y^x$  sont respectivement le rapport de renforcement et les limites d'élasticité de l'acier dans les deux direction  $x$  et  $y$ .

$\sigma_x$  et  $\sigma_y$ , sont les contraintes appliquées.

Le STM modifie les relations  $\sigma_s - \varepsilon_s$  de l'acier pour tenir compte de l'interaction acier – béton (tension – stiffening) comme montré dans la figure 3.18.

Partie I :  $\sigma_s = E_s \varepsilon_s$  si :  $\varepsilon_s \leq \varepsilon_y$

Partie II :  $\sigma_s = f_y \left[ (0.91 - 2B) + \left( 0.02 + 0.25B \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_y} \right) \right]$  Si :  $\varepsilon_s > \varepsilon_y$

Avec :  $B = \frac{1}{\rho} \left( \frac{0.31 \sqrt{f_c}}{f_y} \right)^{1.5}$

$\rho \geq 0.5\%$

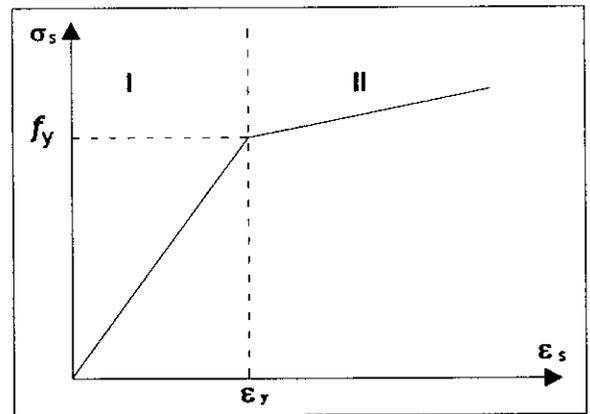


Figure 3.18 : Diagramme  $\sigma_s - \varepsilon_s$  (STM). [76]

### 3.3.3.4 Adhérence acier – béton :

L'adhérence entre l'acier et le béton est le résultat de trois phénomènes complexes :

- 1) Adhésion chimique de la pâte du ciment lors de son durcissement sur la surface de la barre ;
- 2) Frottement et engrenage des petites particules du sable entre la barre et la masse du béton ;
- 3) Interaction mécanique entre l'acier et le béton.

Dans la plupart des travaux trouvés dans la littérature, l'hypothèse de compatibilité de déplacement entre l'acier et le béton a été adoptée. Or, cette hypothèse n'est correcte que lorsque il n'y a pratiquement pas de transfert de force entre l'acier et le béton. Dans les régions proche des zones d'ancrage ou proche des fissures (Figure 3.9), un transfert de force non négligeable s'effectue du béton à l'acier et vice - versa. Ces contraintes d'adhérence sont fonction du glissement qui est lui même fonction de la différence de déformations de l'acier et du béton [96]. Deux approches sont généralement suivies pour modéliser l'adhérence dans la MEF : soit en agissant sur les courbes  $\sigma - \varepsilon$  des matériaux (tension – stiffening) soit en utilisant des éléments de contact lorsqu'une représentation discrète des aciers dans la maille est possible. Ces éléments de contact ont une épaisseur nulle (voir figure 3.19) et lient le béton à l'acier. Keuser et melhorn [96] ont rapporté que les éléments linéaire ou quadratique (Figure 3.19) donnent des résultats nettement meilleurs que ceux obtenus en utilisant l'élément ressort.

La figure 3.20 montre une relation typique entre l'adhérence et le glissement obtenue à partir de l'essai Pull – out d'une barre.

$\tau_{max}^1 = 3.34 Mpa ; E_{A1} = 328 Mpa/mm ; E_{A2} = 70 Mpa/mm$  [71]

$\tau_{max}^1 = 2 Mpa ; E_{A1} = 200 Mpa/mm ; E_{A2} = 0$  [10]

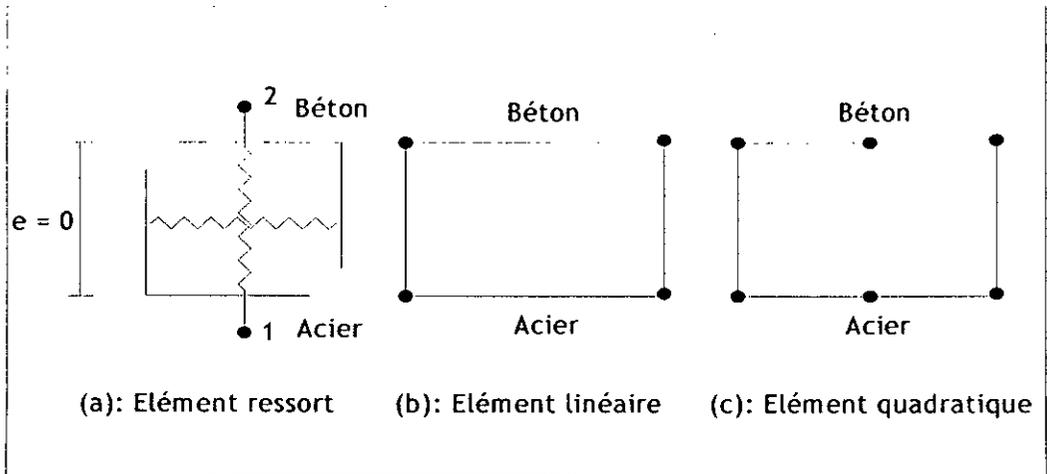


Figure 3.19 : Eléments de contact.

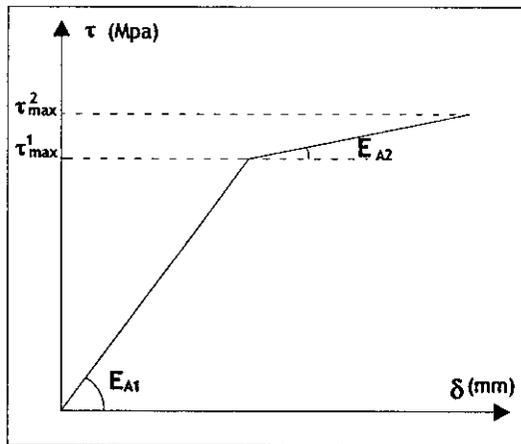


Figure 3.20 : Contrainte d'adhérence – glissement  $\delta$ (mm).

**3.3.4 Loi Constitutive des plaques de renforcement :**

Les plaques de renforcement en acier ont un comportement essentiellement identique aux armatures du béton (voir section 2.3.2). Le comportement des plaques en FRP est essentiellement élastique linéaire avec une rupture fragile comme montré dans la figure 3.21.

$f_{PL} = 600 \div 3000 \text{ MPa}$   
 $E_P = 4500 \div 62000 \text{ MPa}$   
 $\nu_P = 0.22 \div 0.30$

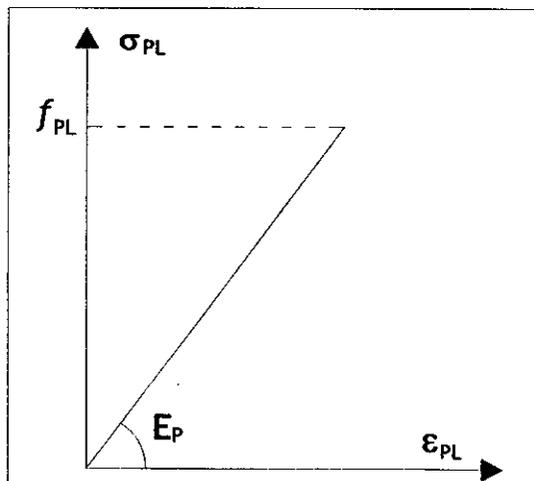


Figure 3.21 : Diagramme contrainte – déformation pour une plaque de FRP.

3.3.5 Ecriture incrémentale des lois constitutives :

Dans l'espace des coordonnées cartésiennes les contraintes sont liées aux déformations par :

$$\{\sigma_{xy}\} = [D_{xy}] \{\varepsilon_{xy}\} \tag{3.26}$$

Avec :

$$[D_{xy}] = \text{matrice des propriétés des matériaux (matrice } 3 \times 3\text{)}.$$

Dans une analyse non linéaire par la MEF les propriétés des matériaux sont généralement définies dans l'espace des coordonnées des déformations principales. Ces déformations principales sont données par :

$$\{\varepsilon_{12}\} = [T] \{\varepsilon_{xy}\} \tag{3.27}$$

Avec :

$$[T] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & sc \\ s^2 & c^2 & -sc \\ -2sc & 2sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

$c = \cos \alpha$  ,  $s = \sin \alpha$  ,  $\alpha = \text{angle entre les axes (x-y) et (1-2)}$

De la même manière les contraintes cartésiennes sont données par :

$$\{\sigma_{xy}\} = [T]^T \{\sigma_{12}\} \tag{3.29}$$

$$\text{Or : } \{\sigma_{12}\} = [D_{12}] \{\varepsilon_{12}\} \tag{3.30}$$

Donc :

$$\{\sigma_{xy}\} = [T]^T [D_{12}] [T] \{\varepsilon_{xy}\} \tag{3.31}$$

$$\text{Dans une forme incrémentale : } \{\Delta \sigma_{12}\} = [D_{12}] \{\Delta \varepsilon_{12}\} \tag{3.32}$$

Soit :

$$\begin{Bmatrix} \Delta \sigma_1 \\ \Delta \sigma_2 \\ \Delta \tau_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} E_1 & \nu E_2 & 0 \\ \nu E_1 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu^2) G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_1 \\ \Delta \varepsilon_2 \\ \Delta \gamma_{12} \end{Bmatrix} \tag{3.33}$$

On suppose dans ce cas que le coefficient du Poisson est constant dans toutes les directions.  $E_1$  et  $E_2$  sont les modules tangents du matériau dans les deux directions,  $G$  est le module de cisaillement. On constate aussi que la matrice  $[D_{12}]$  n'est pas symétrique, ce qui conduit à des matrices de rigidités qui ne sont pas symétriques, et donc à un système difficile à résoudre. Par conséquent, la matrice  $[D_{12}]$  est donnée par :

$$[D_{12}] = \frac{1}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} E_1 & \nu \sqrt{E_1 E_2} & 0 \\ \nu \sqrt{E_1 E_2} & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu^2) G \end{bmatrix}$$

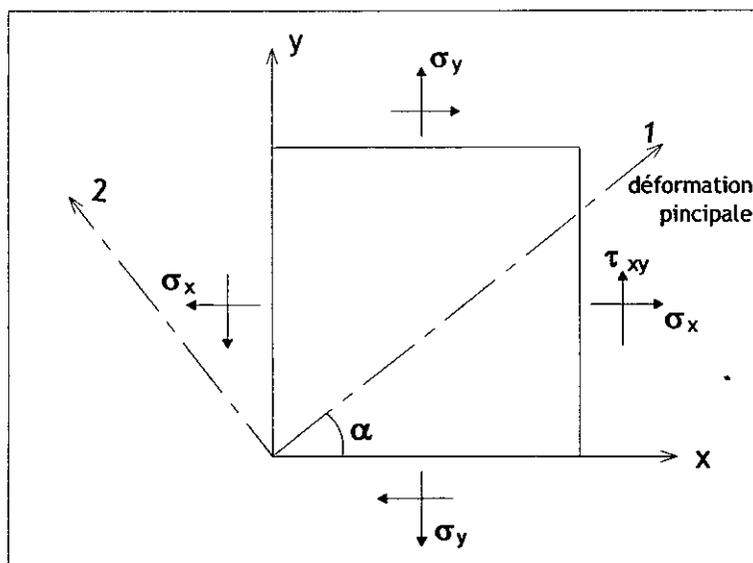
$$\text{Ou : } [D_{12}] = \frac{1}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} E_1 & \nu(E_1 + E_2)/2 & 0 \\ \nu(E_1 + E_2)/2 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu^2) G \end{bmatrix} \tag{3.34}$$

**A) Béton :**

La figure 3.22 montre un élément de béton soumis à un état de contrainte plane. A l'état non fissuré du béton, les matériaux sont considérés isotropes avec un comportement linéaire élastique. La matrice  $[D_{12}]$  est donnée par :

$$[D_{12}] = \frac{E_0}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

Où :  $E_0$  est le module de Young initial.



**Figure 3.22 : Elément de béton.**

Etat de compression – compression :

La matrice  $[D]$  est donnée par :

$$[D_{12}] = \frac{1}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} E_1 & \nu\sqrt{E_1E_2} & 0 \\ \nu\sqrt{E_1E_2} & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu^2)G \end{bmatrix} \tag{3.36}$$

Avec :  $(1-\nu^2) G = \frac{1}{4} (E_1 + E_2 - 2\nu\sqrt{E_1E_2})$

$E_1$  et  $E_2$  sont les modules tangents du béton dans les directions d'orthotropie (obtenu de la relation utilisée pour  $\sigma - \epsilon$  en compression). Le coefficient de Poisson est généralement considéré comme constant jusqu'au stade de la rupture.

Etat de compression – traction :

Lorsque l'une des contraintes principales dépasse la résistance à la traction du béton, le béton se fissure dans une direction normale à la contrainte principale (Figure 3.23)

La matrice  $[D]$  dans ce cas est donnée par :

$$[D_{12}] = \begin{bmatrix} E_1^f & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_{cr} \end{bmatrix} \tag{3.37}$$

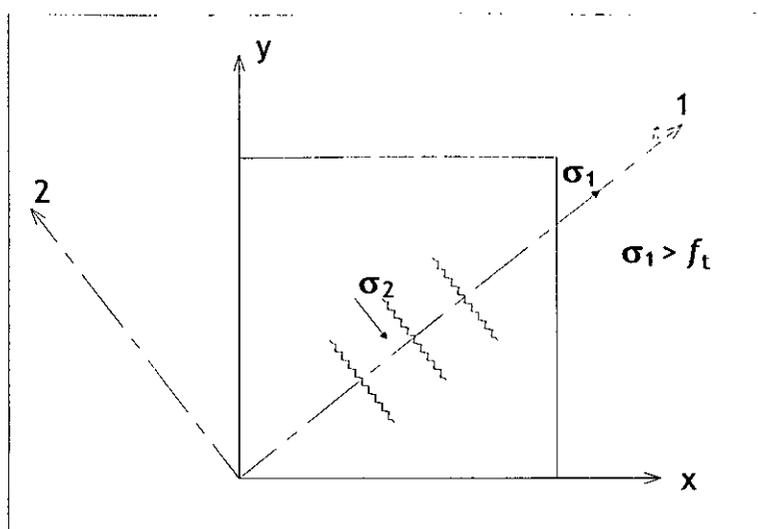


Figure 3.23 : Élément du béton soumis à  $\sigma_1$  traction et  $\sigma_2$  compressions.

Le coefficient du Poisson est nul, et le module  $E_1^r$  est soit nul soit obtenu à partir des courbes d'adoucissement du béton (*tension softening* ou *tension stiffening*) décrites dans les figures 3.4 et 3.10.  $E_2$  est le module tangent du béton ( $\frac{d\sigma_2}{d\varepsilon_2}$ ) en compression, il est généralement obtenu des modèles MCFT, DSFT ou STM.

#### Etat de traction – traction :

Lorsque la résistance du béton à la traction est dépassée dans l'une des directions principales uniquement, la matrice  $[D]$  est donnée par :

$$[D_{12}] = \begin{bmatrix} E_1^r & 0 & 0 \\ 0 & E_0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{cr} \end{bmatrix} \quad 3.38$$

Lorsque le béton est fissuré dans les deux directions :

$$[D_{12}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{cr} \end{bmatrix} \quad 3.39$$

Le coefficient  $G_{cr}$  est un module de cisaillement réduit utilisé dans la matrice  $[D]$  pour représenter les efforts de cisaillement d'engrènement des granulats et de frottement des lèvres de la fissure. Plusieurs formules ont été proposées pour l'évaluation de  $G_{cr}$  :

$$G_{cr} = \beta \frac{E_0}{2} \quad \text{avec : } \beta \leq 1 \quad (\beta \approx 0.1 \div 0.6) \quad [61, 62] \quad 3.40$$

$$G_{cr} = E_0 / 2 (1 + 4447 \varepsilon_f), \quad \varepsilon_f = \text{déformation de la fissure} \quad [97] \quad 3.41$$

$$G_{cr} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} \quad \text{“Fixed angle softened truss model FA-STM [76]”} \quad 3.42$$

L'utilisation de  $G_{cr}$  permet de représenter le transfert des contraintes de cisaillement le long des fissures et éviter les difficultés numériques associées avec des matrices singulières. Cependant, au fur et à

mesure que la charge est augmentée, l'introduction du coefficient  $G_{cr}$  dans la matrice  $[D]$  conduit à une rotation des axes des contraintes principales (Figure 3.24) dans un point d'intégration fissuré [98]. De plus, l'utilisation des courbes d'adoucissement du béton en traction peut conduire à des contraintes principales de traction qui dépassent largement la résistance en traction dans une autre direction que celle normale à la fissure initiale si la direction de cette fissure est fixée à celle de son initiation. Sans le coefficient  $G_{cr}$  la contrainte  $\tau = 0$  et le phénomène décrit précédemment ne peut pas avoir lieu.

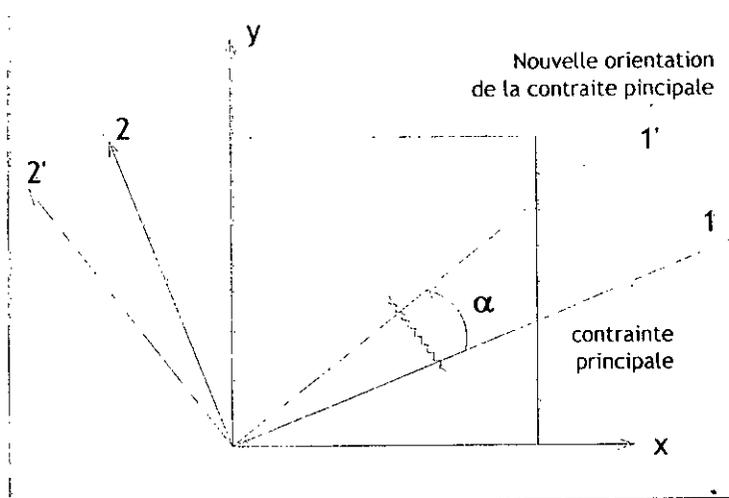


Figure 3.24 : Rotation des axes des contraintes principales.

Deux approches sont donc suivies dans une analyse non linéaire par éléments finis des structures en béton armé. Lorsque les axes définissant les propriétés des matériaux (axe 1-2) dans un point de gauss sont confondus avec les directions initiales de la fissure et les équations 3.37 à 3.39 sont appliquées, l'approche est désignée par *axes de propriété des matériaux fixés* « *Fixed crack model (FCM)* ». Si par contre les axes définissant les propriétés des matériaux suivent l'orientation des axes des contraintes principales ( $G_{cr} = 0$  dans les équations 3.37 à 3.39) dans un point d'intégration, l'approche est dénommée *axes de propriété des matériaux tournants* « *rotating crack model (RCM)* ». Du point de vue pratique le RCM est utilisé dans le cas des structures en béton armé d'une manière orthotrope c.à.d le ferrailage dans la direction  $x$  est nettement différent de celui de la direction  $y$ . Pour les autres cas, tels que les structures avec un ferrailage identique dans les deux directions et les structures non armées ou avec un ferrailage principal dans une seule direction uniquement le FCM est plus utilisé.

## B) Acier :

Généralement deux approches sont suivies dans la modélisation des armatures dans une structure en béton armé : le modèle continu et le modèle discret.

### 1) Modèle continu :

Les armatures sont supposées être uniformément distribuées sur toute la surface de l'élément avec une inclinaison  $\phi$  de  $x$ , c.à.d les armatures sont remplacées par une couche ou pli équivalent, voir figure 3.25. La loi constitutive dans ce cas est développée pour le matériau composite : béton armé.

La matrice des propriétés des matériaux du composite béton armé est donnée par :

$$[D] = [D_b] + \sum_{i=1}^n [T_{\phi_i}] [D_{s_i}] [T_{\phi_i}] \quad 3.43$$

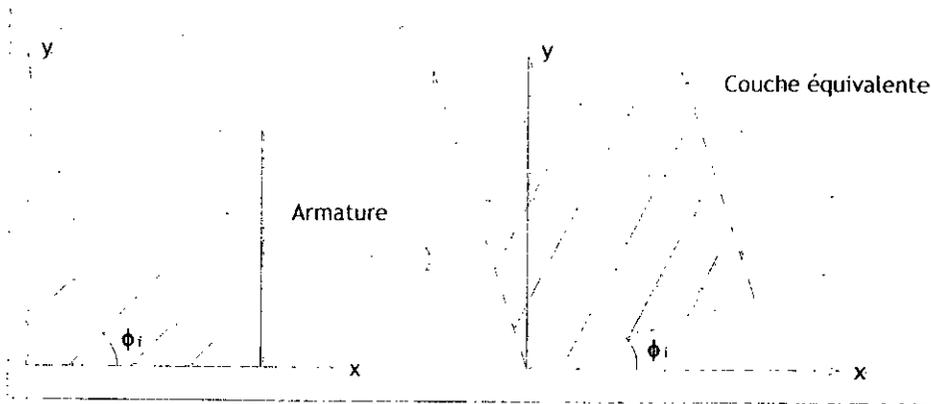


Figure 3.25: Model continu de l'acier.

$$[D_{si}] = \rho_i \begin{bmatrix} E_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \rho_i = \text{pourcentage de l'acier} = A_s / \text{Aire de l'élément.}$$

$[D_b]$  = matrice du matériaux béton.

$[T_{\phi}]$  = matrice de transformation (angle  $\phi_i$ )

$[D_{si}]$  = matrice du matériaux acier.

2) Modèle discret :

Les armatures dans ce modèle sont représentées dans la maille par des éléments unidimensionnels (barre ou poutre). Cette représentation permet de prendre en considération l'interaction acier – béton (Figure 3.26).

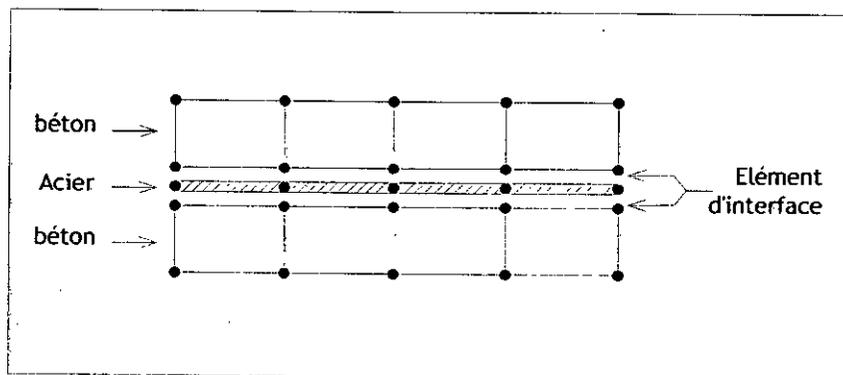


Figure 3.26 : Modèle d'acier discret.

