

**UNIVERSITÉ SAAD DAHLAB DE BLIDA**

**Faculté Des Sciences De L'ingénieur**  
Département de Génie Civil

# **MÉMOIRE DE MAGISTER**

Spécialité : Construction

## **ÉTUDE DES PONTS À DALLES ISOTROPES ET ORTHOTROPES SOUMIS À DES CHARGES ROULANTES**

Par

**AGUENINI Nassima**

Devant le jury composé de

M. Abed	Professeur, U.de BLIDA	Président
M. Hadid	Maître de conférences, E.N.T.P, Alger	Examineur
A. Attar	Maître de conférences, U.de BLIDA	Examineur
M. Bensaïbi	Maître de conférences, U.de BLIDA	Promoteur

Blida, 2008

## RÉSUMÉ

Les charges roulantes sur les ponts ont pour effet de provoquer des déformations du tablier de ces derniers. Ces déformations si elles dépassent la limite admissible peuvent engendrer des dommages importants voire même la ruine de l'ouvrage.

Aussi il convient de déterminer ces déflexions avec la plus grande précision possible.

Notre travail s'inscrit dans ce cadre et vise à déterminer la déflexion du tablier d'un pont dans le cas isotrope puis dans le cas orthotrope.

Nous avons développé les équations mathématiques décrivant le comportement d'une plaque isotrope puis orthotrope sous un chargement roulant. Ce dernier étant modélisé par une masse mobile.

Les programmes fortran développés en se basant sur les équations précédentes ont permis de déterminer les déflexions des deux tabliers étudiées en différents points.

**Mots-clefs :** Ponts, Véhicules, Charge roulante, Dalle isotrope, Dalle orthotrope.

## ملخص

تسبب الحمولة المتنقلة على سطح الجسور تشوها لسطحها، هذه التشوهات إذا تجاوزت القيمة القصوى المقبولة يمكن أن تحدث خسائر معتبرة أو أن تؤدي إلى انهيار الجسر مما يستدعي تعيين هذه التشوهات بدقة متناهية.

و في هذا الإطار، قمنا بإنجاز هذا العمل الذي يهدف إلى تعيين تشوه سطح جسر متماثل الخواص في جميع الجهات و آخر غير متماثل الخواص.

قمنا بتطوير المعادلات الرياضية الممثلة لسلوك صفيحة متساوية الخواص في جميع الجهات و أخرى غير متماثلة الخواص عند خضوعها لحمولة متنقلة، هذه الأخيرة تم تمثيلها بكتلة متحركة.

إن برامج FORTRAN التي تم إنشاؤها اعتمادا على المعادلات السابقة تسمح بتعيين تشوه سطح الجسرين المدروسين في نقاط مختلفة.

**الكلمات الدالة:** جسر، مركبة، حمولة متنقلة، صفيحة متماثلة الخواص، صفيحة غير المتماثلة الخواص.

## **ABSTRACT**

The moving loads on bridges have the effect of causing deformations of their flooring. These deformations if they exceed the permissible limit can create substantial damage or even the ruin of the structure.

Also it is necessary to determine these deflections with the good accuracy.

Our work is within this framework and aims to determine the deflection in the case of the floor bridge in an isotropic then in an orthotropic case.

We have developed the mathematical equations describing the behavior of an isotropic plate then an orthotropic one under a moving loading, by considering a moving mass.

FORTRAN programs were developed on the basis of the previous equations, and permit the determination of the deflection for the two flooring studied at different points.

**Keywords:** Bridges, Vehicles, Moving load, Isotropic plate, Orthotropic plate.

## **REMERCIEMENTS**

Je tiens à remercier en premier lieu DIEU tout puissant qui m'a donné la volonté et la force pour achever ce mémoire.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à M. Bensaïbi pour m'avoir encadré, conseillé et encouragé tout au long de ma thèse.

Mes remerciements vont également à l'ensemble de jury qui a bien voulu examiner ce modeste travail.

Mes remerciements vont également à la personne qui m'a toujours encouragé, M. Hocini, avec qui j'ai pu partager mes doutes, mes angoisses mais aussi mes joies...

Je remercie aussi M. Boukri qui m'a beaucoup aidé au commencement de ce travail, ainsi que M. Ibrahim du Ministère des travaux publics et M. Abd Errahman de Constantine pour les documents qu'il m'ont procuré pour mon étude bibliographique.

Mes remerciements s'adressent maintenant tout particulièrement à M. Si Saber de l'E.N.T., M. Yalles et toute l'équipe de CEVITAL pour leur confiance et leur encouragement. Je remercie aussi toute ma famille, ma meilleure amie Selma, Amina, Naïma et mes camarades de la promo 2004.

Enfin, je lance, en particulier à tous ceux dont je n'ai pas écrit les noms sur cette page et qui ont contribué par leur présence ou leur intérêt à ce travail, un grand :

**MERCI !**

## TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ

REMERCIEMENT

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX

INTRODUCTION.....	10
1. ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE .....	12
1.1.Introduction .....	12
1.2.Historique.....	13
1.2.1. Premiers ponts : l'âge du bois et de la pierre .....	13
1.2.2. Ponts antiques.....	14
1.2.3. Pont de moyen âge .....	18
1.2.4. Ponts de la renaissance.....	20
1.2.5. Ponts du XVIIIe siècle : (l'âge de la raison).....	22
1.2.6. Les ponts modernes.....	27
a)Développement des ponts aux XIXème et XXème siècles.....	28
b)Ponts suspendus .....	29
c)Ponts à poutres- caissons et ponts à poutres à âme pleine .....	33
d)Ponts à arcs en béton (1900).....	34
e)Ponts à poutres- caissons en béton.....	34
f)Ponts à haubans .....	34
g)Ponts mobiles.....	35
h)Ponts combinés .....	36
1.3.Étude des ponts .....	37
1.3.1.Les méthodes analytiques .....	37
1.3.2.Modélisation par la méthode des éléments finis .....	39
1.3.3.Modélisation des lois de comportement du béton.....	43
1.4.Conclusion.....	44
2. MODÉLISATION DES PONTS SOUS CHARGE ROULANTE .....	46
2.1.Introduction .....	46
2.2.Modélisation des ponts à dalles isotropes .....	47

2.2.1.Modélisation par une poutre.....	47
2.2.2.Modélisation par une plaque .....	48
2.3.Théorie de Love-Kirchoff .....	48
2.3.1.Hypothèses .....	48
2.3.2.Champ de déplacement .....	49
2.4.Modélisation des Ponts a dalles orthotropes .....	50
2.5.Modélisation du véhicule .....	51
2.6.Conclusion.....	52
3. APPLICATION POUR LES DALLES ISOTROPES .....	53
3.1.Introduction .....	53
3.2.Comportement des dalles isotropes sous chargement roulant.....	54
3.2.1.Vibrations Libres de Plaques simplement appuyées sur 2 côtés.....	54
3.2.2. Vibrations d'une plaque Sous Charge Roulante .....	58
3.3.Conclusion.....	60
4. APPLICATION POUR LES DALLES ORTHOTROPES.....	61
4.1.Introduction .....	61
4.2.Comportement des dalles orthotropes .....	62
4.2.1.Vibrations Libres de Plaques simplement appuyées sur 2 côtés.....	63
4.2.2.Vibrations d'une plaque sous charge roulante .....	68
4.3.Conclusion.....	70
5. RÉOLUTION NUMÉRIQUE DU PROBLEME.....	71
5.1. Introduction .....	71
5.2. Hypothèses de calcul pour la plaque isotrope et orthotrope .....	72
5.3. Résultats obtenues pour une plaque isotrope .....	73
5.3.1. Charge centrée.....	73
5.3.2. Charge excentrée .....	75
5.4. Résultats obtenues pour une plaque orthotrope .....	76
5.4.1. Charge centrée.....	77
5.4.2. Charge excentrée .....	77
5.5. Conclusion.....	81
CONCLUSION .....	82
ANNEXE A .....	84
ANNEXE B.....	85
ANNEXE C.....	88
ANNEXE D .....	91
ANNEXE E.....	94
ANNEXE F .....	96



## LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX

Figure 1.1	La passerelle des Arts -Paris- (XIXe siècle)	12
Figure 1.2	Ponts constitué par un arbre	14
Figure 1.3	Pont sur le fleuve de Chatkal, Kirghizistan	14
Figure 1.4	Pont de bambous	14
Figure 1.5	Le pont antique de Vaison-la-Romaine	14
Figure 1.6	Premier pont en bois de la ville de Boudry Composé d'un plancher	15
Figure 1.7	Pont de Dartmoor en Grande-Bretagne	15
Figure 1.8	Pont flottant (Pakistan) Ce pont traverse le Kabul, affluent de l'Indus	16
Figure 1.9	Le Pont de Gard à Nîmes, France environ 20 apr. J.C	18
Figure 1.10	Le pont Charles (Rép. Tchèque, 1357)	19
Figure 1.11	Le pont d'Avignon (XII e siècle) sur le Rhône en Avignon, France	19
Figure 1.12	Le grand pont de Londres	19
Figure 1.13	Le pont Vecchio, Florence, Italie	20
Figure 1.14	Le pont Rialto	21
Figure 1.15	Le pont des Soupirs	22
Figure 1.16	Le pont neuf (1609) à Paris, France	22
Figure 1.17	Pont couvert à Hartland, dans le nouveau-Brunswick. Canada (Le plus long pont couvert au monde)	24
Figure 1.18	Le Pont Astoria (État de Washington) 1966	25
Figure 1.19	Pont en fonte à Coalbrookdale, Grande Bretagne 1779	26
Figure 1.20	Pont de Kronprinzen Brücke Allemagne	26
Figure 1.21	Pont de Québec, Canada, 1917 (548 m)	27
Figure 1.22	Pont sur la Werra –Allemagne	29
Figure 1.23	Pont de Brooklyn (New York)	29
Figure 1.24	Pont Verrazano-Narrows (New York)	30
Figure 1.25	Pont suspendu de Bratislava (Slovaquie)	30
Figure 1.26	Pont suspendu de Clifton (Bristol)	30
Figure 1.27	Pont suspendu du détroit de Menai	30
Figure 1.28	Pont Akashi-Kaikyo (Japon)	30
Figure 1.29	Pont du Golden Gate, Californie, États-Unis	31

Figure 1.30	Pont de Sidi m'cid, Constantine, Algérie	31
Figure 1.31	Pont sur le Rhummel à Constantine, Algérie	32
Figure 1.32	Pont piétons suspendu "Mellah Slimane" à Constantine, Algérie	32
Figure 1.33	Pont de Menai (Pays de Galles)	33
Figure 1.34	Pont de Normandie, France, 1994 (856 m)	35
Figure 1.35	Tower Bridge en Angleterre	36
Figure 1.36	Facteur de distribution en fonction du nombre d'entretoises	40
Figure 1.37	Maillage bidimensionnel	41
Figure 1.38	Maillage 3D avec des éléments rigides	43
Figure 1.39	Maillage 3D avec des éléments plaques et volumiques	43
Figure 2.1	Modélisation du pont par une poutre	47
Figure 2.2	Modélisation du pont par une plaque	48
Figure 2.3	Types de raidisseurs ou nervures	49
Figure 2.4	Modèle de véhicule simple	51
Figure 2.5	Modèle de véhicule sophistiqué	51
Figure 3.1	Plaque rectangulaire soumise à une charge roulante parallèle à l'axe x	53
Figure 4.1	Modélisation du pont par une plaque	61
Figure 5.1	Organigramme de calcul de la déflexion d'une plaque isotrope soumise à une charge roulante	71
Figure 5.2	Organigramme de calcul de la déflexion d'une plaque orthotrope soumise à une charge roulante	72
Figure 5.3	Représentation des points d'étude de la plaque sous une charge centrée	74
Figure 5.4	Déflexion d'une plaque isotrope soumise à une charge centrée	74
Figure 5.5	Représentation des points d'étude de la plaque sous une charge excentrée	75
Figure 5.6	Déflexion d'une plaque isotrope soumise à une charge excentrée	75
Figure 5.7	Déflexion d'une plaque orthotrope soumise à une charge centrée	77
Figure 5.8	Déflexion d'une plaque orthotrope soumise une charge excentrée	78
Figure 5.9	Déflexion d'une plaque isotrope	79
Figure 5.10	Déflexion d'une plaque orthotrope	79
Figure 5.11	Déflexion d'une plaque soumise à une charge centrée	80
Figure 5.12	Déflexion d'une plaque soumise à une charge excentrée	80
Tableau 5.1	Déflexions de la dalle isotrope sous une charge centrée	74
Tableau 5.2	Déflexions de la dalle isotrope sous une charge excentrée	76
Tableau 5.3	Déflexions de la dalle orthotrope sous une charge centrée	77
Tableau 5.4	Déflexions de la dalle orthotrope sous une charge excentrée	78

## INTRODUCTION

Depuis la création des premiers ponts, que ça soit par la nature ou par le premier homme, ils ont été soumis à la détérioration et à la destruction. Ces dernières sont des lois immuables de la nature. Ainsi la présence d'efforts variables dans le temps et d'efforts périodiques comme ceux des véhicules en déplacement conduit à l'endommagement par fatigue.

L'étude de l'interaction pont-véhicule a été menée théoriquement et expérimentalement au cours des 150 dernières années. Ceci est essentiellement dû à son importance dans la vie courante, mais également à la difficulté de résoudre un tel problème.

L'objectif de ce travail est de réaliser une étude des tabliers de ponts en prenant en compte les deux dimensions des tabliers, et de comprendre le comportement du pont lors de passage des véhicules. Pour atteindre cet objectif, nous proposons de modéliser le tablier du pont par une dalle isotrope et par une dalle orthotrope selon la nature du pont. Le véhicule quant à lui est modélisé par un système de masse-ressort.

Le calcul de la déflexion des tabliers est alors effectué grâce à deux programmes FORTRAN que nous avons développés. Chaque programme est dédié à un cas d'étude : dalle isotrope ou dalle orthotrope.

La présentation de ce travail a été déclinée en cinq chapitres :

Le premier chapitre constitue une analyse bibliographique. Après un historique des ponts, nous présentons les méthodes utilisées généralement pour le calcul de ces derniers.

Dans le second chapitre, nous présentons les différents types de modélisation du comportement pont-véhicule. Pour les ponts, le modèle d'Euler-Bernoulli est insuffisant, le choix de la modélisation par des plaques se justifie alors pour une meilleure précision des résultats. Le choix de modèle du véhicule reste important, pour notre cas nous avons choisi le cas le plus simple d'une masse montée sur un ressort.

Dans le troisième chapitre, nous développons un modèle analytique pour décrire le comportement des tabliers isotropes. Le tablier est modélisé par une plaque isotrope simplement appuyée sur ses deux cotés opposés et libre sur les deux autres. Il est excité par une force constante se déplaçant à une vitesse constante. Cette charge représente un véhicule. Le comportement d'une plaque isotrope simplement appuyée sur ses deux cotés et libre sur les deux autres est étudié en appliquant la théorie des plaques minces. La résolution de l'équation différentielle partielle régissant le mouvement est obtenue en utilisant la méthode de Runge-Kutta.

Après les développements sur la dalle isotrope, nous aborderons dans le chapitre quatre l'étude d'une dalle orthotrope encastree sur ses deux cotés opposées et libre sur les deux autres. Son comportement est supposé élastique orthotrope. La détermination de la réponse est basée sur la résolution de l'équation différentielle de vibration de la plaque orthotrope.

Le cinquième chapitre rassemble les résultats numériques obtenus pour les deux cas isotrope et orthotrope. Il permet d'analyser le comportement des tabliers des ponts lors de passage des véhicules.

Enfin, nous donnons une conclusion qui rappelle les principaux résultats obtenus et les perspectives de ce travail.

## CHAPITRE 1

### ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE

#### 1.1. Introduction

Pour faire face aux obstacles naturels (cours d'eau, vallée...) l'homme a fait preuve d'ingéniosité en fabriquant des structures simples (ponts) afin de faciliter l'accès et de conquérir le monde ; et depuis il ne cesse de les améliorer et le but reste toujours de faciliter l'accès et lier les communautés.

Avec l'évolution rapide, les ponts sont devenus une nécessité économique qui permet de meilleures liaisons commerciales. En général, un pont soutient une voie de circulation. Il peut également supporter des canaux ou des conduites d'eau : il s'agit alors d'un aqueduc. Un viaduc est un ouvrage routier ou ferroviaire de grande longueur, constitué de travées et permettant le franchissement à grande hauteur d'une brèche.

Le pont constitue un point de passage ou de transmission (de matière, d'énergie, d'information) entre deux zones. Un pont provisoire peut être constitué par des bateaux spécialisés (pont de bateaux), et une passerelle désigne parfois des ponts relativement petits (Figure 1.1).



Figure -1.1- la passerelle des Arts -Paris- (XIXe siècle) [1]

La durée de vie réelle d'un ouvrage dépend de nombreux facteurs : La nature de matériau constructif en est le plus important ; les recherches récentes nous ont convaincus que les ouvrages d'art vieillissent naturellement, les ponts peuvent être affectés par des désordres graves très variable et dont les causes sont multiples [2].

La présence de déformation ou de fissuration inhabituelles est souvent le signe visible d'une pathologie. Mais certains ouvrages peuvent être endommagés bien avant l'apparition de signe évident, donc il faut procéder à des mesures fines de mouvement pour mettre en évidence un défaut de résistance de la structure qui peut être sérieux.

Le diagnostic de l'état d'un pont n'est pas une chose aisée, il s'avère donc nécessaire d'élaborer de nouveaux outils de diagnostic, des outils de surveillance, des méthodes fiables de maintenance. Pour atteindre ces objectifs de façon rationnelle, il est indispensable d'assurer une collaboration très étroite entre les chercheurs et les spécialistes de l'auscultation, mais aussi les concepteurs, les codificateurs, les entrepreneurs et les maîtres d'ouvrages.

## 1.2. Historique

Les premiers ponts connus ont été des ponts supportant une circulation piétonne.

À partir du XIX<sup>e</sup> siècle, la construction de ponts est devenue indispensable pour franchir de nouvelles voies de communication, infranchissables de manière simple ou dangereuse pour les usagers vulnérables (voies ferrées, autoroutes).

Un pont peut être réalisé en béton, en maçonnerie, en métal ou par d'autres matériaux pour des ponts de faible longueur : bois, cordes, bambous (ponts de singes).

Basiquement, la structure d'un pont est la suivante :

- un tablier constitue la partie qui supporte les voies de circulation ;
- des culées servent de point d'appui aux extrémités du tablier ;
- des piles soutiennent le tablier entre les culées, si la longueur du tablier le nécessite.

Elles peuvent le soutenir de manière indirecte, par exemple avec un système de câbles, comme dans les ponts suspendus.

A travers l'histoire de ponts, on peut distinguer plusieurs types:

### 1.2.1. Premiers ponts : l'âge du bois et de la pierre

On dit que « La nécessité donne naissance à l'invention » donc l'apparition du premier pont fut le fruit de l'imagination et la créativité du premier homme qui pour parvenir à satisfaire ces besoins devait conquérir d'autres horizons, nouveaux lieux de chasses et de cueillettes.

#### ❖ Ponts Primitifs

La structure des ponts primitifs se composait essentiellement de montant et de linteaux, tout en utilisant des matériaux trouvés sur place comme les lianes, le bois et les pierres ou encore en combinant les matériaux ci-dessus. Les premiers ponts se limitaient probablement à quelques pierres posées sur le lit d'un ruisseau, ou à un arbre (Figure 1.2), à des rondins placés en travers d'un cours d'eau plus large, ou encore à des lianes ou des cordes tendues au travers d'une vallée étroite (Figure 1.3). De telles structures sont toujours utilisées. Le principe du pont à suspension est extrêmement ancien fait de cordes et de bambous (Figure 1.4); il permet de franchir des distances considérables avec une remarquable économie de moyens. Une corde unique tendue en travers d'une gorge en représente la forme la plus simple. On peut l'améliorer en y ajoutant des cordes supplémentaires, un tablier, des côtés pour former des mains courantes.



Figure -1.2-Ponts constitué par un arbre [3]

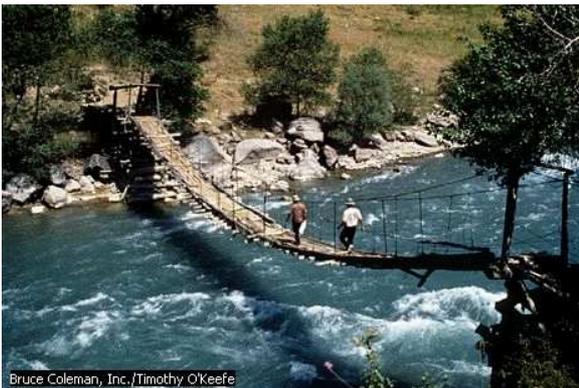


Figure -1.3-Pont sur le fleuve de Chatkal,  
Kirghizistan [1]

Figure -1.4-Pont de bambous [4]

### 1.2.2. Ponts antiques

Les ponts à poutres de bois semblent avoir été le type de pont le plus couramment utilisé dans l'Antiquité, bien qu'un pont à arches en briques ait été construit vers 1800 av. J.-C. à Babylone, ainsi que d'autres formes de ponts, comme les ponts à suspension simple et les ponts à encorbellement, en Inde, en Chine et au Tibet (Figure1.5) [1].



Figure - 1.5- Le pont antique de Vaison-la-  
Romaine [1]

A l'âge de bronze, 2 000.000 à 10 000 ans av. J.-C., le pont en bois était destiné à de multiples usages et devait répondre à plusieurs caractéristiques ; il devait être assez large et

fort pour résister au passage du bétail ; plat et solide pour permettre le transport de la nourriture et autre matériaux, et enfin mobile pour pouvoir être escamoté devant l'ennemi. Les étroits troncs d'arbres furent remplacés par des doubles poutres plus espacées sur lesquelles on fixait de courts rondins pour former une travée qui furent rabotée et tous les interstices furent bouchés avec un mélange de branche et de terre pour niveler cette plateforme (Figure1.6) [5].

Pour les passages au-dessus des cours d'eau, les piles de soutènement étaient constituées de pierres entassées à même le fond, parfois des pieux en bois étaient enfoncés dans le fond de la rivière pour former un cercle qu'on remplissait de pierres afin d'obtenir un batardeau grossier étanche et sec.



Figure -1.6 - Premier pont en bois de la ville de Boudry Composé d'un plancher [6]

Vers 3500 ans av. J.-C., L'utilisation de piliers en pierre comme supports intermédiaires a marqué un progrès supplémentaire dans la construction des ponts à poutres en bois. Les premiers habitants lacustre en Suisse, vivaient dans des maisons en bois bâties sur les lacs, craignant que leurs maisons ne s'enfoncent, ils ont eu l'idée de fixer des piles de bois sur le fond du lac ; de cela naquirent le pont à piles de bois et le pont sur chevalets. Dans les régions froides situées plus au nord, riches en pierres de toutes formes et de toutes tailles, mais pauvres en arbres, on préférait utiliser des dalles de pierres pour franchir les cours d'eau [5]. Les ponts de pierres bâtis vers le XV<sup>e</sup> siècle, à Dartmoor, en Grande-Bretagne, rappellent la construction des ponts primitifs préhistoriques de l'âge de bronze (Figure1.7).



Figure -1.7- Pont de Dartmoor en Grande-Bretagne [5]

Au IV<sup>ème</sup> millénaire avant notre ère l'homme découvrit les secrets de la construction en arc. Les Sumériens inventèrent la voûte en arc et en berceaux pour leur construction et commencèrent à employer l'adobe – brique d'argile séchée au soleil- dans leurs constructions monumentales qui marquèrent l'apogée de leur civilisation. Comme premier exemples de ponts, celui construit au-dessus de l'Euphorate une centaine d'années auparavant. Ce pont reliait les palais de l'ancienne Babylone situé de part et d'autre du fleuve au nombre de cent, des piles en pierre soutenaient les poutres en bois de cèdre, de cyprès ou de palmier qui formaient une voie de plus de 10m de largeur et de 180m de longueur, plancher que l'on retirait chaque soir par crainte de l'envahisseur d'après l'historien grec Hérodote du V e siècle av. J.-C. [1]

En revanche la construction égyptienne était basée sur les pierres selon le principe montants- linteau dominait malgré la fréquente utilisation de l'arc en encorbellement.

Environ 519-465 av. J.-C., l'historien Hérodote évoque le vaste pont flottant construit par le souverain perse Xerxès afin de faire passer son armée dont la traversée dura 7 jours et 7 nuits; il était construit de deux rangées de 360 bateaux fixés ensemble et à la berge, ancré dans l'Hellespont, l'actuel détroit des Dardanelles (Figure1.8). [5]



Figure -1.8- Pont flottant (Pakistan) Ce pont traverse le Kabul, affluent de l'Indus [1]

Par ailleurs les chinois vers l'époque de l'empereur Yoa 2300 av. J.-C., utilisaient déjà des ponts faits de pontons, des embarcations nommées sampangs de 9m de long, encrées côte à côte puis traversées par une passerelle. Mais les chinois utilisèrent aussi la simple poutre à montants et à linteau, la poutre cantilever, les ponts suspendu à cordes, poutre en bois...etc. Au VIII e siècle, en Chine, furent construits des ponts sur ce modèle avec des chaînes en fer.

#### ❖ Ponts antiques romains

Les nombreuses traces laissées par la civilisation romaine en Europe, en Afrique du Nord, en Turquie et autres anciennes colonies restent parmi les structures les plus innovantes puisque la technologie à l'époque était très limitée. Les ruines Romaines témoignent que les Romains étaient des Génies de la construction civile. Ils dominèrent l'Europe méditerranéenne et conquièrent la totalité de ce qui était connu du monde à

l'époque et bâtirent des citées et des voies reliant l'Europe à l'Asie et à l'Afrique du Nord, ils furent les premiers véritable ingénieurs et comprenant que l'établissement et le maintien de leur empire dépendaient de communications efficaces et permanentes et donc la construction des routes et des ponts devint l'une de leurs priorités. Les Romains construisirent de nombreux ponts sur chevalets en bois, dont l'un est décrit dans les Commentaires de Jules César. Ils pouvaient bâtir des ponts en bois atteignant 30 m de portée. Mais ils comprirent vite que les structures en bois surtout celle installées dans l'eau été moins durable et s'usent rapidement et s'infestent par les insectes ; pour les protéger, on faisait tremper le bois d'abord dans l'huile et la résine (prévention de moisissure sèche), et on le couvrait d'alun (résistance au feu). Ils apprirent aussi à utiliser le bois selon sa qualité : l'aulne était le mieux adapté aux pieux enfoncé dans l'eau, le pin, cyprès et cèdre étaient meilleur pour la superstructure en surface.

Concernant les pierres, ils savaient aussi distinguer les différentes qualités de la pierre : le fut devait être protégé avec un enduit à la chaux de la désagrégation due aux intempéries, le travertin est très dure mais résiste mal au feu. Quant aux matériaux plus durables tels que le marbre, ils devaient le ramener de régions éloignées.

Dès le II<sup>e</sup> siècle av. J.-C., ils construisaient des ouvrages en maçonnerie dans les rivières, grâce à la découverte du ciment appelé pouzzolane (mélange de chaux, de sable, de poudre de roche volcanique de Pozzuoli et d'eau), et à la construction d'enclos provisoires appelés batardeaux. Ces nouveaux matériaux servirent de mortier pour la pose des briques ou des pierres. Aussi les Romains découvrirent les arcs en voussoirs qui étaient plus résistant et autorisaient une portée plus grande. Ils bâtissaient des arcs à claveaux, semi-circulaires, pour lesquels la poussée s'exerçait principalement vers le bas appelé « cintre ». Après la construction des piles, ils posaient un arc en bois sur lequel ils disposaient les pierres taillées suivant un dessin adéquat, sans recourir au mortier. Cependant les piles massives réduisaient la largeur du chenal et augmentaient le débit de l'eau près des piles, donc l'affouillement risque de les user alors les piles étaient équipées de parties saillantes en bec qui fendaient l'eau [5].