A titre d'exemple la matrice de rigidité d'un élément treillis à deux nœuds est donnée par :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \frac{AE_s}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$



3.3.6) Interface plaque béton :

Les plaques d'acier ou de FRP sont fixées au béton par l'intermédiaire d'une couche adhésive en résine époxyde. Puisque l'épaisseur de la couche d'adhésif est généralement petite ( $1 \div 3\text{mm}$ ), la plupart des travaux trouvés dans la littérature [10, 55, 56, 88, 99, 100] représentent cette couche par un élément d'interface (Figure 3.27). A part Zirba et al [55] qui ont utilisé des élément couches pour représenter l'interface, tous les autres chercheurs ont opté pour un élément d'interface type Goodman c.à.d avec une épaisseur nulle (Figure 3.28) pour représenter la même interface.

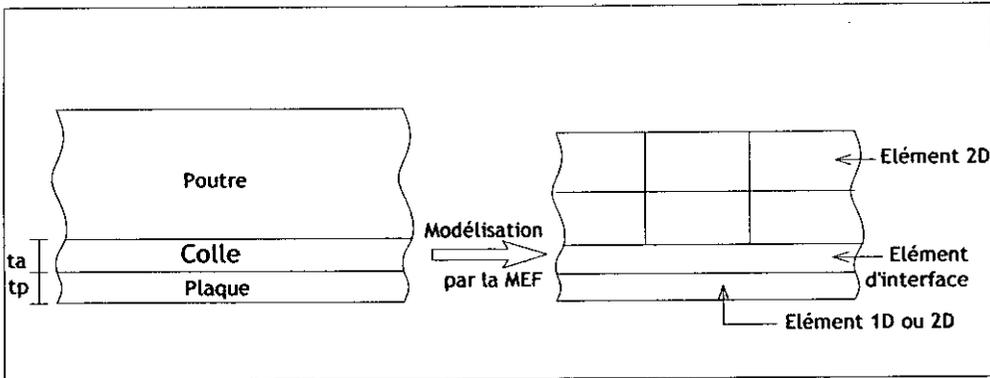


Figure 3.27 : Modélisation de la couche d'adhésif.

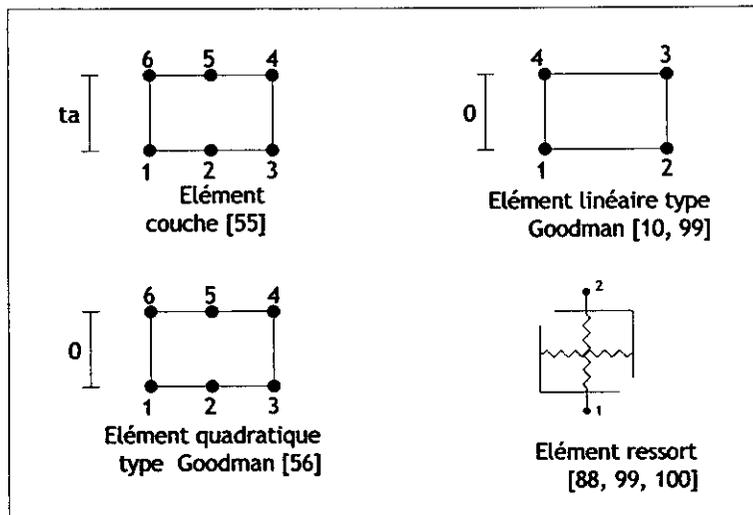


Figure 3.28 : Type d'élément d'interface utilisé.

A titre indicatif, nous allons donner ci-après le développement de la matrice de rigidité d'un élément d'interface type Goodman à six nœuds (figure 3.29). Seules deux composantes de contrainte (cisaillement le long de  $u$  et contrainte normale suivant  $v$ ) agissent sur cet élément d'interface. Ces contraintes sont dues aux déplacements relatifs entre la plaque et le béton.

Les relations constitutives de l'élément sont données par :

$$\begin{Bmatrix} \tau \\ \sigma \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} u_r \\ v_r \end{Bmatrix}$$

Avec :  $u_r = u_b - u_p$  et  $v_r = v_b - v_p$

Les indices **b** et **p** désignent respectivement le béton et la plaque.

Donc :

$$u_r = \sum_{i=1}^3 N_i (u_{bi} - u_{pi}); \quad v_r = \sum_{i=1}^3 N_i (v_{bi} - v_{pi}) \tag{3.45}$$

$N_i$  : sont les fonctions d'interpolation de l'élément.

$$N_1 = -\frac{\zeta}{2} (1 - \zeta); \quad N_2 = (1 - \zeta^2); \quad N_3 = \frac{\zeta}{2} (1 + \zeta) \tag{3.46}$$

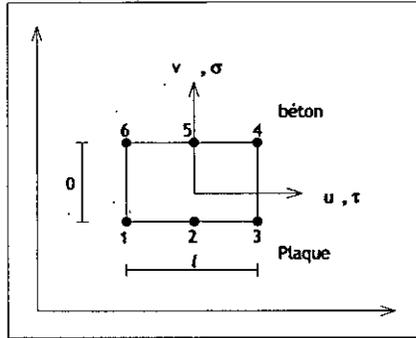


Figure 3.29 : Elément d'interface à six nœuds.

Si on désigne par  $\{u_n\}^T = \{u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_6, v_6\}$  le vecteur de déplacement de l'élément nous aurons :

$$\begin{Bmatrix} u_r \\ v_r \end{Bmatrix} = [B] \{u_n\} \tag{3.47}$$

Avec :

$$[B] = \begin{bmatrix} -N_1 & 0 & -N_2 & 0 & -N_3 & 0 & N_3 & 0 & N_2 & 0 & N_1 & 0 \\ 0 & -N_1 & 0 & -N_2 & 0 & -N_3 & 0 & N_3 & 0 & N_2 & 0 & N_1 \end{bmatrix} \tag{3.48}$$

La matrice [D] est donnée par :

$$[D] = \begin{bmatrix} K_s & 0 \\ 0 & K_N \end{bmatrix} \tag{3.49}$$

$K_s$  et  $K_N$  sont les rigidités tangentielles et normales de l'interface.

En appliquant le principe des travaux virtuels, nous obtiendrons la matrice de rigidité de l'élément d'interface :

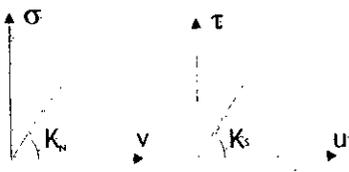
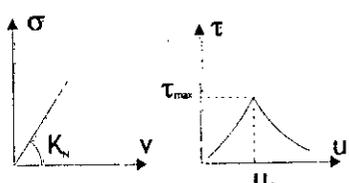
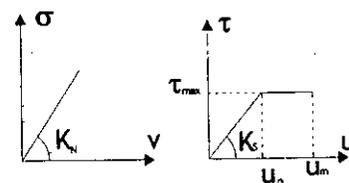
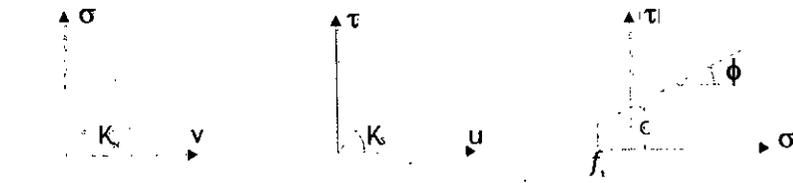
$$[K] = \int [B]^T [D] [B] ds \tag{3.50}$$

Avec :

$$ds = l \det J d\xi$$

Le tableau 3.1 regroupe les principaux résultats trouvés dans la littérature.

Tableau 3.1 : Modèle de rupture pour l'interface.

Réf	Plaque	Modèle
[10]	FRP	 <p> <math>K_N = 12800 \text{ MPa/mm}</math>  <math>K_S = 2900 \text{ MPa/mm}</math>  <math>\sigma_{\max}</math> et <math>\tau_{\max}</math> non spécifiée                 </p>
[10] [100]	FRP et Acier	 <p> <math>\tau = \tau_{\max} \sqrt{u/u_0}</math> si : <math>u \leq u_0</math>  <math>\tau = \tau_{\max} e^{-\alpha \left(\frac{u}{u_0} - 1\right)}</math> si : <math>u &gt; u_0</math>  <math>\tau_{\max} = 1.5 \beta_\omega f_t</math> ; <math>u_0 = 0.0195 \beta_\omega f_t</math> </p> <p> <math>\beta_\omega = \sqrt{(2.25 - b_p/b_b) / (1.25 + b_p/b_b)}</math> </p> <p> <math>\alpha = \frac{1}{(G_f / \tau_{\max} s_0) - 2/3}</math> </p> <p> <math>K_N = \begin{cases} \infty &amp; \text{si } \sigma \text{ de compression} \\ \infty &amp; \text{si } \sigma \text{ de traction et pas de glissement} \\ 0 &amp; \text{d'autre cas} \end{cases}</math> </p> <p> <math>G_f = 0.308 \beta_\omega^2 \sqrt{f_t}</math> </p> <p> <math>b_p</math> : Largeur de la plaque de FRP (mm) ; <math>u_0</math> en (mm)  <math>b_b</math> : Largeur du béton (mm) ; <math>\tau</math> en (mm)  <math>G_f</math> : Energie de rupture de l'interface (MPa/mm)  <math>f_t</math> : Résistance en traction du béton (MPa)                 </p>
[99]	FRP et GFRP	 <p> <math>K_S = G_a / t_a</math>  <math>G_a = \frac{E_a}{2(1 + \nu_a)}</math> </p> <p> <math>t_a</math> : Epaisseur de l'adhésif  <math>E_a</math> : Module d'élasticité de l'adhésif                 </p> <p> <math>\tau_{\max} = 3.5 \text{ (FRP) et } 2.5 \text{ (GFRP)}</math>  <math>u_m = 0.5 \text{ (FRP) et } 0.67 \text{ (GFRP)}</math>  <math>u_0 = 0.01 \text{ mm}</math>  <math>K_N = \infty</math> </p>
[56]	Acier	 <p> <math>K_S = 60 \text{ MPa/mm}</math>  <math>K_N = 144 \text{ MPa/mm}</math> </p> <p>La rupture de l'interface suit le critère de Mohr Coulomb</p> <p> <math> \tau  = C - \sigma \tan \phi</math> </p> <p> <math>C = 5 \text{ MPa}</math> ; <math>\phi = 30^\circ</math> </p>

3.4 Technique de résolution du système d'équations :

Le meilleur moyen servant comme introduction aux techniques de résolution du système non linéaire d'équations est peut être de commencer par un exemple simple qui permet d'illustrer clairement les problèmes rencontrés dans la résolution du système d'équation. Supposant que l'objectif est de résoudre l'équation non linéaire suivante :

$$f_i(u) = f_e \tag{3.51}$$

Avec :  $f_i(u)$  = force interne qui dépend de  $u$   
 $f_e$  = force externe

Puisque la solution de l'équation 3.51 ne peut pas être obtenue directement, un processus itératif est généralement nécessaire pour approximer la solution de l'équation. Dans ce cadre, supposons qu'on a commencé notre approximation par  $u = u^*$  (figure 3.30a), on définit le résidu par :

$$r^*(u) = f_e - f_i(u^*) \neq 0 \tag{3.52}$$

L'objectif du processus itératif est de produire des meilleures approximations à  $u$  tel que le résidu devient très faible (de préférence nul). Lorsque ce processus devient très long ou ne converge pas, la force externe est appliquée graduellement en incrément comme montré dans la figure 3.30b. Dans chaque incrément de la charge, on œuvrera à trouver l'état d'équilibre moyennant un processus itératif.

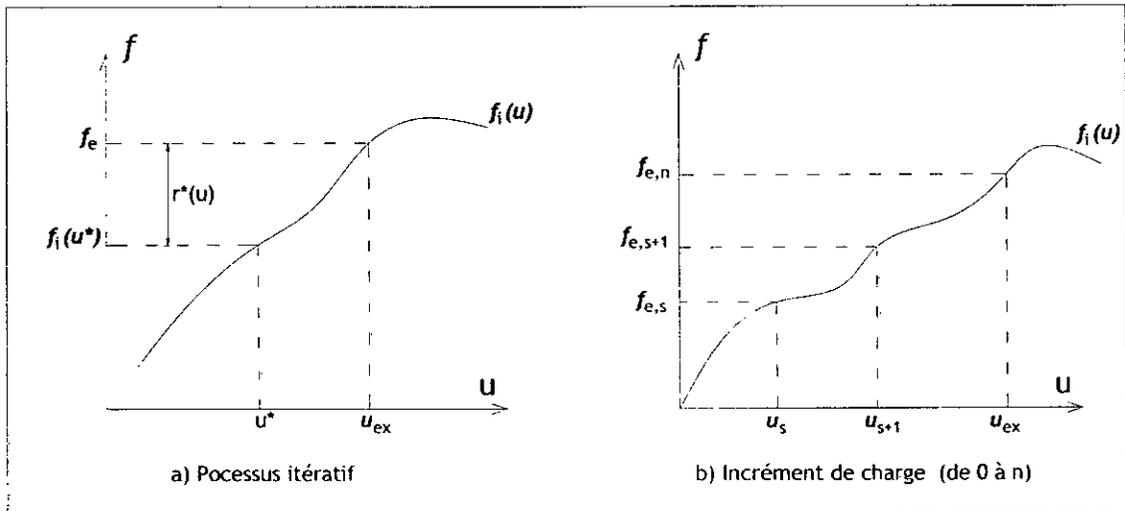


Figure 3.30 : Processus itératif et incrément de la charge.

Dans la méthode de Newton Raphson la solution de l'équation 3.51 est obtenue par sommation de l'approximation  $u^*$  avec une erreur  $\delta u$  inconnue :

$$f_i(u^* + \delta u) = f_e$$

Le développement de l'équation précédente par la méthode de Taylor donne:

$$f_i(u^*) + \left. \frac{df_i}{du} \right|_{u^*} \delta u = f_e$$

$$f_i(u^*) + K_T(u^*) \delta u = f_e \Rightarrow K_T(u^*) \delta u = f_e - f_i(u^*) = r^*(u) \tag{3.53}$$

Avec :  $K_T(u^*) = \left. \frac{df_i}{du} \right|_{u^*}$  = matrice tangente

Une nouvelle approximation de  $u_{ex}$  est obtenue par simple sommation de l'approximation initiale avec  $\delta u$  :

$$u^{**} = u^* + \delta u$$

Dans le cas où  $u^{**}$  diminue le résidu, la solution est entrain de converger (Figure 3.31).

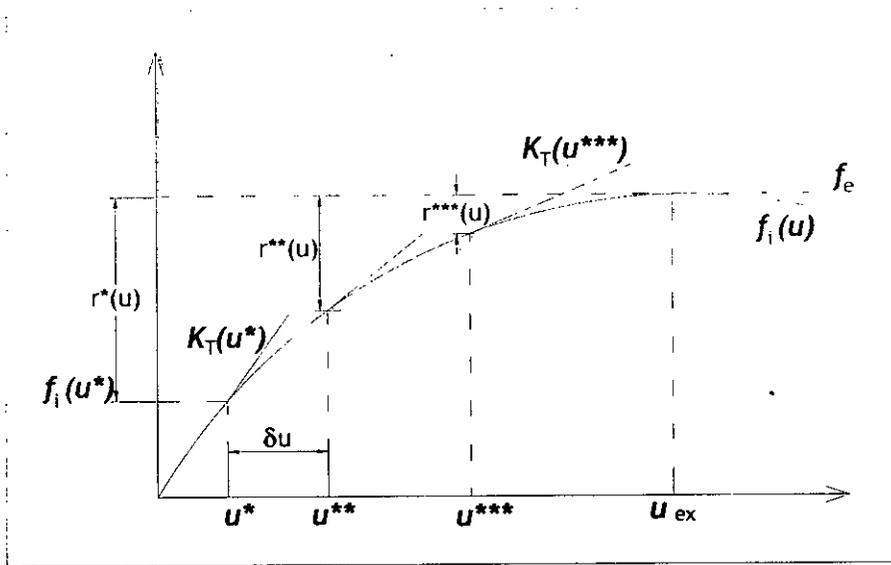


Figure 3.31 : Méthode de Newton Raphson.

Le contrôle de la convergence de la solution est effectué en comparant les résidus  $r^*(u)$  ou les erreurs  $\delta u$  sur les déplacements à des tolérances fixées au préalable. Si les valeurs de  $r^*(u)$  ou de  $\delta u$  ne sont pas faible une autre itération est effectuée pour déterminer une nouvelle approximation jusqu'à satisfaction des critères de convergence.

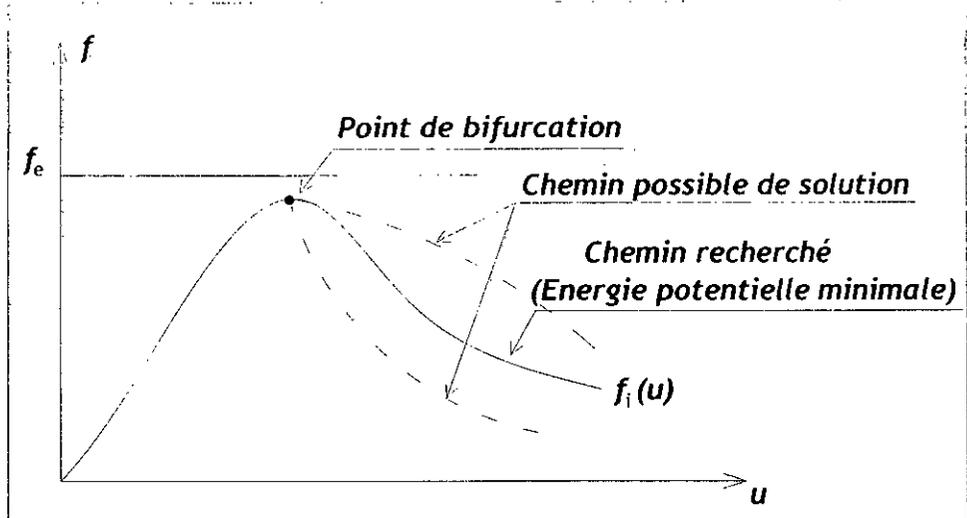
Critère de convergence :

$$|r(u)| \leq C_r \quad ; \quad \text{Ou} \quad |\delta u| \leq C_u$$

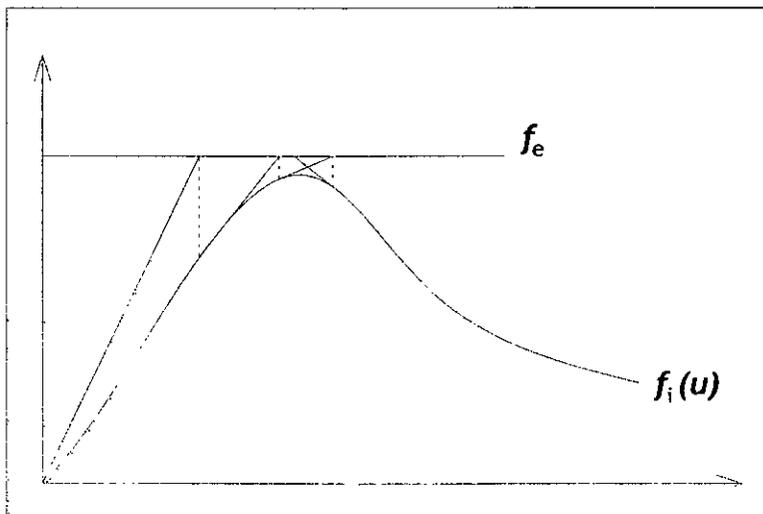
L'utilisation des lois constitutives d'adoucissement pour les matériaux (réduction de  $\sigma$  avec augmentation de  $\epsilon$  en traction ou compression) dans le modèle de la MEF peut conduire à des systèmes instables possédant plusieurs chemins d'équilibre. En effet, les éléments qui se trouvent dans un état d'adoucissement contribuent négativement à la matrice globale tangente  $[K_T]$ . Le cumul de ces contributions négatives à  $[K_T]$  peut conduire à une matrice globale qui n'est pas positive définie. Par conséquent, le système d'équations possède plusieurs solutions et on dit qu'on est en présence d'un point de bifurcation (Figure 3.32).

L'application de la méthode de Newton Raphson peut conduire à des solutions qui divergent (Figure 3.33). Pour éviter ce problème la matrice  $[K_T]$  n'est pas actualisée à chaque itération, on parle alors de la *méthode de Newton Raphson Modifiée*. Dans ce cadre on distingue deux méthodes :

- a) Méthode de rigidité initiale ou constante : Dans ce cas la matrice de rigidité  $[K]$  est évaluée une seule fois au début de l'analyse, et elle est utilisée dans tous le processus itératif (Figure 3.34)
- b) Méthode de rigidité sécant : Dans ce cas la matrice de rigidité est évaluée généralement au début de chaque incrément de charge, et elle est gardée constante pendant tout le processus itératif de l'incrément (Figure 3.34). La méthode sécante est très bien adaptée pour les structures possédant un comportement d'adoucissement.



**Figure 3.32 :** Solution multiple pour un modèle avec des lois d'adoucissement.



**Figure 3.33 :** Divergence de la méthode de Newton Raphson pour les modèles avec adoucissement.

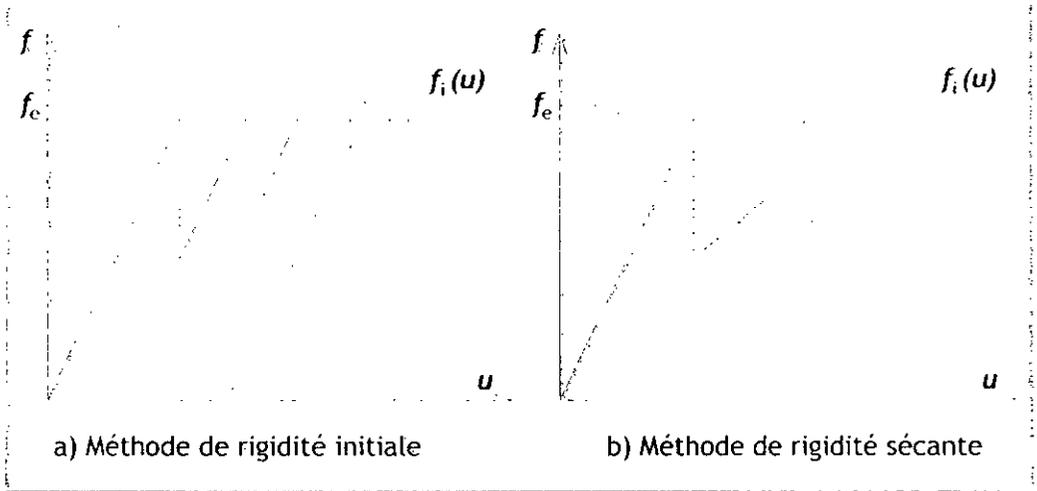


Figure 3.34 : Méthode de Newton Raphson modifiée.

3.5 Algorithme de solution :

Chaque algorithme d'une analyse non linéaire consiste en quatre étapes de base : 1) La formation de la matrice de rigidité actuelle ; 2) La solution des équations d'équilibre pour des incréments de déplacement ; 3) La détermination de l'état de contraintes de tous les éléments dans le modèle ; 4) La vérification de la convergence. Ces étapes sont présentées en détail dans l'organigramme de la figure 3.35 pour le problème de contrainte plane.

Dans la méthode des éléments finis, le système d'équation à résoudre est de la forme :

$$[K(u)]\{u\} = \{P\} \tag{3.54}$$

Pour le cas des poutres en béton armé les étapes à suivre dans la résolution du système d'équation sont les suivantes : (Figure 3.35)

- 1) Former la matrice de rigidité [K] pour les déplacements considérés

$$\{\varepsilon\}_{el} = [B]\{u\}_{el} \tag{3.55}$$

$$[K]_{el} = \int_s [B]^T [D] [B] ds \tag{3.56}$$

$$[K] = \sum_{i=1}^{NEL} [K]_{el} \tag{3.57}$$

- 2) Pour l'incrément de charge considéré i  $\{\Delta P\}$ , calculer les déplacement nodaux  $\{\Delta u\}$

$$[K]\{\Delta u\} = \{\Delta P\} \tag{3.58}$$

Actualiser les déplacements :

$$\{u\} = \{u\}^{i-1} + \{\Delta u\} \tag{3.59}$$

- 3) Déterminer les déformations par l'équation 3.55.
- 4) Calculer les déformations principales :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad 3.60$$

[T] = matrice de transformation ou de rotation.

$$\tan 2\theta = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \quad 3.61$$

- 5) Utiliser les lois constitutives pour déterminer les contraintes dans le repère de coordonnées globales.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad 3.62$$

- 6) Déterminer les contraintes principales  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ .

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad 3.63$$

- 7) Utiliser les contraintes principales pour déterminer l'état du matériau : non fissuré, fissuré, plastifié, ....etc. Corriger ces contraintes si ces dernières ne vérifient pas le critère de résistance.

- 8) Déterminer les nouvelles contraintes dans les coordonnées cartésiennes :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta \\ \sin\theta\cos\theta & -\sin\theta\cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix} \quad 3.64$$

- 9) Déterminer les forces internes :

$$\{\Delta F_i\} = \int [B] \{\sigma\} ds \quad 3.65$$

- 10) Répéter les étapes 3 à 9 pour chaque point de Gauss.

- 11) Vérifier les éléments de l'acier de ferrailage

- a) Déterminer les incréments de déplacement aux extrémités de l'élément
- b) Calculer les forces des aciers :

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix}$$

- c) Transformer les forces de l'acier du repère de coordonnées locales au repère de coordonnées globales pour obtenir la contribution du modèle d'acier dans le vecteur de force interne.

- d) Répéter les étapes (a) à (c) pour chaque élément d'acier.

- 12) Assemblage des forces internes.

- 13) Répéter les étapes 3 à 12 pour tous les éléments.

14) Calculer les résidus :

$$\{f\}_{résul} = \{f\}_{app} - \{f\}_{int}$$

15) Répéter les étapes 2 à 14 jusqu'à la convergence.

16) Incrémenter la charge et recommencer toutes les étapes citées dès le début.

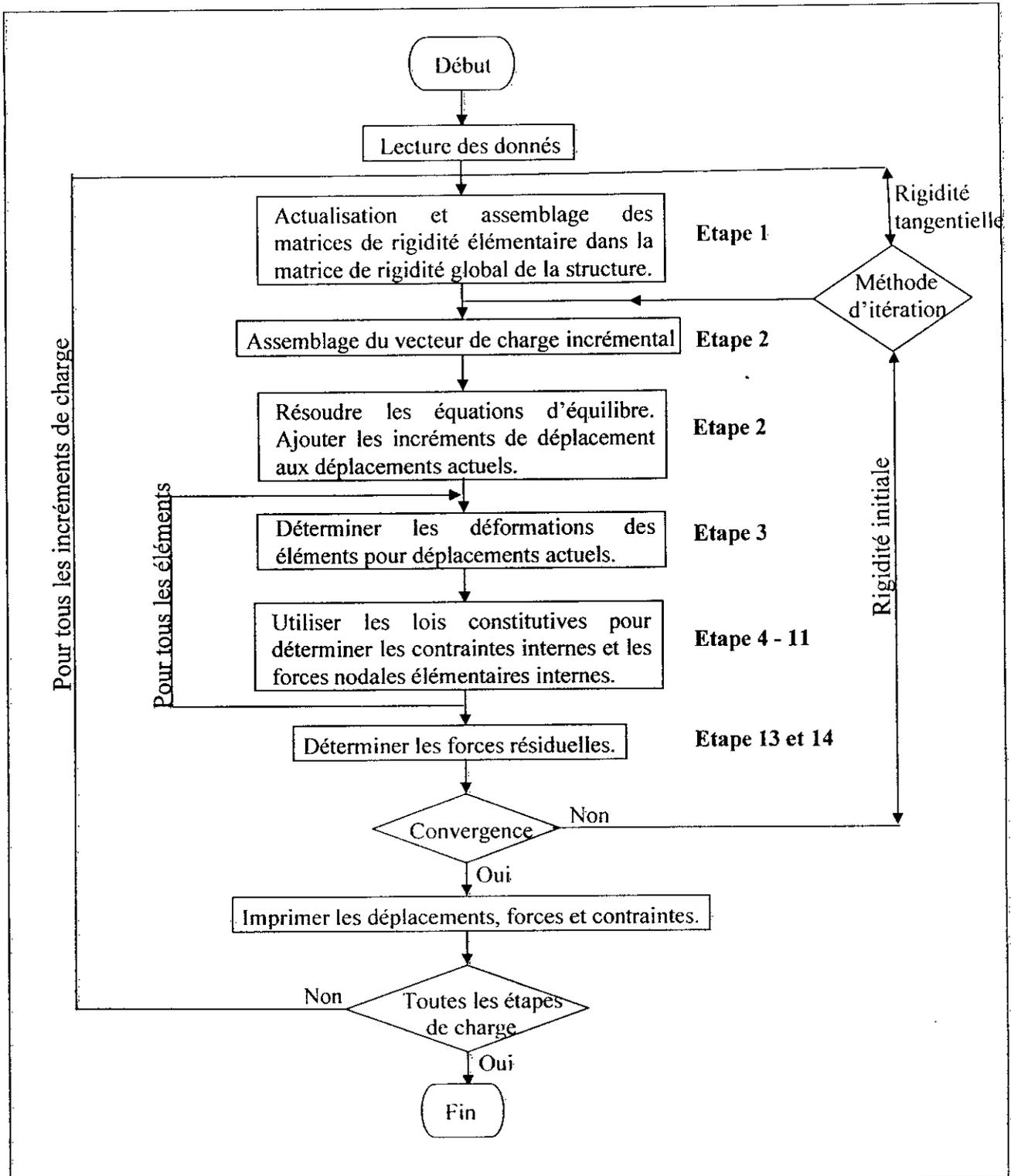


Figure 3.35 : Organigramme de solution.

## *Chapitre IV*

*Modélisation des Poutres par le*

*Biais du Logiciel ANSYS*

#### 4.1 Introduction :

Le logiciel ANSYS est basé sur la méthode des éléments finis, il est capable d'analyser les problèmes de la statique, de la dynamique, du transfert de chaleur, d'écoulement des fluides et d'électromagnétique. Dès sa création en 1971, le logiciel a connu plusieurs développements, qui ont étendu le champ de son application. La version ANSYS.9 qu'on a utilisé lors de notre étude est munie d'une interface graphique GUI qui facilite la tâche à l'utilisateur, et elle est dotée d'une bibliographie d'éléments assez riche capable à satisfaire pratiquement tous les problèmes pratiques de modélisation. Le logiciel est aussi capable de résoudre des problèmes non linéaires tels que ceux trouvés dans la mécanique des solides avec des modèles des matériaux assez variés, et des techniques de convergence les plus performantes.

Dans ce chapitre on va présenter la modélisation numérique par le biais du logiciel ANSYS des poutres renforcées sur leurs faces tendues par des plaques d'acier ou de CFRP. Les types des éléments utilisés dans cette étude, ainsi que les modèles des matériaux choisis vont être présentés. Il est à noter que la modélisation entreprise lors de cette étude moyennant le logiciel ANSYS est de type 3D.

#### 4.2 Types des éléments :

##### 4.2.1 Acier de ferrailage :

L'élément Link8 a été utilisé pour modéliser l'acier de ferrailage. C'est un élément linéaire à deux nœuds. Chaque nœud ayant trois degrés de liberté – translation dans les directions nodales  $x$ ,  $y$  et  $z$  – (Figure 4.1). Cet élément est aussi capable d'avoir des déformations plastiques. Un joint parfait entre le béton et l'acier de ferrailage a été considéré lors de cette étude. Ceci implique que le glissement relatif entre l'acier et le béton n'est pas permis et les nœuds de l'élément sont confondus avec ceux des éléments du béton adjacents. Les constantes réelles associées avec cet élément sont sa section transversale et sa déformation initiale qui a été prise nulle dans notre étude [101]. Les hypothèses associées avec cet élément sont :

- Chargement axial à ces extrémités uniquement.
- La longueur et la surface de l'élément ne doivent pas être nulle.
- La température est variée linéairement le long de l'élément.
- La déformation initiale est utilisée dans le calcul de la matrice de rigidité dans la première itération.

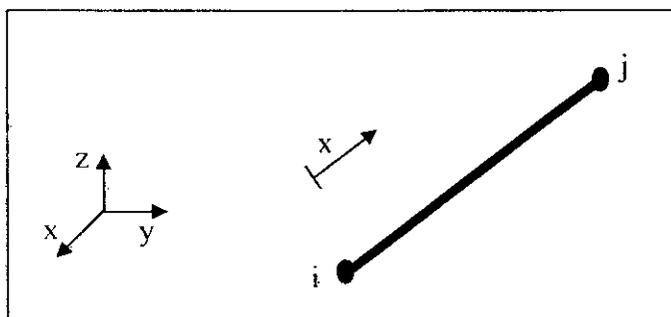


Figure 4.1 : Link8 – Élément linéaire 3-D (ANSYS 1998)

##### 4.2.2 Plaque d'acier et de CFRP :

Les plaques sont modélisées par un élément solide à huit (08) nœuds (Solid45). Chaque nœud de cet élément ayant trois degrés de liberté – translation dans les directions nodales  $x$ ,  $y$  et  $z$  – Cet élément est capable d'avoir des déformations plastiques [101]. La géométrie et la position des nœuds de cet élément sont montrées dans la figure 4.2.

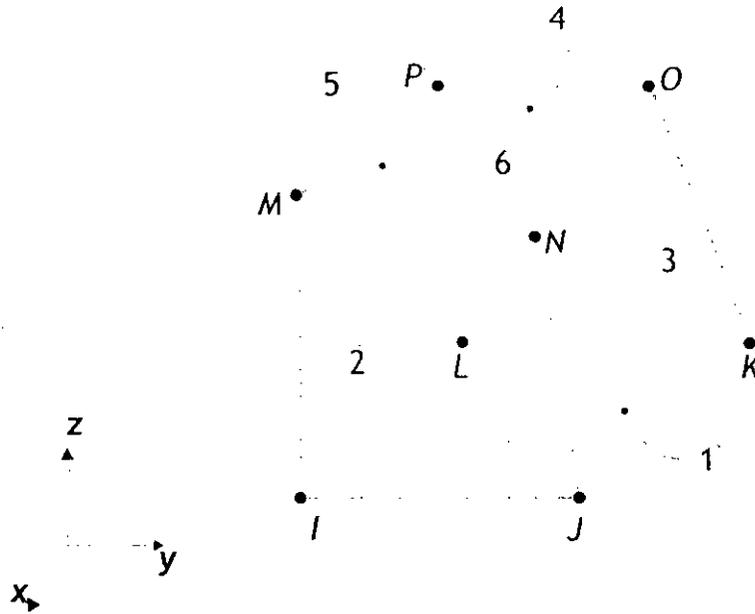


Figure 4.2 : Solid45 – Élément Solide 3-D (ANSYS 1998)

#### 4.2.3 Béton armé :

Pour le cas du béton, le logiciel ANSYS utilise l'élément Solid65. Cet élément ayant les mêmes propriétés que l'élément Solid45, mais il offre en plus la possibilité d'inclure l'acier de ferrailage dans l'élément, en définissant le rapport de volume de l'acier sur le volume du béton (appelé smeared concept). L'élément est capable d'avoir des déformations plastiques, la fissuration dans les trois directions orthogonales, l'écrasement du béton et le fluage. La géométrie et la position des nœuds de cet élément type est montré dans la figure 4.3. L'utilisation de cet élément est limitée par les conditions suivantes [101] :

- La fissuration n'est possible qu'aux points d'intégration dans les trois directions orthogonales.
- Le concept d'une fissuration continue est utilisé.
- Initialement le béton est considéré comme un matériau isotrope.
- Si on utilise l'option de renforcement de l'élément du béton, l'acier est supposé continu à travers l'élément.
- La surface de charge utilisée est celle de Drucker-Prager. Dans ce cadre la plasticité est effectuée avant la vérification de la fissuration et de l'écrasement.

Le joint entre la plaque et le béton est considéré comme parfait. Ceci conduit à lier les nœuds de l'élément représentant la plaque directement aux nœuds de l'élément correspondant du béton comme montré dans la figure 4.4b. Cette supposition du joint parfait a été justifiée expérimentalement suite à la résistance relativement élevée de la résine époxyde.

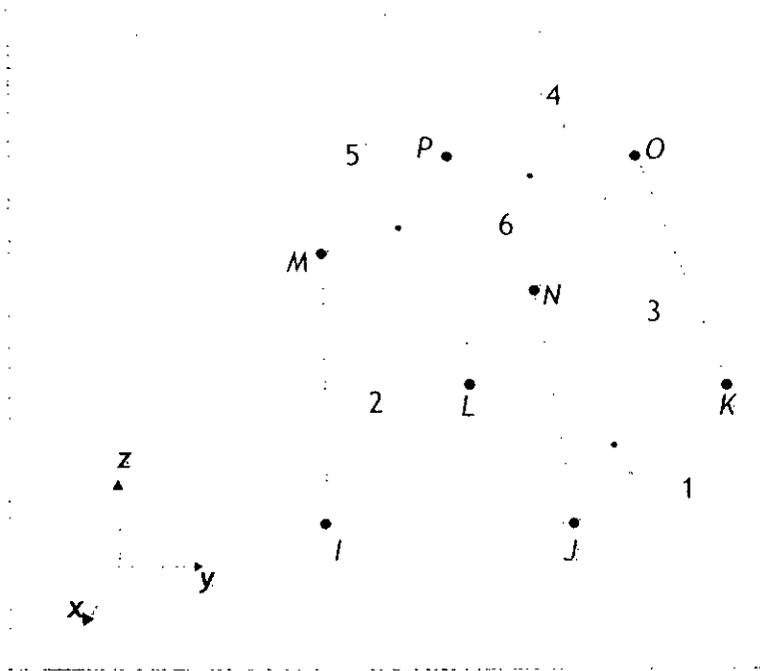


Figure 4.3 : Solid65 – Elément Solide 3-D du béton armé (ANSYS 1998)

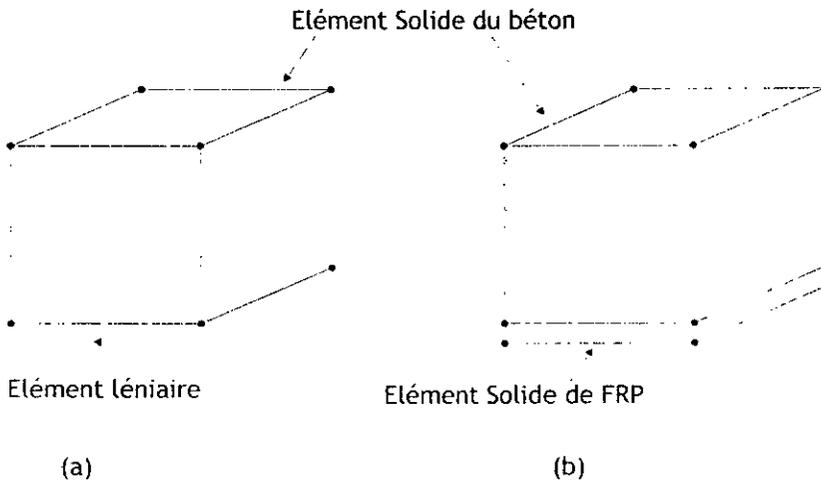


Figure 4.4 : Connectivité des éléments : (a) élément solide du béton et l'élément linéaire ; (b) éléments solides du béton et l'élément de la plaque.

### 4.3 Modèles des matériaux :

#### 4.3.1 Aciers de ferrailage et plaque d'acier :

L'acier de ferrailage a été modélisé d'une manière discrète, c.à.d le béton armé est composé par deux matériaux et deux éléments différents.

La relation contrainte – déformation pour un élément linéaire de l'acier est donnée par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^r \\ \sigma_{yy}^r \\ \sigma_{zz}^r \\ \sigma_{xy}^r \\ \sigma_{yz}^r \\ \sigma_{xz}^r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E^r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^r \\ \varepsilon_{yy}^r \\ \varepsilon_{zz}^r \\ \varepsilon_{xy}^r \\ \varepsilon_{yz}^r \\ \varepsilon_{xz}^r \end{Bmatrix} = [D^r] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^r \\ \varepsilon_{yy}^r \\ \varepsilon_{zz}^r \\ \varepsilon_{xy}^r \\ \varepsilon_{yz}^r \\ \varepsilon_{xz}^r \end{Bmatrix} \quad 4.1$$

Où  $E^r$  : Module de Young de l'acier.

On remarque que toutes les composantes de contraintes sont nulles sauf la contrainte axiale dans la direction x ( $\sigma_{xx}^r$ ).

Le comportement de l'acier des barres et des plaques a été supposé suivre un modèle élasto-plastique bilinéaire, identique en traction et en compression. La figure 4.5 montre la relation contrainte – déformation adoptée dans cette étude.

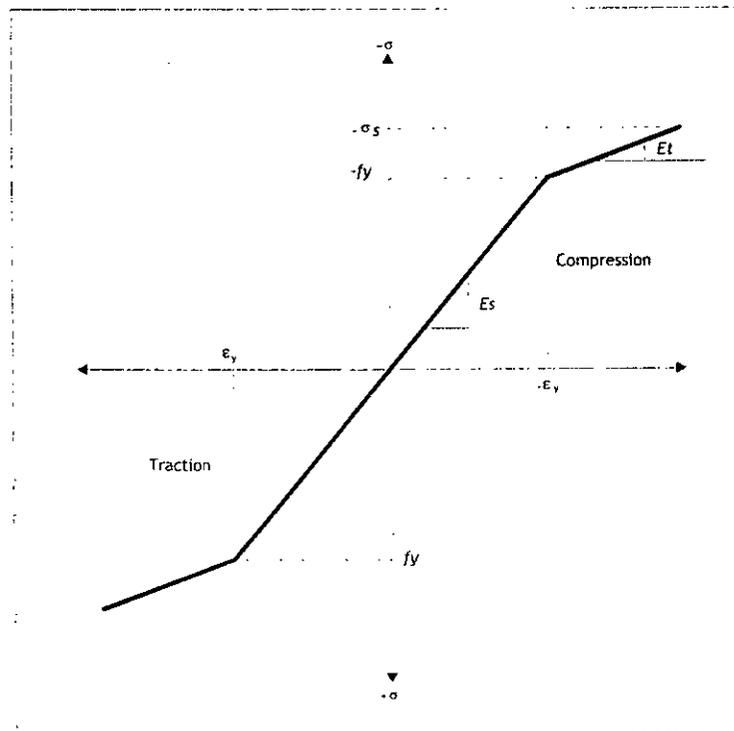


Figure 4.5 : Courbe contrainte – déformation pour l'acier de ferrailage.

Les données de l'acier nécessaires pour la modélisation sont comme suit :

- Module élastique  $E_s$  ;
- Coefficient du Poisson ;
- La contrainte de plastification  $f_y$  ;
- Le module tangent  $E_t$  d'écrouissage.

#### 4.3.2 Plaque composite FRP :

Dans cette étude, uniquement un laminé unidirectionnel a été considéré. Un modèle de comportement de matériau élastique linéaire jusqu'à la rupture a été considéré (Figure 4.6). Les données de la plaque de FRP nécessaires pour le modèle des éléments finis sont comme suit :

- Module élastique  $E$  ;
- Coefficient du Poisson ;
- La contrainte maximale  $f_r$  ;
- La déformation de rupture  $\epsilon_r$ .

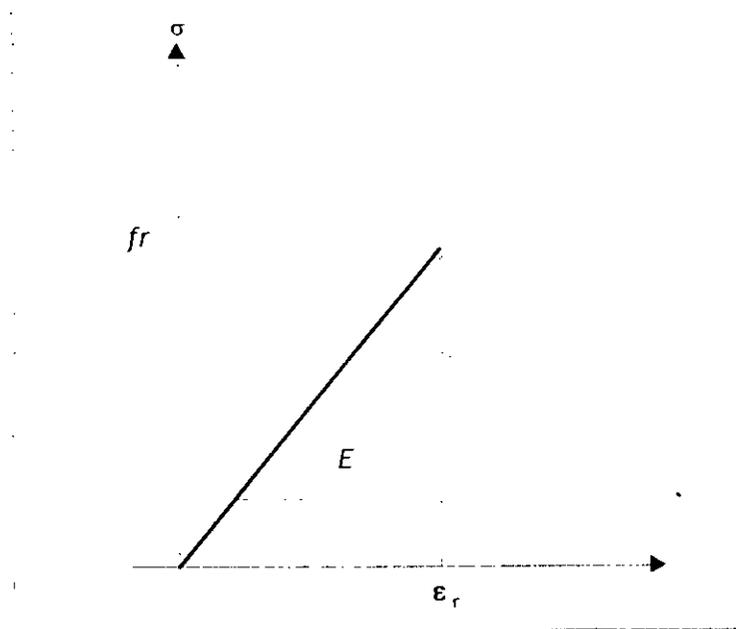


Figure 4.6 : Courbe contrainte – déformation pour le FRP.