Les ponts romains encore existants sont constitués d'une ou plusieurs arches semi-circulaires en pierre. Six ponts antiques sont à voir à Rome, le plus renommé et le très ornementé Ponte Sant' Angelo (136 av. J.-C.), bien que beaucoup considèrent le Ponte di Augusto de Rimini, en Italie, datant du 20<sup>e</sup> apr. J.-C. comme le plus beau spécimen de l'époque en raison de ces proportions classiques. En Espagne, près de Barcelone, le pont de Martorell, édifié vers 219 av. J.-C., et le Construit au I<sup>er</sup> siècle av. J.-C., et en Perse, sur le Karun, fut construit en 260 apr. J.-C. un pont en maçonnerie d'une longueur globale de 500 m comportant 50 arcs en plein cintre semi-circulaires. Parmi les plus grands aqueducs citons celui de Ségovie (I<sup>e</sup> siècle de notre ère) en Espagne, avec ses deux rangées superposées de 109 arches transportant le Rio Frio sur les derniers 750 m qui le sépare de la ville [5].

Enfin le plus célèbre des tous, « Le pont du Gard » à Nîmes (Figure1.9), édifié en l'an 19 apr. J.-C., dont trois rangées d'arches atteignent 49 m de haut au-dessus de la

rivière, enjambe une distance de 261 m. Parmi les grands aqueducs romains, c'est probablement le mieux conservé, malgré l'absence totale de mortier. Il faisait partie d'un aqueduc d'une longueur de 40 km. Il présente trois rangées d'arcs : six en bas, onze par-dessus, qui soutiennent l'étage supérieur constitué de trente-cinq arches de 3 m de largeur et de 7 m de hauteur qui, à l'origine, supportaient le canal dans lequel coulait l'eau. [1]



Figure -1.9- Le Pont de Gard à Nîmes, France environ 20 apr. J.C [5].

### 1.2.3. Pont de moyen âge

Après les Romains, ni les Huns, ni les Visigoths, ni les Saxons, ni les Mongoles et ni les Danois ne laissèrent des traces de construction. Et ce n'est que vers l'an 1000 de notre ère, avec l'avancées du christianisme et la puissance de l'église que vint la vague suivante de construction des routes et des ponts. En 1244, les moines de l'hospice Saint-Jacques, habile charpentiers et maçon, créèrent une coopérative pour bâtir un pont à la demande de l'empereur du Saint Empire Romain Germanique Frédéric II. Après cette réalisation, leur réputation se répandit en Italie et en France ce qui éveilla parmi les ordres religieux un grand intérêt pour la construction des ponts. En France, dès le XIII<sup>e</sup> siècle, l'ordre des frères pontifes (moines) rayonna car en plus de ses devoirs spirituels, Ils construisaient des ponts le long des chemins de pèlerinage afin d'aider les pèlerins et voyageurs et bâtissaient pour eux des hospices sur la rive, et s'efforcèrent d'égaliser et de poursuivre l'art des Romains [5].

En Occident, l'arc brisé, était plus facile à construire, car ne requérant pas une aussi grande précision dans la pose et l'ajustement des claveaux, il prit le pas sur l'arc en plein cintre. Le pont d'An Ji, comportant une travée unique de 37 m avec un arc surbaissé, fut construit en 605 en Chine, à Zhao Xian [5].

La réalisation de ponts en bois prit également de l'essor. Des charpentes inclinées permettaient de raidir le tablier ; on construisait aussi des travées en arcs réticulés dont la portée pouvait atteindre 60 m. Le pont Charles (Figure1.10), qui enjambe la Vltava à Prague, est le plus long pont médiéval (516 m). Il présente un mélange de styles particulier dû aux différentes reconstructions et rénovations dont il a fait l'objet : piles médiévales, arcs romains, tour du XII<sup>e</sup> siècle (vestige du précédent pont) rénovée en style Renaissance, et tours hautes datant des XIV<sup>e</sup> et XV<sup>e</sup> siècles.



Figure -1.10 - Le pont Charles (Rép. Tchèque, 1357) [1]

Le chef-d'œuvre et le pont le plus célèbre de cette époque est le pont d'Avignon (Figure 1.11), érigé par les frères de Saint-Jacques, ce pont se caractérise par des voûtes en ellipse, il offrait une portait plus importante, plus de stabilité ce qui a permis d'amincir la partie surmontant la clef. Les piles plus étroites, les voûtes plus hautes permettaient d'élever la chaussée en la mettant ainsi hors d'atteinte des crues et gênant moins la circulation fluviale, au-dessus des piles et dans les tympanes de petites arches de soutènement pouvaient recevoir le trop-plein des crues. Construit en espace de 10 ans, long de 390m et de 20 travées, le pont le plus large mesure 4.80m, et l'endroit le plus étroit ne dépasse pas 1.95m au-dessus de la deuxième pile où fut bâtie la chapelle. S'avancant sur le Rhône, aujourd'hui il ne reste qu'une partie (4 travées) et la chapelle du pont d'Avignon (XII<sup>e</sup> siècle), également appelé pont Saint-Bénézet du nom de son créateur. On doit aussi, aux frères Saint-Jacques le pont de Saint-Espire, sur le Rhône [5].

Pendant ce temps, en Grande-Bretagne, le Vieux Pont de Londres (Figure 1.12) fut construit et achevé en 1209 ; il fut détruit en 1831. Ses piles et ses arcs étaient irréguliers ; le fleuve, sous le pont, ne disposant que de la moitié de la largeur de son lit en amont, rendit le courant si fort qu'il creusa un bassin en aval. Le tablier de ce pont supportait des maisons, qui furent détruites en 1763. On remplaça alors deux des arches centrales par une seule, permettant ainsi la navigation. Il existe d'autres exemples célèbres de ponts supportant des maisons, tels que le Ponte Vecchio à Florence (premier exemple occidental de pont à arc surbaissé), ou encore le Rialto à Venise.

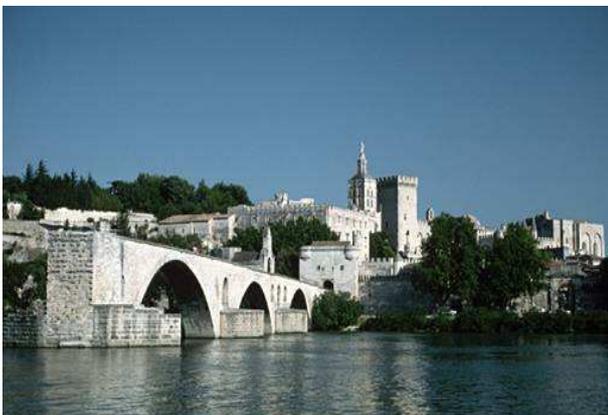


Figure -1.11- Le pont d'Avignon (XII<sup>ème</sup> siècle) sur le Rhône en Avignon, France [1]



Figure -1.12- Le grand pont de Londres [5]

Le Ponte Vecchio (Florence) Enjambant l'Arno (Figure 1.13), fut construit vers la fin de cette période, marque un tournant au cours du moyen âge. Ce pont couvert est bordé, depuis sa construction en 1345, de boutiques d'orfèvres et galerie de joailliers, par la suite surmontées d'un couloir reliant les palais royaux à ceux du gouvernement, les offices au palais Pitti. Les piles de 6m d'épaisseur supportent encore aujourd'hui les bâtiments en surplomb et les travées du pont. Sa caractéristique la plus innovante, est la portée de ces arcs peu profonds. Cette conception révolutionnaire était bâtie par Taddeo Gaddi comme un arc en voussoirs, sachant qu'à cette époque on ne pouvait pas déterminer mathématiquement la poussée à partir des arches. Des huit ponts que compte Florence, le Pont de Vecchio est le seul à avoir subsisté aux fréquentes inondations et aux bombardements de 1944.



Figure -1.13- Le pont Vecchio, Florence, Italie [1]

#### 1.2.4. Ponts de la renaissance

C'est l'époque des grandes découvertes scientifiques, mathématiques et aussi des grandes œuvres d'art et architecture grâce à Copernic, Galilée, Léonard di Vinci, Palladio et beaucoup d'autres ; quant à la construction des ponts, elle était considérée, surtout en Italie, comme un art à part entière ; c'est pourquoi les deux aspects, esthétique et pratique ont eu la même importance : d'une part, l'ornementation et l'harmonie des proportions et d'autre part, la stabilité et la pérennité de la construction.

Durant la Renaissance, la forme des ponts fut influencée par les études scientifiques des structures et des forces en jeu. Andrea Palladio décrivit différents types de ponts à treillis en bois : cette armature exploite la rigidité du triangle, indéformable, équilibre les forces de compression et de traction, tout en nécessitant moins de matériau que les poutres ou les arcs.

En 1570, paru le grand traité Quatre Livres d'architecture de Palladio dans lequel il appliquait à la construction des ponts 4 système de poutre- treillis. Mais ses modèles jugés trop audacieux, tombèrent dans l'oubli jusqu'au XVIII e siècle [5].

Par ailleurs, des techniciens plus habiles, construisaient des ponts et leur prix augmentait rapidement tel Ammannati, et Androuet du Cerceau.

Le pont le plus célèbre de cette époque est sans doute celui du Rialto (Figure 1.14) enjambant le Grand Canal de Venise, construit en 1588 par Antonio da Ponte dont la construction a duré trois ans et demi. Le critique d'art britannique John Ruskin avait écrit du Rialto : « Le plus bel ouvrage érigé du temps de la renaissance « grotesque » très noble dans sa simplicité, dans ses proportions et dans sa maçonnerie ».



Figure -1.14- Le pont Rialto [7]

Après l'écroulement définitive du pont qui permettait la traversée du Grand Canal de Venise en 1514, un concours avait été alors lancé auprès de différents architectes ; Palladio, Michel Ange, Scamozzi participèrent à cette consultation, mais c'est le projet d'Antonio da Ponte, supporté par les marchands de sel, qui était choisi par les édiles vénitiens. Construit de 1588 à 1591, son plan était inspiré d'une esquisse de Scamozzi : il est composé, sur une largeur de 24 m, d'une allée centrale couverte bordée de boutiques, et de deux allées latérales à l'air libre. Au milieu du pont, un belvédère offre une large vue sur le Grand Canal. Constitué d'une arche simple de 28 m de portée s'élevant à 7,50 m, le pont est fondé sur 6 000 pieux de bois de part et d'autre du Canal. Du côté sud, il est orné d'une sculpture de l'Annonciation dont la colombe du Saint-Esprit forme la clef de voûte du passage couvert. Au nord, Girolamo Campagna signe les deux statues de saint Marc et de saint Théodore. Le pont du Rialto reste, jusqu'au XIX<sup>e</sup> siècle, le seul ouvrage permettant de relier les deux rives du Grand Canal [5]. Le pont des Soupis (Figure 1.15) construit en pierre d'Istrie vers 1600 par Antonio Contino au-dessus du canal Rio di Palazzo, c'est l'un des monuments les plus célèbres de Venise (Italie). Reliant la salle de jugement du palais des Doges aux prisons publiques, ce pont couvert à l'architecture baroque, symbole du romantisme régnant sur la ville, tire néanmoins son nom des gémissements des prisonniers conduits vers leur lieu d'exécution.



Figure- 1.15- Le pont des Soupirs [8]

C'est au Japon, en Chine, mais aussi en Suisse, que furent construits des ponts en charpente, dont certains sont toujours utilisés. Le Kapellenbrücke, pont en bois construit au début du XIV<sup>e</sup> siècle à Lucerne, en Suisse, récemment ravagé par un incendie, comportait des poutres posées sur des pieux serrés, étayés et inclinés. Il avait été recouvert d'une toiture, et cette idée sera reprise et déclinée au XIX<sup>e</sup> siècle aux États-Unis [5].

En 1502, Léonard de Vinci conçut le projet d'un pont qui aurait dû être construit à Istanbul : un pont en arc en maçonnerie d'une seule travée de 240 m. Des projets moins ambitieux furent menés à terme, tels que le pont Notre-Dame et le Pont-Neuf à Paris (Figure 1.16), le Rialto à Venise, le pont Santa Trinità à Florence (1567-1569), œuvre de l'architecte Bartolomeo Ammannati, dont la forme des arcs est très particulière ; on les dit « en anse de panier » [9].



Figure -1.16- Le pont neuf (1609) à Paris, France [9]

#### 1.2.5. Ponts du XVIII<sup>e</sup> siècle : (l'âge de la raison)

C'est au XVIII<sup>e</sup> siècle, grâce aux innovations des ingénieurs français et britannique Jean Perronet et John Rennie, que la construction des arches en maçonnerie atteignit la perfection [1]. Cependant, à l'heure même où ce type de ponts arrivait à son apogée, apparaissaient un nouveau matériau de construction, le fer, et une nouvelle technique, la poutre-treillis en bois, qui aller bientôt devenir les principaux éléments de construction.

Par ailleurs, cette époque vit naître le génie civil en temps que métier et s'ouvrir la première école de travaux publics – l'École de Paris, fondée sur le règne de Louis XV et dont le directeur, Jacques Gabriel, avait conçu le pont Royal. Celui-ci, dans sa nouvelle fonction, fut chargé de recueillir et de consigner toutes les informations et connaissances existant sur la science et l'histoire des ponts, des bâtiments, des routes et des canaux.

Une formation spécialisée dans la construction des ponts s'imposait: c'est ainsi que naquit à Paris, en 1747, l'École nationale des ponts et chaussées, dont Trudain fut le fondateur et Jean Perronet le professeur principale et le directeur, ce dernier fut d'ailleurs plus tard surnommé le "père des ponts modernes". Il démontra qu'il était possible de construire des ponts avec des structures nettement plus légères que par le passé. On lui doit le pont de Neuilly, dont les piles sont extrêmement fines, ou encore le Pont-Sainte-Maxence. [5]

Des grands ouvrages de Perronet il ne reste aujourd'hui que son dernier pont, le célèbre pont de la Concorde, à Paris, qu'il entreprit vers l'âge de 80 ans [1].

En Grande-Bretagne, John Rennie était en train d'apposer son empreinte, poursuivant la voie tracée par les grands ingénieurs français. Rennie bâtit son premier pont en 1779, sur la rivière Tweed à Kelso, en Écosse.

Selon Rennie, les ponts devaient être surmontés d'une chaussée plane, rompant en cela avec la tradition anglaise des poutres en forme de dos d'âne. Ce parti pris, contraire à la norme, fit l'unanimité auprès des citadins, des fermiers et des marchands qui empruntait ces voies pour transporter matériel et bétail.

Les innovations de Rennie – arches semi-elliptiques, procédé de construction astucieux et technique de préfabrication rapide –, ainsi que les découvertes de Perronet – arches en voussoirs, piles moins massives et compréhension mathématique de la poussée des arches – transformèrent définitivement les théories de la construction des ponts [5].

#### ❖ Les ponts de charpentiers

Les États-Unis, avec leur vaste réseau routier et fluvial et en raison de leur croissance commerciale au XVIII<sup>e</sup> siècle, allaient devenir au siècle suivant le "pays des ponts en bois".

Les premiers bâtisseurs de ponts employèrent le matériau le plus abondant et le plus économique qui s'offrait à eux: le bois. Les frères Grubenmann, en Suisse, furent les premiers à concevoir des ponts à poutres treillis presque tout en bois. Celui de Wettingen, sur la rivière Limmat, à l'ouest de Zurich, passait pour leur plus bel ouvrage. Associant le principe arche et treillis et celui de la poutre-treillis à sept poutres en chêne solidement réunies, le pont forme une arche parabolique à laquelle était fixée une poutre-treillis en bois. La portée du pont de Wettingen (près de 120 mètres) dépasse largement celle des ponts en bois de l'époque.

De leur côté, Palmer, Wernwag et Burr, appelées les " charpentiers bâtisseurs de ponts de l'Amérique du Nord ", plus intuitifs que scientifique, imaginèrent l'arc à poutres-

treillis pour obtenir une portée plus grande que celle de toute autre construction en bois, découvrant par là même la dernière des trois formes fondamentales de pont. Le premier à populariser cette trouvaille en Amérique (et à breveter son système) fut Timothy Palmer, un yankee de la nouvelle- Angleterre en 1792. Il bâtit sur la rivière Merrimack un ouvrage composé de deux arcs en treillis, semblable à l'un des systèmes à treillis de Palladio, à la différence près que l'arc de palmer constituait la principale structure d'appui.

Parmi les ouvrages de palmer, citons le "pont permanent". Construit en 1806 sur la rivière Schuylkill. Une fois l'ouvrage achevé, le président de la compagnie suggéra d'y ajouter un revêtement pour empêcher le bois de pourrir et de se détériorer avec le temps, Palmer fit mieux: il recouvrit aussi les côtés, enfermant complètement le pont, donnant ainsi naissance au pont couvert (Figure 1.17), caractéristique des ponts américains. Cette couverture empêchait la neige de pénétrer et de s'entasser sur le tablier, ce qu'écartait tout risque d'effondrement dû à la charge supplémentaire.



Figure- 1.17- Pont couvert à Hartland, dans le nouveau-Brunswick. Canada (Le plus long pont couvert au monde) [5]

Parallèlement, Wernwag, immigrant allemand de Pennsylvanie, bâtit au cours de sa vie vingt-neuf ponts de type poutres–treillis. Ces ponts, à la différence de ceux de Palmer, associaient parfaitement l'arc et la poutre-treillis dans une structure mixte.

Son plus célèbre pont fut le "colosse", lui aussi sur la rivière Schuylkill, juste en amont du "pont permanent" de Palmer. Deux paires d'arches parallèles, reliées par une poutre–treillis multiple, soutenaient la chaussée. La poutre treillis elle même servait de renforcement et se composait de lourds montants et de diagonales légères. Ces diagonales étaient constituées de fer pour la première fois employées pour un pont de grande portée. En son temps, le "colosse", avec ses 91 mètres était le plus long pont en bois des États-Unis. Détruit par un incendie en 1838, il fut remplacé par le pont suspendu de Charles Ellet [5].

Théodore Burr, quant à lui, fut le plus célèbre du triumvirat. Il mit au point un système de poutre-treillis basé sur le simple système à treillis de Palladio, et comme il était instable sous les charges mobiles, il le consolida par un arc. C'est l'arc qui fut ajouté à la poutre-treillis et non l'inverse, système offrant le double avantage de la rapidité d'assemblage et de l'économie, et qui demeura longtemps en Vogue au États-Unis pour la construction des ponts en bois.

En 1820, le principe de la poutre-treillis avait été amplement exploré, et bien qu'il demeurât théoriquement inexpliqué, il avait été largement éprouvé dans la pratique. Ce fut Ithiel Town qui imagina et bâti le premier véritable pont à poutre-treillis, qu'il breveta sous le nom Town Lattice [5].

Peu à peu, avec l'évènement du chemin de fer, la construction des ponts aux États-Unis allait prendre deux orientations distinctes: une école continua à ériger des structures à poutre-treillis plus minces, tandis que l'autre se lançait dans l'aventure de la fonte et du fer puddlé, forme primitive de l'acier.

La première poutre-treillis brevetée incorporant du fer dans une structure en bois fut celle de William Howe, créateur de ce type de pont aux États-Unis. Cette conception allait durer, avec quelques modifications, jusqu'au siècle suivant.

Ce n'est qu'en 1847 que fut construite la première poutre-treillis entièrement en fer, par l'ingénieur civil américain Whipple : la poutre-treillis bowstring. Plus tard, Fink, Bollman, Bow et Haupt aux États-Unis, ainsi que Cullman et Warren en Europe, firent de la poutre-treillis un véritable art, associant bois, fer et câble en torons afin d'obtenir des ponts légers, mais assez solides pour supporter des voies ferrées [5]. Citons comme exemple de ce type de ponts le pont Astoria (État de Washington) (Figure 1.18), le plus long pont continu en treillis avec une travée de 375 m de longueur, ainsi que le pont Astoria qui franchit la Columbia près de son embouchure dans l'océan Pacifique. Il relie Astoria, dans l'Oregon, à Megler, dans l'État de Washington. Un exemple remarquable de ce type de construction est le pont de Lindenthal's Sciotoville (1917), au-dessus de l'Ohio, avec un treillis de 472 m de long en deux travées de 236 m chacune [1].



Figure -1.18- Le Pont Astoria (État de Washington) 1966 [1]

#### ❖ L'âge de fer (1775-1880)

De tous les matériaux utilisés dans la construction des ponts –pierre, bois, brique, fer, acier et béton- c'est le fer qui fut le moins longtemps utilisé. L'obtention de la fonte pour la première fois en 1619 par l'anglais Dud Dudley : un siècle plus tôt, Abraham Darby avait mis au point une méthode économique pour obtenir de grandes quantités de fer, le fer puddlé, qui le remplaça après nombreuses années, était en revanche un matériau ductile

capable de supporter les efforts [5].

Les ponts en fer furent le lieu des pires catastrophes de l'histoire des ponts, en effet, au moment de passage des locomotives à vapeur et les wagons des marchandises sont à l'origine de phénomènes de contraintes cycliques portant sur la structure de l'ouvrage, avec des variations passant d'une charge nulle à une charge élevée puis de nouveau à une charge nulle, par conséquence des ruptures fragiles sont apparus dues à la fatigue de ces matériaux.

En 1779 à Coalbrookdale, Grande Bretagne, le premier pont en fonte conçu par Thomas Pritchard comme une structure en arc a été réalisée (Figure 1.19) [10].



Figure- 1.19- Pont en fonte à Coalbrookdale, Grande Bretagne 1779 [10]

Nous avons aussi le pont de Kronprinzen Brücke en Allemagne, un pont de 44m de portée (figure 20) aussi élégant vu de côté qu'en dessous. Il consiste en une structure en acier supportée par deux piles ovales si fines que le pont semble flotter dans l'espace. La structure principale est constituée de deux gros tubes circulaires supportés par deux tubes cintrés de diamètre inférieur, le cahier des charges stipulait par ailleurs qu'un grand nombre de câbles et de tuyaux devaient franchir le fleuve via le pont. Or, ce critère s'applique à tous les ponts de centre de ville de Berlin. La solution consistant à glisser ces câbles dans les sections creuses circulaires a transformé une contrainte technique en un élément renforçant le concept architectural de ce pont [10].



Figure - 1.20- Pont de Kronprinzen Brücke Allemagne [10]

En France, le viaduc de Vaur, premier grand pont en acier comportant un cantilever central d'une portée de 220 m, fut terminé en 1898. La portée maximale d'un cantilever en acier fortement résistant à la traction est théoriquement de 760 m. En 1907, un arc d'acier d'une portée de 152 m enjamba la gorge du Zambèze, sous les chutes Victoria en Afrique. Le pont du Québec (Figure 1.21), au-dessus du Saint-Laurent, terminé en 1917, a une travée principale de 548 m [1]. Il supporte deux voies de chemin de fer et une route, et est l'un des plus longs ponts cantilever du monde.



Figure- 1.21- Pont de Québec, Canada, 1917 (548 m) [11]

Achévé en 1917, le pont ferroviaire du Hell Gate, avec sa travée de 297 m, qui traverse l'East River à New York, devint le plus long pont à arche en acier du monde [1]. Cette portée a ensuite été dépassée par le pont de Bayonne (1931) qui va de Bayonne, dans le New Jersey, jusqu'à Staten Island, dans l'État de New York (avec une travée de 503 m et une longueur totale de 2 470 m), puis par le pont ferroviaire du port de Sydney (1932), en Australie, dont la travée mesure 503 m. Le pont qui traverse la rivière du Niagara entre Queenston, en Ontario, et Lewiston, dans l'État de New York, ouvert en 1965, utilise une arche en acier de 305 m de long. C'est la plus longue arche fixe à nervures en acier du monde.

Le pont de Forth, qui traverse le Golfe de Forth à Queensferry, en Écosse, est un pont de chemin de fer en acier avec deux travées principales de 521 m chacune. Il a été érigé entre 1882 et 1890 par les ingénieurs John Fowler et Benjamin Baker. Sa longueur totale dépasse 1,6 km [1].

#### 1.2.6. Les ponts modernes

La révolution industrielle, qui commença à la fin du XVIII<sup>e</sup> siècle en Grande-Bretagne, se répandit progressivement dans le monde entier et entraîna des transformations considérables. Ainsi se développèrent notamment de nouvelles formes de transports de marchandises (par canaux et par rail). De nouveaux matériaux sont découverts : l'acier, par l'anglais Henry Bessemer et perfectionné par Siemens et Martins, ainsi que le ciment découvert par John Aspen lorsqu'il laissa brûler de la pierre à chaux et de l'argile sur le poêle de sa cuisine en 1824, à Leeds, en Grande-Bretagne [5].

a) Développement des ponts aux XIX<sup>ème</sup> et XX<sup>ème</sup> siècles

La croissance et le développement continuel des villes exigeaient sans cesse des aménagements et des progrès dans l'infrastructure des routes, des rails et des canaux, tandis qu'apparaissaient, avec la mécanisation, les machines à vapeur et les moteurs.

Lors de la construction des ponts, il était essentiel d'accélérer l'assemblage des pièces, ce qui nécessite l'utilisation d'éléments préfabriqués légers et néanmoins résistants. Cependant, le poids des locomotives à vapeur et la longueur des trains de marchandises imposaient aux structures des ponts des charges comme elles n'en avaient jamais supportées jusqu'alors.

Ainsi, afin que les assemblages soient plus résistants et plus efficaces, les écrous-boulons ordinaires furent remplacés par des rivets puis par des boulons à serrage contrôlé et aux assemblages soudés.

Parallèlement, l'avènement de l'automobile eut pour effet de créer un réseau routier qui quadrillait les pays en tous sens. On avait désormais besoin de ponts encore plus imposants et plus solides pour, par exemple relier des îles aux continents ou des pays entre eux, mais aussi pour développer les principaux axes commerciaux.

Avec la recherche et le développement permanents des matériaux à haute résistance, tels que l'acier, le béton, la fibre de carbone et l'aramide, se conjuguent aujourd'hui avec une analyse informatique sophistiquée et une évaluation dynamique des risques de tremblements de terre, d'ouragans et de raz-de-marée.

Un développement récent dans la construction des ponts à poutres métalliques est ce que l'on appelle la structure orthotrope : d'une plaque en acier, rigidifiées, agissent à la fois comme tablier routier et comme rebords supérieurs des poutres de plancher et des poutres métalliques longitudinales de soutien. Le plus grand pont de ce type construit aux États-Unis, le pont San Mateo-Hayward à San Francisco, a été ouvert en 1967. Avec une longueur de presque 11 km et une travée principale de 228 m, le pont a une partie supérieure en acier de 2941 m de long et une structure orthotrope sur une longueur de 167m [1]. Le pont sur la Werra en Allemagne (Figure 1.22) (68m) comporte un tablier orthotrope en acier repose sur des poutres supportées par des câbles portant de deux arcs légèrement inclinés vers l'intérieur [10].

En deux siècles, la portée des ponts est passée de près de 105 mètres à 1829 mètres! Parmi les grandes innovations de cette longue période, il faut retenir notamment les arcs en acier à poutres-treillis, les ponts à poutres-caissons en encorbellement et en vousoirs, mais aussi les ponts suspendus et les ponts à haubans.



Figure - 1.22 - Pont sur la Werra –Allemagne [10]

#### b) Ponts suspendus

James Finly, Thomas Telford, Samuel Brown et marc Seguin furent les premiers à concevoir des ponts suspendus à chaîne. Le principe de pont suspendu ne fut véritablement établi qu'avec le Pont de Wheeling de Charles Ellet, qui montra les qualités de la suspension par câble avec l'utilisation de fer puddlé. John Roebling fut par la suite le partisan le plus fervent des ponts par câble et de la technologie de l'enroulement des torons. Son pont de Brooklyn (Figure1.23) fut le premier à utiliser l'acier pour les fils des câbles de suspension [5]. Il a été construit en 1834 sur la Sarine, à Fribourg, en Suisse ; il comporte une travée principale de 273 m [1].



Figure-1.23- Pont de Brooklyn (New York) [1]

En 1962, on construisit au Venezuela le pont du Maracaïbo, en béton armé précontraint, avec une travée centrale à haubans de 396 m, et deux ans plus tard le pont de Verrazano-Narrows (Figure 1.24), à New York de 1 341 m de long, comportant une travée suspendue de 298 m. Le pont de Bratislava en Slovaquie (Figure 1.25), est un pont suspendu avec une haute tour qui l'enjambe ; le pont de Clifton à Bristol (Grande-Bretagne) enjambe l'Avon (Figure1.26) Pont suspendu du détroit de Menai (Figure 1.27), construction de l'architecte écossais Thomas Telford, le pont suspendu reliant Anglesey au pays de Galles a été élevé entre 1819 et 1826 ; la travée principale est longue de 176 m et fait de cette construction une des illustrations de l'implantation de la modernité dans l'Anglesey au XIXe siècle [1]

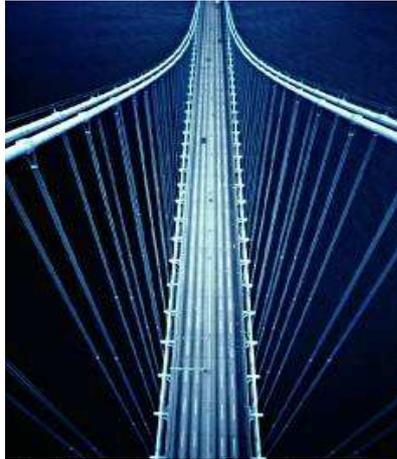


Figure- 1.24-Pont Verrazano-Narrows (New York) [1]



Figure -1.25- Pont suspendu de Bratislava (Slovaquie) [1]



Figure -1.26 - Pont suspendu de Clifton (Bristol) [1]



Figure -1.27 - Pont suspendu du détroit de Menai [1]

Le pont Akashi Kaikyo (Japon) (Figure1.28), ouvert à la circulation le 5 avril 1998, relie la ville japonaise de KMbe à l'île d'Awaji. Long de 3 911 m, ce pont suspendu, dont les deux tours en acier s'élèvent à 297 m au dessus du niveau de la mer, a exigé dix années de travaux. Il est conçu pour résister à des vents de 80 m/s ainsi qu'à des secousses sismiques atteignant 8 degrés sur l'échelle de Richter. Le jour de son inauguration, pendant la première heure d'ouverture, près de 5 350 véhicules l'ont emprunté [1]. Il s'agit du plus long pont suspendu du monde, avec une travée centrale de 1 991 m.

Le pont du Golden Gate (Californie) (Figure1.29) suspendu à 67 m au-dessus de la mer, le pont du Golden Gate enjambe le détroit du même nom séparant la baie de San Francisco de l'océan Pacifique. Il relie la ville de San Francisco à la péninsule de Marin.



Figure-1.28- Pont Akashi-Kaikyo (Japon) [1]



Figure-1.29- Pont du Golden Gate, Californie, États-Unis [1]

En Algérie, la majorité des ponts ont été bâti pendant la période coloniale. Constantine, connue sous le nom de la ville des ponts suspendues, vue sa nature montagneuse, contient les ponts suspendues plus célèbres en Algérie : le pont de Sidi M'cid (Figure1.30), Mellah Slimane (Figure1.31) et le pont sur le Rhummel (Figure1.32).

Parmi ces ouvrages, nous avons choisi de décrire le pont de Sidi-M'cid et le pont de Sidi-Rached.

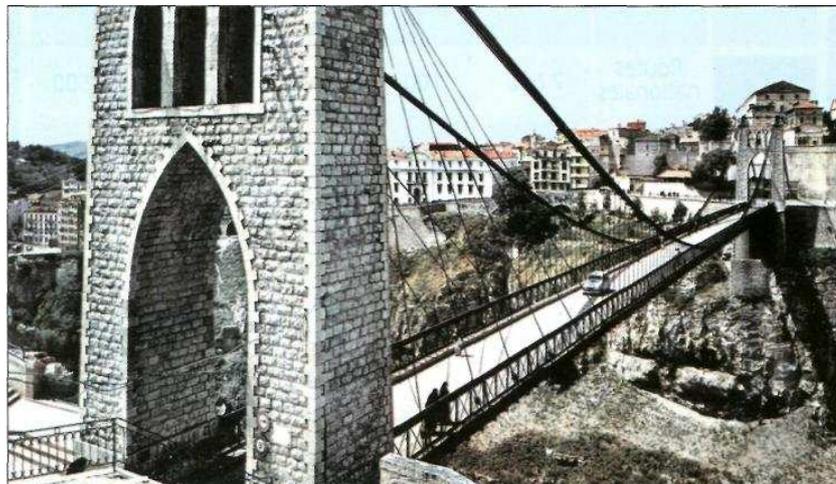


Figure -1.30- Pont de Sidi m'cid, Constantine, Algérie [12]

- Le pont suspendu de Sidi-M'cid à Constantine

Le pont de Sidi-M'cid est le plus impressionnant des ponts de Constantine et permet le franchissement des gorges à 175 mètres au-dessus de l'Oued Rhummel à la pointe Nord de la ville ; il est long de 164 m, large de 5,70 m, et supporte une charge de 17 tonnes. Conçu par l'ingénieur Arnaudin, il a été réalisé par l'entreprise WITTE. Son inauguration eut lieu le 19 avril 1912 [12].

Le pont de Sidi-Mcid a fait l'objet, au cours de l'année 2000, du remplacement de 12 câbles dont 4 principaux.

- Le pont de Sidi-Rached à Constantine

Réalisé en pierres de taille, ce pont en trois courbes, est long de 447 mètres. Il repose sur 27 arches dont 13 ont une ouverture de 8,80 m, une de 30 m et la plus large de 70 m, franchit le Rhummel à 105 m de hauteur. Il est, lors de sa construction, le plus haut pont de pierre au monde [12].

Le pont de Sidi-Rached a été inauguré le 19 avril 1912, en même temps que le pont suspendu de Sidi-M'cid, à l'autre bout des gorges [12].

Le pont de Sidi-Rached a eu droit récemment à des travaux de restauration d'extrême urgence. En effet, érigé sur du remblai, il est continuellement soumis au phénomène des glissements qui engendrent plusieurs déplacements au niveau de la culée Ouest du pont. Une situation qui nécessitera par moments des opérations de colmatage.

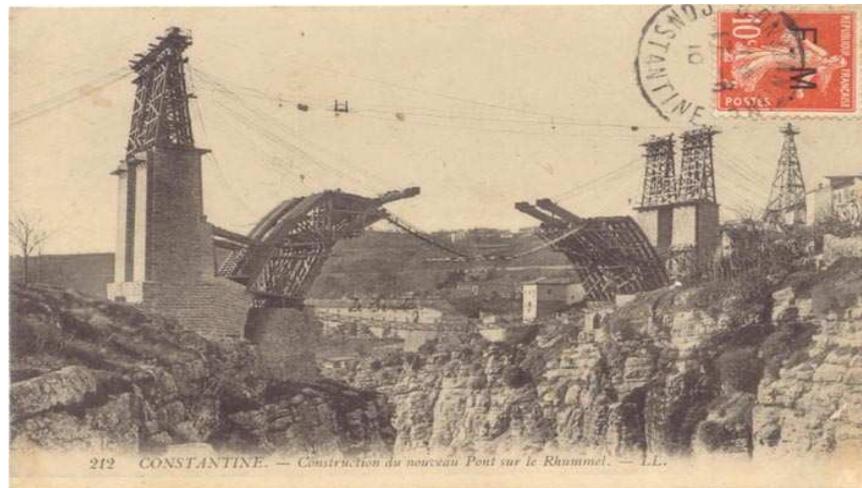


Figure -1.31- Pont sur le Rhummel à Constantine, Algérie [12]

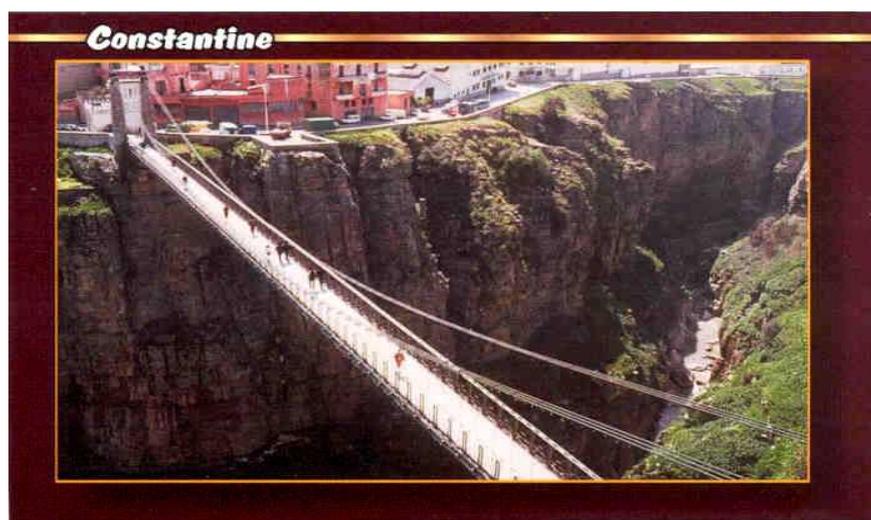


Figure -1.32- Pont piétons suspendu "Mellah Slimane" à Constantine, Algérie [13]

Avec leur vaste capacité de portée, les ponts suspendus peuvent franchir de larges estuaires et des vallées profondes, ce qu'explique leur rôle important lors de la construction des réseaux routiers. Ils ont d'ailleurs détenu le record de la plus longue portée de 1826 à nos jours sauf entre 1890 et 1928, période où le record revint au pont cantilever à poutre-treillis [12].

c) Ponts à poutres- caissons et ponts à poutres à âme pleine

Depuis le développement de la production de l'acier et celui de la poutre en I – qui sera par la suite remplacée par la poutre soudée et à boulons à serrage contrôlé – de nombreux ponts à poutres furent construits en utilisant un ensemble de poutres placées parallèlement les unes par rapport aux autres, connectées entre elles au sommet pour former une chaussée. Leur assemblage était rapide, mais elles n'étaient utilisables que sur des portées relativement courtes. Pour résoudre ce problème et éviter le flambement des poutres, on ajouta à intervalles serrés des raidisseurs. Une autre solution consistait à transformer la poutre en un caisson creux très rigide, de façon à réduire la hauteur de la poutre et économiser la matière première. Ce travail réalisé pendant et après la seconde guerre mondiale, permit de reconstruire de manière rapide et efficace des ponts de portées inférieure ou égale à 305 mètres. De nombreux ponts à poutres-caissons en acier furent ainsi bâtis en Allemagne dans les années 1950 et 1960.

Dans les années 1970, l'attention du monde entier se porta sur l'effondrement pendant leur construction de quatre ponts à poutres-caissons en acier : à Vienne, en Autriche, sur le Danube, à Milford, Havane, au pays de Galles (Figure 1.33), en Grande-Bretagne, où quatre personnes furent tués, en Allemagne, sur le Rhin, et enfin à Melbourne, en Australie, sur le cours inférieur du Yarra (pont West Gatt) Le plus grave de ces quatre effondrements fut de loin celui du pont West Gatt, structure à un seul hauban avec un tablier à poutres-caissons continus.

Après cet accident, la construction des tabliers à poutres-caissons en acier fut stoppée jusqu'à l'établissement d'accords internationaux portant sur des normes de conception et de fabrication plus élaborées et sur de nouvelles procédures de contrôle des chantiers.

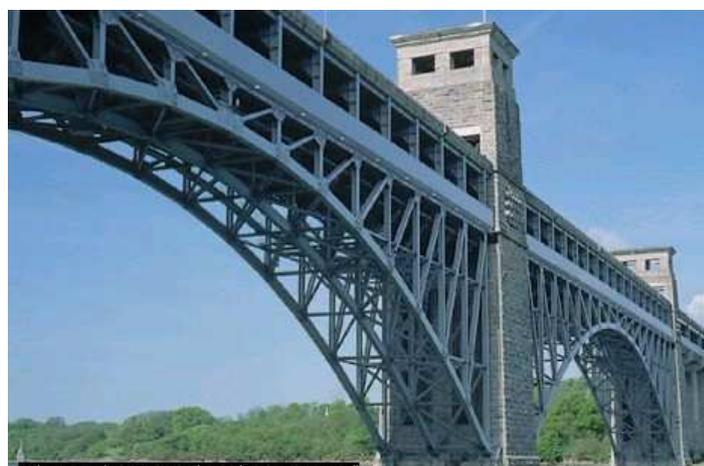


Figure -1.33- Pont de Menai (Pays de Galles) [1]

d) Ponts à arcs en béton (1900)

Les ingénieurs tardèrent à reconnaître les véritables qualités du béton comme matériau de construction. Le béton est en effet aussi fragile que la pierre, résistant bien en compression mais pas en traction, de sorte qu'il se fissure s'il est soumis à une flexion ou à une torsion. Afin qu'il résiste à la traction, il est nécessaire de l'armer avec de l'acier et c'est donc naturellement qu'il apparaît avec le développement de ce dernier.

L'ingénieur français, François Hennebique (1842–1921) comprit le premier le principe du béton armé et les applications qu'il pouvait en tirer, mais ce fut Robert Maillart (1872–1940) qui construisit le premier des ponts en béton armé, tandis que son contemporain Eugène Freyssinet expérimentait les techniques de la précontrainte pour les structures en béton et enrichissait l'industrie des ponts de l'une des méthodes les plus efficaces au monde pour la construction des tabliers. Le Viaduc de Glenfinnan (1898), en Écosse est le premier pont en arc en béton construit en Grande Bretagne [1].

Le béton a ainsi servi à réaliser la plus part des plus longs ponts au monde. Le coût relativement faible du béton par rapport à l'acier, la possibilité qu'il donne préfabriqué et de précontraindre des poutres de longueur standard, de prendre appui sur des chevalets de faible hauteur pour franchir de courtes portées sont des qualités qui ont fait de lui un matériau économiquement attractif. Par exemple, le pont du lac Pontchartrain, en Louisiane, en béton préfabriqué à voussoirs et à poutres-caissons, est le pont le plus long des États-Unis, avec une longueur totale de 37 kilomètres [5].

e) Ponts à poutres- caissons en béton

Dans les années 1950 et 1960, en Europe et aux États-Unis, les poutres-caissons en béton furent souvent utilisés pour construire des ponts et viaducs autoroutiers, s'agissant tantôt de constructions en voussoirs préfabriqués, tantôt de poutres-caissons coulées en place.

Le pont routier Shelton (1952), aux États-Unis, est construit par Jean Muller. C'est la première construction formée de caissons préfabriqués et assemblés bout à bout. Le pont du lac Pontchartrain, aux États-Unis, est le deuxième pont le plus long au monde [5]. Il est formé de poutres-caissons en voussoirs préfabriqués et de 2 700 travées qui franchissent le lac, près de la Nouvelle-Orléans, sur 37 kilomètres. Le pont Medway (1972), en Grande Bretagne, est le premier pont européen construit sur un cours d'eau utilisant des poutres-caissons en béton.

f) Ponts à haubans

De tous les ponts modernes à grande portée, le pont à hauban est probablement le plus esthétique. Les haubans sont à l'origine des cordes servant à fixer les structures de tentes et les mâts des voiliers. Système qui fut à la base de l'idée de pont suspendu, tout d'abord pour les ponts à câble, puis précisément pour les ponts à haubans. Le développement des tabliers à poutres-caissons très rigide et de forme trapézoïdal a permis qu'une seule nappe de haubans soutienne directement le tablier du pont. Le coût de la

construction s'en trouvait réduit d'autant. D'ailleurs, le temps et l'argent ont été les principaux facteurs de transformation et d'innovation dans la conception des ponts.

Les créateurs en matière de ponts à hauban modernes furent, juste après la seconde guerre mondiale, des ingénieurs allemands Fritz Leonard, René Walter et Jorge Schlaich. Récemment, des progrès concernant les haubans et les tabliers en poutres-caissons ont été réalisés grâce aux travaux des ingénieurs suédois du bureau d'étude COWI Consult, des ingénieurs des ponts Carlos Fernandez Casado en Espagne, R. Greisch en Belgique, Michel Virlogeux en France, des sociétés Jean Muller International, Sogelerg et EEG. Le premier pont à haubans comportant un mince tablier en béton précontraint et des poutres en acier fut le pont Alex-Fraser près de Vancouver, dont la travée principale atteint 465 m ; cette longueur fut dépassée en Norvège, lorsque l'on bâtit le pont Skarsundet, dont la travée principale mesure 530 m, avec la particularité d'être un pont très étroit par rapport à la longueur (2,1 m de profondeur pour 13 m de largeur). Les haubans sont attachés à des pylônes qui surplombent l'eau de 152 m [1]; le tablier est creux, de section triangulaire, pour garantir la rigidité de l'ouvrage.

Le pont de Normandie (Figure 1.34) Construit près du Havre, en France, est le plus long pont à haubans du monde. Il a été inauguré le 20 janvier 1995 [14], après six ans de travaux.



Figure -1.34- Pont de Normandie, France, 1994 (856 m) [14]

#### g) Ponts mobiles

Depuis que les hommes construisent des ponts, un des principaux problèmes rencontrés était celui qui consiste à lancer l'ouvrage par dessus un large cours d'eau ou une vallée. Ceci devait être réalisé pour ne pas gêner la navigation, ou simplement d'être trop hauts d'où l'idée des ponts mobiles, Tower Bridge (Angleterre) (Figure 1.35), construit entre 1886 et 1894 par l'ingénieur John Wolfe Barry, sur les plans de l'architecte Horace Jones, le Tower Bridge, sur la Tamise, est un pont mobile basculant, de 244 m de long [1]. Il est surmonté de deux tours contenant des ascenseurs qui permettent aux piétons d'accéder à une passerelle et à l'ancien mécanisme hydraulique grâce auquel étaient basculées les travées du pont.



Figure -1.35- Tower Bridge en Angleterre [1]

Il existe également des travées mobiles, qui peuvent être basculées, pivotées ou relevées. Les premiers ponts basculants étaient les ponts-levis, panneaux à cadre en bois qui permettaient de traverser les douves d'un château. Ils étaient redressés au moyen de chaînes depuis l'intérieur du château. Ce type de pont, avec une ou deux travées montées sur des gonds et contrebalancées, convient parfaitement aux voies navigables étroites lorsque le trafic est important. Le Tower Bridge (1894) qui traverse la Tamise à Londres, en est le plus célèbre exemple. D'apparence gothique (un aspect qui tient compte de la proximité de la Tour de Londres), il dispose de deux poutres basculantes et de deux travées latérales suspendues.

Le pont pivotant est muni d'une travée mobile montée sur un pivot placé en son centre. La plus longue travée de ce type, qui mesure 166 m, est celle d'un pont routier et ferroviaire, qui traverse le Mississippi, à Fort Madison, dans l'Iowa.

Un pont levis est un pont dont le tablier peut être relevé (par rotation autour d'un axe situé à une extrémité), pour des raisons défensives (le pont étant l'unique accès à un château fort, au-dessus d'une douve ; lorsqu'il est relevé, il constitue de plus une barrière supplémentaire devant la herse qui protège l'entrée du fort) ou pratiques (pour permettre le passage d'un navire de grande hauteur par exemple). Dans ce dernier cas, et lorsque le tablier du pont est relevé par translation, on parle plutôt d'un pont levant. (Le Pont de Recouvrance est un pont levant).

Un pont tournant est un pont dont le tablier est monté sur un pivot, ce qui permet de faire tourner le tablier horizontalement pour le présenter dans l'axe de la voie d'eau qu'il franchit : ainsi, un navire peut circuler dans le passage dégagé par la rotation du tablier.

#### h) Ponts combinés

De nombreux ponts, notamment aux États-Unis, combinent plusieurs procédés de construction. Le pont Transbay à San Francisco, avec ses rampes d'accès, mesure environ 12 km de long. Il traverse l'East Bay avec une travée cantilever de 426 m de long, puis la West Bay avec deux travées suspendues de 704 m de long. Les deux traversées sont reliées sur l'île de Yerba Buena par un tunnel de 152 m et un viaduc de 244 m de long [1]. Le pont

Triborough, à New York, comprend des ponts venant des districts du Queens et du Bronx [1]. Ces ponts se rencontrent sur l'île de Randall : ils comportent des travées à treillis métalliques, un pont à ascension verticale, un viaduc et un pont suspendu. Le pont-tunnel Chesapeake Bay, en Virginie, supporte une autoroute de 28,2 km de long qui relie Norfolk à Cape Charles. L'ensemble comprend deux tunnels (qui passent au-dessous de voies navigables importantes entre deux îles artificielles), deux ponts fixes en acier, et plus de 16km de pont sur piles. Le plus long pont du monde, avec une longueur totale proche de 39km, est celui du Lac Pontchartrain [1]. Il relie les villes de la Nouvelle-Orléans et de Covington, en Louisiane. Il est constitué de travées reposant sur des piles peu espacées et de faible hauteur.

### 1.3. Étude des ponts

Depuis très longtemps, les ponts ont été construits et bien souvent leurs conceptions ainsi que leurs réalisations reposaient sur des connaissances empiriques et le savoir faire des concepteurs. Les ponts ont souvent été construits avant même de savoir les calculer et aujourd'hui encore, certains types de ponts ne peuvent pas être calculés convenablement malgré la puissance des ordinateurs et des méthodes numériques. Par exemple, les ponts à poutrelle enrobée, très utilisés par la Société Nationale des Constructions Ferroviaires (SNCF), sont difficilement calculés par les M.E.F (Méthodes des Éléments Finis) du fait de la liaison acier / béton qui conduit à des divergences de la solution lors des incréments de charge [15].

#### 1.3.1. Les méthodes analytiques

Avant le développement des M.E.F., les ingénieurs ont développé des méthodes pour calculer analytiquement les ponts à poutres. Ces méthodes, basées sur la théorie de l'élasticité, permettaient d'offrir des moyens de dimensionner ces structures en prenant en compte la rigidité transversale des pièces d'entretoisement [Les poutres perpendiculaires aux poutres principales réparties sous le tablier]. Nous allons présenter brièvement ces méthodes, de la plus simple (celle de Courbon), à la plus sophistiquée (celle de Massonnet-Barès-Guyon) puis nous montrerons leurs limites.

##### a) Méthode de la poutre droite infiniment rigide sur appuis élastiques

L'entretoise d'un pont multipoutre n'est que très peu soumise à la flexion. Cette dernière est la conséquence de la différence de flexion longitudinale des poutres principales. S'inspirant de ce constat, Courbon [15] considère l'entretoise comme une poutre infiniment rigide par rapport aux poutres principales. Cette hypothèse lui permet de développer une méthode simple pour réaliser le dimensionnement de ce type d'ouvrage d'art. A partir d'un chargement fixé au préalable, la méthode de Courbon détermine les réactions d'appuis exercées par les poutres principales sur l'entretoise. D'une part, la poutre infiniment rigide se déplacera dans son ensemble sans fléchir. D'autre part, l'entretoise repose sur  $n$  appuis élastiques au niveau des liaisons avec les poutres principales. Cela signifie qu'aux nœuds les réactions d'appuis verticales  $R_i$  exercées par l'appui  $i$  sur la poutre sont proportionnelles à l'abaissement  $V_i$  de la poutre au droit de l'appui. Les

réactions d'appuis se calculent alors (voir ANNEXE B). La généralisation de cette méthode est donnée en ANNEXE C.

Commentaires :

La méthode de Courbon est assez simple d'utilisation. Son hypothèse forte sur la rigidité infinie des entretoises est proche de la réalité. De plus, nous pouvons très bien nous affranchir de cette hypothèse en effectuant un calcul de résistance des matériaux habituel avec la vraie raideur de l'entretoise. Par exemple, nous pouvons utiliser la méthode des trois moments pour obtenir les flèches de l'entretoise en la considérant comme une poutre sur appuis élastiques. Les flèches de l'entretoise nous permettent ensuite de calculer les réactions d'appuis de l'entretoise sur les poutres principales [15]. Tout calcul fait, il apparaît que le fait de prendre la vraie raideur d'une entretoise dans un pont quadripoutre de type SNCF ou l'hypothèse d'une raideur infinie, donnait exactement les mêmes résultats. L'hypothèse de Courbon est parfaitement utilisable dans le cas des ponts SNCF, puisqu'ils ont des entretoises (en particulier lorsqu'il s'agit de diaphragmes) ayant une très grande rigidité [15].

Cependant cette méthode néglige complètement le rôle de la dalle dans la transmission des efforts. Elle ne permet pas de calculer les répartitions des charges entre les poutres dans le cas sans entretoise. Elle ne peut pas non plus prendre en compte la spécificité des ponts biais qui sont pourtant très fréquents. Le chargement considéré est aussi très limité puisqu'il ne peut s'agir que de forces ponctuelles. Mais malgré tout cela, il est considéré que cette méthode est vraiment efficace pour sa simplicité d'utilisation et pour sa bonne prédiction d'un ouvrage comportant au moins une entretoise.

#### b) Méthode du grillage de poutres et de la dalle orthotrope

Cette seconde méthode de calcul repose sur la théorie d'une plaque orthotrope. Elle fut développée par Guyon [15] dans le cas d'une dalle orthotrope à rigidité torsionnelle négligeable. Massonnet en 1950 généralisa les relations trouvées par Guyon en introduisant l'effet de la torsion dans les calculs [15]. En 1966, Massonnet et Bares publièrent un recueil de ces méthodes illustré par un certain nombre d'exemples [15]. Le principe de cette méthode est donné en ANNEXE D.

Commentaires :

La méthode de Massonnet est simple à utiliser grâce aux différentes tables permettant de calculer les coefficients de répartitions transversales. Les raideurs des poutres et des entretoises sont « tartinées » sur la longueur et la largeur de la dalle équivalente. L'excentrement des poutres et des entretoises par rapport à la dalle est négligé. Cette méthode est aussi efficace que celle de Courbon dans le cas d'un calcul de prédimensionnement mais elle nécessite un apprentissage plus important. De plus, les entretoises ne sont pas considérées comme infiniment rigides. Elle est particulièrement performante dans le cas d'un très grand nombre de poutres et d'entretoises puisque l'erreur commise par le « tartinage » des raideurs est alors plus faible. Cependant, avec les

conceptions modernes des ponts mixtes, le nombre d'entretoises est souvent assez faible. La méthode de Massonnet est alors moins performante pour ces ponts. Cependant, elle permet de prévoir le comportement du pont sans entretoise, en considérant uniquement la raideur de la dalle dans la direction transversale et celle des poutres mixtes dans la direction longitudinale.

### 1.3.2. Modélisation par la méthode des éléments finis

Avec le développement de la M.E.F., les ingénieurs ont développé des logiciels spéciaux pour la modélisation des structures, où plusieurs modèles peuvent être établis.