4.3.3 Béton :

Le développement des modèles de matériaux pour le béton est très difficile. Le béton est un matériau fragile, son comportement en compression diffère de celui en traction. Sa résistance en traction est comprise entre 8 et 15 % de sa résistance en compression. (Figure 4.7)

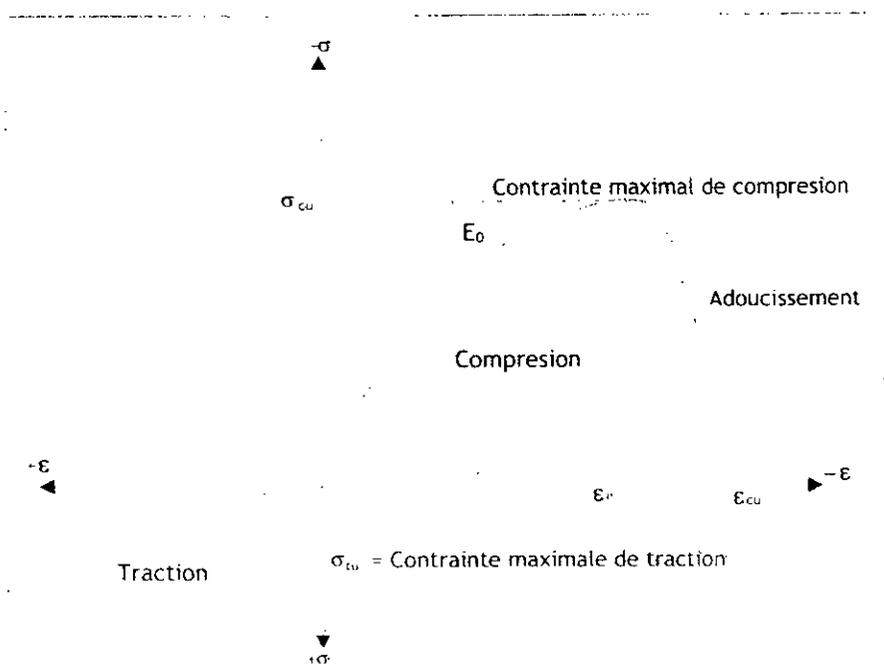


Figure 4.7 : Courbe contrainte – déformation uniaxiale de compression et de traction du béton [102]

En compression la courbe contrainte – déformation est linéaire élastique jusqu'à 30% de la contrainte maximale de compression. Au-delà de ce point, la contrainte augmente graduellement jusqu'à la contrainte maximale de compression  $\sigma_{cu}$ . Après le point de pic la courbe descend jusqu'à le point correspond à la déformation ultime  $\varepsilon_{cu}$  (phénomène d'adoucissement), où éventuellement une rupture par écrasement du béton aura lieu.

En traction la courbe contrainte – déformation est globalement linéaire élastique jusqu'à la contrainte maximale de traction. Après ce point, la fissuration s'amorce et la contrainte diminue graduellement jusqu'à zéro [102].

#### **Relation contrainte – déformation uniaxiale de compression du béton :**

La relation contrainte déformation uniaxiale pour la compression du béton utilisée par le programme ANSYS est basée sur les équations (4.2), (4.3) et (4.4) de (Desayi and Krishnan) [103] et de ( Gere and Timoshenko) [104].

$$f = \frac{E_c \varepsilon}{1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^2} \quad 4.2$$

$$\varepsilon_0 = \frac{2f'_c}{E_c} \quad 4.3$$

$$E_c = \frac{f}{\varepsilon} \quad 4.4$$

Où  $f$  : contrainte dans le béton qui correspond à une déformation quelconque  $\varepsilon$ .

$E_c$  : module élastique.

$f'_c$  : Contrainte ultime uniaxiale de compression.

$\varepsilon_0$  : déformation correspond à la contrainte ultime  $f'_c$ .

#### **Comportement linéaire du béton :**

Dans le domaine élastique le comportement du béton est linéaire. La relation contrainte – déformation est donnée par :

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon^{el}\} \quad 4.5$$

Où :

$\{\sigma\}$  : Vecteur de contrainte =  $\{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{xz}\}^T$

$\{\varepsilon^{el}\}$  : Vecteur de déformation =  $\{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \varepsilon_{xy} \quad \varepsilon_{yz} \quad \varepsilon_{xz}\}^T$

[D] : Matrice des propriétés des matériaux, qui prend la forme suivante :

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad 4.6$$

Où :

E : Module de Young du béton ;

$\nu$  : Coefficient du poisson.

**Comportement non linéaire du béton :**

Le comportement du béton est gouverné par plusieurs phénomènes tels que la plasticité, le fluage, la fissuration et l'écrasement. La plasticité est un comportement élasto-plastique caractérisé par l'apparition des déformations irréversibles au-delà d'un certain niveau de contrainte. Pour appréhender ces phénomènes la matrice des propriétés des matériaux doit être modifiée à chaque stade où l'un de ces phénomènes aura lieu.

**a) Fissuration :**

La modélisation des fissures est effectuée en modifiant les relations ( $\sigma - \epsilon$ ). Cette modification est caractérisée par la réduction des contraintes dans le plan de la fissure, l'introduction d'un coefficient de transfert de cisaillement  $\beta$ . La valeur de  $\beta$  est située entre 0.0 et 1.0, avec  $\beta = 0$  représentant une fissure lisse (aucun transfert de contrainte de cisaillement), et  $\beta = 1$  représentant une fissure fermée (transfert complet de contrainte de cisaillement) [101].

La matrice des propriétés des matériaux pour le béton fissuré dans une seule direction est donnée par :

$$[D^{ck}] = \frac{E}{(1+\nu)} \begin{bmatrix} \frac{R'(1+\nu)}{E} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(1-\nu)} & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & \frac{1}{(1-\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_t}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_t}{2} \end{bmatrix} \quad 4.7$$

Où :

L'exposant  $ck$  indique que les relations contraintes N déformations sont écrits dans un système des coordonnées parallèle à la direction de la contrainte principale, où l'axe  $x^{ck}$  est perpendiculaire à la face de la fissure.

$\beta_t$  : Coefficient de transfert de cisaillement pour une fissure ouverte. La valeur de  $\beta_t$  utilisée dans plusieurs études des structures en béton armé est varié entre 0.05 et 0.25. Dans notre étude on a effectué plusieurs analyses pour savoir la valeur qui nous assure la convergence pour une charge modérée. La valeur la plus convenable émanant de cette étude était  $\beta_t = 0.25$ .

$R^t$  est un facteur qui représente la relaxation du béton tendu après le point de pic. (Figure 4.8)

- $R^t = 0$  : relaxation exclue;
- $R^t = 1$  : le module sécant : relaxation introduite.

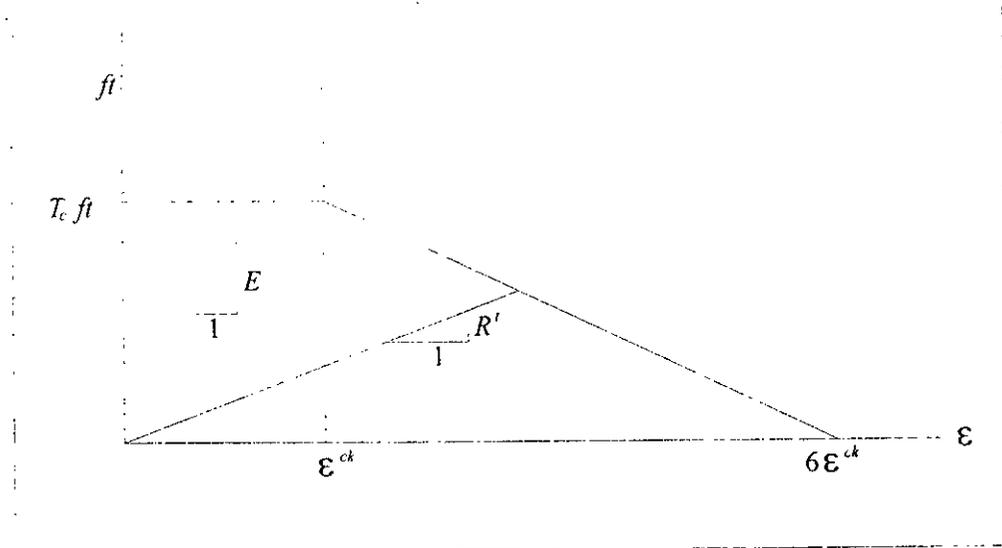


Figure 4.8 : La résistance dans les conditions de fissuration (ANSYS 1998).

Où :

- $ft$  : Contrainte de traction uniaxiale.
- $Tc$  : Facteur multiplicateur de la contrainte de relaxation en traction (le ANSYS prend la valeur de 0.6 par défaut)

Si la fissure se renferme, toutes les contraintes de compression normales à la fissure peuvent être transféré à travers la fissure. Dans ce cas on introduit le coefficient  $\beta_c$  qui représente le coefficient de transfert de cisaillement pour une fissure fermée. Donc la matrice  $[D^{ck}]$  est donnée par :

$$[D^{ck}] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_c \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_c \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad 4.$$

La matrice des propriétés des matériaux pour le béton fissuré dans deux directions est donnée par :

$$[D^{ck}] = E \begin{bmatrix} \frac{R'}{E} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R'}{E} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_t}{2(1+\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_t}{2(1+\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_t}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \quad 4.9$$

Si les fissures des deux directions se renferment, la matrice  $[D^{ck}]$  devient :

$$[D^{ck}] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_c \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_c \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad 4.10$$

La matrice des propriétés des matériaux pour le béton fissuré dans les trois directions est donnée par :

$$[D^{ck}] = E \begin{bmatrix} \frac{R'}{E} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R'}{E} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_t}{2(1+\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_t}{2(1+\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_t}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \quad 4.11$$

Si les fissures des trois directions se renferment, la matrice  $[D^{ck}]$  devient comme celle définie dans l'équation (4.10). Il faut noter que  $\beta_c$  ne doit pas être inférieur à  $\beta_t$ .

La transformation de la matrice  $[D^{ck}]$  au système des coordonnées locale est effectuée via la forme suivante :

$$[D] = [T^{ck}]^T [D^{ck}] [T^{ck}] \quad 4.12$$

$[T^{ck}]$  : Matrice de transformation.

L'état de fissuration d'un point d'intégration est basé sur la valeur de déformation  $\varepsilon_{ck}^{ck}$  appelée « déformation de fissure ». Dans le cas d'une fissure située à la direction  $x$ , cette déformation donnée par :

$$\varepsilon_{ck}^{ck} = \begin{cases} \varepsilon_x^{ck} + \frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_y^{ck} + \varepsilon_z^{ck}) & \text{Si aucune fissure n'apparaît} \\ \varepsilon_x^{ck} + \nu\varepsilon_z^{ck} & \text{Si la direction } y \text{ est fissurée} \\ \varepsilon_x^{ck} & \text{Si les directions } y \text{ et } z \text{ sont fissurées} \end{cases} \quad 4.13$$

Où :  $\varepsilon_x^{ck}$ ,  $\varepsilon_y^{ck}$  et  $\varepsilon_z^{ck}$  les trois composant des déformations dans l'axe de la fissure.

Le vecteur  $\{\varepsilon^{ck}\}$  est calculé par :

$$\{\varepsilon^{ck}\} = [T^{ck}] \{\varepsilon^{\cdot}\} \quad 4.14$$

Où :

$\{\varepsilon^{\cdot}\}$  : Déformation totale modifié (dans le système des coordonnées locales), qui est donnée par :

$$\{\varepsilon^{\cdot}\} = \{\varepsilon_{n-1}^{el}\} + \{\Delta\varepsilon_n\} - \{\Delta\varepsilon_n^{th}\} - \{\Delta\varepsilon_n^{pl}\}$$

Où :

$n$  : Numéro de l'incrément de charge.

$\{\varepsilon_{n-1}^{el}\}$  : Déformation élastique de l'incrément de charge précédent.

$\{\Delta\varepsilon_n\}$  : Incrément de déformation totale (basé sur  $\{\Delta u_n\}$ , incrément de déplacement)

$\{\Delta\varepsilon_n^{th}\}$  : Incrément de déformation thermique.

$\{\Delta\varepsilon_n^{pl}\}$  : Incrément de déformation plastique.

Si  $\varepsilon_{ck}^{ck}$  est inférieur à zéro, la fissure associé est supposée fermé.

Si  $\varepsilon_{ck}^{ck}$  est supérieur à zéro, la fissure associé est supposée ouverte.

Si une fissure apparaît dans un point d'intégration pour la première fois, on suppose que la fissure reste ouverte dans l'itération suivante.

**b) Critère de rupture du béton :**

Si un élément atteint la contrainte uniaxiale, biaxial ou triaxiale de compression à un point d'intégration, on dit qu'il y a un écrasement dans ce point. L'élément Solid65 définit l'écrasement par une détérioration complète de la structure du matériau. Dans les conditions d'écrasement on suppose que la résistance du matériau est dégradée à un niveau où on peut négliger la rigidité d'un élément dans le point d'intégration en question.

Le critère de rupture du béton dans l'état de contrainte multiaxiale est donné par (Willam et Warnke [105]) :

$$\frac{F}{f_c} - S \geq 0 \quad 4.14$$

Où :

$F$  : Fonction de charge, elle dépend de contraintes principales ( $\sigma_{xp}$ ,  $\sigma_{yp}$ ,  $\sigma_{zp}$ )

$S$  : Surface de rupture, elle dépend des contraintes principales et des cinq paramètres ( $f_t$ ,  $f_c$ ,  $f_{cb}$ ,  $f_k$  et  $f_2$ )

où :

$f_t$  : Résistance ultime de traction uniaxiale

$f_c$  : Résistance ultime de compression uniaxiale

$f_{cb}$  : Résistance ultime de compression biaxial

$f_1$  : Résistance ultime de compression à l'état biaxial de compression appliqué à l'état de contrainte hydrostatique  $\sigma_h$

$f_2$  : Résistance ultime de compression à l'état uniaxiale de compression appliqué à l'état de contrainte hydrostatique  $\sigma_h$

Cependant, la surface de charge peut être définie au minimum à l'aide des deux paramètres,  $f_t$  et  $f_c$ . Les autres paramètres sont définies par défaut comme suit (Willam et Warnke [105]) :

$$f_{cb} = 1.2 f_c \quad 4.15$$

$$f_1 = 1.45 f_c \quad 4.16$$

$$f_2 = 1.725 f_c \quad 4.17$$

Les trois expressions citées ci-dessus sont valables uniquement lorsque la condition suivante de l'état de contrainte est vérifiée :

$$|\sigma_h| \leq \sqrt{3} f_c \quad 4.18$$

Où :

$$\sigma_h = \text{état de contrainte hydrostatique} = \frac{1}{3}(\sigma_{xp} + \sigma_{yp} + \sigma_{zp}) \quad 4.19$$

Cependant, l'équation (4.18) est applicable pour des valeurs faibles des composantes de la contrainte hydrostatique. Si la condition (4.18) n'est pas valide, l'utilisateur doit spécifier les valeurs de  $f_{cb}$ ,  $f_1$  et  $f_2$ . Autrement, leurs valeurs seront prises par défaut par le logiciel, et par conséquent les résultats peuvent être incorrectes.

La fonction de charge  $F$  et la surface de rupture  $S$  sont en fonction des contraintes principales  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  où :

$$\sigma_1 = \max(\sigma_{xp}, \sigma_{yp}, \sigma_{zp}) \quad 4.20$$

$$\sigma_3 = \min(\sigma_{xp}, \sigma_{yp}, \sigma_{zp}) \quad 4.21$$

Et :  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .

La rupture du béton est caractérisée par quatre domaines :

1-  $0 \geq \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  (Compression – Compression – Compression)

2-  $\sigma_1 \geq 0 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  (Traction – Compression – Compression)

3-  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq 0 \geq \sigma_3$  (Traction – Traction – Compression)

4-  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq 0$  (Traction – Traction – Traction)

Chaque domaine est caractérisé par une fonction de charge et une surface de rupture indépendante. Ces fonctions sont notées par  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  et  $F_4$ . Les surfaces sont notées par  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  et  $S_4$ . Les fonctions sont discutées en détail ci-dessous :

1- Domaine (Compression – Compression – Compression) :

$$0 \geq \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

Dans ce domaine le critère de rupture de Willam et Warnke [105] est appliqué, la fonction de charge prend la forme suivante :

$$F = F_1 = \frac{1}{\sqrt{15}} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad 4.22$$

La surface de rupture  $S$  est donnée par :

$$S = S_1 = \frac{2r_2(r_2^2 - r_1^2)\cos\eta + r_2(2r_1 - r_2) \left[ 4(r_2^2 - r_1^2)\cos^2\eta + 5r_1^2 - 4r_1 r_2 \right]^{\frac{1}{2}}}{4(r_2^2 - r_1^2)\cos^2\eta + (r_2 - 2r_1)^2} \quad 4.23$$

Où :

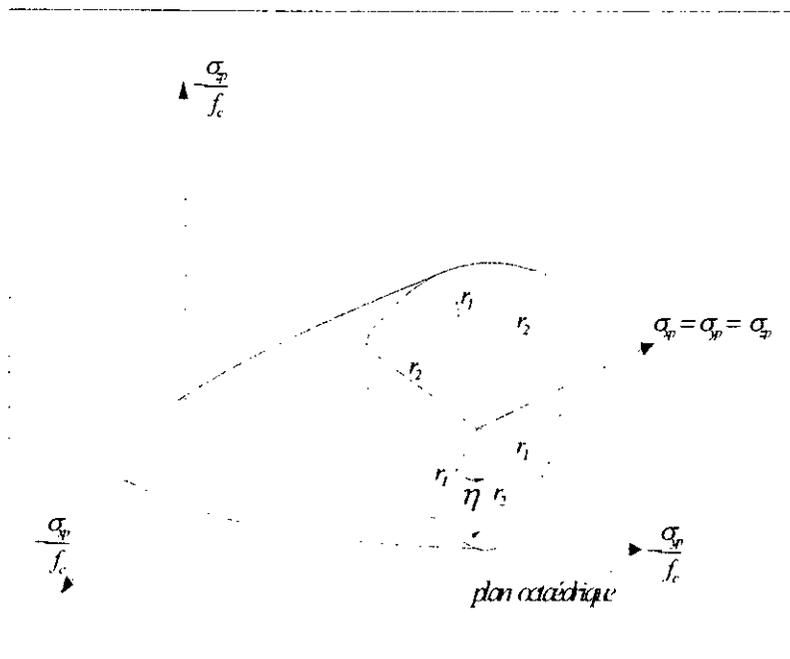
$$\cos\eta = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{\sqrt{2} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad 4.24$$

$$r_1 = a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 \quad 4.25$$

$$r_2 = b_0 + b_1\zeta + b_2\zeta^2 \quad 4.26$$

$$\zeta = \frac{\sigma_h}{f_c} \quad 4.27$$

$\sigma_h$  est définie par l'équation (4.19). Les coefficients  $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1,$  et  $b_2$  sont donnés par la suite.



**Figure 4.9 :** Surface de rupture dans le plan des contraintes principales (ANSYS 1998).

La surface de rupture est montrée dans la figure 4.9. L'angle de comparaison « angle of Similarity »  $\eta$  exprime les magnitudes relatives des contraintes principales. Pour tous les états de contraintes multiaxiales, l'angle de comparaison est compris entre  $0^\circ \leq \eta \leq 60^\circ$ . D'après l'équation (4.23) lorsque  $\eta = 0^\circ$  la surface  $S_1 = r_1$ , lorsque  $\eta = 60^\circ$  la surface  $S_1 = r_2$ . Donc la fonction  $r_1$  représente la surface de

charge de tous les états de contraintes avec  $\eta = 0^\circ$ .  $r_1$ ,  $r_2$  et  $\eta$  sont représentés dans la figure 4.9. Les valeurs des coefficients  $a_0$ ,  $a_1$  et  $a_2$  sont déterminées par la solution du système des équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{F_1}{f_c} (\sigma_1 = f_t; \sigma_2 = \sigma_3 = 0) \\ \frac{F_1}{f_c} (\sigma_1 = 0; \sigma_2 = \sigma_3 = -f_{cb}) \\ \frac{F_1}{f_c} (\sigma_1 = -\sigma_h; \sigma_2 = \sigma_3 = -\sigma_h - f_1) \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & \zeta_t & \zeta_t^2 \\ 1 & \zeta_{cb} & \zeta_{cb}^2 \\ 1 & \zeta_t & \zeta_t^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \quad 4.28$$

Avec :

$$\zeta_t = \frac{f_t}{3f_c} ; \zeta_{cb} = -\frac{2f_{cb}}{3f_c} ; \zeta_1 = -\frac{\sigma_h}{f_c} - \frac{2f_1}{3f_c} \quad 4.29$$

Les valeurs des coefficients  $b_0$ ,  $b_1$ , et  $b_2$  sont déterminées par la solution du système des équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{F_1}{f_c} (\sigma_1 = \sigma_2 = 0; \sigma_3 = -f_c) \\ \frac{F_1}{f_c} (\sigma_1 = \sigma_2 = -\sigma_h; \sigma_3 = -\sigma_h - f_2) \\ \frac{F_1}{f_c} \quad \quad \quad 0 \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} \\ 1 & \zeta_2 & \zeta_2^2 \\ 1 & \zeta_0 & \zeta_0^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} \quad 4.30$$

Avec :

$$\zeta_2 = -\frac{\sigma_h}{f_c} - \frac{f_2}{3f_c} \quad 4.31$$

$\zeta_0$  est la racine positive de l'équation suivante :

$$r_1(\zeta_0) = a_0 + a_1\zeta_0 + a_2\zeta_0^2 = 0 \quad 4.32$$

Où :  $a_0$ ,  $a_1$  et  $a_2$  sont déterminées par l'équation (4.28).