#### a) Grillage de poutres et modélisation monodimensionnelle

De nombreux articles ont été publiés à partir des années 60 afin de déterminer l'influence des entretoises sur des ponts spécifiques. La première étude date de 1964 : Stevens et Gosbell [15] réalisent une structure en laboratoire d'un pont à dalle orthotrope avec un grand nombre d'entretoises. Ce modèle est réalisé en perspex (sorte de plexiglas) car l'étude est uniquement élastique. Cette première étude expérimentale d'envergure montra que les théories basées sur les plaques orthotropes ne permettaient pas de prédire convenablement la flexion des poutres. Dès lors un champ de recherche se développa pour déterminer les réelles influences des entretoises dans des ponts multipoutres. Le recours aux calculs par éléments finis se généralisa et s'imposa pour pallier aux insuffisances des méthodes, de types ingénieurs, traditionnelles. Les premières études numériques sur l'influence des entretoises sont réalisées en 1977 par Culham et Gahli [15] et en 1979 par Kostem et de Castro [15]. Elles concernent des ponts multipoutres en béton armé précontraint d'une seule travée. Le nombre d'entretoises intermédiaires est l'un des paramètres de ces études. La géométrie réelle des ponts est traduite en grillage de poutre à l'aide d'éléments barres à deux nœuds. L'inertie de la dalle est alors prise en compte dans l'inertie des poutres du grillage.

Ces deux recherches ont la particularité d'aboutir à des conclusions opposées. En effet, Culham et Gahli démontrent que la présence d'une entretoise à mi-travée permet d'obtenir la meilleure répartition des efforts des charges roulantes de camion sur l'ensemble des poutres pour quatre longueurs de travées différentes (12 m, 18 m, 24 m et 30 m). Les ponts étudiés sont toujours des quadripoutres. La charge du camion se situe à mi-travée du pont modélisé, donc bien évidemment lorsque le pont est muni d'une seule entretoise, cette dernière se trouve directement sous la charge. Elle est plus efficace dans la redistribution des charges que dans le cas où le pont comporte deux entretoises au tiers de la portée du pont et donc relativement loin de la charge du camion. Cependant, les auteurs montrent aussi que la présence de trois entretoises dont l'une est sous la charge, conduit à une moins bonne distribution des charges sur les poutres.

De façon équivalente, Kostem et de Castro calculent le facteur de distribution des charges pour un pont à une travée de 21,64 m et comportant entre zéro et quatre entretoises. Ce facteur de distribution traduit la différence de répartition des charges entre la poutre la plus chargée et celle la moins chargée. La charge du camion est située au

milieu de la travée. Les auteurs montrent que le facteur de distribution le plus petit est obtenu pour deux cas différents ; soit le pont est muni d'une unique entretoise à mi-portée, soit le pont comporte quatre entretoises (dont aucune n'est directement sous la charge). Cependant l'apport de l'entretoise est pratiquement insignifiant (Figure 1.36), de l'ordre de 3%. La différence entre les deux recherches s'explique par la prise en compte du moment d'inertie des entretoises. En effet, Kosterm et de Castro calent leur modélisation sur un test réalisé sur un pont similaire à celui de leur étude, ce qui les conduit à minimiser l'inertie de l'entretoise à 25% de sa valeur réelle. L'inertie de l'entretoise étant plus faible, elle remplit moins bien son rôle de répartiteur de charge. Les auteurs justifient cette diminution d'inertie de l'entretoise par le fait que l'entretoise ne peut être considérée comme une poutre continue mais plutôt comme plusieurs sections de poutres séparées par les poutres principales.

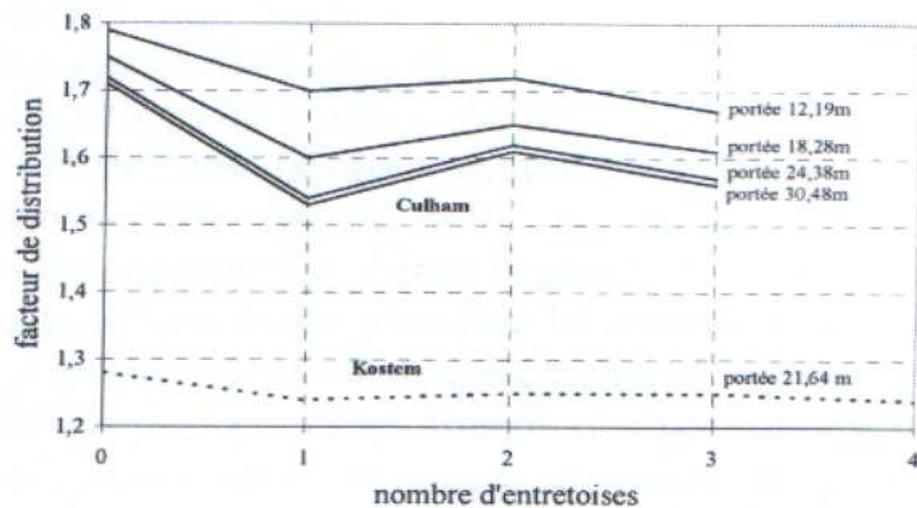


Figure -1.36-Facteur de distribution en fonction du nombre d'entretoises [15]

Cette analyse bibliographique, qui ne se veut pas exhaustive, montre que l'apport de l'entretoise dans un pont multipoutre n'est réellement pas déterminé. L'utilisation de la modélisation numérique par rapport aux méthodes analytiques offre la possibilité d'étudier un pont sans entretoise et de déterminer le nombre d'entretoise optimum. Cependant la modélisation en grillage de poutres pose le difficile problème de la traduction géométrique réelle de la liaison de l'entretoise sur les poutres à l'aide des éléments barres. Dès lors l'analyse de l'entretoisement ne peut négliger la géométrie réelle de l'ouvrage. L'utilisation d'une modélisation de grillage de poutres fut abandonnée et remplacée par une modélisation bidimensionnelle dans les années 80.

#### b) Modélisation bidimensionnelle

Ce type de modélisation est aujourd'hui encore la plus simple et la plus efficace pour réaliser le dimensionnement d'un pont mixte à poutres. Le maillage est très facile à effectuer et les calculs sont rapides car le nombre d'éléments est restreint. La dalle est prise en compte dans la modélisation. Elle est discrétisée en éléments plaques car la largeur et la longueur d'une dalle de pont sont beaucoup plus grandes que son épaisseur. La charpente

porteuse de la dalle composée de poutres et d'entretoises est modélisée sous forme de grillage par des éléments barres à 2 nœuds. Afin de respecter la position de la dalle par rapport à celle des poutres, des éléments liens rigides connectent leur centre de gravité (Figure 1.37).

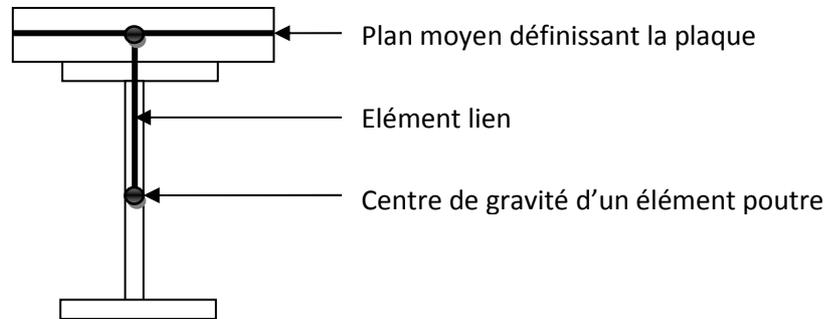


Figure -1.37-Maillage bidimensionnel [15]

Chen en 1995 et Nowak et al présentèrent cette manière de modéliser pour prédire la distribution des charges d'un camion dans un pont multipoutre. Les auteurs négligèrent complètement les entretoises dans leur modélisation. Chen justifie ce choix en se référant aux travaux de Kostem et de Castro qui avaient démontrés que l'influence des entretoises était insignifiante. Cependant Kostem et de Castro modélisaient les structures en grillage de poutres [15]. La prise en compte de la dalle était alors réduite à une modification de l'inertie des poutres métalliques pour former une inertie de poutre mixte. La flexion transversale de la dalle ne pouvait être considérée, contrairement à la modélisation bidimensionnelle. Ainsi la généralisation des résultats basés sur un grillage de poutres dans le cadre d'une étude plus fine bidimensionnelle peut paraître un peu hâtive [15].

Le positionnement des éléments d'entretoisement, dans une approche bidimensionnelle, est délicat puisque la géométrie des poutres est traduite par des éléments filaires. L'entretoise est obligatoirement connectée au centre de gravité des poutres et sa position sur la hauteur des âmes ne peut être représentée [15]. Seule une analyse tridimensionnelle peut donc réellement décrire l'influence de l'entretoisement d'un pont.

### c) Modélisation tridimensionnelle

Tedesco et al. modélisent [15] un pont comportant neuf poutres par une approche tridimensionnelle afin de qualifier l'influence des entretoises. Comme précédemment, la dalle est discrétisée en éléments plaques. Par contre les poutres ne sont plus traduites uniquement par des éléments barres mais par une combinaison d'éléments permettant de conserver l'aspect volumique des poutres réelles. Les semelles sont discrétisées en éléments plaques et les âmes sont maillées par des éléments de poutre à trois nœuds formant des croix de Saint-André (Figure 1.38). Tedesco et al. décrivent avec beaucoup de rigueur la position des différents éléments entre eux afin de respecter la géométrie exacte de la structure réelle. Comme la dalle et les semelles des poutres sont discrétisées à l'aide d'éléments plaques, les nœuds de leur maillage sont situés sur leur plan moyen.

L'utilisation de liens rigides permet de prendre en compte l'excentrement entre les éléments provenant de leur épaisseur en couplant les cinq degrés de liberté aux deux nœuds de ces éléments. La dalle et les semelles des poutres sont reliées par des éléments rigides ainsi que l'âme et les semelles des poutres. La présence de ces liens rigides enrichit la modélisation puisqu'ils permettent de prendre en compte la non connexion de la dalle avec les semelles supérieures des poutres (Figure C.2 - ANNEXE C). Le degré de liberté concernant le déplacement horizontal du pont dans la direction de  $x$  est alors non couplé entre les nœuds de la dalle et ceux de la semelle supérieure.

La même technique est utilisée pour assembler les âmes des poutres aux entretoises. Ces dernières sont prises en compte grâce à deux éléments barres reliant les poutres entre elles. La description des éléments transversaux est donc beaucoup plus rudimentaire que celle réalisée pour le reste du pont. L'utilisation de deux éléments barres pour l'entretoise ne prend pas en compte correctement la flexion des entretoises et la raideur qu'apporte l'entretoise aux âmes des poutres est beaucoup plus faible que celle de la réalité. L'utilisation de plaques ou d'éléments poutres en croix de Saint-André permettrait sans doute de mieux traduire l'apport des entretoises. Quoiqu'il en soit, Tedesco et al. concluent que l'apport de l'entretoise est négligeable puisque la comparaison d'un modèle avec et un modèle sans entretoise aboutie à des résultats sensiblement similaires.

Zhou et al. en 2004 [15] ont la même volonté de décrire le plus justement possible l'aspect tridimensionnel d'une multipoutre. Ils apportent deux améliorations importantes à la modélisation de Tedesco. Tout d'abord, la description de l'âme à l'aide d'éléments barres est remplacée par des éléments plaques. Ainsi la flexion et les contraintes en dehors du plan dans les âmes sont mieux approchées et mieux diffusées sur les membrures des poutres. La deuxième amélioration provient de la description de la dalle qui n'est plus modélisée en éléments plaques mais en éléments volumiques (Figure 1.39). Ceci permet d'avoir une meilleure représentation de la fissuration du béton et de sa propagation dans l'épaisseur de la dalle. De plus, le nombre d'éléments transversaux pour la dalle est doublé par rapport au maillage de Tedesco afin de mieux modéliser la flexion transversale de la dalle. Des éléments liens sont aussi utilisés pour connecter le plan moyen d'une plaque des semelles supérieures aux faces inférieures des éléments volumiques du béton. Comme pour Tedesco et al. les éléments liens permettent d'étudier l'ouvrage en considérant que la dalle n'est pas connectée aux poutres grâce à un découplage des degrés de liberté relatifs aux déplacements horizontaux.

Cette modélisation est confrontée aux résultats expérimentaux (ANNEXE E) réalisés par Pérou et al. [15].

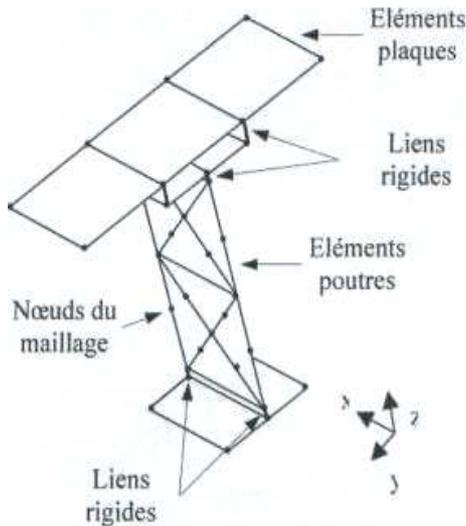


Figure -1.38- Maillage 3D avec des éléments rigides [15]

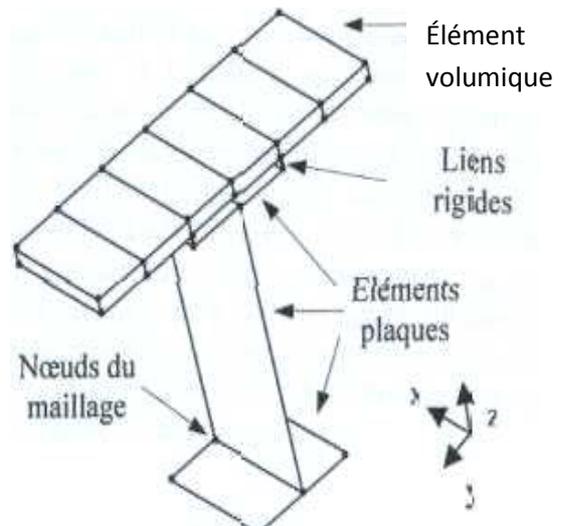


Figure -1.39- Maillage 3D avec des éléments plaques et volumiques [15]

### 1.3.3. Modélisation des lois de comportement du béton

La modélisation des ponts mixtes multipoutres a évolué au cours du temps. L'amélioration de la discrétisation de la géométrie réelle de l'ouvrage a aussi conduit à une meilleure modélisation du comportement mécanique des matériaux. Les lois de comportement du béton se sont de plus affinées progressivement.

Les méthodes analytiques, par leur nature, font l'hypothèse d'un comportement parfaitement élastique des matériaux. De plus, la description des ouvrages en grillage de poutres ne permet pas d'étudier la répartition des contraintes dans la dalle et dans les poutres car ils sont globalisés ensemble. Pour la même raison, le comportement des matériaux est élastique avec une approche monodimensionnelle par la M.E.F., or les ponts mixtes sont composés d'une dalle de béton. Le comportement mécanique du béton est très différent en compression et en traction. L'utilisation de la théorie de l'élasticité évacue les phénomènes de fissuration et surtout ne redistribue pas correctement les contraintes dans les éléments. En dépit des phénomènes physiques, les contraintes de traction dans le béton dépassent la limite seuil  $f_y$ . Seule une approche de type bidimensionnelle ou tridimensionnelle permet d'étudier le comportement des ponts avec des lois non linéaires pour les matériaux. La modélisation de la dalle sous forme d'éléments plaque à définition surfacique (plaque mince) utilisée par Tedesco et al. [15] permet d'étudier la fissuration du béton. Les éléments plaques sont peu gourmands en temps de calcul mais en contrepartie ils négligent les contraintes normales perpendiculaires aux plans des plaques. La fissuration du béton ne peut être localisée dans l'épaisseur de la dalle et sa propagation ne peut être suivie au cours du chargement. La modélisation de la dalle en éléments volumiques est certes coûteuse en temps de calcul mais elle reste la meilleure solution pour étudier précisément la fissuration du béton. De plus Zhou et al. [15], qui utilisent ces éléments, sont les premiers à montrer que la présence de l'entretoise a une influence sur la fissuration de la dalle. Dès lors, l'étude doit prendre en compte ce phénomène car le

développement de fissures dans le béton est certes permis mais il doit être limité. En particulier, l'ouverture et la longueur des fissures ne doivent pas être trop importantes et surtout elles ne doivent pas atteindre les armatures de la dalle. Dans ce dernier cas, l'infiltration d'eau corrode les armatures et l'endommagement du béton armé est alors important.

#### 1.4. Conclusion

La construction des ponts a connu la réalisation d'ouvrages d'art remarquables tant d'un point de vue technique (longueur des travées, largeur, matériaux utilisés pour son édification) que sur le plan esthétique.

La majorité des ponts en Algérie date de la période coloniale, ces ponts en maçonnerie, en béton ou métalliques ont supporté le trafic extrêmement important. Leur endommagement en fatigue est donc devenu lui aussi important. Un grand nombre de ces ouvrages devront subir des réparations lourdes ou même une reconstruction complète.

L'endommagement d'un élément peut produire la rupture brutale de l'ouvrage ou tout de moins l'arrêt de son service. La rupture d'un pont peut avoir des conséquences humaines catastrophiques. Bien que le risque zéro n'existe pas, il est tout naturel que la société mette tout en œuvre pour empêcher et anticiper les accidents de ce type. C'est pourquoi les ouvrages d'art doivent être régulièrement inspectés. L'arrêt d'utilisation d'un pont a évidemment des conséquences économiques outre celui de la réparation structurelle de l'ouvrage. Dans le domaine des ponts, le trafic ne peut pas toujours être dévié sur un réseau secondaire, par exemple les ponts rails où la fermeture est synonyme d'arrêt d'exploitation de la ligne et le manque à gagner par l'exploitation est alors conséquent, outre le désagrément des clients. Dès lors, un contrôle régulier est obligatoire.

L'avancement de la technologie et l'apparition des nouveaux matériaux de construction ont permis la construction des ponts dont la portée augmente sans cesse. Actuellement, le monde entier, et l'Algérie particulièrement, donnent plus d'importance à la construction des ponts, ce qui va permettre d'avoir des ponts aussi résistants qu'élégants, très élargis et favorisant la circulation routière. Ces objectifs ne seront atteints que si leur réalisation est soumise à des études approfondies et à des normes reconnues.

Les méthodes analytiques permettent de réaliser un pré-dimensionnement des structures à poutres et à dalle. Elles ont été beaucoup employées avant les progrès informatiques des années 70-80 car elles offraient des moyens simples pour calculer les sollicitations et les flèches dans ces structures. Elles permettent de résoudre les équations aux dérivées partielles d'une plaque en passant par des décompositions comme celles des séries de Fourier. Cependant, elles reposent sur des hypothèses fortes et la géométrie de l'ouvrage n'est jamais complètement respectée. Elles furent plus ou moins abandonnées lors de la conception de logiciels basés sur la méthode des éléments finis. Ces logiciels ont suivi le développement des capacités des ordinateurs, gérant de plus en plus d'équation simultanément et de plus en plus vite. Dans les années 70-80, la capacité des ordinateurs était encore très faible et la méthode des éléments finis ne pouvait s'appliquer qu'à des

éléments linéaires et peu nombreux. C'est pourquoi, les premiers calculs de ponts multipoutres à entretoises utilisant la M.E.F, nécessitaient la traduction géométrique de l'ouvrage en grillage de poutres comportant la raideur de la dalle.

L'étude de ponts nécessite une simulation satisfaisant l'ensemble des phénomènes physiques. A ce jour, aucune modélisation ne permet de juger de façon convaincante l'impact de la deuxième dimension du pont. En outre, l'étude d'un pont sous charges roulantes doit intégrer l'aspect de la vitesse du convoi et l'excitation de l'ouvrage qui en résulte. Le chapitre suivant détaille précisément les méthodes que nous avons utilisées pour tenir compte de ces caractéristiques.

## CHAPITRE 2

### MODÉLISATION DES PONTS SOUS CHARGE ROULANTE

#### 2.1. Introduction

La détermination de la réponse dynamique d'un pont lors de passage d'un véhicule intéresse les ingénieurs pour deux raisons principalement [16] :

- Les contraintes engendrées au sein du pont dues à l'effet dynamique du véhicule sont plus importantes que celles produites par une charge statique seule appliquée à la structure.
- Les vibrations du pont ne doivent pas être excessives, ceci afin de minimiser les effets de fatigue qui réduisent la durée de vie du pont.

En pratique, on multiplie la charge statique par un coefficient de majoration dynamique qui permet de tenir compte de l'effet dynamique du véhicule. Ce coefficient dépend du type de pont et de l'intensité de la charge appliquée. Il ne permet pas de considérer dans la réponse dynamique du pont des effets tels que les conditions de trafic, les caractéristiques du véhicule, les forces inertielles de la charge en mouvement, etc.

Les forces qui engendrent des états de contraintes critiques au sein de la structure résultent à la fois de l'action de la masse propre du véhicule (le poids mort) et des forces interactives entre le pont et le véhicule. Ces forces dépendent des facteurs suivants :

- Le type du pont et ses fréquences propres de vibration
- Les caractéristiques du véhicule telles que sa masse, ses fréquences propres, l'amortissement,...
- La vitesse du véhicule
- L'intensité du trafic
- Les caractéristiques d'amortissement du pont et du véhicule
- Le comportement du conducteur, l'état du pont et de la chaussée,...

Des études ont été menées afin de déterminer le poids statique (global ou par essieu) d'un poids lourd lors de son passage sur un pont, ceci à partir des mesures de déformations de l'ouvrage. Des simulations numériques du comportement pont-véhicule ont été réalisées. Parmi les méthodes expérimentales utilisées, une méthode d'identification basée sur la technique du Filtre de Kalman Etendue a été développée afin d'apprécier les difficultés pratiques et théoriques liées au problème du pesage sur ponts instrumentés. Ces principaux problèmes sont cités comme suit :

- Difficultés de modélisation du comportement véhicule-pont due à la complexité du système envisagé et les différents types de ponts existants
- Les mesures de déformations du pont doivent correspondre au passage du véhicule ‘à peser’ et ne doivent pas être perturbées par la présence d’autres véhicules lourds à proximité. Ce problème est particulièrement important du fait que les poids lourds ont souvent tendance à rouler en convoi sur les routes et autoroutes à fort trafic.
- Certaines caractéristiques d’un poids lourds n’ont pas une grande influence sur la déformation du pont lors de son passage.
- L’espacement entre essieux inférieur à 5 mètres ne perturbe pas sensiblement la réponse du pont ce qui rend donc difficile l’estimation du poids statique des essieux d’un groupement.

Pour la réalisation de ces études, une modélisation du comportement pont-véhicule est nécessaire. Dans ce qui suit nous allons voir quelques types de modélisation.

## 2.2. Modélisation des ponts à dalles isotropes

Les ponts sont des structures mécaniques qui peuvent être représenté par des assemblages de poutres et de plaques conçus pour supporter la charge des véhicules (charge roulante) qui doit être prise en considération lors de la modélisation.

### 2.2.1. Modélisation par une poutre

Deux modèles peuvent être utilisés pour la représentation des ponts:



Figure -2.1- Modélisation du pont par une poutre

La modélisation la plus simple et la plus utilisée d’un pont consiste à utiliser une poutre d’Euler-Bernoulli appuyée simplement sur les deux extrémités. Cette approche unidimensionnelle ne permet pas de prendre en compte l’effet de la flexion transversale dans la réponse du pont. Un assez grand nombre de ponts (ponts d’autoroutes formés de dalles par exemple) ont pourtant des travées de longueurs et de largeurs comparables. C’est pourquoi l’utilisation de la théorie de la poutre n’est pas toujours satisfaisante. Les inconvénients apparaissent notamment quand le pont est soumis à des charges excentrées [16]. Quand le véhicule s’éloigne de la ligne médiane du pont, la section transversale de celui-ci est soumise à l’effet de torsion en plus de la flexion. Cet effet ne peut être modélisé par la théorie des poutres.

### 2.2.2. Modélisation par une plaque

Pour la modélisation du pont par une plaque simplement appuyée sur deux de ses extrémités, il existe plusieurs choix :

- Plaques minces dans la théorie de Love-Kirchhoff
- Plaques épaisses dans la théorie de Mindlin (voir ANNEXE F)

La flexion d'une plaque est modélisée par essentiellement deux théories (hors théorie des milieux continus): celle d'une plaque mince exposée dans ce chapitre et celle d'une plaque épaisse présentée en annexe.

La première approche du problème d'une plaque homogène et élastique a été formulée par Love-Kirchhoff. Cette théorie contient un certain nombre d'hypothèses qui ne permettent pas de prendre en compte certain nombre de phénomènes mécaniques tels que l'effort tranchant ou l'inertie rotationnelle. R.D. Mindlin a proposé une nouvelle théorie permettant de prendre en compte ces phénomènes. Dans la littérature, il existe une multitude d'autres théories qui ont été effectuées par d'autres chercheurs qui ont suivi Mindlin [16]. Ces théories ne seront pas citées dans ce travail, car ne seront pas utilisées.

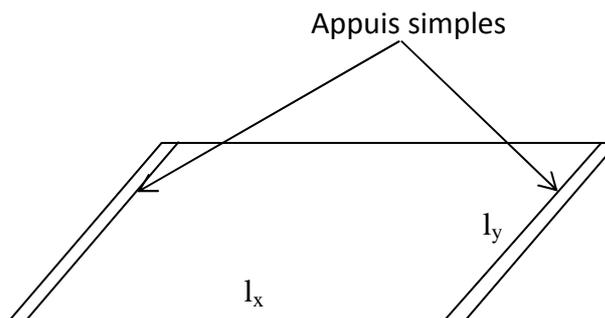


Figure -2.2- Modélisation du pont par une plaque

### 2.3. Théorie de Love-Kirchhoff

La théorie d'une plaque mince énoncée par Love [17] sur les hypothèses de Kirchhoff s'inspire de celle des poutres minces de Euler-Bernoulli.

#### 2.3.1. Hypothèses

Les principales hypothèses de cette théorie sont :

- La plaque est d'épaisseur petite devant les autres dimensions. Elle possède un plan moyen aussi appelé plan neutre.
- Les sections droites, initialement normales au plan neutre, restent planes et normales à celui-ci. La déformation en cisaillement transverse est donc négligée.
- Les termes non linéaires du déplacement sont négligés, en particulier, l'inertie de rotation est négligée. Seul le déplacement transversal  $w$  est considéré.

• La contrainte  $\sigma_z$  dans la direction transversale est nulle. Elle doit en effet s'annuler sur les faces extérieures, et du fait que la plaque est mince, il est naturel d'admettre qu'elle est nulle en tout  $z$ .

### 2.3.2. Champ de déplacement

Ces hypothèses conduisent au champ de déplacement suivant (figure F.1 ANNEXE F) :

$$u(x, y, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.1a)$$

$$v(x, y, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.1b)$$

$$w(x, y) = w(x, y) \quad (2.1c)$$

Où  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont les coordonnées d'un point de la plaque dans un repère cartésien et galiléen,  $t$  est la variable temps

L'écriture de l'équation du mouvement de flexion de la plaque, ( $w$ ), dans l'approximation de l'élasticité linéaire aboutit à :

$$D \nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (2.2)$$

Où  $D$  représente le module de rigidité en flexion,  $h$  l'épaisseur de la plaque,  $\rho$  la masse volumique du matériau constituant la plaque,  $f$  la force imposée et enfin  $\nabla$  l'opérateur :

$$\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$$

Cette équation est à mettre en relation avec celle obtenue pour le mouvement en flexion des poutres d'Euler-Bernoulli :

$$EI \nabla^4 w + \rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f \quad (2.3)$$

Où  $E$  est le module d'Young du matériau utilisé,  $I$  le moment quadratique de la section  $S$  de la poutre considérée.