Puisque la surface de rupture doit rester toujours convexe, le rapport ( $r_1 / r_2$ ) doit être compris entre :

$$0.5 < (r_1 / r_2) < 1.25 \quad 4.33$$

Et les coefficients  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_0$ ,  $b_1$ , et  $b_2$  doivent satisfaire les conditions suivantes :

$$a_0 > 0 ; a_1 \leq 0 ; a_2 \leq 0 \quad 4.34$$

$$b_0 > 0 ; b_1 \leq 0 ; b_2 \leq 0 \quad 4.35$$

Le profile des fonctions  $r_1$  et  $r_2$  en fonction de  $\zeta$  est montré dans la figure 4.10

La courbe inférieure représente tous les états de contraintes tel que  $\eta = 0^\circ$ . alors que la courbe supérieure représente tous les états de contraintes tel que  $\eta = 60^\circ$ . Si le critère de rupture est satisfait, le matériau est considéré écrasé.

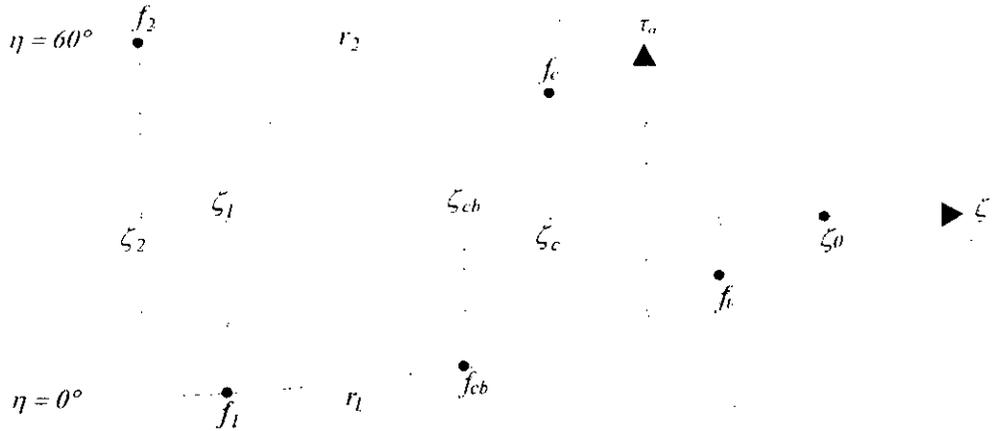


Figure 4.10 : Profile de la Surface de rupture (ANSYS 1998).

2- Domaine (Traction – Compression – Compression) :

$$\sigma_1 \geq 0 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

Dans ce domaine la fonction F prend la forme suivante :

$$F = F_2 = \frac{1}{\sqrt{15}} \left[ (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 \right]^{\frac{1}{2}} \tag{4.35}$$

La surface de rupture S est donnée par :

$$S = S_2 = \left( 1 - \frac{\sigma_1}{f_t} \right) \frac{2p_2(p_2^2 - p_1^2)\cos\eta + p_2(2p_1 - p_2) \left[ 4(p_2^2 - p_1^2)\cos^2\eta + 5p_1^2 - 4p_1p_2 \right]^{\frac{1}{2}}}{4(p_2^2 - p_1^2)\cos^2\eta + (p_2 - 2p_1)^2} \tag{4.36}$$

Où :  $\cos \eta$  est défini par l'équation (4.24) et

$$p_1 = a_0 + a_1x + a_2x^2 \tag{4.37}$$

$$p_2 = b_0 + b_1x + b_2x^2 \tag{4.38}$$

Les coefficients  $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1,$  et  $b_2$  sont donnés par les équations (4.28) et (4.30). Tandis que :

$$x = \frac{1}{3}(\sigma_2 + \sigma_3) \tag{4.39}$$

Si le critère de rupture est satisfait, la fissuration apparaîtra dans le plan perpendiculaire à la contrainte principale  $\sigma_1$ . L'écrasement peut avoir lieu encore dans ce domaine [105].

3- Domaine (Traction – Traction – Compression) :

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq 0 \geq \sigma_3$$

Dans ce domaine la fonction F prend la forme suivante :

$$F = F_3 = \sigma_i \quad i = 1, 2 \quad 4.40$$

La surface de rupture S est donnée par :

$$S = S_3 = \frac{f_t}{f_c} \left( 1 + \frac{\sigma_3}{f_c} \right); \quad i = 1, 2 \quad 4.41$$

Si le critère de rupture est satisfait pour  $i = 1, 2$ , la fissuration apparaîtra dans les plans perpendiculaires aux contraintes principales  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ . Si le critère de rupture est satisfait uniquement pour  $i = 1$ , la fissuration apparaîtra uniquement dans le plan perpendiculaire à la contrainte principale  $\sigma_1$ . L'écrasement peut avoir lieu encore dans ce domaine [105].

#### 4- Domaine (Traction – Traction – Traction) :

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq 0$$

Dans ce domaine la fonction F prend la forme suivante :

$$F = F_4 = \sigma_i \quad i = 1, 2, 3 \quad 4.42$$

La surface de rupture S est donnée par :

$$S = S_4 = \frac{f_t}{f_c} \quad 4.43$$

Si le critère de rupture est satisfait dans les directions 1, 2 et 3, la fissuration apparaîtra dans les plans perpendiculaires aux contraintes principales  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$ . Si le critère de rupture est satisfait dans les directions 1 et 2, la fissuration apparaîtra dans les plans perpendiculaires aux contraintes principales  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ . Si le critère de rupture est satisfait uniquement dans la direction 1, la fissuration apparaîtra uniquement dans le plan perpendiculaire à la contrainte principale  $\sigma_1$ .

La figure 4.11 montre la surface de rupture tridimensionnelle du béton dans le plan des contraintes principales. Les contraintes principales non nulles les plus importantes sont celles des directions x et y, représentées par  $\sigma_{xp}$  et  $\sigma_{yp}$  respectivement. Trois surfaces de charge sont tracées dans le plan  $\sigma_{xp} - \sigma_{yp}$ . Le mode de rupture est en fonction du signe de la contrainte  $\sigma_{zp}$  (contrainte principale de l'axe z). Par exemple, si  $\sigma_{xp}$  et  $\sigma_{yp}$  sont négatives (compression) et  $\sigma_{zp}$  est légèrement supérieur à zéro (traction), l'élément devra se fissurer dans la direction perpendiculaire de  $\sigma_{zp}$ . Cependant, si  $\sigma_{zp}$  est nulle ou légèrement inférieur à zéro l'élément devra s'écraser (ANSYS 1998).

Dans un élément du béton, la fissuration apparaîtra lorsque la contrainte principale de traction dans n'importe quelle direction dépasse la surface de charge. Après la fissuration, le module élastique de l'élément du béton devient nul dans la direction parallèle à la direction de la contrainte principale de traction. L'écrasement apparaîtra lorsque toutes les contraintes principales sont des contraintes de compression, et dépassent la surface de charge. Le module élastique dans ce cas est nul dans toutes les directions. (ANSYS 1998)

L'écrasement du béton se développe initialement dans les éléments situés juste sous la charge appliquée. En suite, les éléments adjacents s'écraseront au fur et à mesure que la charge augmente, entraînant une réduction dans la rigidité locale.

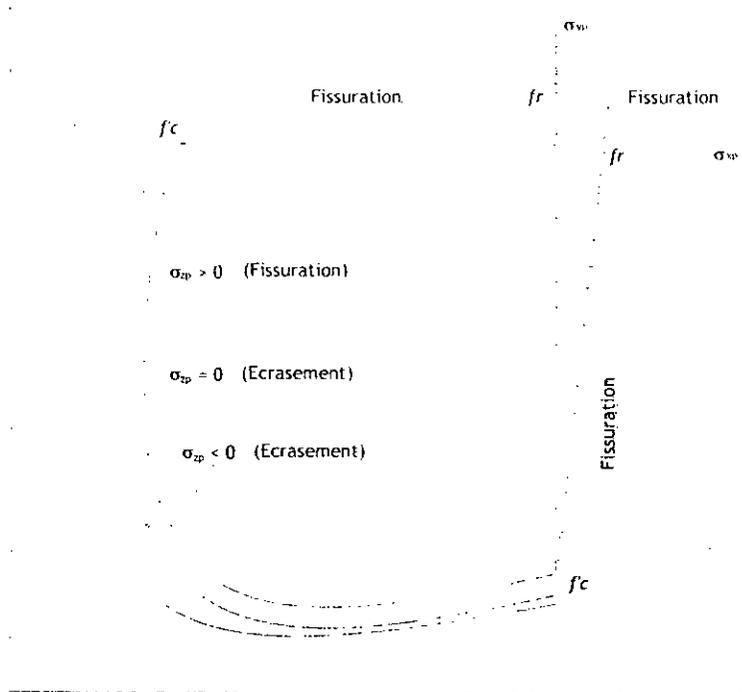


Figure 4.11 : Surface de charge dans le plan des contraintes principales (ANSYS 1998).

La rupture par compression pure du béton est en réalité inconcevable. Dans un essai de compression, l'éprouvette est soumise à une charge uniaxiale de compression. Les déformations de traction induites par l'effet du Poisson apparaîtront dans la direction perpendiculaire à la charge. Puisque le béton est fragile en traction, des fissures seront créées entraînant une rupture éventuelle.

#### 4.4 Résolution numérique du système non linéaire :

Dans une analyse non linéaire, la charge totale appliquée sur le modèle d'élément finis est divisée à une série des incréments de charge. Dans chaque incrément de charge la matrice de rigidité est actualisée. Le logiciel ANSYS utilise la méthode de Newton – Raphson pour la mise à jour de la rigidité de la structure. Pour rendre le système linéaire, des itérations sont effectuées afin d'obtenir la solution pour chaque incrément et satisfaire les équations d'équilibre. À la fin de chaque itération un test de convergence est exécuté dans la limite tolérée. L'analyse est effectuée pour un problème statique linéaire de petit déplacement.

##### 4.4.1 Incrémentation :

L'incrément est effectuée en utilisant l'option de « *Automatic time stepping* ». Dans cette option on doit donner l'incrément de charge initial, l'incrément de charge minimal et l'incrément de charge maximal. Le logiciel commence le calcul par l'incrément de charge initial, si la convergence de solution n'est pas atteinte, le logiciel commence à nouveau avec un incrément plus petit de la charge, et qui est compris entre l'incrément minimal et maximal prescrit.

##### 4.4.2 Itération :

Le nombre maximal des itérations prescrit était 100 itérations. Ce nombre a été pris afin d'éviter une divergence précoce de la solution. Comme indiqué ci-dessus, ANSYS utilise la méthode de Newton-Raphson pour actualiser la matrice de rigidité. Plusieurs variantes d'actualisation de cette matrice sont possibles dans le logiciel :

- Full Newton-Raphson : la matrice de rigidité est actualisé dans chaque itération.
- Modified Newton-Raphson : la matrice de rigidité tangentielle est actualisé dans chaque incrément de charge.
- Initial Nstiffness : la matrice de rigidité initiale est utilisé dans chaque itération

Dans notre étude on a laissé au logiciel de faire le choix, selon la vitesse de convergence rencontrée lors de l'analyse.

#### 4.4.3 Solution :

Le logiciel ANSYS offre des nombreuses méthodes de résolution du système d'équations :

- Sparse direct
- Frontale direct
- Itérative
- Pre-condition CG

Dans notre étude on a laissé le choix au logiciel de sélectionner la méthode de résolution la plus appropriée.

#### 4.4.2 Convergence :

Le processus itérative se continu jusqu'à la convergence. On suppose que la convergence est atteinte lorsque la condition suivante sera vérifiée :

$$\|\Delta u_i\| < Tol \quad 4.44$$

Où :

$\Delta u_i$  : Incrément de vecteur de déplacement correspond à un incrément de charge.

$Tol$  : Tolérance (dans notre cas  $Tol = 0.01$ )

La norme du vecteur de déplacement est la norme Euclidienne, qui est obtenue par :

$$\|\Delta u\| = \left( \sum \Delta u_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad 4.45$$

*Chapitre V*  
*Etudes Expérimentales et*  
*Numériques des Poutres*

## 5.1 Introduction :

Une simulation numérique en 3D a été effectuée à l'aide du logiciel d'éléments finis ANSYS. Les résultats de cette modélisation numérique seront comparés dans ce chapitre avec les résultats expérimentaux, effectués sur trois types de poutres. La première est une poutre en béton armé non renforcée réalisée par Charif [9]. La deuxième c'est la même poutre que précédemment mais avec un renforcement extérieur par une plaque en acier. La dernière c'est une poutre en béton armé renforcée par des plaques en CFRP effectuée par M.A.Shahawy et al. [14].

## 5.2 Montage et résultats expérimentaux :

### 5.2.1 Poutre en BA non renforcée (F01) et poutre renforcée par une plaque d'acier (F11):

Le principe expérimental suivi par Charif [9] consiste à soumettre une série de poutres isostatiques en béton armé, à un essai de flexion à quatre points. La poutre F11 est identique à la poutre F01 avec l'addition d'une plaque d'acier collée par le biais d'un joint en résine époxyde à sa face tendue, comme montrée dans la figure 5.1. Les deux poutres ont été testées à 42 jours. Les caractéristiques de ces deux poutres sont les suivantes :

largeur = 155 mm

hauteur = 255 mm

portée = 2300 mm

longueur = 2500 mm

armature tendues  $A_s = 3HA20 = 942 \text{ mm}^2$

armature comprimés  $A_s' = 2 \text{ } \varnothing 6 = 56.52 \text{ mm}^2$

Dimension nominale des agrégats : 10 mm

Colle : largeur = 125 mm épaisseur = 1.5 mm

Plaque d'acier : largeur = 125 mm épaisseur = 1.5 mm

Les propriétés des matériaux sont données dans le tableau 5.1.

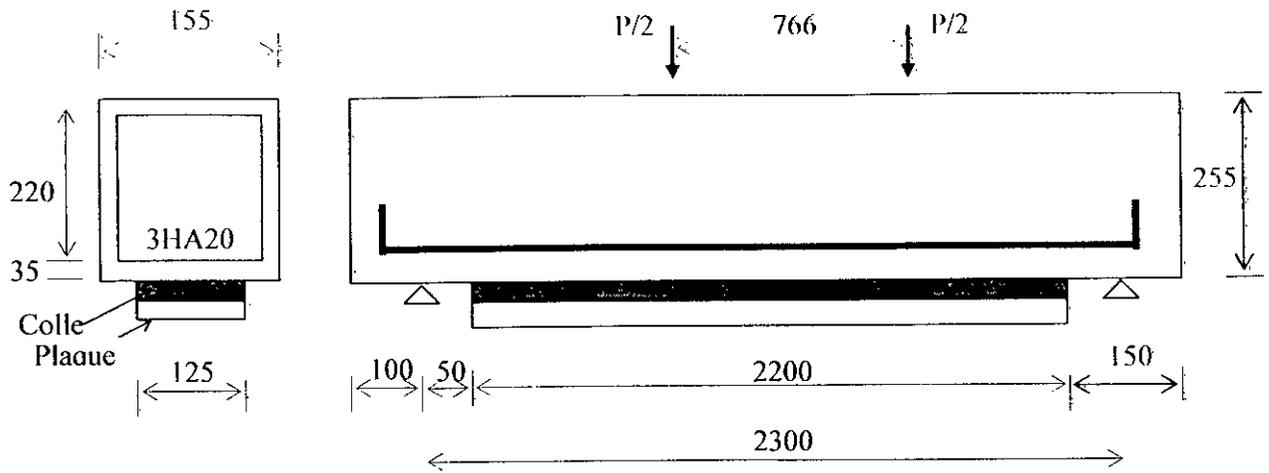


Figure 5.1 : Montage expérimental de la poutre F01 et F11.

Matériaux	E ( MPa)	$\nu$	$f_c$ de cube (MPa)	$f_t$ (MPa)	$\epsilon_u \cdot 10^{-3}$
Béton (F01)	30740	0,16	52.4	3.93	4.0
Béton (F11)	30740	0,16	53.3	3.52	4.0

a) Béton

Matériaux	E( MPa)	$\nu$	$f_c$ (MPa)	$f_r$ (MPa)	$\epsilon_c \cdot 10^{-3}$	$\epsilon_r \cdot 10^{-3}$
Acier HA	200000	0,30	430	585	2.00	4.97
Plaque (F11)	200000	0,30	246	339	1.23	7.10

b) Acier

Matériaux	E( MPa)	$\nu$	Résistance à la traction (MPa)
Colle	1200	0,499	7.82

c) Colle

Tableau 5.1 : Propriétés des matériaux [9]

Les principaux résultats présentés par Charif [9] sont les suivants :

Toutes les poutres ont atteint leurs résistances flexionnelles ultimes et leurs ruptures s'effectuent principalement par écrasement du béton, suivie par une plastification des aciers longitudinaux et de la plaque. L'apparition des premières fissures et leurs propagations ont été détectées visuellement et marquées après chaque incrément de charge. Les courbes 5.2 et 5.3 montrant respectivement la flèche et la déformation du béton comprimé à mi-travée confirment clairement l'effet bénéfique du renforcement sur le comportement des poutres qui se traduit notamment par la réduction des flèches et des déformations, et l'augmentation des charges de rupture et de fissuration (Tableau 5.2).

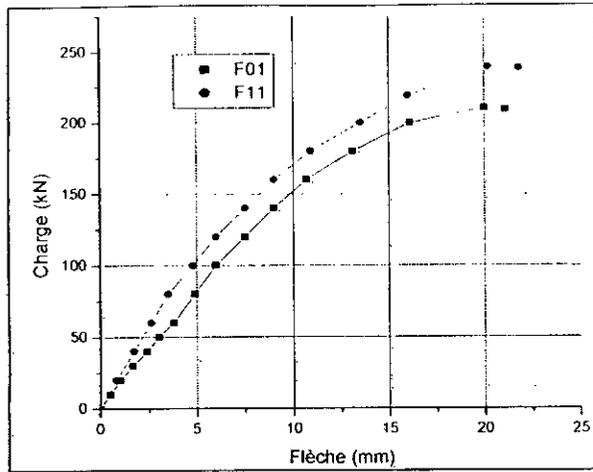


Figure 5.2 : Courbe Charge – flèche à mi-travée. [9]

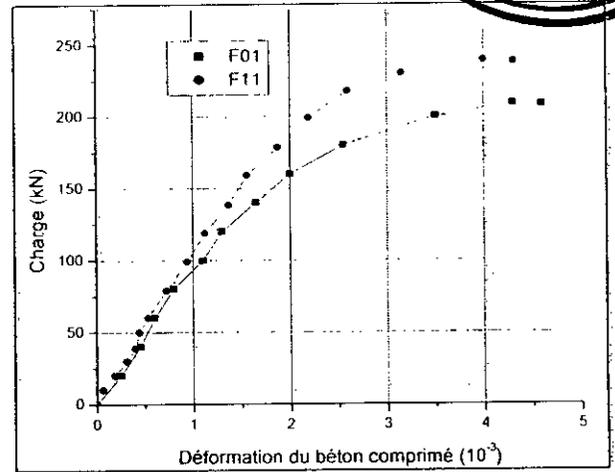


Figure 5.3 : Courbe Charge – déformation du béton comprimé à mi-travée. [9]

Poutre	Charge de première fissuration (kN)	Charge de rupture (kN)	Déformation dans le béton tendu à la 1 <sup>ère</sup> fissuration ( $10^{-6}$ )
F <sub>01</sub>	30	210	162
F <sub>11</sub>	40	239	178

Tableau 5-2 : Charges et déformations des poutres F<sub>01</sub>, F<sub>11</sub>. [9]

La figure 5.4 montrant la courbe Charge – Déformation de la plaque confirme l’efficacité de ce système de renforcement qui est traduit par une plastification de la plaque avant la rupture de la poutre.

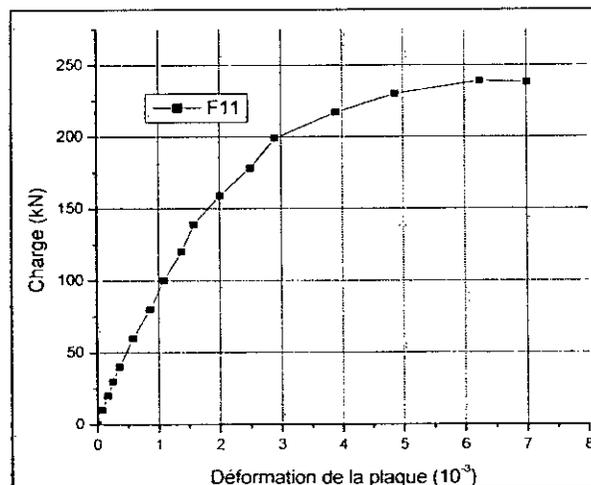


Figure 5.4 : Courbe Charge – déformation de la plaque d’acier. [9]

De plus, il y'a lieu de relever l'effet de retardement dans l'apparition de la première fissure dû au renforcement. Ce fait est souligné par l'augmentation très nette de la charge de la première fissuration de la poutre  $F_{11}$ . Le deuxième point est que le renforcement semble augmenter la capacité de déformation de la poutre qui est mise en relief par l'augmentation de la déformation à la première fissuration, ce qui autorise à supposer que le renforcement agit favorablement sur la ductilité de la poutre. Enfin, on constate, comme prévu, une augmentation de la charge de rupture de la poutre  $F_{11}$  suite à l'ajout de la plaque.

### 5.2.2 Poutre en BA renforcée par une plaque de CFRP (S6-PRE3) [14] :

L'étude expérimentale consiste d'examiner une série de poutres renforcées sur leurs faces tendues par collage des plaques en plastique renforcé par des fibres en carbone (CFRP). Les poutres ont été dimensionnées de telle manière que la rupture s'effectuera par flexion. Le dispositif expérimental adopté pour ces essais est montré dans la figure 5.5, tandis que les données expérimentales sont comme suit :

1- poutre :

largeur = 203 mm

hauteur = 305 mm

portée = 2439 mm

longueur = 2743 mm

armature tendues  $A_s = 2T13 = 265 \text{ mm}^2$

armature comprimé  $A_c = 2T3 = 7.07 \text{ mm}^2$

2 - colle :

largeur = 203 mm

épaisseur : n'a pas été maintenue d'une manière rigoureuse.