Du fait de l'opérateur du quatrième ordre et du signe + entre les termes du membre de gauche, il ne s'agit pas d'une équation d'onde. En conséquence, les vibrations de flexion transmises dans une poutre ou une plaque seront par nature dispersives (la vitesse de propagation est fonction de la fréquence).

Dans le cas d'une plaque simplement supportée sur tous ces bords, en régime de temps harmonique, le déplacement transversal  $w(x, y, t)$  est de la forme :

$$w(x, y, t) = w_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(\omega t) \quad (2.4)$$

Où  $\omega$  est la pulsation,  $k_x$  et  $k_y$  sont les nombres d'ondes associés aux directions (OX) et (OY), liés au nombre d'onde  $k$  par la relation :

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2$$

En faisant usage de l'équation (2.2), sans terme force, et en utilisant l'expression du déplacement  $w(x, y, t)$  précédente, on peut écrire l'équation de dispersion pour cette plaque mince simplement supportée comme :

$$\omega^2 = k^4 \frac{D}{\rho h} \quad (2.5)$$

La détermination des pulsations propres nous permis de déterminer la déflexion de la plaque et donc étudier son comportement.

#### 2.4. Modélisation des Ponts a dalles orthotropes

Le terme orthotrope formé par contraction des mots orthogonal et anisotrope. La locution dalle orthotrope définit une dalle à inerties, donc à rigidité, orthogonalement différentes.

En construction métallique, la dalle orthotrope est choisie par sa légèreté, de préférence à une dalle en béton plus lourde, pour constituer le platelage des ponts de grandes portées ou des ponts mobiles dans lesquels le poids mort de la dalle est un handicap.

La dalle orthotrope d'un pont est constituée alors d'une tôle de platelage de 12 à 14 mm d'épaisseur minimum, raidie par des nervures longitudinales continues appelées AUGETS, de section trapézoïdale, et réparties transversalement selon un pas de 300 mm entre chaque face des nervures (Figure 2.5). Le platelage, solidaire des âmes de la poutre principale dont il constitue la semelle supérieure, est appuyé tous les 4 mètres environ sur des poutres transversales appelées pièces de pont.

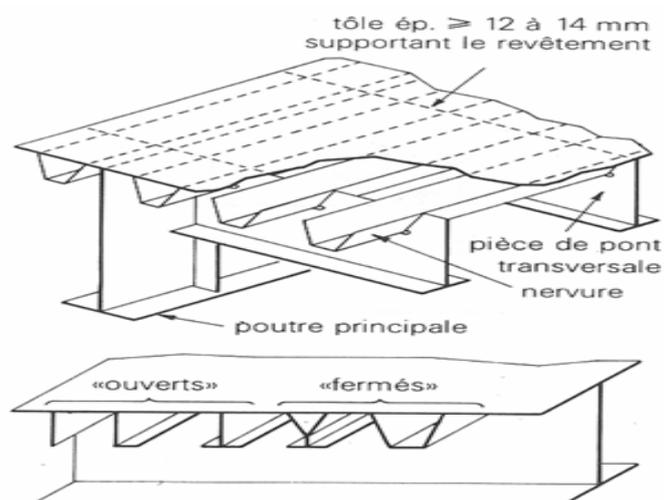


Figure -2.3-Types de raidisseurs ou nervures

## 2.5. Modélisation du véhicule

Le pesage en marche est une technique visant à estimer le poids statique d'un véhicule lourd à partir de mesures de pressions ou de déformations de la structure sur laquelle circule ce véhicule.

L'estimation du poids statique par ce biais doit permettre d'améliorer l'utilisation et l'efficacité des systèmes de pesée existants, de plus la surcharge des véhicules lourds contribue de manière significative à l'endommagement des chaussées et des ponts. Afin d'y remédier, les constructeurs et les services de maintenance sont intéressés de disposer d'outils fiables qui permettent d'estimer les charges et les poids provenant des véhicules lourds en mouvement sur les ponts en temps réel.

Les véhicules sont habituellement décrits comme des charges statiques. Cependant, ils franchissent et traversent le pont en vitesse importante. De plus, le passage répété d'essieux avec des espacements constants peut conduire à une excitation importante du pont. La description des véhicules sous forme de charges mobiles est alors nécessaire.

Le choix de véhicule joue un rôle important dans la réponse du pont. Du modèle le plus simple qui consiste à une force constante se déplaçant à celui de la modélisation en trois dimensions, nous avons choisi le cas le plus simple d'une masse montée sur un ressort (Figure 2.3).

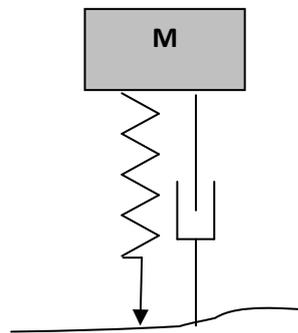


Figure -2.4- Modèle de véhicule simple

En effet l'utilisation d'un modèle de véhicule plus sophistiqué, Figure 2.3, (comportant plusieurs degrés de liberté) pourrait masquer l'aspect essentiel du comportement bidimensionnel du pont [16].

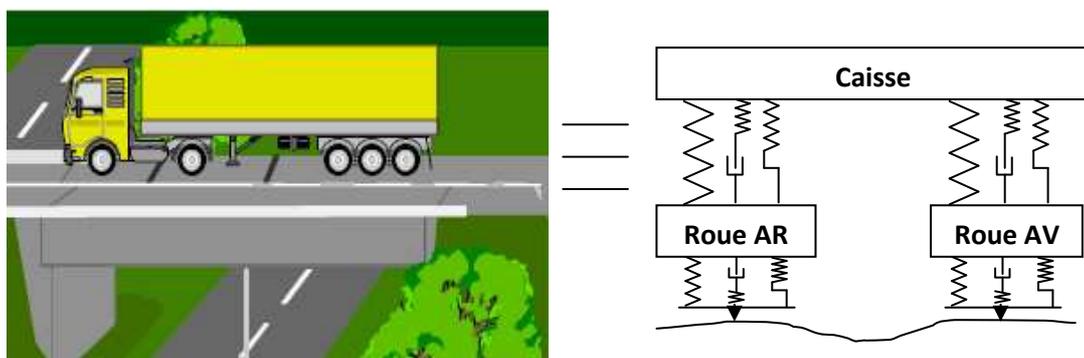


Figure -2.5- Modèle de véhicule sophistiqué

## 2.6. Conclusion

Les ouvrages d'arts comportent différents types de pièces structurelles : dalle, poutre, diaphragmes, armatures. Ces pièces ont des dimensions et des caractéristiques bien différentes et correspondent à des familles d'éléments distincts. La modélisation est donc construite avec des éléments de natures différentes.

Le premier chargement du pont est son poids propre, les autres charges proviennent des véhicules, ces dernières sont modélisées donc par des masses qui se déplacent le long du pont, la modélisation du tablier par une plaque simplement appuyée sur deux de ses extrémités permet de prendre en considération la réponse dans les deux directions.

Dans certains cas où le tablier ne satisfait pas aux exigences de sécurité le pont doit être renforcé, remplacé ou faire l'objet de restrictions d'utilisation telle qu'une limitation du poids des véhicules. En effet, grâce à une meilleure connaissance du comportement pont-véhicule, il est possible d'augmenter la durée de vie de l'ouvrage sans frais particuliers.

Afin d'atteindre cet objectif il faut bien comprendre le comportement pont-véhicule, dans les chapitres suivants nous allons mettre en évidence les équations utilisées dans le cas d'une plaque (dalles) isotropes et orthotropes soumises à une charge roulante.

## CHAPITRE 3

### APPLICATION POUR LES DALLES ISOTROPES

#### 3.1. Introduction

Afin d'étudier les ponts à dalles orthotropes, on commencera par l'étude de la réponse du modèle simplifié d'une dalle isotrope au passage d'un essieu. Un pont à dalle isotrope est un pont dont le tablier est à inerties, donc à rigidité, égales dans toute les directions.

La vibration d'une plaque sous l'action d'une charge roulante a fait l'objet de plusieurs études mais elles restent limitées [21].

La méthode de vibration d'une plaque est basée sur les hypothèses suivantes [19] :

- 1- Les petites déformations élastiques surgissant dans l'élément sont dans le domaine de la loi de Hooke.
- 2- Il existe dans la plaque une surface appelée 'surface neutre'. Les distances entre les points se trouvant sur cette surface ne doivent pas varier avec la déflexion de la plaque. Cette surface contient les coordonnées planes  $xy$ , et l'axe  $z$  vers le bas (Figure 3.1)
- 3- Les particules de masse se trouvant sur la ligne normale à la surface neutre continuent à se trouver sur celle-ci même après la déformation de la plaque.

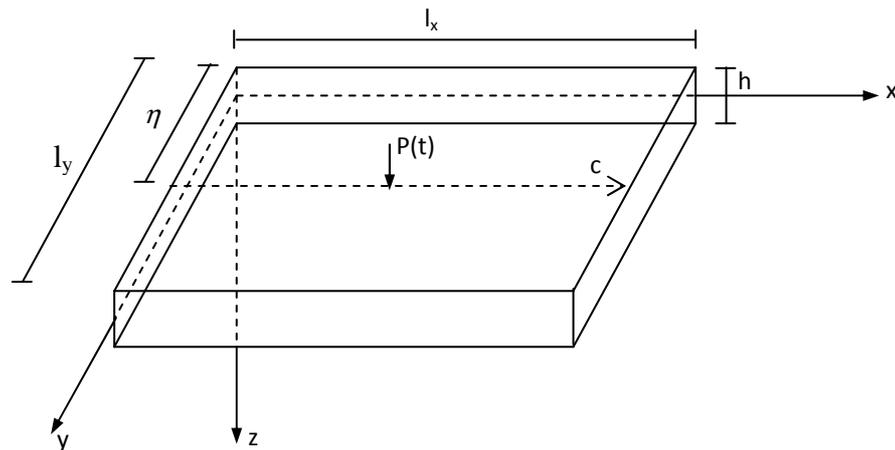


Figure -3.1- Plaque rectangulaire soumise à une charge roulante parallèle à l'axe  $x$

### 3.2. Comportement des dalles isotropes sous chargement roulant

L'équation différentielle de vibration de la plaque dans la théorie de Love-Kirchhoff s'écrit est sous la forme [19]:

$$D \left[ \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial y^4} \right] + \mu \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = p(x, y, t) \quad (3.1)$$

Où :

$W(x, y, t)$  : Déflexion verticale de la plaque au point avec les coordonnées  $(x, y)$  à l'instant  $t$ .

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ : Rigidité à la flexion de la plaque

$E$  : Module de Young de la plaque

$h$  : Épaisseur de la plaque

$\nu$  : Coefficient de Poisson ( $\nu < 1$ )

$\mu$  : Masse de la plaque par unité de surface de la plaque

$p(x, y, t)$  : charge externe par unité de surface de la plaque

Dans ce qui suit, nous allons écrire les conditions aux limites dans le cas d'une plaque rectangulaire appuyée sur les extrémités parallèle à l'axe  $y$  ( $x = 0, x = l_x$ ) et libre suivant l'axe  $x$  ( $y = 0, y = l_y$ ) (Figure 1) [19]:

- Suivant l'axe  $y$  ( $x = 0, x = l_x$ )

- Appuis simples

$$w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (3.2)$$

- Encastrement

$$w = 0, \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (3.3)$$

- Suivant l'axe  $x$  ( $y = 0, y = l_y$ )

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad (3.4)$$

#### 3.2.1. Vibrations Libres de Plaques simplement appuyées sur 2 côtés [19]

Dans la théorie de Love-Kirchhoff et en l'absence des forces extérieures, l'équation d'une plaque homogène s'écrit :

$$D \left[ \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial y^4} \right] + \mu \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3.5)$$

Nous considérons que la plaque (Figure 3.1) est simplement appuyée sur les côtés ( $x=0$ ,  $x=l_x$ ). Dans la solution nous utiliserons la transformation d'intégrale bidimensionnelle généralisée :

$$W(i, j, t) = \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} w(x, y, t) \sin \frac{i\pi x}{l_x} w_{(j)}(y) dx dy \quad (3.6)$$

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{l_x} \frac{\mu}{W_j} W(i, j, t) \sin \frac{i\pi x}{l_x} w_{(j)}(y) \quad (3.7)$$

$$W_j = \int_0^{l_x} \mu w_{(j)}^2(y) dy \quad (3.8)$$

Où :  $w_{(j)}(y)$  est une fonction à déterminer satisfaisant les conditions aux limites des bords libres de la plaque ( $y = 0$ ,  $y = l_y$ ) ainsi que l'équation de vibration libre de la plaque. Il est calculé à partir de l'équation différentielle suivante :

$$D \left[ \frac{i^4 \pi^4}{l_x^4} w_{(j)}(y) - 2 \frac{i^2 \pi^2}{l_x^2} w''_{(j)}(y) + w^{(4)}_{(j)}(y) \right] - \mu \omega_{(i,j)}^2 w_{(j)}(y) = 0 \quad (3.9)$$

Nous remplaçons la déflexion de la plaque  $w(x, y, t)$  sous la forme :

$$w(x, y, t) = \sin \frac{i\pi x}{l_x} w_{(j)}(y) \sin \omega_{(i,j)} t \quad (3.10)$$

$\omega_{(i,j)}$  est la pulsation propre de la plaque pour le mode (i,j).

Pour  $y = 0$ ,  $y = l_y$ , les conditions aux limites de l'équation (3.4) sont à présent :

$$w''_{(j)} + \nu \frac{i^2 \pi^2}{l_x^2} w_{(j)} = 0, w''_{(j)} - (2 - \nu) \frac{i^2 \pi^2}{l_x^2} w'_{(j)} = 0 \quad (3.11)$$

En remplaçant  $w(x, y, t)$  par son expression dans l'équation (3.10), nous obtenons l'équation différentielle en  $w_{(j)}(y)$  :

$$\frac{\partial^4 w_{(j)}(y)}{\partial y^4} - 2 \frac{i^2 \pi^2}{l_x^2} \frac{\partial^2 w_{(j)}(y)}{\partial y^2} + \left( \frac{i^4 \pi^4}{l_x^4} - \frac{\mu \omega_{(i,j)}^2}{D} \right) w_{(j)}(y) = 0 \quad (3.12)$$

La solution de cette équation est  $w_{(j)}(y) = e^{\lambda y/l_y}$  où  $\lambda$  doit satisfaire l'équation caractéristique, alors elle s'écrit sous la forme :

$$\frac{\lambda^4}{l_y^4} - 2 \frac{i^2 \pi^2}{l_x^2} \frac{\lambda^2}{l_y^2} + \left( \frac{i^4 \pi^4}{l_x^4} - \frac{\mu \omega_{(i,j)}^2}{D} \right) = 0 \quad (3.13)$$

Dont les quatre racines sont :

$$\lambda_1 = -\lambda_3 = l_y \left[ \frac{i^2 \pi^2}{l_x^2} - \left( \frac{\mu \omega^2_{(i,j)}}{D} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.14)$$

$$\lambda_2 = -\lambda_4 = l_y \left[ \frac{i^2 \pi^2}{l_x^2} + \left( \frac{\mu \omega^2_{(i,j)}}{D} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.15)$$

Cas 1 :  $\frac{i^2 \pi^2}{l_x^2} > \left( \frac{\mu \omega^2_{(i,j)}}{D} \right)^{\frac{1}{2}}$  c.à.d.  $D < \frac{l_x^4}{i^4 \pi^4} \mu \omega_{ij}^2$

Les racines (3.14) et (3.15) sont réels, la solution générale de l'équation différentielle (3.12) est sous la forme :

$$w_{(j)}(y) = \sinh \frac{\lambda_1 y}{l_y} + A \cosh \frac{\lambda_1 y}{l_y} + B \sinh \frac{\lambda_2 y}{l_y} + C \cosh \frac{\lambda_2 y}{l_y} \quad (3.16)$$

Les constantes d'intégration A, B, C ainsi que l'équation des fréquences propres de la plaque sont obtenues après application des conditions aux limites (3.4) à l'équation (3.16) :

$$A = \frac{\sinh \lambda_1 - \frac{\lambda_1 D_1^2}{\lambda_2 D_2^2} \sinh \lambda_2}{\cosh \lambda_2 - \cosh \lambda_1}$$

$$B = \frac{\lambda_1 D_1}{\lambda_2 D_2} \quad (3.17)$$

$$C = \frac{\frac{D_2}{D_1} \sinh \lambda_1 - \frac{\lambda_1 D_1}{\lambda_2 D_2} \sinh \lambda_2}{\cosh \lambda_2 - \cosh \lambda_1}$$

Où :

$$D_1 = l_y^2 \left[ (1 - \nu) \frac{i^2 \pi^2}{l_x^2} - \left( \frac{\mu \omega^2_{(i,j)}}{D} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (3.18)$$

$$D_2 = l_y^2 \left[ -(1 - \nu) \frac{i^2 \pi^2}{l_x^2} - \left( \frac{\mu \omega^2_{(i,j)}}{D} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (3.19)$$

Donc, l'équation des fréquences propres s'écrit sous la forme :

$$2\lambda_1 \lambda_2 D_1^2 D_2^2 (\cosh \lambda_1 \cosh \lambda_2 - 1) - (\lambda_1^2 D_1^4 + \lambda_2^2 D_2^4) \sinh \lambda_1 \sinh \lambda_2 = 0 \quad (3.20)$$

À partir de cette équation, les fréquences propres  $\omega_{(i,j)}$  de la plaque seront calculées.

$$\text{Cas 2 : } \frac{i^2 \pi^2}{l_x^2} < \left( \frac{\mu \omega^2(i,j)}{D} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ c.à.d. } D > \frac{l_x^4}{i^4 \pi^4} \mu \omega_{ij}^2$$

$$\lambda_1 = -\lambda_3 = l_y \left[ \left( \frac{\mu \omega^2(i,j)}{D} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{i^2 \pi^2}{l_x^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.21)$$

Tandis que  $\lambda_2$  et  $\lambda_4$  sont donnés dans (3.15). La solution de l'équation (3.12) s'écrit à présent sous la forme :

$$w_{(j)}(y) = \sin \frac{\lambda_1 y}{l_y} + A \cos \frac{\lambda_1 y}{l_y} + B \sinh \frac{\lambda_2 y}{l_y} + C \cosh \frac{\lambda_2 y}{l_y} \quad (3.22)$$

Les constantes d'intégration sont :

$$A = \frac{\sin \lambda_1 - \frac{\lambda_1 D_1^2}{\lambda_2 D_2^2} \sinh \lambda_2}{\cosh \lambda_2 - \cos \lambda_1}$$

$$B = \frac{\lambda_1 D_1}{\lambda_2 D_2} \quad (3.23)$$

$$C = \frac{\frac{D_2}{D_1} \sin \lambda_1 - \frac{\lambda_1 D_1}{\lambda_2 D_2} \sinh \lambda_2}{\cosh \lambda_2 - \cos \lambda_1}$$

Dans ce cas, l'équation des fréquences propres s'écrit sous la forme :

$$2\lambda_1 \lambda_2 D_1^2 D_2^2 (\cos \lambda_1 \cosh \lambda_2 - 1) - (\lambda_1^2 D_1^4 + \lambda_2^2 D_2^4) \sin \lambda_1 \sinh \lambda_2 = 0 \quad (3.24)$$

$$\text{Cas 3 : } \frac{i^2 \pi^2}{l_x^2} = \left( \frac{\mu \omega^2(i,j)}{D} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ c.à.d. } D = \frac{l_x^4}{i^4 \pi^4} \mu \omega_{ij}^2$$

$\lambda_1 = -\lambda_3 = 0$ , alors l'équation (3.22) sera sous la forme :

$$w_{(j)}(y) = 1 + Ay + B \sin \frac{\lambda_2 y}{l_y} + C \cosh \frac{\lambda_2 y}{l_y} \quad (3.25)$$

Où :

$$A = \frac{v^2}{(2-v)^2} \frac{\lambda_2}{l_y} \frac{1 - \cosh \lambda_2}{\sinh \lambda_2 - \lambda_2}$$

$$B = \frac{v}{2-v} \frac{1 - \cosh \lambda_2}{\sinh \lambda_2 - \lambda_2} \quad (3.26)$$

$$C = \frac{v}{2-v}$$

L'équation des fréquences propres s'écrit donc :

$$2(\cosh \lambda_2 - 1) - \lambda_2 \sinh \lambda_2 = 0 \quad (3.27)$$

### 3.2.2. Vibrations d'une plaque Sous Charge Roulante [17]

Nous considérons la plaque homogène montrée sur la figure 3, simplement appuyée en  $x = 0$  et en  $x = l_x$ .

Dans ce cas, nous allons entreprendre l'analyse de la force  $P(t)$  (Véhicule) qui se déplace sur la plaque avec une vitesse constante  $c$  suivant la ligne droite d'ordonnée  $y = \eta$  parallèle à l'axe  $x$  (Figure 3.1). La charge est :

$$p(x, y, t) = \delta(x - ct)\delta(y - \eta)P(t) \quad (3.28)$$

L'équation d'une plaque sous le poids de la charge  $P(t)$  s'écrit sous la forme :

$$D \left[ \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial y^4} \right] + \mu \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = \delta(x - ct)\delta(y - \eta)P(t) \quad (3.29)$$

$P(t) = M(g - \ddot{Z})$  est la charge dynamique appliquée au pont.

On utilise la solution de Levy qui constitue un cas plus général de la décomposition en double série de Fourier.  $w(x, y, t)$  s'écrit sous la forme :

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^{n=\infty} \sum_{j=1}^{m=\infty} W(i, j, t) w_j(y) dx dy \quad (3.30)$$

Pour l'application de la solution de Lévy, une introduction de la transformation d'intégrale bidimensionnelle généralisée est faite et qui est définie par les relations (3.6) et (3.7) dont leurs démonstrations est faite par l'utilisation des propriétés d'orthogonalités suivantes :

$$\iint_{00}^{l_y l_x} \mu \sin \frac{i\pi x}{l_x} \sin \frac{i'\pi x}{l_x} w_{(j)}(y) w'_{(j)}(y) dx dy = \begin{cases} 0 & \text{Pour } i \neq i', j \neq j' \\ W_j \frac{l_x}{2} & \text{Pour } i = i', j = j' \end{cases} \quad (3.31)$$

La relation (3.6) est démontrée après remplacement de  $w(x, y, t)$  dans la relation (3.7)

$$W(i, j, t) = \iint_{00}^{l_y l_x} \sum_{i'=1}^{\infty} \sum_{j'=1}^{\infty} \frac{2}{l_x} \frac{\mu}{W_j} \sin \frac{i'\pi x}{l_x} w_{(j)}(y) \sin \frac{i\pi x}{l_x} w'_{(j)}(y) dx dy$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{l_x} \frac{1}{W_j} W(i, j, t) W_j \frac{l_x}{2} = W(i, j, t) \quad (3.32)$$

### b.1. Mise en équation du problème

- Équation de la plaque sans second membre

Pour obtenir les équations du problème, l'équation sans second membre (3.9) sera multipliée par  $w \sin \frac{i\pi x}{l_x}$  et intégrée sur  $\int_0^{l_x} \int_0^{l_y}$  respectivement, d'où la relation suivante [19]:

$$D \left[ \frac{i^4 \pi^4}{l_x^4} \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} w \sin \frac{i\pi x}{l_x} w_{(j)}(y) dx dy - 2 \frac{i^2 \pi^2}{l_x} \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} w \sin \frac{i\pi x}{l_x} w''_{(j)}(y) dx dy + \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} w \sin \frac{i\pi x}{l_x} w^{(4)}_{(j)}(y) dx dy \right] = \mu \omega^2_{(i,j)} W(i, j, t) \quad (3.33)$$

- Équation de la plaque avec second membre

On considère l'équation (3.29) :

$$D \left[ \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial y^4} \right] + \mu \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = \delta(x - ct) \delta(y - \eta) P(t)$$

Vu les conditions aux limites des bords d'une plaque simplement appuyée ( $x=0$  et  $x=a$ ) [Équation (3.2)]. Donc, (3.29) sera multipliée par  $\sin \frac{i\pi x}{l_x} w_{(j)}(y)$  et intégrée sur  $\int_0^{l_x} \int_0^{l_y}$  (Intégrations par parties) comme suit [19]:

$$\int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \sin \frac{i\pi x}{l_x} w_{(j)}(y) dx dy = \frac{i^4 \pi^4}{l_x^4} W(i, j, t)$$

$$\int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \sin \frac{i\pi x}{l_x} w_{(j)}(y) dx dy = - \frac{i^2 \pi^2}{l_x^2} \left\{ \int_0^{l_x} \left[ \frac{\partial w}{\partial y} w_{(j)}(y) - w w'_{(j)}(y) \right]_0^{l_y} \sin \frac{i\pi x}{l_x} dx + \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} w \sin \frac{i\pi x}{l_x} w''_{(j)}(y) dx dy \right\} \quad (3.34)$$

$$\int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \sin \frac{i\pi x}{l_x} w_{(j)}(y) dx dy = \int_0^{l_x} \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} w_{(j)}(y) - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} w'_{(j)}(y) \right]_0^{l_y} \sin \frac{i\pi x}{l_x} dx + \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} w \sin \frac{i\pi x}{l_x} w^{(4)}_{(j)}(y) dx dy$$

$$\mu \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \sin \frac{i\pi x}{l_x} w_{(j)}(y) dx dy = \mu \ddot{W}(i, j, t) \quad (3.35)$$

Les termes entre les crochets de l'équation (3.29) disparaissent en tenant compte des conditions aux limites (3.2).

Donc, l'équation (3.29) s'écrira sous la forme suivante [19]:

$$\ddot{W}(i, j, t) + \omega^2_{(i,j)} W(i, j, t) = \frac{P(t)}{\mu} \sin \frac{i\pi ct}{l_x} w_{(j)}(\eta) \quad (3.36)$$

### b.2 Équation du véhicule [16]

L'équation du véhicule formée par une masse M montée sur un ressort de raideur k s'écrit :

$$M \ddot{Z} + k[Z - w(x, y, t)_{x=ct}] = 0 \quad (3.37)$$

Cette équation s'écrit, aussi, en remplaçant  $w(x, y, t)$  par son expression (3.7) et en posant

$$\omega^2 = \frac{k}{M}$$

$$\ddot{Z} + \omega^2 Z = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2\omega^2}{l_x} \frac{\mu}{W_j} W(i, j, t) \sin \frac{i\pi ct}{l_x} w_{(j)}(\eta) \quad (3.38)$$

### 3.3. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié les plaques isotropes dans le but de se familiariser avec les concepts de charge roulante et de ponts modélisés par plaques ainsi qu'avec les outils mathématiques qui découlent des hypothèses prises (plaques minces, charges roulantes modélisées par un système masse-ressort).

Nous avons donc écrit les équations régissant le mouvement d'un tel système puisque nous nous proposons par la suite d'étendre l'étude aux plaques orthotropes qui sont généralement utilisées comme dalles de ponts et autres systèmes de transportation ceci fera l'objet du prochain chapitre.

## CHAPITRE 4

### APPLICATION POUR LES DALLES ORTHOTROPES

#### 4.1. Introduction

Les dalles orthotropes possèdent beaucoup de propriétés qui leurs donnent la particularité d'être spéciales pour le remplacement des tabliers en béton détériorés : elles sont légères, capables de s'intégrer facilement avec les ponts existants que ça soit en grandes poutres ou en treillis, ce qui augmente la rigidité et la capacité portante du tablier. Comme elles sont résistantes à l'effet des intempéries leur durée de vie est prolongée. Ces dalles orthotropes sont utilisées ou proposées dans le but de réduire la charge permanente du pont, éliminer les pénibles articulations ou élargir le pavé d'un pont existant.

Il existe plusieurs théories de plaques pour calculer des structures orthotropes. Certaines ont été établies dans un premier temps pour d'une plaque homogènes et ont été étendues par la suite aux plaques orthotropes (exemples : Love-Kirchhoff-Leknitskii 1987, Mindlin-Reissner-Whilney 1987, Lo-Christensen-Wu 1977.etc.) [20] et Timoshenko et Young dans leur 11<sup>ème</sup> chapitre [22].

Dans ce chapitre nous allons détailler la théorie d'une plaque orthotrope. Considérons une plaque orthotrope rectangulaire, de longueur  $l_x$  et de largeur  $l_y$  (figure 4.1), initialement plane et soumise à une charge mobile parallèle à  $l_x$ . La plaque est encastree sur ses deux cotés opposés et libre sur les deux autres. Son comportement est supposé élastique orthotrope. Nous proposerons une solution analytique du champ de déplacement en appliquant la théorie de Love-Kirchhoff.

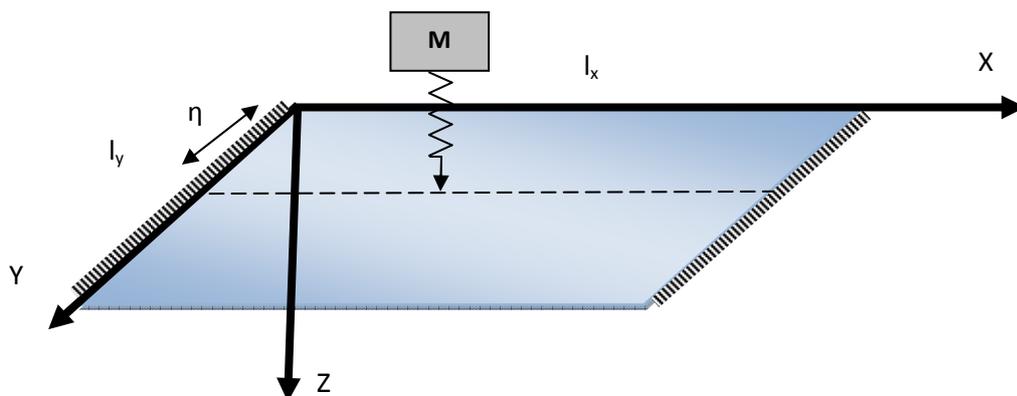


Figure -4.1- Modélisation du pont par une plaque

#### 4.2. Comportement des dalles orthotropes

L'équation différentielle de vibration de la plaque orthotrope (appelée parfois équation de Huber) s'écrit est sous la forme [18]:

$$D_{xx} \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^4} + 2D_t \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{yy} \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial y^4} + \mu \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = p(x, y, t) \quad (4.1)$$

où :

$W(x, y, t)$  : Déflexion verticale de la plaque au point avec les coordonnées  $(x, y)$  à l'instant  $t$ .

$\mu$  : Masse de la plaque par unité de surface de la plaque

$p(x, y, t)$  : charge externe par unité de surface de la plaque

$D_t$  : la rigidité de la plaque à la torsion  $D_t = D_{xy} + 2 D_{ss}$

Les rigidités de la plaque à la flexion sont:

$$D_{xx} = \frac{E_x h^3}{12(1-\nu_{xy}\nu_{yx})}; \quad D_{yy} = \frac{E_y h^3}{12(1-\nu_{xy}\nu_{yx})};$$

$$D_{xy} = \frac{E_y \nu_{yx} h^3}{12(1-\nu_{xy}\nu_{yx})} = \frac{E_x \nu_{xy} h^3}{12(1-\nu_{xy}\nu_{yx})}; \quad D_{ss} = \frac{G_{xy} h^3}{12(1-\nu_{xy}\nu_{yx})}$$

Avec:

$E_x, E_y$  et  $G_{xy}$  : Modules de Young de la plaque

$h$  : Épaisseur de la plaque

$\nu_{xy}$  et  $\nu_{yx}$ : Coefficients orthotropes de Poisson

Les conditions aux limites dans le cas d'une plaque rectangulaire appuyée sur les extrémités parallèle à l'axe  $y$  ( $x = 0, x = l_x$ ) et libre suivant l'axe  $x$  ( $y=0, y=l_y$ ) sont [21]:

- Suivant l'axe  $y$  ( $x = 0, x = l_x$ )

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (4.2)$$

$$-D_t \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - D_{yy} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0 \quad (4.3)$$

Suivant l'axe  $x$  ( $y = 0, y = l_y$ )

$$2D_b \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0 \quad (4.4)$$

$$-D_t \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - D_{yy} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - 2D_b \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0 \quad (4.5)$$

$$\text{Avec : } D_b = D_t + 2 D_{ss}$$

#### 4.2.1. Vibrations Libres de Plaques simplement appuyées sur 2 côtés

Dans la théorie de Love-Kirchhoff et en l'absence des forces extérieures, l'équation d'une plaque homogène s'écrit :

$$D_{xx} \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^4} + 2D_t \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{yy} \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial y^4} + \mu \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (4.6)$$

Nous considérons que la plaque est simplement appuyée sur les côtés ( $x=0$ ,  $x=l_x$ ) (Figure 1). Dans la solution nous utiliserons la transformation d'intégrale bidimensionnelle généralisée :

$$W(i, j, t) = \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} w(x, y, t) \sin \frac{i\pi x}{l_x} w_{(j)}(y) dx dy \quad (4.7)$$

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{l_x} \frac{\mu}{W_j} W(i, j, t) \sin \frac{i\pi x}{l_x} w_{(j)}(y) \quad (4.8)$$

$$W_j = \int_0^{l_y} \mu w_{(j)}^2(y) dy \quad (4.9)$$

Où  $w_{(j)}(y)$  est une fonction à déterminer satisfaisant les conditions aux limites des bords libres de la plaque ( $y = 0$ ,  $y = l_y$ ) ainsi que l'équation de vibration libre de la plaque. Elle est calculée à partir de l'équation différentielle suivante :

$$D_{xx} \frac{i^2 \pi^2}{l_x^2} w_{(j)}(y) - 2D_t \frac{i^2 \pi^2}{l_x^2} w''_{(j)}(y) + D_{xx} w^{(4)}_{(j)}(y) - \mu \omega_{(i,j)}^2 w_{(j)}(y) = 0 \quad (4.10)$$

Nous remplaçons la déflexion de la plaque  $w(x, y, t)$  sous la forme :

$$w(x, y, t) = \sin \frac{i\pi x}{l_x} w_{(j)}(y) \sin \omega_{(i,j)} t \quad (4.11)$$

$\omega_{(i,j)}$  est la pulsation propre de la plaque pour le mode (i,j).

Pour  $y = 0$ ,  $y = b$ , les conditions aux limites de l'équation (4.4) et (4.5) sont à présent :

$$2D_b w'_{(j)}(y) \frac{i^2 \pi^2}{l_x^2} = 0; -D_t w'_{(j)}(y) \frac{i^2 \pi^2}{l_x^2} - D_{yy} w'''_{(j)}(y) - 2D_b w'_{(j)}(y) \frac{i^2 \pi^2}{l_x^2} = 0 \quad (4.12)$$

En remplaçant  $w(x, y, t)$  par son expression dans l'équation (4.11), nous obtenons l'équation différentielle en  $w_{(j)}(y)$  :

$$D_{yy} \frac{\partial^4 w_{(j)}(y)}{\partial y^4} - 2D_t \frac{i^2 \pi^2}{l_x^2} \frac{\partial^2 w_{(j)}(y)}{\partial y^2} + \left( D_{xx} \frac{i^4 \pi^4}{l_x^4} - \frac{\mu \omega_{(i,j)}^2}{D} \right) w_{(j)}(y) = 0 \quad (4.13)$$

La solution de cette équation est  $w_{(j)}(y) = e^{\lambda y/l_y}$  où  $\lambda$  doit satisfaire l'équation caractéristique, alors elle s'écrit sous la forme :

$$D_{yy} \frac{\lambda^4}{l_y^4} - 2D_t \frac{i^2 \pi^2}{l_x^2} \frac{\lambda^2}{l_y^2} + \left( D_{xx} \frac{i^4 \pi^4}{l_x^4} - \mu \omega_{(i,j)}^2 \right) = 0 \quad (4.14)$$

Dont les quatre racines sont :

$$\lambda_{1,2} = \mp ly \left[ \frac{D_t}{D_{yy}} \frac{i^2 \pi^2}{l_x^2} + \left[ \left( \frac{D_t^2}{D_{yy}^2} - \frac{D_{xx}}{D_{yy}} \right) \frac{i^4 \pi^4}{l_x^4} + \frac{\mu \omega_{(ij)}^2}{D_{yy}} \right]^{1/2} \right]^{1/2} \quad (4.15)$$

$$\lambda_{3,4} = \mp ly \left[ \frac{D_t}{D_{yy}} \frac{i^2 \pi^2}{l_x^2} - \left[ \left( \frac{D_t^2}{D_{yy}^2} - \frac{D_{xx}}{D_{yy}} \right) \frac{i^4 \pi^4}{l_x^4} + \frac{\mu \omega_{(ij)}^2}{D_{yy}} \right]^{1/2} \right]^{1/2} \quad (4.16)$$

Ces deux équations dépendent des propriétés de la plaque considérée, nous nous trouverons devant trois cas principaux :

$$\underline{1^{er} \text{ Cas}} : D_t^2 > D_{xx} D_{yy} \quad (4.17)$$

- Cas 1.1 :  $D_t \frac{i^2 \pi^2}{l_x^2} \geq \sqrt{\left( D_t^2 - D_{xx} D_{yy} \right) \frac{i^4 \pi^4}{l_x^4} + \mu \omega_{(ij)}^2}$

$$\text{C.à.d.} : D_{xx} \geq \mu \omega_{(ij)}^2 \frac{l_x^4}{i^4 \pi^4} \quad (4.18)$$

Les racines (4.15) et (4.16) sont réelles :

$$\lambda_{1,2} = \mp ly \left[ \frac{D_t}{D_{yy}} \frac{i^2 \pi^2}{l_x^2} + \left[ \left( \frac{D_t^2}{D_{yy}^2} - \frac{D_{xx}}{D_{yy}} \right) \frac{i^4 \pi^4}{l_x^4} + \frac{\mu \omega_{(ij)}^2}{D_{yy}} \right]^{1/2} \right]^{1/2} = \mp r_1 \quad (4.19)$$

$$\lambda_{3,4} = \mp ly \left[ \frac{D_t}{D_{yy}} \frac{i^2 \pi^2}{l_x^2} - \left[ \left( \frac{D_t^2}{D_{yy}^2} - \frac{D_{xx}}{D_{yy}} \right) \frac{i^4 \pi^4}{l_x^4} + \frac{\mu \omega_{(ij)}^2}{D_{yy}} \right]^{1/2} \right]^{1/2} = \mp r_2 \quad (4.20)$$

La solution générale de l'équation différentielle (4.13) est sous la forme :

$$w_{(j)}(y) = X_1 \cosh \frac{r_1 y}{l_y} + X_2 \sinh \frac{r_1 y}{l_y} + X_3 \cosh \frac{r_2 y}{l_y} + X_4 \sinh \frac{r_2 y}{l_y} \quad (4.21)$$

Les constantes d'intégration  $X_1, X_2, X_3$  et  $X_4$  ainsi que l'équation des fréquences propres de la plaque sont obtenues après application des conditions aux limites (4.12) à l'équation (4.21) :

- Cas 1.2 :  $D_t \frac{i^2 \pi^2}{l_x^2} < \sqrt{\left( D_t^2 - D_{xx} D_{yy} \right) \frac{i^4 \pi^4}{l_x^4} + \mu \omega_{(ij)}^2}$

C.à.d. :

$$D_{xx} < \mu \omega_{(ij)}^2 \frac{l_x^4}{i^4 \pi^4} \quad (4.22)$$

$$\lambda_{1,2} = \mp ly \left[ \frac{D_t}{D_{yy}} \frac{i^2 \pi^2}{l_x^2} + \left[ \left( \frac{D_t^2}{D_{yy}^2} - \frac{D_{xx}}{D_{yy}} \right) \frac{i^4 \pi^4}{l_x^4} + \frac{\mu \omega_{(ij)}^2}{D_{yy}} \right]^{1/2} \right]^{1/2} = \mp r_1 \quad (4.23)$$

$$\lambda_{3,4} = \mp i ly \left[ \frac{D_t}{D_{yy}} \frac{i^2 \pi^2}{l_x^2} - \left[ \left( \frac{D_t^2}{D_{yy}^2} - \frac{D_{xx}}{D_{yy}} \right) \frac{i^4 \pi^4}{l_x^4} + \frac{\mu \omega_{(ij)}^2}{D_{yy}} \right]^{1/2} \right]^{1/2} = \mp i r_3 \quad (4.24)$$

Tandis que  $\lambda_2$  et  $\lambda_4$  sont donnés dans (4.14), la solution de l'équation (4.13) s'écrit à présent sous la forme :

$$w_{(j)}(y) = X_1 \sin \frac{r_3 y}{l_y} + X_2 \cos \frac{r_3 y}{l_y} + X_3 \sinh \frac{r_1 y}{l_y} + X_4 \cosh \frac{r_1 y}{l_y} \quad (4.25)$$

$$\underline{2^{\text{ème}} \text{ Cas}} : D_t^2 = D_{xx} D_{yy} \quad (4.26)$$

$$\lambda_{1,2} = \mp ly \left[ \frac{D_t}{D_{yy}} \frac{i^2 \pi^2}{l_x^2} + \left[ \frac{\mu \omega_{(ij)}^2}{D_{yy}} \right]^{1/2} \right]^{1/2} \quad (4.27)$$

$$\lambda_{3,4} = \mp ly \left[ \frac{D_t}{D_{yy}} \frac{i^2 \pi^2}{l_x^2} - \left[ \frac{\mu \omega_{(ij)}^2}{D_{yy}} \right]^{1/2} \right]^{1/2} \quad (4.28)$$

Nous pouvons distinguer trois sous cas :

- Cas 2.1 :

$$\frac{\mu \omega_{(ij)}^2}{D_{yy}} < \frac{D_t}{D_{yy}} \frac{i^2 \pi^2}{l_x^2}$$

c. à. d.:

$$D_{xx} > \mu \omega_{(ij)}^2 \frac{l_x^4}{i^4 \pi^4} \quad (4.29)$$

$$\lambda_{1,2} = \mp ly \left[ \frac{D_t}{D_{yy}} \frac{i^2 \pi^2}{l_x^2} + \left[ \frac{\mu \omega_{(ij)}^2}{D_{yy}} \right]^{1/2} \right]^{1/2} = \mp r_4 \quad (4.30)$$

$$\lambda_{3,4} = \mp ly \left[ \frac{D_t}{D_{yy}} \frac{i^2 \pi^2}{l_x^2} - \left[ \frac{\mu \omega_{(ij)}^2}{D_{yy}} \right]^{1/2} \right]^{1/2} = \mp r_5 \quad (4.31)$$

Dans ce cas, les solutions de l'équation (4.13) s'écrit à présent sous la forme :

$$w_{(j)}(y) = X_1 \cosh \frac{r_4 y}{l_y} + X_2 \sinh \frac{r_4 y}{l_y} + X_3 \cosh \frac{r_5 y}{l_y} + X_4 \sinh \frac{r_5 y}{l_y} \quad (4.32)$$

- Cas 2.2 :

$$\frac{\mu\omega_{(ij)}^2}{D_{yy}} > \frac{D_t}{D_{yy}} \frac{i^2\pi^2}{l_x^2}$$

$$\text{C. à. d.: } D_{xx} < \mu\omega_{(ij)}^2 \frac{l_x^4}{i^4\pi^4} \quad (4.33)$$

$$\lambda_{1,2} = \mp ly \left[ \frac{D_t}{D_{yy}} \frac{i^2\pi^2}{l_x^2} + \left[ \frac{\mu\omega_{(ij)}^2}{D_{yy}} \right]^{1/2} \right]^{1/2} = \mp r_4 \quad (4.34)$$

$$\lambda_{3,4} = \mp i ly \left[ \left[ \frac{\mu\omega_{(ij)}^2}{D_{yy}} \right]^{1/2} - \frac{D_t}{D_{yy}} \frac{i^2\pi^2}{l_x^2} \right]^{1/2} = \mp i r_6 \quad (4.35)$$

Dans ce cas, les solutions de l'équation (4.13) s'écrivent à présent sous la forme :

$$w_{(j)}(y) = X_1 \cosh \frac{r_4 y}{l_y} + X_2 \sinh \frac{r_4 y}{l_y} + X_3 \cos \frac{r_6 y}{l_y} + X_4 \sin \frac{r_6 y}{l_y} \quad (4.36)$$

$$\underline{\text{3}^{\text{ème}} \text{ Cas :}} D_t^2 > D_{xx} D_{yy} \quad (4.37)$$

Dans ce cas les plaques sont plus rigides en flexion qu'en torsion, nous pouvons distinguer deux cas comme suit :

- Cas 3.1 :

$$\frac{D_t}{D_{yy}} \frac{i^2\pi^2}{l_x^2} > \left[ \left( \frac{D_t^2}{D_{yy}^2} - \frac{D_{xx}}{D_{yy}} \right) \frac{i^4\pi^4}{l_x^4} + \frac{\mu\omega_{(ij)}^2}{D_{yy}} \right]^{1/2} \quad (4.38)$$

Nous sommes dans un cas identique au cas 1-1, la solution générale de l'équation différentielle (4.13) est donnée par l'équation (4.21)

- Cas 3.2:

$$\frac{D_t}{D_{yy}} \frac{i^2\pi^2}{l_x^2} < \left[ \left( \frac{D_t^2}{D_{yy}^2} - \frac{D_{xx}}{D_{yy}} \right) \frac{i^4\pi^4}{l_x^4} + \frac{\mu\omega_{(ij)}^2}{D_{yy}} \right]^{1/2} \quad (4.39)$$

Ceci est identique au cas 1.2, la solution est donc donnée par l'équation (4.25)

- Cas 3.3:

$$\left( \frac{D_t^2}{D_{yy}^2} - \frac{D_{xx}}{D_{yy}} \right) \frac{i^4\pi^4}{l_x^4} > \frac{\mu\omega_{(ij)}^2}{D_{yy}} \quad (4.40)$$

c. à. d.:

$$D_{xx} > \mu\omega_{(ij)}^2 \frac{l_x^4}{i^4\pi^4} + \frac{D_t^2}{D_{yy}^2} \quad (4.41)$$

Les solutions de l'équation (4.) seront :

$$\lambda_{1,2} = \mp ly \left[ \frac{1}{2} \left( \left[ \frac{D_{xx}}{D_{yy}} \frac{l_x^4}{i^4 \pi^4} - \frac{\mu \omega_{(ij)}^2}{D_{yy}} \right]^{1/2} + \frac{D_t}{D_{yy}} \frac{i^2 \pi^2}{l_x^2} \right) \right]^{1/2}$$

$$\mp i ly \left[ \frac{1}{2} \left( \left[ \frac{D_{xx}}{D_{yy}} \frac{l_x^4}{i^4 \pi^4} - \frac{\mu \omega_{(ij)}^2}{D_{yy}} \right]^{1/2} - \frac{D_t}{D_{yy}} \frac{i^2 \pi^2}{l_x^2} \right) \right]^{1/2} = \mp r_7 \mp i r_8 \quad (4.42)$$

Dans ce cas, les solutions de l'équation (4.13) s'écrivent à présent sous la forme :

$$w_{(j)}(y) = X_1 \cosh \frac{r_7 y}{l_y} \cos \frac{r_8 y}{l_y} + X_2 \sinh \frac{r_7 y}{l_y} \sin \frac{r_8 y}{l_y} + X_3 \cosh \frac{r_7 y}{l_y} \sin \frac{r_8 y}{l_y}$$

$$+ X_4 \sinh \frac{r_7 y}{l_y} \cos \frac{r_8 y}{l_y} \quad (4.43)$$

Qui peut être mise sous la forme :

$$w_{(j)}(y) = \cosh \frac{r_7 y}{l_y} \left[ X_1 \cos \frac{r_8 y}{l_y} + X_3 \sin \frac{r_8 y}{l_y} \right] + \sinh \frac{r_7 y}{l_y} \left[ X_2 \sin \frac{r_8 y}{l_y} + X_4 \cos \frac{r_8 y}{l_y} \right] \quad (4.44)$$

Calcul des constantes  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  et  $X_4$  [21]

Les paramètres  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  et  $X_4$  présents dans les équations (4.21), (4.25), (4.32), (4.36) et (4.44) ainsi que les fréquences libres sont déterminées à partir des conditions aux limites aux extrémités de la plaque (équations (4.2) à (4.5)).

En introduisant la forme des modes propres dans les quatre conditions aux limites et en considérant les différents cas de figure, nous obtenons trois systèmes linéaires homogènes de la forme :

$$[M] \cdot [X] = 0 \quad (4.45)$$

$$\text{Où : } [X] = [X_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad X_4]^T$$

$[M]$  : matrice dont les coefficients ( $m_{ij}$ ) dépendent des conditions aux limites

Cas 1 :  $D_{xx} < \mu \omega_{(ij)}^2 \frac{l_x^4}{i^4 \pi^4}$

$$[M] = \begin{bmatrix} 0 & -r_2^2 - v_{xy} \frac{i^2 \pi^2}{l_x^2} & 0 & -r_2^2 - v_{xy} \frac{i^2 \pi^2}{l_x^2} \\ m_{12} \sin(r_2 l_y) & m_{12} \cos(r_2 l_y) & m_{14} \sinh(r_1 l_y) & m_{14} \cosh(r_1 l_y) \\ D_t r_2 \frac{i^2 \pi^2}{l_x^2} + D_{yy} r_2^3 \frac{i^2 \pi^2}{l_x^2} & 0 & D_t r_1 \frac{i^2 \pi^2}{l_x^2} + D_{yy} r_1^3 \frac{i^2 \pi^2}{l_x^2} & 0 \\ m_{31} \cos(r_2 l_y) & -m_{31} \sin(r_2 l_y) & m_{33} \cosh(r_1 l_y) & m_{33} \sinh(r_1 l_y) \end{bmatrix}$$

$$\text{Cas 2 : } \frac{D_t^2}{D_{yy}} + \mu\omega_{(ij)}^2 \frac{l_x^4}{i^4\pi^4} > D_{xx} > \mu\omega_{(ij)}^2 \frac{l_x^4}{i^4\pi^4}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 0 & r_1^2 - v_{xy} \frac{i^2\pi^2}{l_x^2} & 0 & r_3^2 - v_{xy} \frac{i^2\pi^2}{l_x^2} \\ m_{12} \sinh(r_1 l_y) & m_{12} \cosh(r_2 l_y) & m_{14} \sinh(r_3 l_y) & m_{14} \cosh(r_3 l_y) \\ -D_{yy} r_1^3 + (D_t + 2D_b) r_2 \frac{i^2\pi^2}{l_x^2} & 0 & -D_{yy} r_1^3 + (D_t + 2D_b) r_3 \frac{i^2\pi^2}{l_x^2} & 0 \\ m_{31} \cosh(r_1 l_y) & m_{31} \sin(r_1 l_y) & m_{33} \cosh(r_3 l_y) & m_{33} \sinh(r_3 l_y) \end{bmatrix}$$

$$\text{Cas 3 : } D_{xx} > \frac{D_t^2}{D_{yy}} + \mu\omega_{(ij)}^2 \frac{l_x^4}{i^4\pi^4}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} r_4^2 - r_5^2 - v_{xy} \frac{i^2\pi^2}{l_x^2} & 0 & 0 & 2r_4 \cdot r_5 \\ m_{11} ch(r_4 l_y) \cos(r_4 l_y) - 2r_4 \cdot r_5 sh(r_4 l_y) \sin(r_5 l_y) & m_{11} ch(r_4 l_y) \sin(r_5 l_y) + 2r_4 \cdot r_5 sh(r_4 l_y) \cos(r_5 l_y) & m_{11} sh(r_4 l_y) \sin(r_5 l_y) - 2r_4 \cdot r_5 ch(r_4 l_y) \sin(r_5 l_y) & m_{11} sh(r_4 l_y) \sin(r_5 l_y) + 2r_4 \cdot r_5 ch(r_4 l_y) \sin(r_5 l_y) \\ 0 & (D_t + 2D_b) r_5 \frac{i^2\pi^2}{l_x^2} - 3D_{yy} r_5 r_4^2 + D_{yy} r_5^3 & (D_t + 2D_b) r_4 \frac{i^2\pi^2}{l_x^2} + 3D_{yy} r_4 r_5^2 - D_{yy} r_5^3 & 0 \\ m_{33} sh(r_4 l_y) \cos(r_5 l_y) - m_{32} ch(r_4 l_y) \sin(r_5 l_y) & m_{33} sh(r_4 l_y) \sin(r_5 l_y) + m_{32} ch(r_4 l_y) \cos(r_5 l_y) & m_{33} ch(r_4 l_y) \cos(r_5 l_y) - m_{32} sh(r_4 l_y) \sin(r_5 l_y) & m_{33} ch(r_4 l_y) \sin(r_5 l_y) - m_{32} sh(r_4 l_y) \cos(r_5 l_y) \end{bmatrix}$$

#### 4.2.2. Vibrations d'une plaque sous charge roulante

Dans ce cas, nous allons entreprendre l'analyse de la force  $P(t)$  (Véhicule) qui se déplace sur la plaque avec une vitesse constante  $c$  suivant la ligne droite d'ordonnée  $y = \eta$  parallèle à l'axe  $x$  (Figure 4.1). La charge est :

$$p(x, y, t) = \delta(x - ct)\delta(y - \eta)P(t) \quad (4.46)$$

L'équation d'une plaque sous le poids de la charge  $P(t)$  s'écrit sous la forme :

$$D_{xx} \frac{\partial^4 w_{(j)}(y)}{\partial x^4} - 2D_t \frac{i^2\pi^2}{l_x^2} \frac{\partial^2 w_{(j)}(y)}{\partial x^2} + D_{xx} \frac{i^2\pi^2}{l_x^2} \frac{\partial^4 w_{(j)}(y)}{\partial y^4} - \mu \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = \delta(x - ct)\delta(y - \eta)p(t) \quad (4.47)$$

Où :  $P(t) = M(g - \ddot{Z})$  est la charge dynamique appliquée au pont.