3 - plaque de CFRP :

largeur = 203 mm

épaisseur = 0.34036 mm

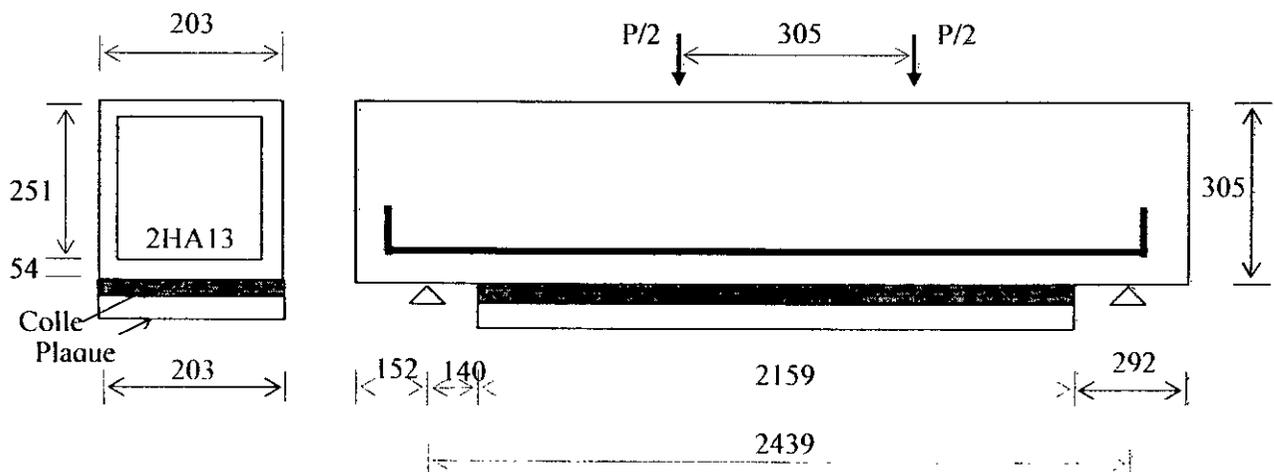


Figure 5.5 : Montage expérimental.

Parmi les poutres testées on a choisi la poutre (S6-PRE3) qui a été renforcée par deux couches de CFRP avec des fibres unidirectionnelles. Les propriétés des matériaux reportées dans [14] sont données comme suit :

1- Béton :

Résistance à la compression (cylindre) à 28 jours  $f_c' = 41.4$  MPa

Dimension maximale des agrégats : 19 mm

2- Acier de ferrailage :

Résistance de plastification :  $f_e = 468.843$  MPa.

3- CFRP :

Résistance à la traction : = 2757.9 MPa

Module de Young :  $E = 141.3$  GPa

Poids surfacique : 1.72 Pa

Teneur en résine : 35 %

Coefficient du Poisson : 0.25

4- Colle :

Résistance à la traction = 60.3 MPa.

Résistance à la compression = 120.5 MPa.

Les figures 5.6 à 5.8 montrent respectivement les variations de la flèche, déformation du béton comprimé et déformation de la plaque avec le moment appliqué à mi-travée. Comme dans le cas de la plaque d'acier, l'adjonction des plaques CFRP a un effet bénéfique sur le comportement de la poutre caractérisé notamment par une augmentation de la rigidité, un retardement dans la fissuration et une augmentation de la capacité flexionnelle de la poutre. (Tableau 5.3)

Poutre	Moment de première fissuration (kN.m)	Moment nominal (kN.m)	Charge ultime (kN)	Mode de rupture
S5-PRE1	11.87	52	97.923	Ecrasement du béton – Déchirure longitudinale de CFRP

**Tableau 5.3** : Charges et déformations de la poutre S5-PRE1.[14]

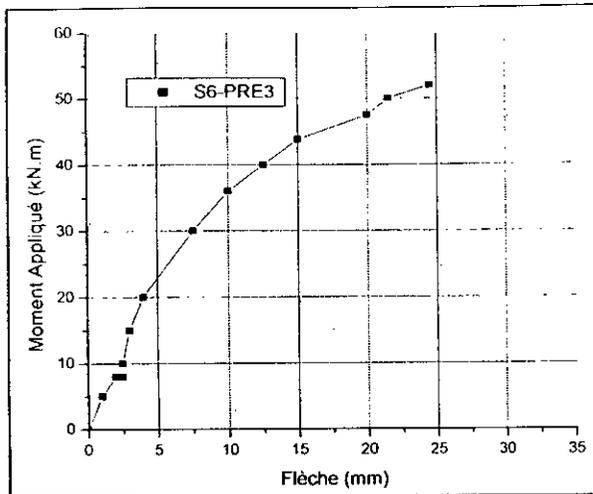


Figure 5.6 : Courbe moment – Flèche. [14]

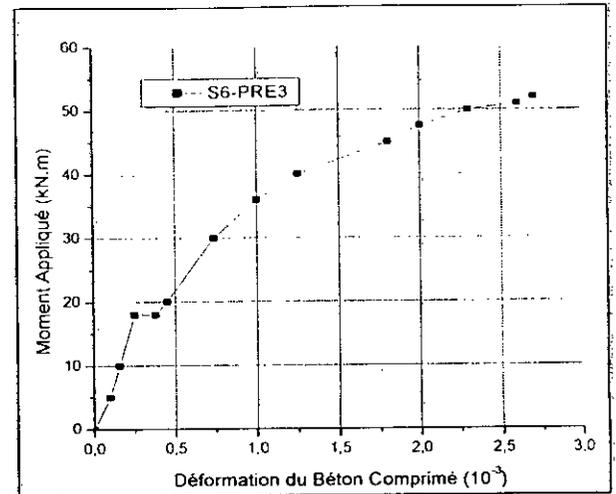


Figure 5.7 : Courbe moment – déformation du béton comprimé. [14]

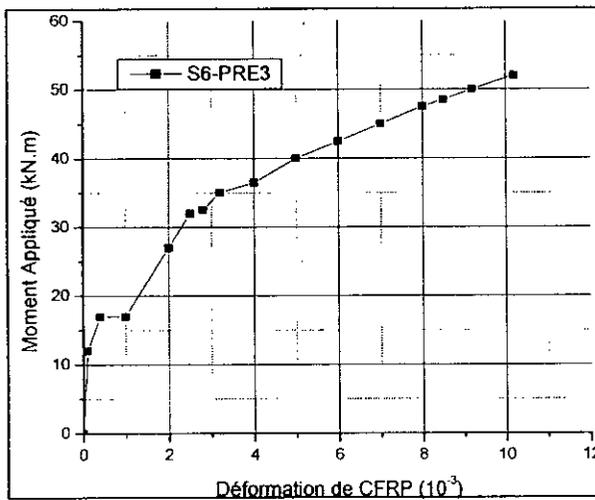


Figure 5.8 : Courbe moment – déformation de la plaque de CFRP. [14]

### 5.3 Modélisation numérique :

#### 5.3.1 Poutre en BA non renforcée (F01) :

##### 5.3.1.1 Maillage de la poutre :

Les résultats expérimentaux cités ci-dessus ont servi de base de comparaison aux résultats obtenus par le logiciel ANSYS. La poutre étant symétrique, seule une moitié a été modélisée (Figure 5.9). Pour éviter les problèmes numériques liés à la concentration des contraintes, la force a été appliquée sous forme d'une pression (charge répartie sur une surface).

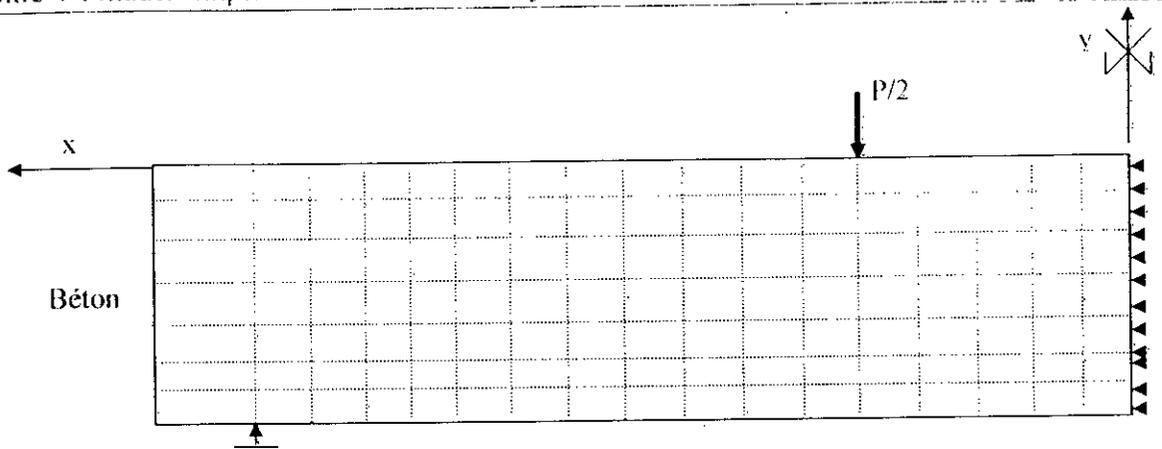


Figure 5.9 Modélisation numérique de la poutre F01.

Pour en assurer une bonne convergence des résultats numériques, le maillage adopté a été suffisamment affiné. Cependant, les dimensions minimales des éléments ont été gouvernées par la dimension maximale des agrégats (dimension minimale de l'élément est supérieure à deux fois la dimension maximale des agrégats). Le modèle utilise deux types d'éléments : élément solide à huit nœuds (**Solid 65**) représentant le béton, et élément de barre à deux nœuds (**Link 8**) représentant l'acier d'armature. Les liaisons entre les différents éléments sont considérées comme rigides. Le tableau 5.4 résume la topologie de la maille utilisée.

Poutres	Solid 65	Link 8	Total
Nombre des nœuds	/	/	840
Nombre des éléments	560	100	660
Nombre total des nœuds bloqués	45	/	45

Tableau 5.4 : Topologie de la maille. Poutre F01

### 5.3.1.2 Résultats numériques et comparaison:

Les résultats du modèle numérique sont comparés aux résultats expérimentaux. La charge a été incrémentée automatiquement à l'aide du logiciel ANSYS. Toutefois, afin de comparer les flèches et les déformations dans les poutres avec les résultats expérimentaux, la charge de 100 kN a été prise comme référence, vu que ces résultats ont été tabulés dans [9].

	Numérique (mm)	Expérimentale (mm)	% Erreur
flèche (mm)	5.452	6.10	10.6%
Déformation du béton comprimé ( $10^{-3}$ )	0.86	1.1	21.8%

Tableau 5.5 : Valeurs à mi-travée à 100 kN.

	Flèche à la rupture (mm)	Charge de rupture (kN)	Déformation dans le béton tendu à la 1 <sup>ère</sup> fissuration ( $10^{-6}$ )	Charge d'écrasement du béton (kN)	Charge de plastification des aciers (kN)
NUM	19.91	201.37	130	116.25	181.81
EXP	21.1	210	162	/	/
% Erreur	5.63 %	4.10 %	19.75 %	/	/

Tableau 5.6 : Charges et déformations de la poutre F01.

Les tableaux 5.5 et 5.6 présentent l'ensemble des résultats numériques et expérimentaux à mi-travée de la poutre, ainsi que les pourcentages des erreurs. Les figures 5.10 et 5.11 montrant les variations de la flèche et la déformation du béton comprimé en fonction de la charge confirment la validité du modèle à retracer l'historique du comportement de la poutre. De plus, il y'a lieu de noter que la flèche obtenue du logiciel ANSYS ne dépend pas pratiquement de la position du point ou nœud de la section médiane comme montré dans la figure 5.12. Ceci implique que la section médiane (à mi-travée) subit un déplacement vertical d'ensemble avec des déformations locales négligeables. Les tableaux 5.5 et 5.6 ainsi que les figures 5.10, 5.11 et 5.13 montrent que les résultats numériques sont dans l'ensemble plus proche des résultats expérimentaux notamment au stade de la rupture.

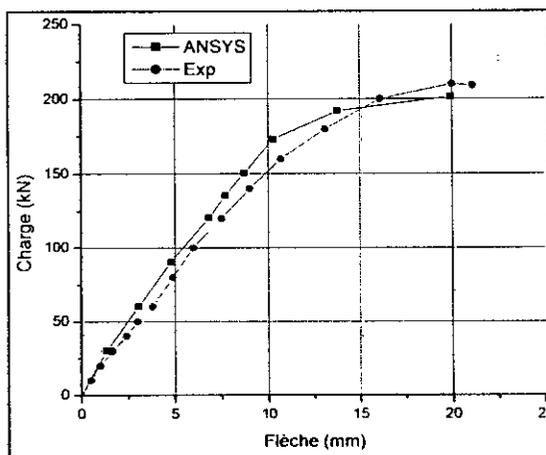


Figure 5.10 : Courbe Charge – Flèche de la Poutre F01.

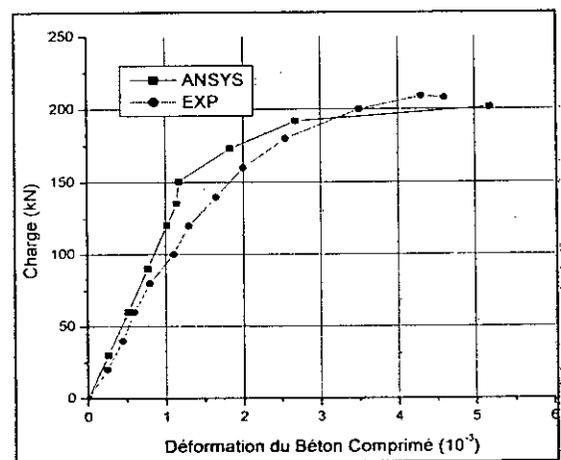


Figure 5.11 : Courbe Charge – Déformation du béton comprimé de la Poutre F01.

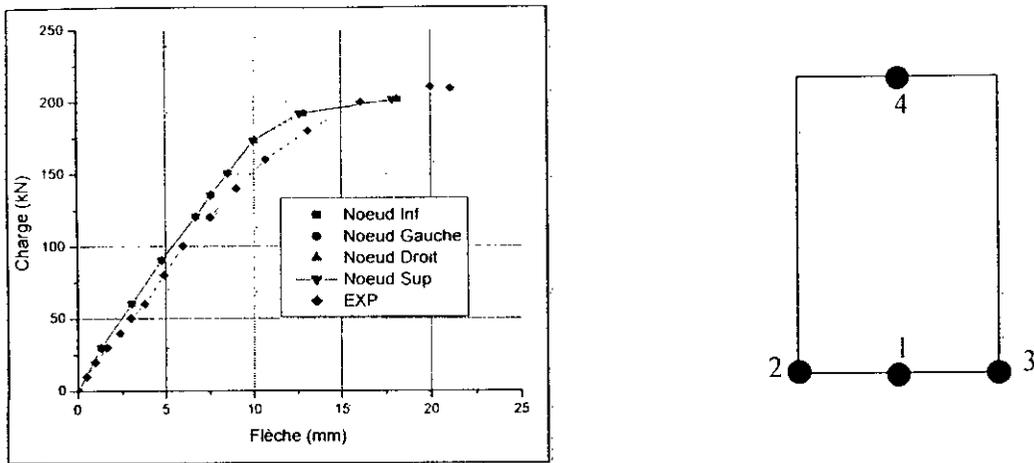


Figure 5.12 : Comparaison de la flèche dans des différents points de la poutre F01.

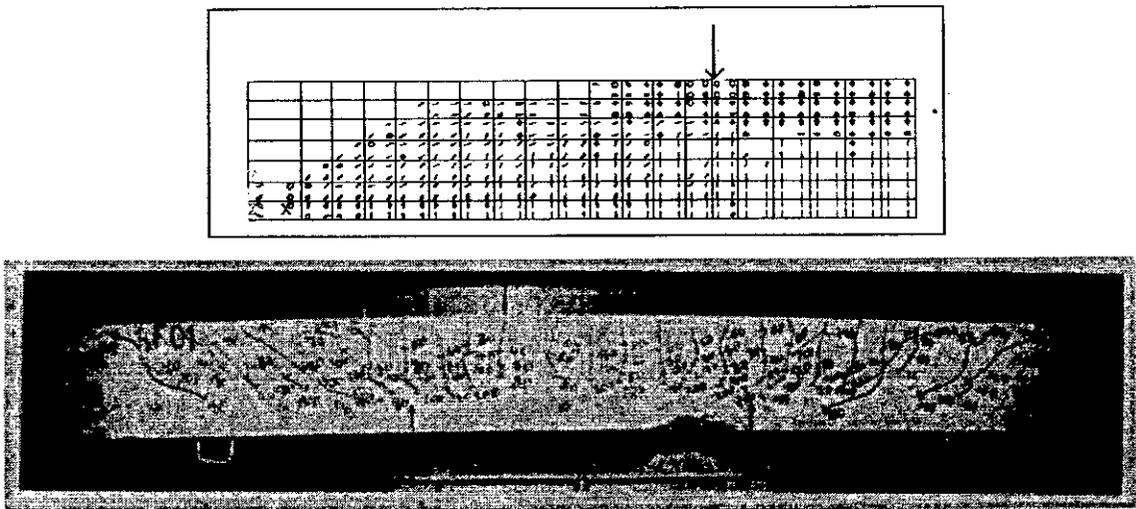


Figure 5.13 : Schéma de fissuration du béton de la poutre F01.

### 5.3.2 Poutre en BA renforcée par une plaque d'acier (F11) :

#### 5.3.2.1 Maillage de la poutre :

Les résultats expérimentaux cités ci-dessus ont servi de base de comparaison aux résultats obtenus par le logiciel ANSYS. La poutre étant symétrique, seul une moitié a été modélisée (Figure 5.14). La charge est appliquée sous forme de pression.

Le maillage adopté pour cette poutre est identique à celui de la poutre F01, avec l'addition des éléments de la plaque. Cette dernière est représentée par des éléments solides à huit noeuds (Solid 45). Le tableau 5.7 résume la topologie de la maille utilisée.

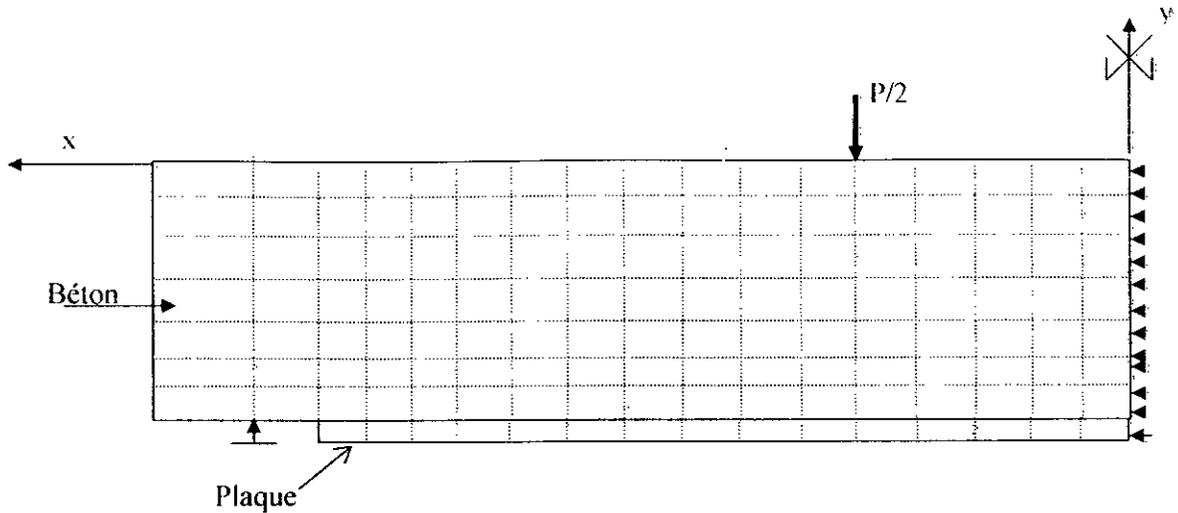


Figure 5.14 Modélisation numérique de la poutre F11.

Elément	Solid 65	Solid 45	Link 8	Total
Nombre des nœuds	/	/	/	935
Nombre des éléments	560	72	100	732
Nombre total des nœuds bloqués	45	5	/	50

Tableau 5.7 : Topologie de la maille. Poutre F11

5.3.2.2 Résultats numériques et comparaison:

Le tableau 5.8 regroupe les résultats trouvés à 100 kN, tandis que le tableau 5.9 présentent les résultats au stade de la rupture.

	Numérique(mm)	Expérimentale(mm)	% Erreur
Flèche (mm)	4.45	4.85	8.2%
Déformation de béton comprimé( $10^{-3}$ )	0.77	0.94	18.1%
Déformation de la plaque ( $10^{-3}$ )	1.08	1.1	1.8%

Tableau 5.8 Valeurs à mi-travée à 100 kN. Poutre F11

	Charge de rupture (kN)	Flèche à la rupture (mm)	Charge d'écrasement du béton (kN)	Charge de plastification des aciers (kN)	Charge de plastification de la plaque (kN)
NUM	241.8	20.018	145.6	221.65	107.26
EXP	239	21.8	/	/	/
% Erreur	1.17 %	8.17 %	/	/	/

Tableau 5.9 : Charges et déformations de la poutre F11.

Les résultats des tableaux précédents démontrent la bonne concordance entre les résultats numériques et expérimentaux, avec une erreur ne dépassant pas les 20 %.

Les variations de la flèche, la déformation du béton comprimé et la déformation de la plaque en fonction de la charge appliquée sont présentées dans les courbes des figures 5.15, 5.17 et 5.19. Le schéma de fissuration de la poutre au dernier stade de chargement est présenté dans la figure 5.21.a.

Ces résultats numériques confirment l'aptitude du modèle numérique à reproduire les résultats expérimentaux notamment aux stades des comportements élastiques et à la rupture. Cependant, un léger décalage entre les résultats numériques et expérimentaux est observé au stade de la fissuration systématique où la dégradation de la rigidité suite à la propagation de la fissuration n'est pas très bien appréhendée par le modèle numérique. Ceci est vraisemblablement dû aux modèles de matériaux intégrés dans l'ANSYS et qu'on a pas la possibilité de les modifier. Ces modèles ne prennent pas en charge la dégradation graduelle du béton suite à la fissuration (réduction de  $\nu$  et de  $G$ ). Pour les déformations l'écart constaté notamment au stade de la rupture est probablement dû à des erreurs-expérimentales. De plus ces déformations sont généralement la moyenne des déformations sur la longueur de la jauge et leur valeur est très sensible aux fissures qui peuvent traverser cette longueur.