On utilise la solution de Lévy qui constitue un cas plus général de la décomposition en double série de Fourier.  $w(x, y, t)$  s'écrit sous la forme :

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^{n=\infty} \sum_{j=1}^{m=\infty} W(i, j, t) w_j(y) dx dy \quad (4.48)$$

Pour l'application de la solution de Lévy, une introduction de la transformation d'intégrale bidimensionnelle généralisée est faite et qui est définie par les relations (4.11) et (4.12) dont leurs démonstrations est faite par l'utilisation des propriétés d'orthogonalités suivantes :

$$\int_0^{l_y} \int_0^{l_x} \mu \sin \frac{i\pi x}{l_x} \sin \frac{i'\pi x}{l_x} w_{(j)}(y) w'_{(j)}(y) dx dy = \begin{cases} 0 & \text{Pour } i \neq i', j \neq j' \\ W_j \frac{l_x}{2} & \text{Pour } i = i', j = j' \end{cases} \quad (4.49)$$

La relation (4.11) est démontrée après remplacement de  $w(x,y,t)$  dans la relation (4.12)

$$W(i,j,t) = \int_0^{l_y} \int_0^{l_x} \sum_{i'=1}^{\infty} \sum_{j'=1}^{\infty} \frac{2}{l_x} \frac{\mu}{W_j} \sin \frac{i'\pi x}{l_x} w_{(j')}(y) \sin \frac{i\pi x}{l_x} w'_{(j)}(y) dx dy$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{l_x} \frac{1}{W_j} W(i,j,t) W_j \frac{l_x}{2} = W(i,j,t)$$

#### Mise en équation du problème

- Équation de la plaque sans second membre

Pour obtenir les équations du problème, l'équation sans second membre (4.14) sera multipliée par  $w \sin \frac{i\pi x}{l_x}$  et intégrée sur  $\int_0^{l_x} \int_0^{l_y}$  respectivement, d'où la relation suivante :

$$D_{xx} \frac{i^4 \pi^4}{l_x^4} \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} w \sin \frac{i\pi x}{l_x} w_{(j)}(y) dx dy - 2D_t \frac{i^2 \pi^2}{l_x} \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} w \sin \frac{i\pi x}{l_x} w''_{(j)}(y) dx dy$$

$$+ D_{yy} \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} w \sin \frac{i\pi x}{l_x} w_{(j)}^{(4)}(y) dx dy = \mu \omega^2_{(i,j)} W(i,j,t) \quad (4.50)$$

- Équation de la plaque avec second membre

On considère l'équation (4.47)

$$D_{xx} \frac{\partial^4 w_{(j)}(y)}{\partial x^4} - 2D_t \frac{i^2 \pi^2}{l_x^2} \frac{\partial^2 w_{(j)}(y)}{\partial x^2} + D_{xx} \frac{i^2 \pi^2}{l_x^2} \frac{\partial^4 w_{(j)}(y)}{\partial y^4}$$

$$- \mu \frac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial t^2} = \delta(x - c t) \delta(y - \eta) p(t)$$

Vu les conditions aux limites des bords d'une plaque simplement appuyée

( $x = 0$  et  $x = a$ ) [Équation (4.7)]. Donc, (4.34) sera multipliée par  $\sin \frac{i\pi x}{l_x} w_{(j)}(y)$  et intégrée sur  $\int_0^{l_x} \int_0^{l_y}$  (intégrations par parties) comme suit:

$$\int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \sin \frac{i\pi x}{l_x} w_{(j)}(y) dx dy = \frac{i^4 \pi^4}{l_x^4} W(i,j,t) \quad (4.51)$$

$$\int_0^{lx} \int_0^{ly} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \sin \frac{i\pi x}{l_x} w_{(j)}(y) dx dy = -\frac{i^2 \pi^2}{l_x^2} \left\{ \int_0^{lx} \left[ \frac{\partial w}{\partial y} w_{(j)}(y) - w w'_{(j)}(y) \right]_0^{ly} \sin \frac{i\pi x}{l_x} dx + \int_0^{lx} \int_0^{ly} w \sin \frac{i\pi x}{l_x} w''_{(j)}(y) dx dy \right\} \quad (4.52)$$

$$\int_0^{lx} \int_0^{ly} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \sin \frac{i\pi x}{l_x} w_{(j)}(y) dx dy = \int_0^{lx} \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} w_{(j)}(y) - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} w'_{(j)}(y) \right]_0^{ly} \sin \frac{i\pi x}{l_x} + \int_0^{lx} \int_0^{ly} w \sin \frac{i\pi x}{l_x} w^{(4)}_{(j)}(y) dx dy$$

$$\mu \int_0^{lx} \int_0^{ly} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \sin \frac{i\pi x}{l_x} w_{(j)}(y) dx dy = \mu \ddot{W}(i, j, t) \quad (4.53)$$

Les termes entre les crochets de l'équation (4.47) disparaissent en tenant compte des conditions aux limites (4.7).

Donc, l'équation (4.34) s'écrira sous la forme suivante:

$$\ddot{W}(i, j, t) + \omega^2_{(i,j)} W(i, j, t) = \frac{P(t)}{\mu} \sin \frac{i\pi ct}{l_x} w_{(j)}(\eta) \quad (4.54)$$

### Équation du véhicule

L'équation du véhicule formée par une masse  $M$  montée sur un ressort de raideur  $k$  s'écrit :

$$M \ddot{Z} + k[Z - w(x, y, t)_{x=ct}] = 0 \quad (4.55)$$

Cette équation s'écrit, aussi, en remplaçant  $w(x, y, t)$  par son expression (4.12) et en posant

$$\omega^2 = \frac{k}{M}$$

$$\ddot{Z} + \omega^2 Z = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2\omega^2}{l_x} \frac{\mu}{W_j} W(i, j, t) \sin \frac{i\pi ct}{l_x} w_{(j)}(\eta) \quad (4.56)$$

### 4.3. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons développé l'écriture mathématique du comportement de la plaque orthotropes simplement appuyée sur deux cotés opposés et libre sur les deux autres soumise à une charge roulante modélisée par une masse mobile de vitesse constante.

Le calcul de la déflexion se fait selon la rigidité à la flexion dans les deux sens de la plaque en se basant sur la détermination de la solution des équations différentielles développées dans le présent chapitre et qui ont conduit à trois cas de résolution que nous avons présentés. La mise en œuvre numérique de ces développements est donnée dans le chapitre suivant.

## CHAPITRE 5

### RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DU PROBLEME

#### 15.1. Introduction

Nous avons présenté dans les deux chapitres précédents le développement mathématique du comportement d'une plaque isotropes et orthotropes sous charges roulantes. Nous nous proposons maintenant de donner la mise en œuvre numérique que nous avons effectuée. Pour se faire, nous avons développé deux programmes FORTRAN, l'un pour la plaque isotrope et l'autre pour la plaque orthotrope permettant de calculer la flèche sous une charge mobile.

#### 5.2. Programmes développés

Nous avons développé deux programmes FORTRAN permettant le calcul des déflexions des plaques isotropes et orthotropes sous un chargement roulant à chaque instant.

Les organigrammes de ces derniers sont donnés ci-après (figures 5.1 et 5.2).

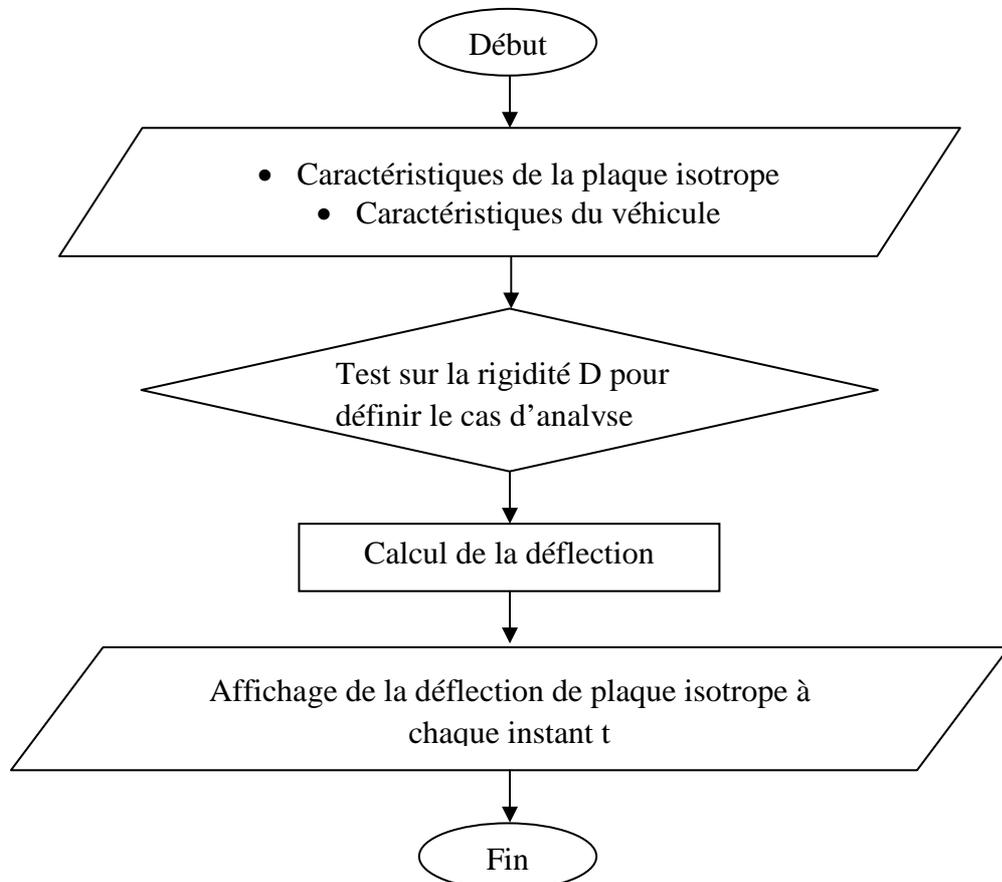


Figure -5.1- Orgnnigramme de calcul de la déflexion d'une plaque isotrope soumise à une charge roulante

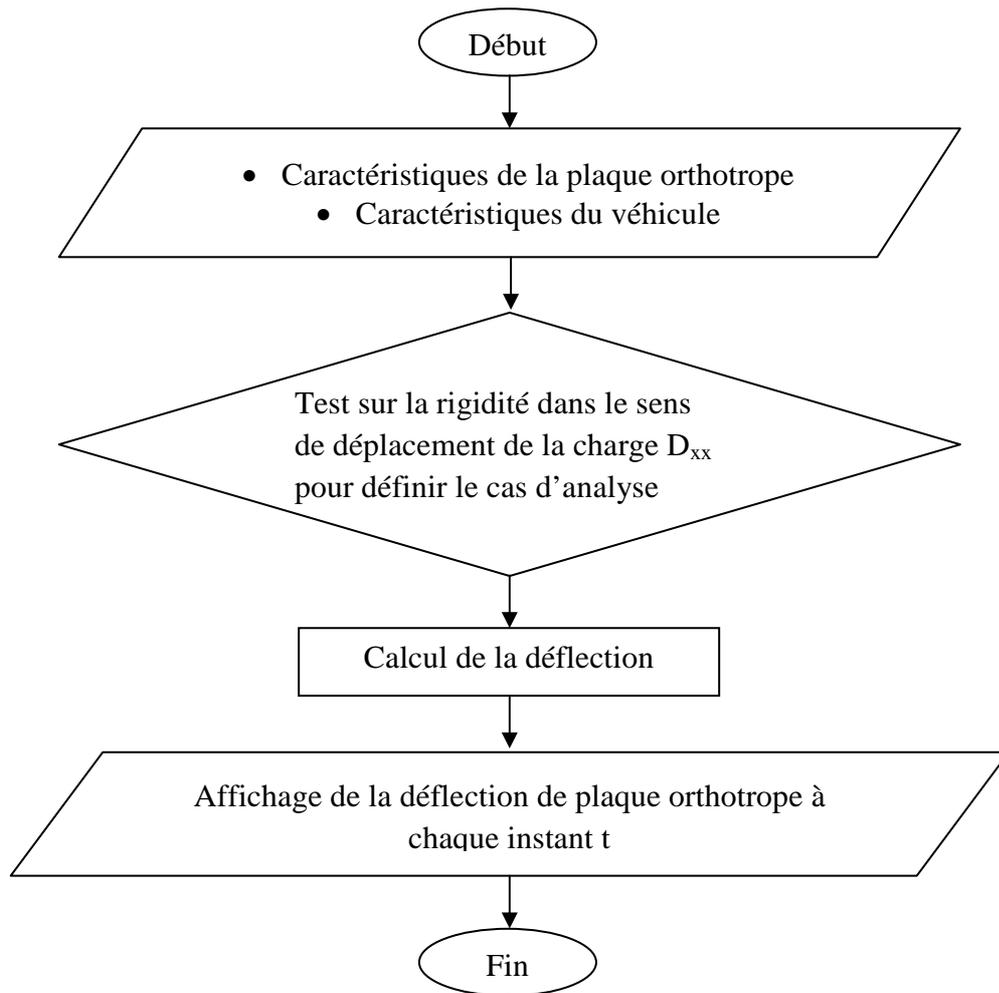


Figure -5.2- Orgnnigramme de calcul de la déflexion d'une plaque orthotrope soumise à une charge roulante

### 5.3. Hypothèses de calcul pour la plaque isotrope et orthotrope

Pour les deux cas de figure, nous considérons les lieux géométriques suivants :

- Charge roulante au milieu de la plaque  $\eta = \frac{l_y}{2}$
- Charge excentrée  $\eta = \frac{5}{100} l_y$

Afin de mieux observer les variations de la section transversale de la plaque, on se place au milieu du tablier  $\left(x = \frac{l_x}{2}\right)$

En effet d'après l'équation:  $w(x, y, t) = \sin\left(\frac{i\pi x}{l_x}\right) w_{(j)}(y) \sin \omega_{ij} t$ , l'amplitude  $w$  sera maximale pour  $\sin\left(\frac{i\pi x}{l_x}\right) = 1$

Or ici  $i$  vaut 1 donc l'amplitude maximale de la déformée aura lieu en  $x = \frac{l_x}{2}$  (pour  $y$  constant).

L'abscisse  $x$  étant fixé au milieu de la plaque, nous considérons enfin trois points selon  $y$  correspondant à :

$$y = \frac{5}{100} l_y, y = \frac{95}{100} l_y \text{ et } y = \frac{l_y}{2}$$

Nous allons comparer les résultats obtenus pour les deux types de chargement en ces trois points dans les deux cas d'une plaque isotrope et orthotrope.

#### 5.4. Résultats obtenues pour une plaque isotrope

Dans le cas d'une plaque isotrope, les caractéristiques du modèle étudié sont:

Caractéristiques du tablier du pont :

$$\frac{l_y}{l_x} = 1$$

$$D = 7.6 E 10 \text{ kg m}$$

$$\nu = 0.3$$

$$\omega_{11} = 9.631 \text{ rd/s}$$

$$\omega_{12} = 16.134 \text{ rd/s}$$

$$\mu = 312.5 \text{ kg m}^{-2}$$

Caractéristiques de l'oscillateur :

$$M = 5 E 04 \text{ kg}$$

$$v = 20 \text{ m/s}$$

$$k = 2 E 06 \text{ N/m}$$

Nous avons tracé la déflexion de tablier du pont pour une charge mobile centrée et une charge mobile excentrée.

##### 5.4.1. Charge centrée

$A \left( x = \frac{l_x}{2}, y = \frac{l_y}{2} \right)$  correspond à un point critique sous la ligne de chargement

$B \left( x = \frac{l_x}{2}, y = 0.05 l_y \right)$  correspond à un point excentré

$C \left( x = \frac{l_x}{2}, y = 0.95 l_y \right)$  correspond à un point excentré

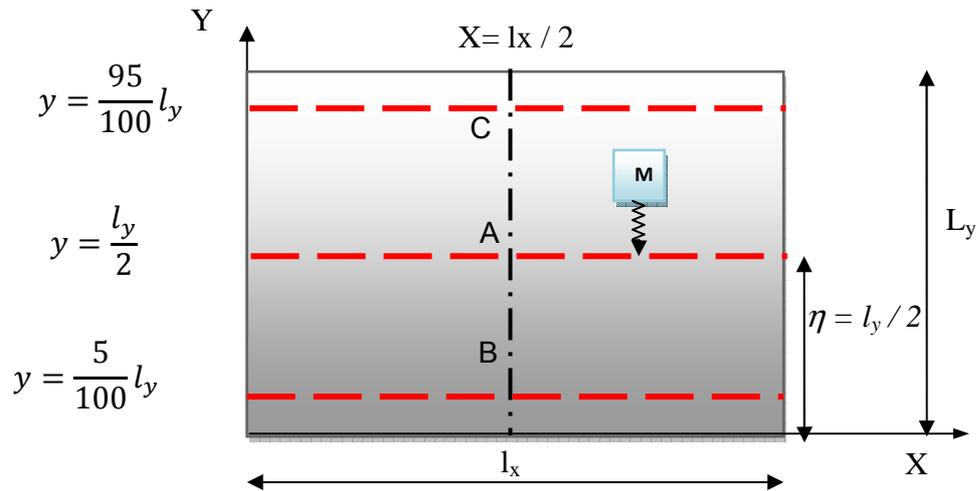


Figure -5.3- Représentation des points d'étude de la plaque sous une charge centrée

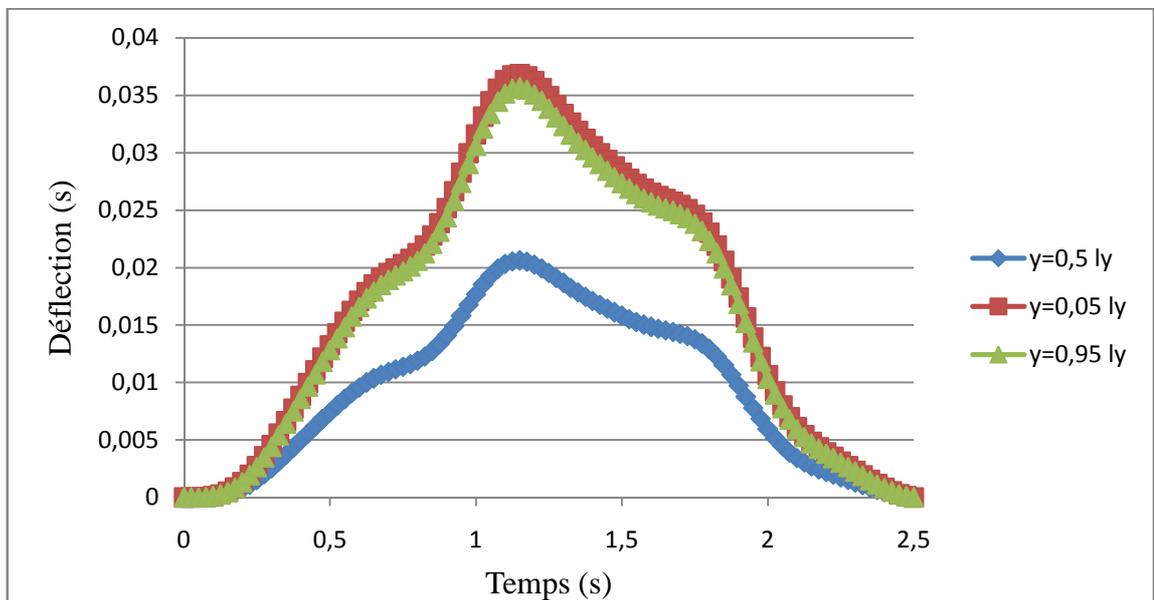


Figure – 5.4 - Déflexion d'une plaque isotrope soumise à une charge centrée

Nous pouvons remarquer que l'allure de la déformation est la même dans les trois cas étudiés (figures 5.2), la déflexion sur les deux bords de la plaque (points excentrés) est plus importante que la déflexion au milieu de la plaque (point critique).

La déflexion est la même aux points B et C symétrique par rapport à l'axe des  $x$  (axe de chargement). Le tableau 5.1 donne l'amplitude de la déflexion dans chaque point.

Tableau 5.1: Déflexions de la dalle isotrope sous une charge centrée

	$x$	$y$	$\eta$	Déflexion (m)
A	$l_x/2$	$l_y/2$	$l_y/2$	2.1E-02
B	$l_x/2$	$5/100 l_y$	$l_y/2$	3.6E-02
C	$l_x/2$	$0.95 l_y$	$l_y/2$	3.6E-02

#### 5.4.2. Charge excentrée

$B \left( x = \frac{l_x}{2}, y = 0.05 l_y \right)$  correspond à un point critique sous la ligne de chargement

$A \left( x = \frac{l_x}{2}, y = \frac{l_y}{2} \right)$  correspond à un point de la ligne médiane

$C \left( x = \frac{l_x}{2}, y = 0.95 l_y \right)$  correspond à un point du bord opposé au bord chargé (point excentré)

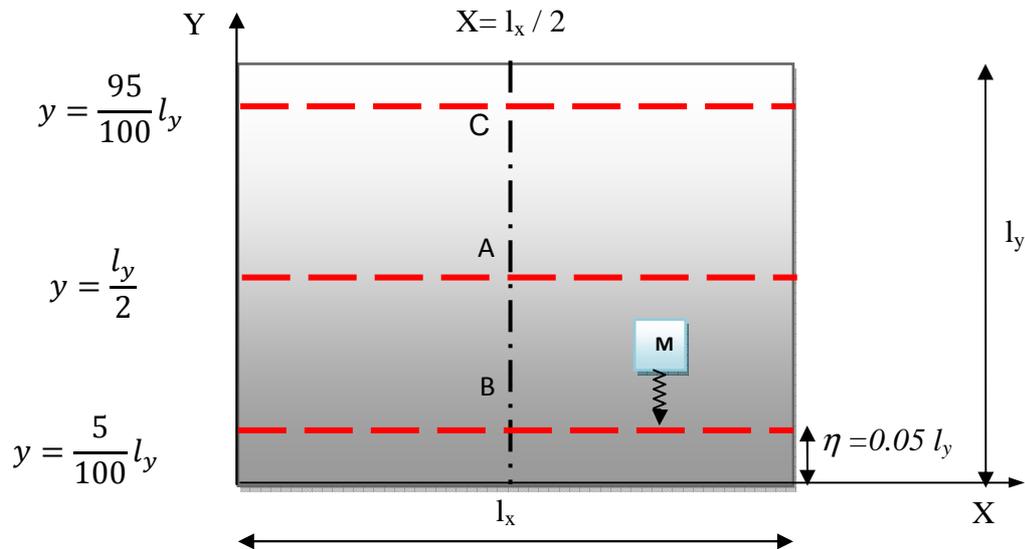


Figure -5.5- Représentation des points d'étude de la plaque sous une charge excentrée

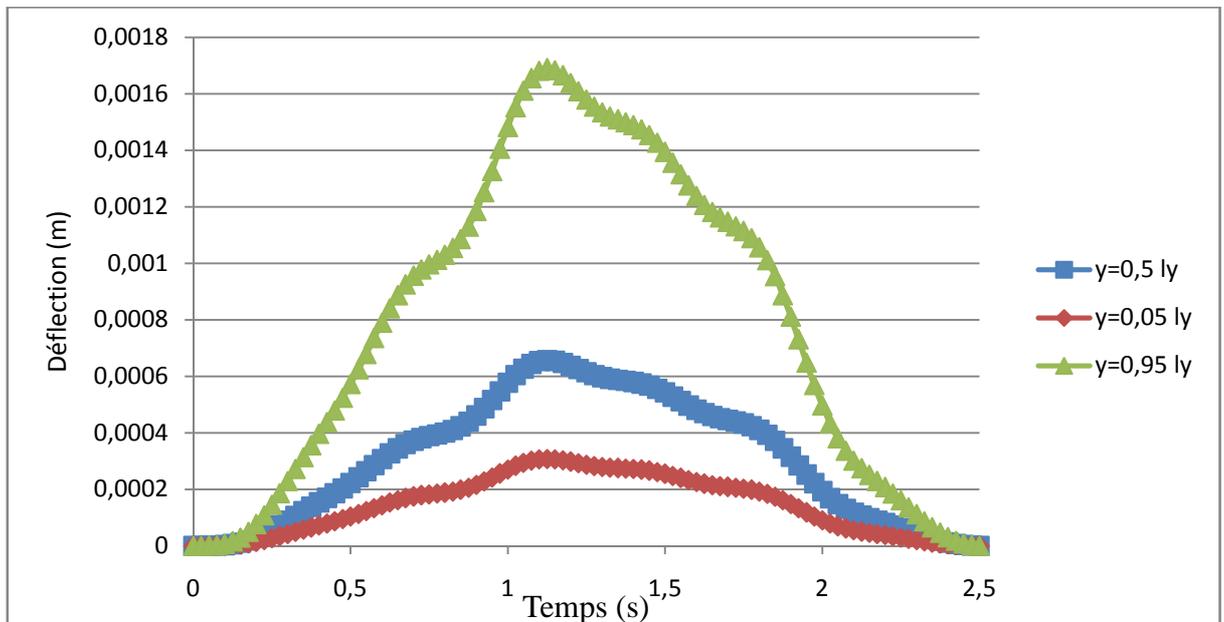


Figure – 5.6 - Déflexion d'une plaque isotrope soumise à une charge excentrée

La déformation au cours de temps au point critique (point au bord chargé de la plaque) est moins importante que les points A et C éloignés de la ligne de chargement

(figure 5. 4) et ceci s'explique par le fait qu'ayant soumis la plaque à une charge excentrée, la participation du deuxième mode transversal devient importante dans la réponse de la plaque.

Nous remarquons que plus nous nous éloignons de la ligne de chargement plus l'amplitude de la déflexion augmente (tableau 5.2). Ce qui confirme la remarque faite dans le cas d'une charge centrée.

Tableau 5.2: Déflexions de la dalle isotrope sous une charge excentrée

	x	y	$\eta$	Déflexion (m)
A	$lx/2$	$ly/2$	$0.05 ly$	6.58E-04
B	$lx/2$	$0.05 ly$	$0.05 ly$	3.07E-04
C	$lx/2$	$0.95 ly$	$0.05 ly$	1.69E-03

### 5.5. Résultats obtenues pour une plaque orthotrope

Dans le cas d'une plaque orthotrope, les caractéristiques du modèle étudié sont:

Caractéristiques du tablier du pont:

$$\frac{l_y}{l_x} = 1$$

$$D_{xx} = 7.6 E 10 \text{ kg m}$$

$$D_{yy} = 3.8 E 10 \text{ kg m}$$

$$D_{xy} = 1.9 E 10 \text{ kg m}$$

$$D_{ss} = 1.9 E 10 \text{ kg m}$$

$$\nu_{xy} = 0.3$$

$$\omega_{11} = 9.631 \text{ rd/s}$$

$$\omega_{12} = 16.134 \text{ rd/s}$$

$$\mu = 312.5 \text{ kg m}^{-2}$$

Caractéristiques de l'oscillateur:

$$M = 5 E 04 \text{ kg}$$

$$v = 20 \text{ m/s}$$

$$k = 2 E 06 \text{ N/m}$$

Comme pour le cas précédent, nous avons tracé la déflexion de tablier du pont pour une charge mobile centrée et une charge mobile excentrée.

### 5.5.1. Charge centrée

$A \left( x = \frac{lx}{2}, y = \frac{ly}{2} \right)$  correspond à un point critique sous la ligne de chargement

$B \left( x = \frac{lx}{2}, y = 0.05 ly \right)$  correspond à un point excentré

$C \left( x = \frac{lx}{2}, y = 0.95 ly \right)$  correspond à un point excentré

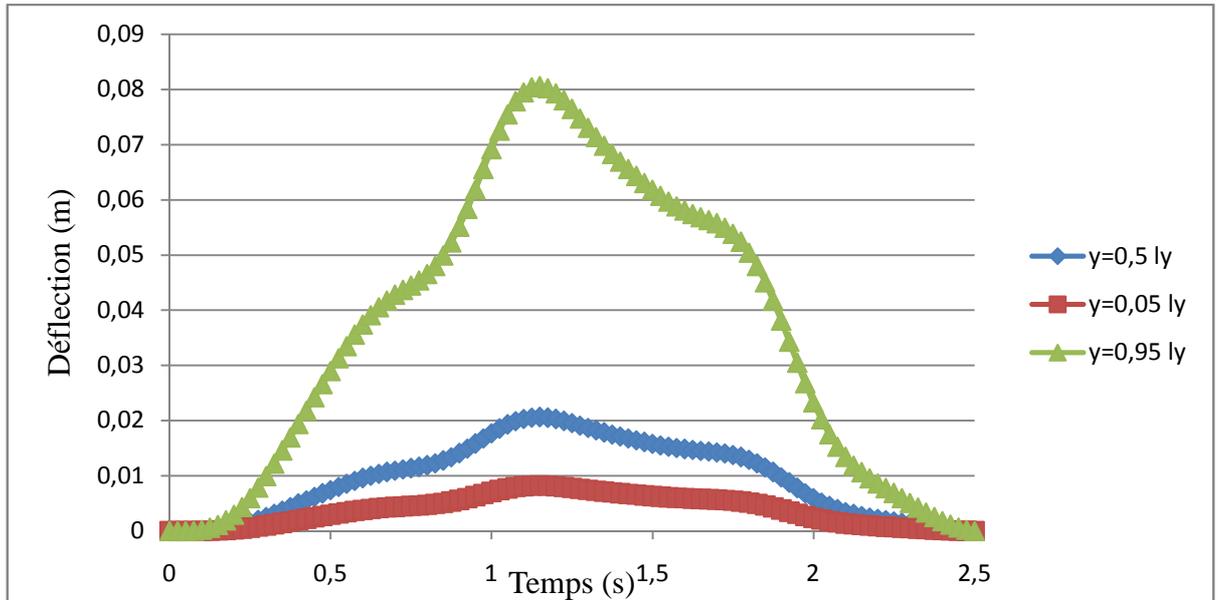


Figure – 5.7 – Déflexion d'une plaque orthotrope soumise à une charge centrée

Nous pouvons remarquer que la déflexion de la plaque orthotrope ne varie pas dans le même sens que pour la plaque isotrope où les points B et C symétriques par rapport à l'axe de la plaque (confondu avec la ligne de chargement) ne subissent pas la même déformation. Ceci est dû à la participation des modes de torsion. Le tableau 5.3 donne l'amplitude de la déflexion dans chaque point.