Il est à noter que suite aux problèmes rencontrés lors de la discrétisation, la largeur de la plaque dans le modèle numérique a été prise égale à la largeur de la poutre tous en gardant la même surface de la plaque que le modèle expérimental. Il s'agit tous simplement d'augmenter la largeur de la plaque et diminuer son épaisseur pour garder la même surface de la plaque. Afin d'explorer d'autres alternatives de discrétisation, la plaque a été modélisée moyennant des éléments linéaires unidimensionnels. Les résultats trouvés à l'issue de cette modélisation sont montrés dans les figures 5.16, 5.18, 5.20 et 5.21.b. Les figures 5.22 et 5.23 montrent que les deux méthodes de discrétisation conduisent pratiquement aux mêmes résultats de la flèche et la déformation du béton comprimé. Cependant, l'examen minutieux des schémas de fissurations (Figure 5.21) montre que la fissuration et plus particulièrement l'écrasement du béton est plus répartie dans le cas d'une représentation unidimensionnel de la plaque.

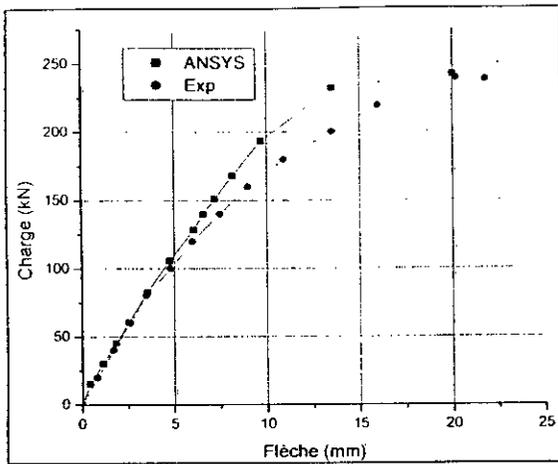


Figure 5.15 : Courbe Charge – Flèche Poutre F11 (plaque bidimensionnelle).

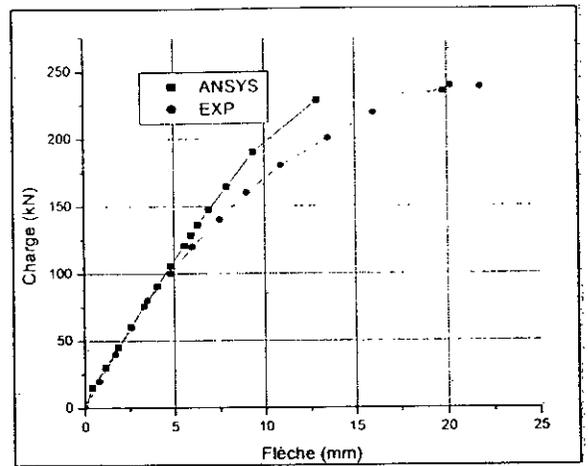


Figure 5.16 : Courbe Charge – Flèche Poutre F11 (plaque unidimensionnelle).

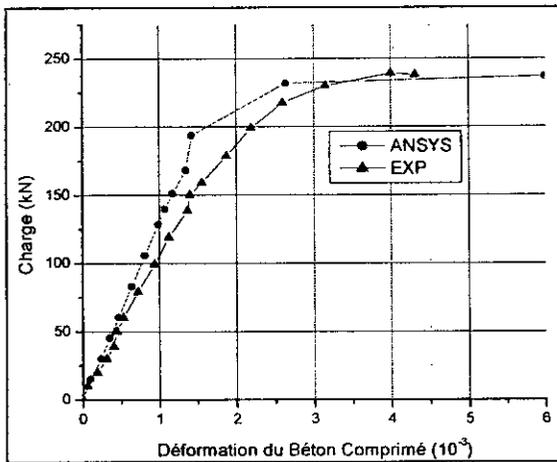


Figure 5.17 : Courbe Charge – Déformation du béton comprimé (plaque bidimensionnelle) F11.

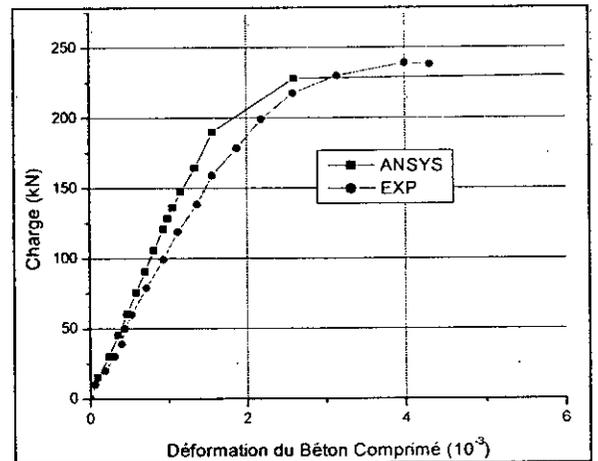


Figure 5.18 : Courbe Charge – Déformation du béton comprimé (plaque unidimensionnelle) F11.

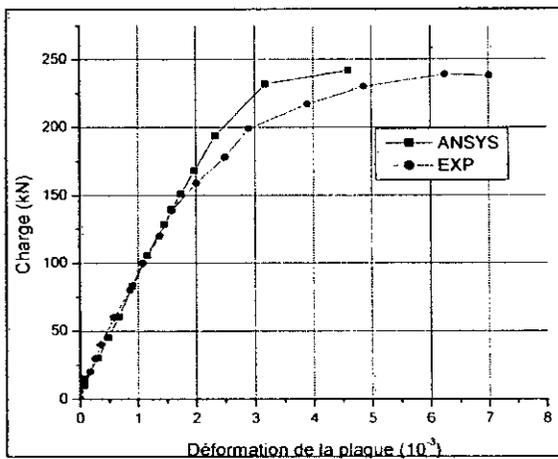


Figure 19 : Courbe Charge – Déformation de la plaque (plaque bidimensionnelle) F11.

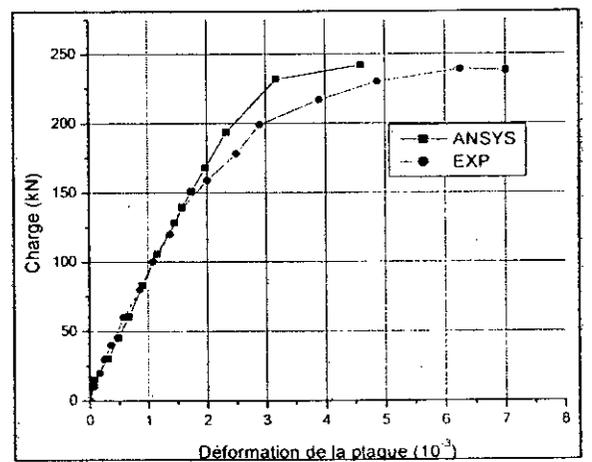


Figure 5.20 : Courbe Charge – Déformation de la plaque (plaque unidimensionnelle) F11.

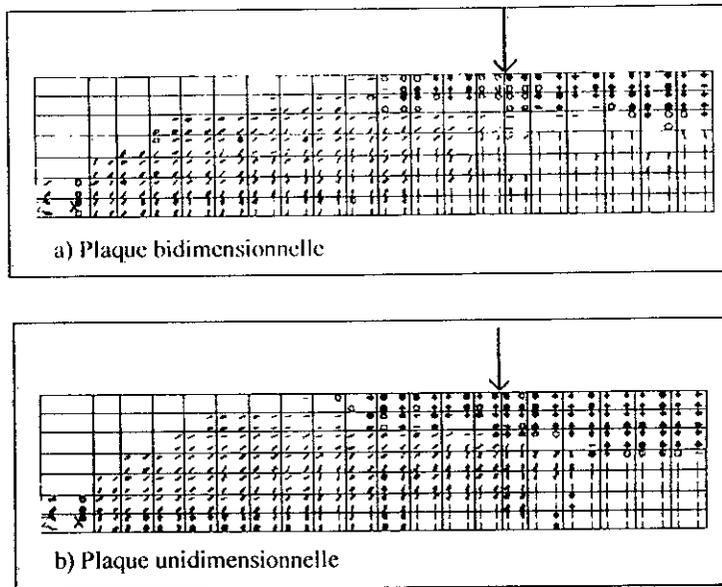


Figure 5.21: Schéma de fissuration du béton de la poutre F11.

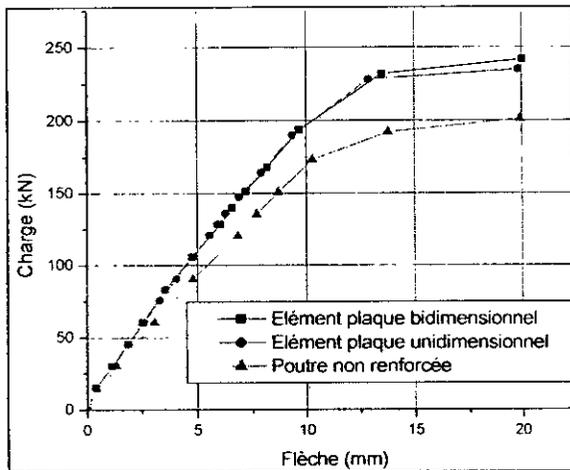


Figure 5.22 : Courbe Charge – Flèche des poutres F01 et F11.

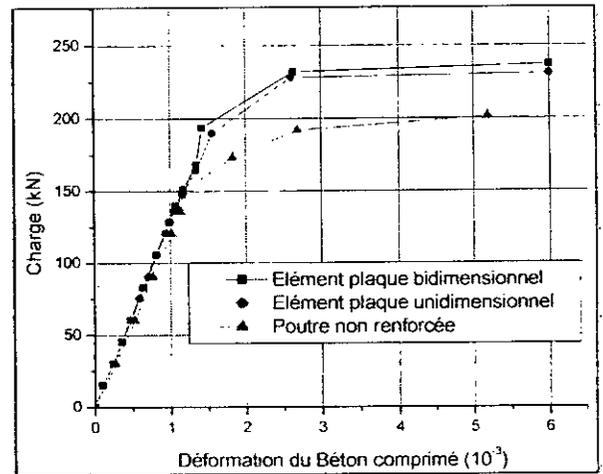


Figure 5.23 : Courbe Charge – Déformation du béton comprimé des poutres F01 et F11.

De plus, toutes les poutres ont atteint leurs résistances flexionnelles ultimes et leurs ruptures s'effectuent principalement par écrasement du béton, suivi par une plastification des aciers longitudinaux, conformément aux observations expérimentales.

Conformément aux constatations expérimentales, les schémas de fissuration obtenus du modèle numérique indiquent la présence des fissures verticales de traction à mi-travée, et des fissures de cisaillements inclinées qui émanent des appuis. La zone d'écrasement du béton comprimé est située entre les deux points d'application de la charge.

### 5.3.3 Poutre en BA renforcée par une plaque en CFRP (S6-PRE3) :

#### 5.3.3.1 Maillage de la poutre :

Étant donné que la poutre est symétrique uniquement une seule moitié a été modélisée (Figure 5.24). La charge est appliquée sous forme d'une pression. Le tableau 5.10 résume la topologie de la maille utilisée.

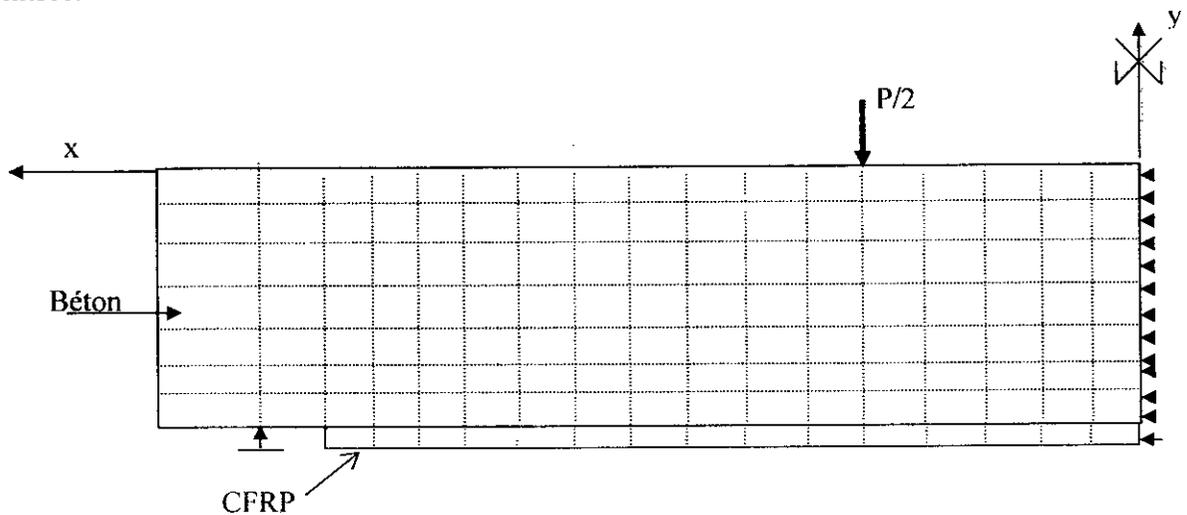


Figure 5.24 Modélisation numérique de la poutre S6-PRE3.

Élément	Solid 65	Solid 45	Link 8	Total
Nombre des nœuds	/	/	/	720
Nombre des éléments	400	68	80	548
Nombre total des nœuds bloqués	35	5	/	40

Tableau 5.10 : Topologie de la maille. Poutre S6-PRE3.

#### 5.3.3.2 Résultats numériques et comparaison:

Vu que les résultats expérimentaux [14] sont présentés en terme de moment fléchissant, les résultats numériques obtenus du logiciel ANSYS ont été transformés pour correspondre au moment au lieu de la charge appliquée. Il s'agit tout simplement de calculer le moment fléchissant par :

$$M = a \cdot P/2$$

Avec : a = la distance entre le point d'application de la charge et le point d'appui = 1067mm.

Le tableau 5.11 présente les résultats numériques et expérimentaux à mi travée pour un moment appliqué égal à 25 kN. Tandis que le tableau 5.12 présente les résultats au stade de la rupture.

	Numérique(mm)	Expérimentale(mm)	% Erreur
Flèche (mm)	5.06	5.73	11.7 %
Déformation de béton comprimé ( $10^{-3}$ )	0.618	0.60	3.0 %
Déformation de la plaque ( $10^{-3}$ )	2.32	1.80	28.88 %

Tableau 5.11 : Valeurs à mi-travée à M = 25 kN.m

	Flèche à la rupture (mm)	Moment de rupture (kN.m)	Déformation de béton tendu à la 1 <sup>ère</sup> fissuration ( $10^{-6}$ )	Moment d'écrasement du béton (kN.m)	Moment de plastification des aciers (kN.m)
NUM	26.8	51.9	188	42.10	36.39
EXP	24.5	52	/	/	/
% Erreur	9.38 %	0.03 %	/	/	/

Tableau 5.12 : Charges et déformations de la poutre S6-PRE3.

Les variations de la flèche, la déformation du béton comprimé et la déformation de la plaque en fonction du moment appliqué sont présentées dans les courbes des figures 5.25 à 5.27. Le schéma de fissuration de la poutre au dernier stade de chargement est présenté dans la figure 5.28.

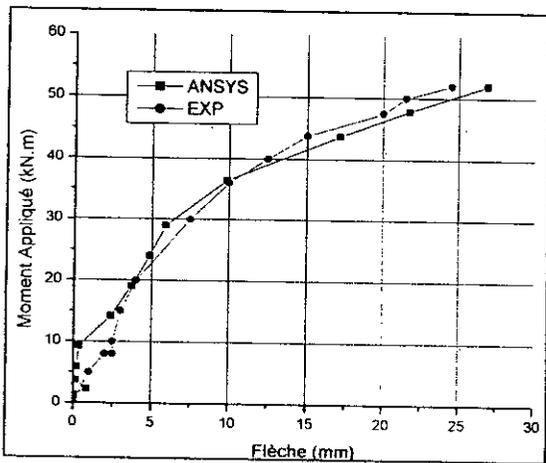


Figure 5.25 : Courbe Moment appliqué – Flèche Poutre S6-PRE3

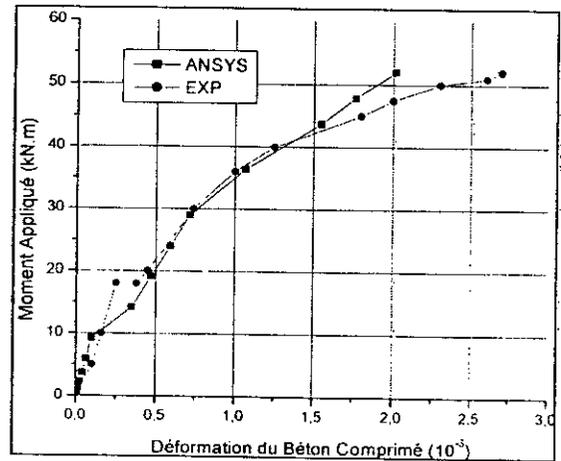


Figure 5.26 : Courbe Moment appliqué – Déformation du béton comprimé. Poutre S6-PRE3.

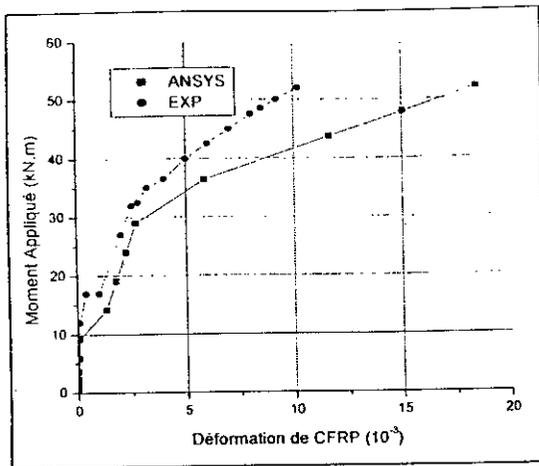


Figure 5.27 : Courbe Moment appliqué – Déformation de la plaque CFRP. Poutre S6-PRE3

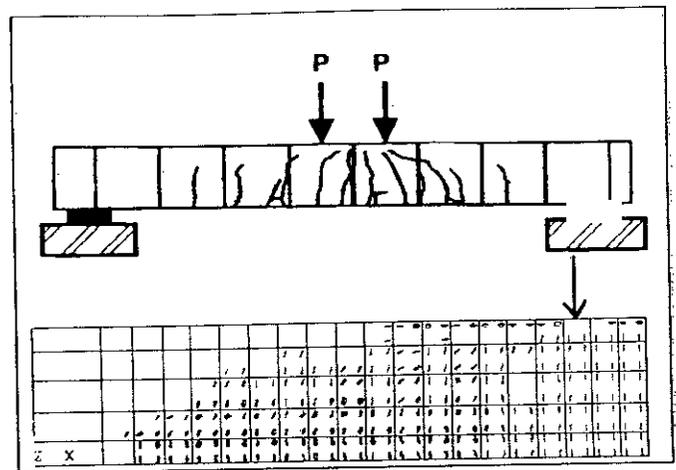


Figure 5.28: Schéma de fissuration du béton de la poutre S6-PRE3.

Les résultats montrés indiquent globalement que le modèle numérique est apte à décrire convenablement le comportement de la poutre en terme de la flèche et à un degré moins la déformation du béton comprimé. Cependant, un écart plus en moins important entre les résultats du modèle numérique et ceux du modèle expérimental est constaté pour le cas de la déformation de la plaque et le cas du schéma de fissuration. Pour le cas de la déformation de la plaque, ceci est probablement dû, d'une part, à la discrétisation utilisée où la couche très mince de la plaque (0.34 mm) a été modélisée par le biais des éléments solides en 3D. De l'autre côté, la nature même de CFRP ne peut pas être convenablement appréhendée par des éléments solides isotropes, car le matériau CFRP est un matériau orthotrope ayant des propriétés très différentes dans les trois directions. Un élément multicouche aurait été plus avantageux pour ce type de matériau. D'autre part, cet écart est dû aux erreurs expérimentales. Dans ce cadre, il est à noter que l'épaisseur des jauges de contrainte généralement commercialisées dépasse 0.3 mm ce qui les rend pratiquement inadéquates pour mesurer les déformations de la plaque du CFRP utilisée. Pour le cas de fissuration, il est notoire que l'approche de fissuration continue « smeared crack » a une tendance à répartir la fissuration sur une zone plus étendue de ce qui se passe en pratique. Par conséquent, la méthode n'est pas apte à reproduire les cas où quelques fissures seulement se développent et entraîne la rupture de l'élément.

*Chapitre VI*  
*CONCLUSION*

Dans l'étude que nous tenons de présenter, nous nous sommes fixé pour objectif la modélisation non linéaire d'une poutre en béton armé renforcée par collage de plaques (Acier et CFRP) extérieur sur les faces tendues.

Bien que le thème ait fait l'objet de nombreuses études expérimentales et numériques, certains aspects du comportement d'ensemble des structures en béton armé renforcées par collage de plaques extérieures restent encore à éclairer. Notre contribution consiste à trouver un outil de calcul qui nous permet d'évaluer les contraintes et les déformations afin de dimensionner ce type de structures, et d'analyser en détail les comportements physiques des matériaux. Le recours à l'analyse non linéaire par la méthode des éléments finis est la procédure la plus appropriée pour répondre à ces attentes. Vu le progrès important dans le domaine d'informatique, nous avons utilisé le logiciel ANSYS, qui nous permet de modéliser précisément le comportement de structures en béton armé. En utilisant une discrétisation tridimensionnelle, nous avons choisis les types des éléments, ainsi que les modèles des matériaux les plus convenable dans la modélisation des différents matériaux de la poutre renforcée. Cela est accompli après un tour d'horizon que nous avons effectué sur les travaux expérimentaux, analytiques et numériques élaborés dans la revue bibliographique, et ainsi que sur les différents modèles des matériaux utilisés pour la modélisation de comportement du composite béton armé renforcé.

Les résultats numériques obtenus par le logiciel ANSYS ont servi de base de comparaison aux résultats expérimentaux. Les principales conclusions peuvent s'énoncer comme suit :

- Les résultats numériques obtenus montrent globalement une bonne concordance avec les résultats du modèle expérimental, et confirment clairement l'effet bénéfique du renforcement sur le comportement des poutres, qui se traduit notamment par la réduction des flèches et des déformations, et l'augmentation des charges de rupture et de fissuration.
- Les courbes charge N flèche confirme la validité du modèle à retracer l'histoire du comportement de la poutre.
- L'écart plus en moins important dans les déformations, notamment au stade de la rupture est dû vraisemblablement aux erreurs dans les mesures expérimentales, ainsi aux limitations du modèle numérique pour discrétiser les éléments de faible épaisseur comme la plaque de renforcement.

Bien entendu, ce travail n'a d'autres prétentions que d'être plus exploratoire et il reste bien plus de problème à examiner qu'il n'en été résolu, par exemple :

- Une étude plus profonde et plus avancée sur les éléments d'ancrage de la plaque de renforcement pour éviter la rupture prématurée de la plaque.
- La prise en compte des éléments d'interface afin de simuler le comportement de la plaque.

# *BIBLIOGRAPHIE*

## BIBLIOGRAPHI

- [1]- **Bahram M Shahrooz ; Serpil Boy ; T. Michael Baseheart** « Flexural Strengthening of four 76-old T-beams with various fiber-reinforced polymer systems : Testing and analysis» *ACI Structural Journal* (September N October 2002), PP 681 N 691.
- [2]- « Standard Specification for Repair of Concrete » United States Department of the Interior. Bureau of Reclamation Technical Service Centre. (August 1996.)
- [3]- « Engineering and Design. Evaluation and Repair of Concrete Structures ». Department of the Army. U.S. Army Corps of Engineers Washington, (30 June 1995) , DC20314 N 1000
- [4]- **J.F. Bonacci ; M. Maalej** . « Externally bonded FRP for service N life extension of RC infrastructure ». *Journal of Infrastructure Systems* ( March 2000) 41 N 46
- [5]- **Fabrice Conus ; René Suter ; Buquan Miao ; Noyan Turkkan** « Modélisation par éléments finis de poutres en béton armées renforcées de tissus aramide » *Ecole d'ingénieur et d'architectes de Fribourg, Suisse* (2005)
- [6]- «Engineering and Design. Composite Materials for Civil Engineering Structures » Department of the Army. U.S. Army Corps of Engineers Washington, (31 March 1997), DC20314 N 1000.
- [7]- **Emmanuelle David ; Chfika Djelal ; François Buule-Bodin**. « Repair and strengthening of reinforced concrete beams using composite materials » 2<sup>nd</sup> Int. PhD Symposium in Civil Engineering (1998 Budapest).
- [8]- **M.Hussain; Alfarabi Sharif; I.A. Basunbul; M.H. Balauch; J. AL-Sulaimani** « Flexural behaviour of pre-cracked reinforced concrete beams strengthened externally by steel plates ». *ACI Structural Journal* (January N February 1995).
- [9]- **Charif A.** « Structural Behaviour of reinforced concrete beams strengthened by epoxy bonded steel plates ». P.h.D. Thesis. Sheffield Univ. (1983).
- [10]- **François Byle-Bodin ; Emmanuelle Davide ; Eric Ragneau** « Finite element modelling of flexural behaviour of externally bonded CFRP reinforced concrete structures ». *Engineering Structures* 24 (2002) 1423 N 1429.
- [11]- **Omar Ahmed ; Dionys Van Gemert ; Luci Vandewalle**. « Improved model for plate N end N shear of CFRP strengthened RC beams ». *Cement & Concrete Composites* 23 (2001). 3 N 19.
- [12]- **Koji Takeda ; Yoshiyuki Mitsui ; Kiyoshi Murakami** . « Flexural behaviour of reinforced concrete beams strengthened with Carbon fibre sheets ». *Composites Part A : 27 A* (1996). 981 N 987.
- [13]- **M. Maalej ; Y. Bian** . « Interfacial shear stress concentration in FRP strengthened beams » *Composites Structures* 54 (2001). 417 N 426.
- [14]- **M.A. Shahawy ; M. arockiasamy ; T. Beitelman ; R. Sowrirajant** . « Reinforced concrete rectangular beams strengthened with CFRP laminates ». *Composites Part B : 27 B* (1996). 225 N 233.
- [15]- **H.N. Garden ; L.C. Hollaway ; A.M. Thorne** . « A preliminary evaluation of carbon fibre reinforced polymer plates for strengthening reinforced concrete members ». *Proc. Instn Civ. Engrs Structs and Bldgs*, 123, (May 1997) 127 N 142.
- [16]- **R.N. Swamy ; P. Mukhopadhuyaya** . « Debonding of carbon N fibre N reinforced polymere plates from concrete beams ». *Proc. Instn Civ. Engrs Structs and Bldgs*, 134, (Nov.1999) 301 N 317.
- [17]- **Houssam A. Toutanji ; Gerardo Ortiz** . « The effect of surface preparation on the bond interface between FRP sheets and concrete members ». *Composites Structures* 53 (2001). 457 N 462.
- [18]- **Ahmed Khalifa ; A. Nanni** . « Improving shear capacity of existing RC T N section beams using CFRP composites ». *Cement & Concrete Composites*, Vol. 22, No. 2, (July 2000), PP. 165 N 174.
- [19]- **B. Täljsten ; L. Elfgrén**. « Strengthening concrete beams for shear using CFRP materials evaluation of different application methods ». *Composites : Part B* 31 (2000) 87 - 96.

- [20]- **Annaiah Rahu; John J. Myers; Antonio Nanni.** « An Assessment of in N situ FRP shear and flexural strengthening of reinforced concrete joists ». Centre for Infrastructure Engineering Studies. The University of Missouri N Rolla.
- [21]- **Khalifa. A; A. Belarbi ; A. Nanni,** « Shear performance of RC member strengthened with externally bonded FRP wraps ». Proc., 12<sup>th</sup> World Conference on Earthquake Engineering, (Jan 30 N Feb 04, 2000), Auckland, Newzealand, Paper 305. 10 PP
- [22]- **Khalifa. A; A. Nanni,** « Rehabilitation of rectangular simply supported RC beams with shear deficiencies using CFRP composite » Construction and Building Materials, (April 1999).
- [23]- **Khalifa. A; Tumialan G. ; A. Nanni ; A. Belarbi** « Shear strengthening of continuous RC beams using externally bonded CFRP sheets ». SP N 188, American Concrete Institute, Proc., 4<sup>th</sup> International Symposium on FRP for Reinforcement of Concrete Structures (FRPR CS4), Baltimore, MD, (Nov. 1999), PP. 995 N1008.
- [24]- **V.P.V. Ramana; T. Kant; S.E. Morton; P.K. Dutta; A. Mukherjee; Y.M. Desai,** « Behaviour of CFRPC strengthened reinforced concrete beams with varying degrees of strengthening ». Composite : Part B 31 (2000) 461 N470.
- [25]- **D. Kim ; W.M. Sebastian .** « Parametric study of bond failure in concrete beams externally strengthened with fibre reinforced polymer plates ». Magazine of Concrete Research, 54, No. 1, (February 2002), 47 N59.
- [26]- **F. Taheri ; K. Shahin ; I. Widiarsa.** « On the parameters influencing the performance of reinforced concrete beams strengthened with FRP plates ». Composite Structures 58 (2002) 217 N 226.
- [27]- **Arduini M. ; Nanni A.** « Parametric study of beams with externally bonded FRP reinforcement ». ACI Structural Journal / September N October (1997), PP. 493 N501.
- [28]- **De Lorenzis L.; B. Miller ; A. Nanni** « Bond of FRP laminates to concrete » ACI Structural Journal, (July 2000).
- [29]- **Myers J.J; Murthy. S; Micelli. F.** « Effect of combined environmental cycles on the bond of FRP sheets to concrete ». Proceeding N Composites in Construction, 2001 International Conference. Porto, Portugal, (October 10 N12 , 2001).
- [30]- **M.S. Mohamed Ali ; Deric J. Oehlers ; Sung N Moo Park .** « Comparison between FRP and steel plating of reinforced concrete beams ». Composites : Part B 32 (2001) 1319 - 1328.
- [31]- **Xinbao Yang ; A. Nanni** « Concrete beams strengthened with misaligned CFRP laminates » Accepted for Publication in Proceedings FRPRCS5, Cambridge UK, (July 16 N18, 2001).
- [32]- **Zhishen Wu; Jun Yin.** « Fracturing behaviour of FRP N strengthened concrete structures » Engineering Fracture Mechanics xxx (2002). xxx N xxx.
- [33]- **Mohammad Ashrafuddin ; Mohammad A. Baluch ; Alfarabi Sharif , Ghazi J. Al Sulaimani ; Abul K. Azad ; Asadur R. Khan .** « Peeling and diagonal tension failure in steel plated R / C beams ». Construction and Building Materials 13 (1999). 459 N467.
- [34]- **E.E. Etman ; A.W. Beeby.** « Experimental programme and analytical study of bond stress distribution on a composites plate bonded to reinforced concrete beam ». Cement & Concrete Composites, 22 (2000) 281 N291.
- [35]- **Brian Miller ; A. Nanni** « Bond Between CFRP Sheets and Concrete » Proceeding, ASCE 5<sup>th</sup> Materials, Congress, Cincinnati, OH, L.C., Editor, (May 10 N12, 1999), PP. 240 N247.
- [36]- **A. Li ; C. Diagana ; Y. Delmas .** « Shear strengthening effect by bonded composite fabrics on RC beams ». Composites : Part B 33 (2002). 225 N239.
- [37]- **Alex Li ; Cheikhna Diagana ; Yves Delmas.** « CFRP contribution to shear capacity of strengthened RC beams ». Engineering Structures 23 (2001). 1212 N1220.
- [38]- **Bimal Babu Adhikary ; Hiroshi Mutsuyshi ; Masashi Sano .** « Shear strengthening reinforced concrete beams using steel N plates bonded on beam web : Experiments and analysis ». Construction and Building Materials 14 (2000). 237 N244.

- [39]- **M.S. Mohamed Ali ; Deric J. Oehlers ; M.A. Bradford** . « Shear peeling of steel plates adhesively bonded to the sides of reinforced concrete beams ». Proc. Instn Civ. Engrs Structs and Bldgs, 140, (Aug 2000), 249 N 259.
- [40]- **Joseph M. Tripi; Charles E. Bakis; Thomas E. Boothy; A. Nanni** , « Deformation in concrete with external CFRP sheets reinforcement ». Journal of Composites for Construction (May 2000). PP85 N 94.
- [41]- **J. Lemaitre ; J. Chaboche** « Mécaniques des matériaux solides ». Dunod (1988)
- [42]- **M. Arduini; A. Di Tommaso; A. Nanni**, « Brittle failure in FRP plate and sheet bonded beams ». ACI Structural Journal (July N August 1997).
- [43]- **J. Q. Ye**. « Interfacial shear transfer of RC beams strengthened by bonded composite plates. ». Cement and Concrete Composites 23 (2001) 411 N 417.
- [44]- **J. G. Teng ; J. W. Zhang ; S. T. Smith**. « Interfacial stresses in reinforced concrete beams bonded with a soffit plate : a finite element study ». Construction and Building Materials 16 (2002) 14.
- [45]- **K.T. Lau ; P.K. Dutta ; L.M. Zhou ; D. Hui**. « Mechanics of bonds in an FRP bonded concrete beams ». Composites : Part B 32 (2001) 491 - 502.
- [46]- **V. Sierra N Ruiz ; J.F. Destrebecq ; M. Grédiac**. « The transfer length in concrete structures repaired with composite materials : A survey of some analytical models and simplified approaches ». Composite Structures 55 (2002). 445 N 454.
- [47]- **Jian Yang ; Jianqiao Ye**. « Interfacial stresses in plated beams with cracks ». Composite Structures 57 (2002). 125 N 134.
- [48]- **A. F. Ashour**. « Size of FRP laminates strengthen reinforced concrete sections in flexure ». Proceeding of the Institution of Civil Engineers. Structures and Buildings 152. (August 2002) Lssue3.
- [49]- **Tarek H. Almusallam ; Yousef H. Al - Salloum**. « Ultimate strength prediction for RC beam externally strengthened by composite materials ». Composites : Part B 32 (2001) 609 - 619.
- [50]- **Mahmoud A. H. Hassanen ; Mohamed Raouf**. « Design against premature peeling failure of RC beams with externally bonded steel or FRP plates ». Magazine of Concrete Research, 53, No. 4 (August 2001), 251 N 262.
- [51]- **M. Raouf ; S. Zhang**. « An insight into the structural behaviour of reinforced concrete beam with externally bonded plates ». Proc, Instn Civ. Ingrs Structs & Bldgs, 122, (Nov 1997), 477 N 492.
- [52]- **Malek A. ; Saadatmanech H. ; Ehsani M.** ; « Prediction of failure load of R/C beam strengthened with FRP plate Due to stress concentration at the plate end ». ACI Structural Journal March N April (1998). PP. 142 N 152.
- [53]- **M. Maalej ; W.H. Goh ; P. Paramasivam**. « Analysis and design of FRP externally reinforced concrete beams against debonding N type failures ». Materials and Structures, Vol. 3 (August N September 2001), PP 418 N 425.
- [54]- **Robert ; T.M.**, « Approximate Analysis of Shear and normal stress concentrations in the adhesive layer of plated RC beams ». The structural Engineer 67(12/20)(1989) 229-233.
- [55]- **Y.N Ziraba; M.H. Baluch** « Computational model for reinforced concrete beams strengthened by epoxy bonded steel plates ». Finite Elements in Analysis and Design 20 (1995) 253 N 271.
- [56]- **Bimal Babu Adhikary ; Hiroshi Mutsuyshi**. « Numerical simulation of steel N plate strengthened concrete beams by a non-linear finite element method model ». Construction and Building Materials 16 (2002). 291 N 301.
- [57]- **L. Ascione ; L. Feo**. « Modeling of composite / concrete interface of RC beams strengthened with composite laminates ». Composites : Part B 31 (2000).
- [58]- **Victor N. Kaliakin ; Michael J. Chajes ; Ted F. Januszka**. « Analysis of concrete beam reinforced with externally bonded woven composite fabrics ». Composites : Part B 27 (1996) 235 N 244.
- [59]- **Ngo ; D ; Scordelis A.C** « Finite element Analysis of reinforced concrete beams ». ACI Journal, Vol 64, (1967) PP 152 N 163.

- [60]- Nilson A.H « Non linear analysis of reinforced concrete by the finite element methode » ACI Journal, Vol 65, (1968) PP 757 N 766.
- [61]- ASCE special publication « Committee of concrete and masonry structures: state of the art report on the finite element Analysis of reinforced concrete » (1982)
- [62]- Işenberg ; J. « Finite element Analysis of reinforced concrete structures » ASCE, New york (1993)
- [63]- De Borst ; R « Some recent developments in computational modelling of concrete fractur » INT. Jnl. Fractur, Vol 86, (1997) PP 5 N 36.
- [64]- Gerstle K.H « Behaviour of concrete under multiaxial stress state » ASCE, Jnl. Engr.Mech. Vol 106, (1981) PP 1383 N 1403.
- [65]- Barzegar F. ; Maddipudi S. « Three dimensional modeling of concrete structures » ASCE, Jnl. Struc. Eng. , Vol 123, (1997) PP 1339 N 1455.
- [66]- Balakrishnan S. ; Murray D. « Concrete constitutive model for NLFE analysis of structure » ASCE, Jnl. Struc. Eng. , Vol 114, (1987) PP 1449 N 1466.
- [67]- Servenka V. « Constitutive model for cracked reinforced concrete » ACI, Struc. Jnl. Vol 82 (1985) PP 877 N 882.
- [68]- Jofriet J.C. ; McNeice G.M. « Finite element Analysis of reinforced concrete slabs » ASCE Jnl. Struc. Eng. , Vol 97, (1971) PP 785 N 806.
- [69]- Pietruszczak S. ; Winniki A. « Constitutive model for concrete with embedded sets of reinforcement » ASCE, Jnl. Engr. Mech. , Vol 129, (2003) PP 725 N 738.
- [70]- Mirza S.A. ; Hatzindikas M. ; MacGregor J.G. « Statistical descriptions of strength in concrete » ASCE, Jnl. Struc. Eng. , Vol 105, (1979) PP 1021 N 1037.
- [71]- Popovics S. « A Numerical approach to the complete stress N strain curve for concrete » cement and concrete research , Vol 3 , (1973) PP 583 N 602.
- [72]- SAENS L.P. « Discussion of equations for the stress N strain curve of concrete by Desayi and Krishnan » ACI, Jnl. , Vol 61, (1964) PP 1229 N 1235.
- [73]- Wang P.T. ; Shah S.P. ; Naaman A.E. « Stress N strain curves of normal and light weight concrete in compression » ACI, Vol 75, (1978) PP 603 N 611.
- [74]- Shanafar M.A. ; Keyroddine A. ; Mirsa M.S. « Element size effects in non linear analysis of reinforced concrete members » Comp. Struct. , Vol 62, (1997) PP 339 N 353.
- [75]- Khatri D. ; Anderson J.C. ; « Analysis of reinforced concrete shear wall using ADINA Computers N Structures, Vol 56, (1995) PP 485 N 499.
- [76]- Wang T. ; Hsu T.T.C. « Non linear finite element analysis of concrete structures using new constitutive models » Comp. Struct. , Vol 79, (2001) PP 2781 N 2791.
- [77]- Christiansen M.B. ; Nielson M.P. « Plan stress tension stiffening effects in reinforced concrete » Mag. Conc. research , Vol 53, (2001) PP 357 N 365.
- [78]- He X.G. ; Kwan A.H.K. « Modelling dowel action of reinforced bars for finite element analysis of concrete structures » Comp. Struct. , Vol 79, (2001) PP 595 N 604.
- [79]- Yang Z.J. ; Chen J.F. ; Proverbs D. « Finite element modelling of concrete cover separation failure in FRP plated RC beams » Construction and building materials . Vol 17, (2003) PP 3 N 13.
- [80]- CEB N FIP Committee, Model code 90. Lausanne. (1993)
- [81]- Bazant Z.P. « Numerical simulation of progressive fracture in concrete structures » Proc. of the Int. Conf. Comp. Aided Analysis and design of Conc. Struc. , Pineridge Press. Swansea. (1984) PP 1 N 18.
- [82]- Liu T.C.Y. ; Nilson A.H. ; Slate F.O. « Stress strain response and fractur of concrete in uniaxial and biaxial compression » ACI, Vol 69, (1972) PP 291 N 295.
- [83]- Kupfer H.B. ; Hilsdorf H.K. ; Rusch H. « Behaviour of concrete under biaxial stresss » ACI, Vol 66, (1969) PP 656 N 666.
- [84]- Tasuji E. ; Slate F.O. ; Nilson A.H « Stress strain response and fractur of concrete in biaxial loading » ACI, Vol 75, (1975) PP 306 N 312.

- [85]- **Hu H.T. ; Schnobrich W.C.** « Non linear analysis of cracked reinforced concrete » *ACI Struct. Jnl.* , Vol 87, (1990) PP 199 N 207.
- [86]- **Hand F.R. ; Pecknold D.A. ; Schnobrich W.C.** « Non linear layered analysis of RC plates and shells » *ASCE, Jnl. Struc. Eng.* , Vol 99, (1973) PP 1491 N 1505.
- [87]- **Frantzeskakis C ; Thellout J.N.** « Non linear finite element analysis of reinforced concrete structures with a particular strategy following the cracking process » *Comp. Struc.* Vol 31, (1989) PP 395 N 412.
- [88]- **Lu X.Z. ; Ye L.P. ; Teng J.C. ; Jiang J.J.** « Meso scale FE model for FRP Sheests bonded to concrete » *Eng. Struc.*, Vol 27, (2005) PP 564 N 575.
- [89]- **Chen X.F.** « Plasticity in reinforced concrete » McGraw Hill Book, Co, New york (1982)
- [90]- **Bazant Z.P. ; Kim S.K.** « Plastic fracturing theory for concrete» *ASCE, Jnl. Engr. Mech.* Vol 105, (1979) PP 407 N 428.
- [91]- **Bazant Z.P.; Ozbolt J.** « Nonlocal microplane model for fracture, damage, size effect in structures » *ASCE, Jnl. Engr. Mech*, Vol 116, (1990) PP 2484 N 2504.
- [92]- **Bazant Z.P. ; Zi G.** « Microplane constitutive for porous isotropic rocks » *Int. Jnl. Num. Ana. Math. Geomech.* , Vol 27, (2003) PP 25 N 47.
- [93]- **Rachid Y.R.** « Analysis of prestressed concrete pressure vessels » *Nuclear Engineering and design* , Vol 7, No 4, (1968) PP 334 N 344.
- [94]- **Vecchio F.J. ; Collins M.P.** « The Modified Compression field Theory for reinforced concrete elements subjected to shear ». *ACI Jnl*, Vol 83, (1986) PP 219 N 231.
- [95]- **Vecchio F.J.** « Distributed stress field model for reinforced concrete ». *ASCE, Jnl. Stuc. Eng.* Vol 126, (2000) PP 1070 N 1077.
- [96]- **Keuser M. ; Melhorn G.** « Finite element model for bond problems ». *ASCE, Stuc. Eng. Jnl.*, Vol 113, (1987) PP 2160 N 2173.
- [97]- **Rots J.G. ; Kusters G.M.A. ; Nauta P.** « Smeared crack approche and fracture localisation in concrete ». *HERON*, Vol 30, No 1, (1985)
- [98]- **Cope R.J. ; Rao P.V. ; Clark L.A. ; Noris P.** « Modelling of reinforced concrete behaviour for FE analysis of bridge slabs ». *Num. Math. for non linear problems*, Pineridge Press, Swansea, Vol 1, (1980) PP 457 N 470.
- [99]- **Wang R.S.Y. ; Vecchio F.J.** « Towards modelling reinforced concrete members with externally bonded fiber reinforced polymer composites ». *ACI Stuc. Jnl.* , Vol 100, (2003) PP 47 N 55.
- [100]- **Lu X.Z. ; Ye L.P. ; Teng J.C. ; Jiang J.J.** « Bond slip model for FRP plates bonded to concrete » *Eng. Struc.*, Vol 27, (2005) PP 920 N 937.
- [101]- **ANSYS** , *ANSYS User's Manual Revision 5.5*, ANSYS, Inc., Canonsburg, Pennsylvania,
- [102]- **Bangash, M. Y. H.** « Concrete and Concrete Structures: Numerical Modeling and Applications », Elsevier Science Publishers Ltd., London, England. (1989)
- [103]- **Desayi, P. and Krishnan, S.** «Equation for the Stress-Strain Curve of Concrete », *Journal of the American Concrete Institute*. 61, (1964) PP. 345-350.
- [104]- **Gere, J. M. and Timoshenko, S. P.** « **Mechanics of Materials** », PWS Publishing Company, Boston, Massachusetts 1997).
- [105]- **Willam, K. J., and Warnke, E. D.** «Constitutive Model for the Triaxial Behavior of Concrete », *Proceedings, International Association for Bridge and Structural Engineering*, Vol. 19. ISMES. Bergamo, Italy, (1975) P. 174.