Tableau 5.3: Déflexions de la dalle orthotrope sous une charge centrée

	x	y	$\eta$	Déflexion (m)
A	$lx/2$	$ly/2$	$ly/2$	2.1E-02
B	$lx/2$	$5/100 ly$	$ly/2$	8.2E-03
C	$lx/2$	$0.95 ly$	$ly/2$	8.0E-02

### 5.5.2. Charge excentrée

$B \left( x = \frac{lx}{2}, y = 0.05 ly \right)$  correspond à un point critique sous la ligne de chargement

$A \left( x = \frac{lx}{2}, y = \frac{ly}{2} \right)$  correspond à un point de la ligne médiane

$C \left( x = \frac{lx}{2}, y = 0.95 ly \right)$  correspond à un point du bord opposé au bord chargé (point excentré)

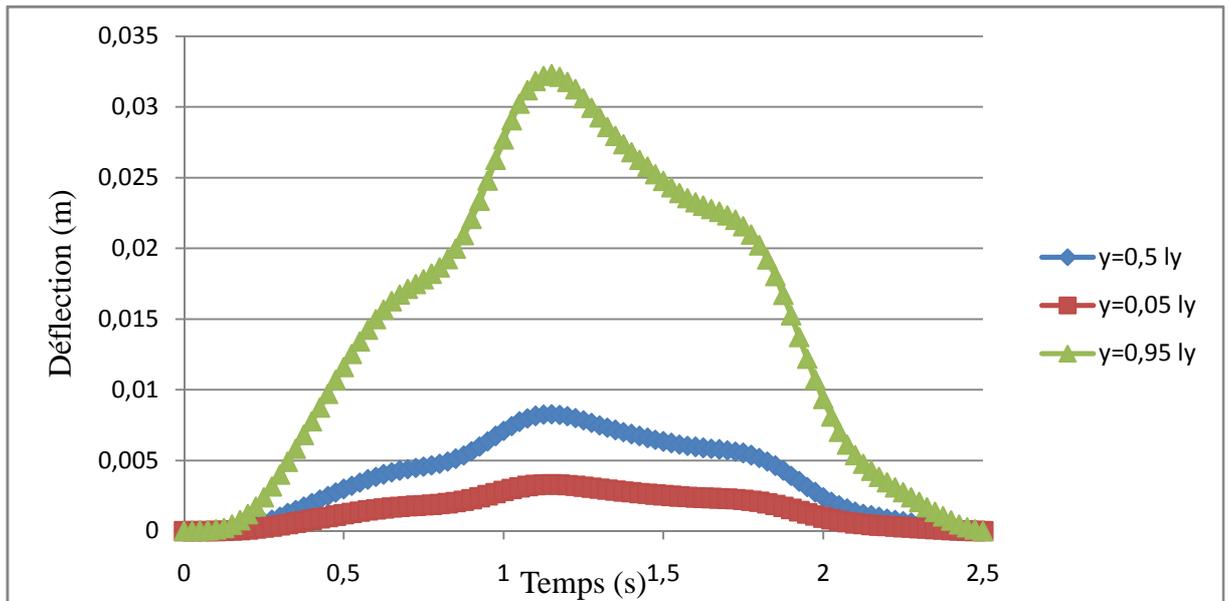


Figure – 5.8 – Déflexion d'une plaque orthotrope soumise une charge excentrée

La déformation au cours de temps aux points A et C (points éloignés de la ligne de chargement) est plus importante qu'au point critique (point B) (figure 5.6).

La remarque faite pour la plaque isotrope soumise à une charge mobile excentrée est valable pour le cas d'une plaque orthotrope soumise à une charge mobile excentrée : plus nous nous éloignons de la ligne de chargement plus l'amplitude de la déflexion augmente (tableau 5.4).

Tableau 5.4: Déflexions de la dalle orthotrope sous une charge excentrée

	x	y	$\eta$	Déflexion (m)
A	$lx/2$	$ly/2$	$0.05 ly$	8.2E-03
B	$lx/2$	$0.05 ly$	$0.05 ly$	3.3E-03
C	$lx/2$	$0.95 ly$	$0.05 ly$	3.2E-02

### 5.6. Comparaison

Nous avons comparé les résultats trouvés pour les deux plaques et on les a représentés sur des graphes en histogrammes.

Ainsi sur les graphes 5. 7 et 5. 8 nous avons représenté les déflexions de chaque plaque.

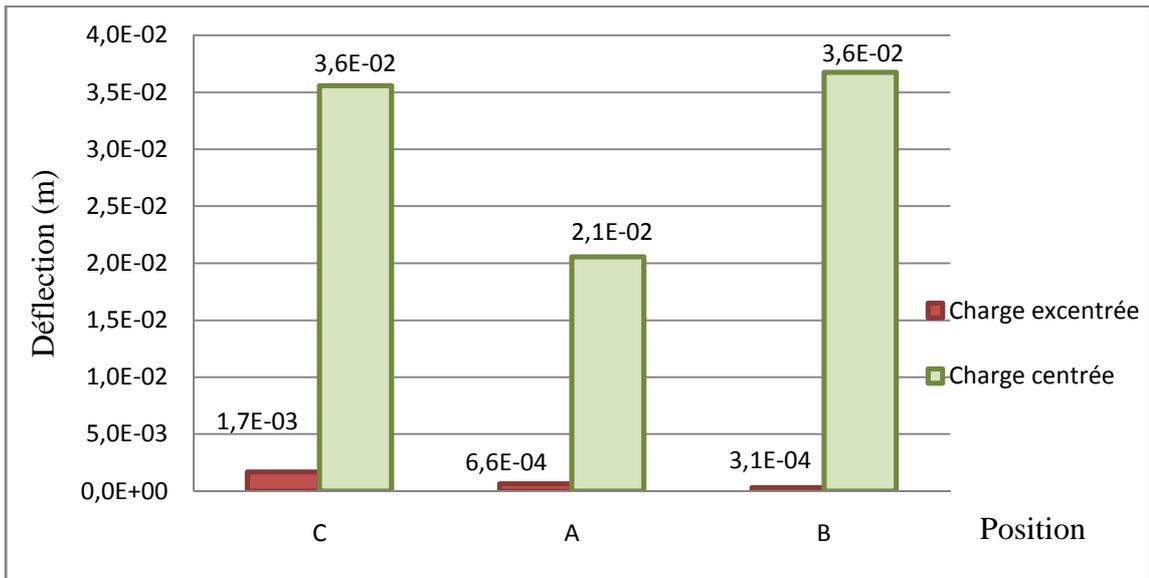


Figure – 5.9 – Déflexion d'une plaque isotrope

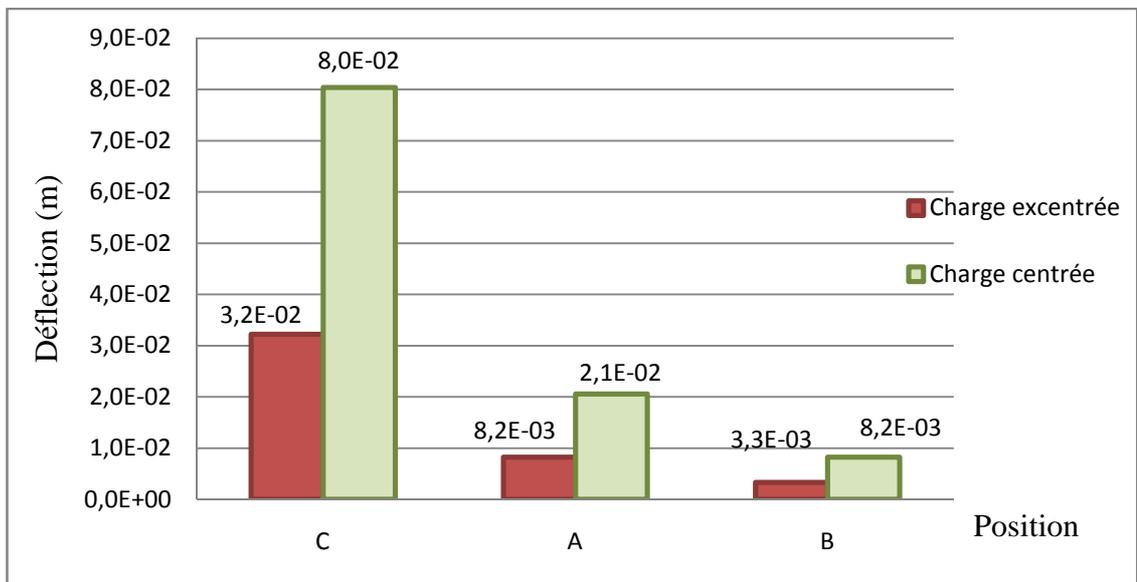


Figure – 5.10 – Déflexion d'une plaque orthotrope

On remarque que la charge centrée provoque une plus grande déflexion que la charge excentrée, ceci dans les deux cas de tabliers. De plus, pour les plaques isotropes soumises à une charge centrée, la déflexion est la même sur les deux bords symétrique de la plaque, en plus elle est plus importante que celle du milieu, contrairement aux plaques orthotropes soumises à une charge centrée où la déflexion est déférente sur les bords excentré à cause de la participation des modes de torsion.

Nous avons aussi regardé les déflexions par rapport à la position du chargement (figures 5.9 et 5.8)

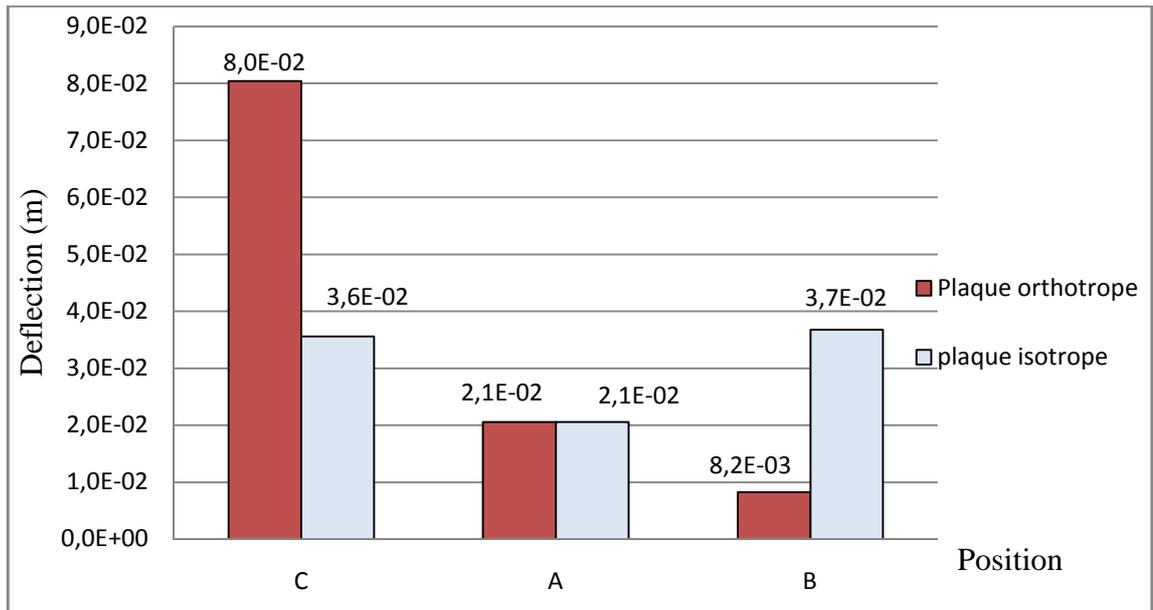


Figure – 5.11 – Déflexion d'une plaque soumise à une charge centrée

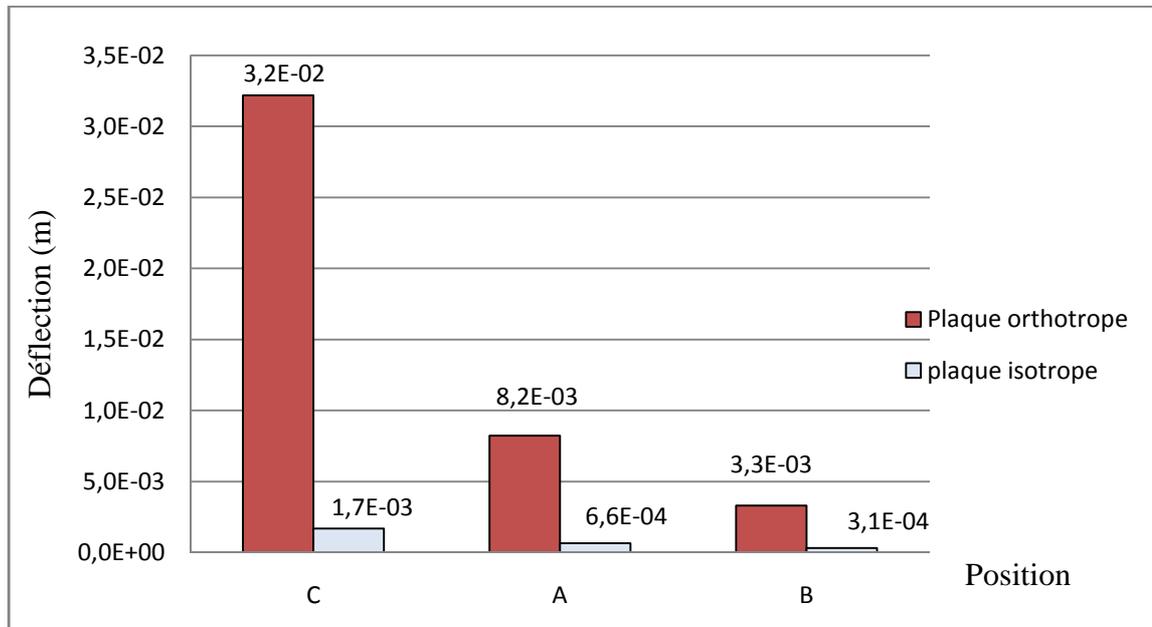


Figure – 5.12 – Déflexion d'une plaque soumise à une charge excentrée

Nous constatons que les déflexions sont plus importantes dans le cas du tablier orthotrope par rapport au tablier isotrope. De plus, dans le cas d'une charge excentrée, la déflexion est plus importante pour les points éloignés de la ligne de chargement pour les deux types de plaques où les points non chargés peuvent être soumis à des amplifications très importantes de la déformée.

### 5.7. Conclusion

En analysant les résultats présentés dans cette partie, nous pouvons dire que, dans les plaques isotropes, la déflexion est faible aux points qui se trouvent sur la ligne de chargement par rapport à ceux des bords non chargés de la plaque.

Par contre dans les plaques orthotropes, la déflexion est très importante sous un chargement centré.

La déflexion est plus importante dans la plaque orthotrope, ceci est dû à la participation du deuxième mode transversal, dont l'influence devient importante dans la réponse de la plaque.

## CONCLUSION

Les ponts sont des ouvrages permettant le passage d'un bord à un autre et facilitant le trafic de tout genre de transport entre deux bords.

Actuellement, le monde en général donne plus d'importance à la construction des ponts vu leur grande participation dans le développement économique. En Algérie par exemple, le projet de réalisation de l'autoroute Est-Ouest sur 1216 km comporte 390 ouvrages d'art, ce qui va permettre de réduire la distance et d'avoir des axes allongés favorisant ainsi la circulation.

Le passage des véhicules engendre des déformations qui endommagent le tablier du pont et provoquer des sérieux dégâts qui peuvent aller jusqu'à la rupture de l'ouvrage ou tout de moins l'arrêt de son service. La ruine d'un pont peut induire à des pertes économiques et sociales considérables.

Notre travail s'inscrit dans ce cadre et tend à déterminer les déflexions engendré par le passage d'un véhicule sur un tablier isotrope puis sur un tablier orthotrope.

Pour atteindre un cet objectif, la modélisation bidimensionnelle du tablier nous a permet de prendre en compte l'effet de la flexion transversale dans la réponse du pont. Nous avons donc considéré pour cette étude deux plaques, la première est isotrope la seconde orthotrope.

Dans le but de déterminer les déflexions des deux types de tabliers des ponts étudiés, nous avons élaboré des programmes FORTRAN en se basant sur le développement des équations mathématiques décrivant le comportement des plaques isotropes puis orthotropes sous un chargement roulant.

Les résultats trouvés ont montré que, dans le cas d'une charge excentrée, la déflexion est plus importante pour les points éloignés de la ligne de chargement pour les deux types de plaques où les points non chargés peuvent être soumis à des amplifications très importantes de la déformée. La déflexion est plus importante dans la plaque orthotrope ceci est dû à la participation du deuxième mode transversal qui devient importante dans la réponse de la plaque.

Les plaques isotropes présentent l'avantage de leur mise en place facile mais elles sont de portées limitées, c'est pourquoi les plaques orthotropes sont largement utilisées,

elles permettent d'avoir des travées plus grandes reposant sur des piles espacées et donc des ponts qui peuvent traverser des obstacles plus importants.

La présente étude est une contribution à la compréhension du phénomène de déflexion sous une charge roulante sur des tabliers isotropes et orthotropes. Néanmoins, beaucoup de questions restent posées comme par exemple :

Quelle est l'influence d'un convoi de véhicule sur la déflexion?

Quelle est l'influence de la vitesse, poids et raideur du véhicule sur le pont?

Quelle est l'influence du freinage sur un pont?

Toutes ces questions et d'autres feront certainement l'objet d'études futures que nous espérons entreprendre prochainement.

## ANNEXE A

## LISTE DES SYMBOLES ET DES ABRÉVIATIONS

- $D$  : Rigidité à la flexion de la plaque
- $D_t$  : La rigidité de la plaque à la torsion
- $D_{xx}$  : La rigidité de la plaque à la flexion dans le sens xx
- $D_{xy}$  : La rigidité couplée de la plaque
- $D_{yy}$  : La rigidité de la plaque à la flexion dans le sens yy
- $E$  : Module de Young de la plaque
- $E_x$  : Modules de Young de la plaque dans la direction x
- $E_y$  : Modules de Young de la plaque dans la direction y
- $G_{xy}$  : Module de cisaillement
- $P(t)$  : La charge dynamique appliquée au pont
- $W(x,y,t)$  : Déflexion verticale de la plaque au point avec les coordonnées (x , y) à l'instant t.
- $h$  : Épaisseur de la plaque
- $p(x,y,t)$  : Charge externe par unité de surface de la plaque
- $\eta$  : Excentricité de la charge mobile
- $\mu$  : Masse de la plaque par unité de surface de la plaque
- $\nu$  : Coefficient de Poisson
- $\nu_{xy}$  et  $\nu_{yx}$  : Coefficients orthotropes de Poisson
- $\omega_{(i,j)}$  : La pulsation propre de la plaque pour le mode (i,j).

## ANNEXE B

### DÉTERMINATION DES RÉACTIONS D'APPUI DES POUTRES SUR UNE ENTRETOISE

Dans un cas général, nous avons  $n$  poutres inégales et inégalement espacées numérotées de 1 à  $n$ . Prenons 0 comme origine sur l'entretoise :

$y_i$  : l'abscisse de la poutre  $i$

$I_i$  : son moment d'inertie

$e$  : l'abscisse d'une charge  $P$  appliquée à l'entretoise

$R_i$  : la réaction de l'entretoise sur la poutre  $i$ .

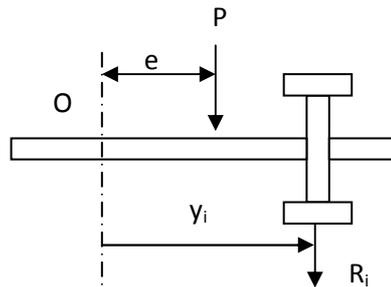


Figure –B.1- Réaction de l'entretoise sur la poutre  $i$

Les réactions étant considérées comme positives lorsqu'elles sont dirigées dans la direction de la charge, nous pouvons écrire les équations d'équilibre :

$$P + \sum_{i=1}^n R_i \quad (B.1)$$

$$Pe + \sum_{i=1}^n R_i y_i = 0 \quad (B.2)$$

Soit  $V_i$  la flèche de la poutre  $i$  au droit de l'entretoise étudiée. Comme les entretoises sont considérées comme indéformables, les flèches  $V_i$  et les abscisses  $y_i$  sont reliées par une relation linéaire.

Il en est de même pour  $\frac{R_i}{I_i}$  qui est proportionnel à  $V_i$  et  $y_i$

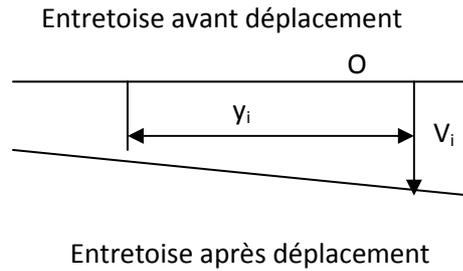


Figure B.2 : Déplacement de l'entretroise

Ainsi  $R_i = I_i(\alpha + \beta y_i)$  et les équations d'équilibre nous donnent

$$P + \alpha \sum I_i + \beta \sum y_i I_i = 0 \quad (\text{B.3})$$

$$Pe + \alpha \sum y_i I_i + \beta \sum y_i^2 I_i = 0 \quad (\text{B.4})$$

Fixons maintenant l'origine des  $y_i$  comme étant la solution de  $\sum y_i I_i = 0$ , Remarquons que si l'ensemble des poutres admet un axe de symétrie vertical, l'origine des  $y_i$  se trouve sur cet axe. Nous obtenons alors :

$$\alpha = -\frac{P}{\sum I_i} \quad \text{et} \quad \beta = -\frac{Pe}{\sum y_i^2 I_i} \quad (\text{B.5})$$

On en déduit :

$$R_i = -\frac{P I_i}{\sum I_i} \Delta_i \quad \text{en posant} \quad \Delta_i = 1 + \frac{\sum I_i}{\sum y_i^2 I_i} y_i e \quad (\text{B.6})$$

Si nous nous intéressons maintenant à un cas simple où les poutres sont identiques et également espacées, nous obtenons :

$$I_i = I$$

$$y_i = -\frac{n+1-2i}{2} \lambda$$

avec :  $\lambda$  l'espacement entre deux poutres voisines. Les appuis étant numérotés de la gauche vers la droite.

On obtient donc :

$$\sum y_i^2 I_i = \lambda^2 I \left[ \sum \frac{(n+1)^2}{4} - (n+1) \sum i + \sum i^2 \right] \quad (\text{B.7})$$

Compte tenu que :  $\sum i = \frac{n(n+1)}{2}$  et que :  $\sum i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Il vient :

$$\sum y_i^2 I_i = \lambda^2 I \frac{n(n^2+1)}{6} \quad (\text{B.8})$$

Nous obtenons alors :  $R_i = -\frac{P}{n} \Delta_i$  et  $\Delta_i = 1 - 6 \frac{n+1-2i}{n^2-1} \left( \frac{e}{\lambda} \right)$

Lorsque les charges P sont appliquées sur l'entretoise, les effets dans une section, (moments fléchissants, efforts tranchants, flèches) que l'on calculerait dans la poutre i en supposant une répartition des charges proportionnelle aux moments d'inertie des poutres, sont multipliés par un coefficient d'excentricité  $\Delta_i$  donné ci-dessus. Il faut noter que cette règle ne s'applique qu'aux entretoises intermédiaires, non appuyées.

## ANNEXE C

GÉNÉRALISATION DANS LE CAS D'UN PONT MULTI POUTRE À  
ENTRETOISES RIGIDES

Considérons un pont multipoutre solidarisé par des entretoises rigides (et non plus une seule). Nous supposons que les poutres principales du pont sont parallèles entre elles, de longueur identique  $L$ , soumises aux mêmes liaisons poutre / entretoise et qu'elles possèdent des inerties proportionnelles, tel que le rapport entre deux inerties successives soit constant. Les poutres seront dirigées suivant l'axe des  $x$ , indicées  $i$  de 1 à  $n$ . Perpendiculairement à ces poutres, et suivant l'axe  $y$ , nous disposerons des entretoises numérotées  $j$  de 1 à  $N$ , de longueur constante 1. Les nœuds de liaisons seront notés  $A_i^j$ . L'origine des  $x$  se situe sur l'appui de gauche des poutres principales.

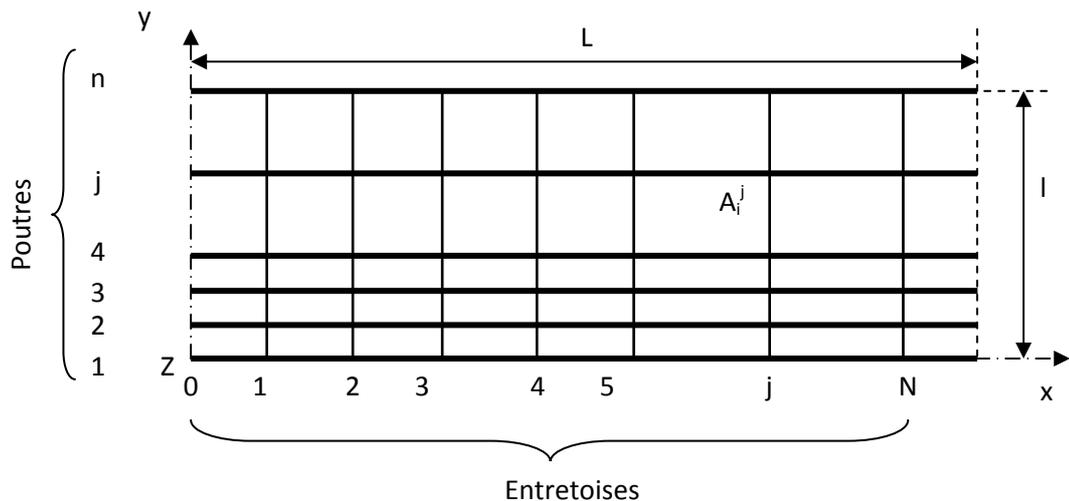


Figure –C.1- Grillage de poutre

Pour calculer les efforts, il est nécessaire de remplacer une charge  $P$  s'appliquant sur une poutre à une abscisse  $\alpha_p$ , par un système de charges équivalentes  $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$  appliquées aux points d'intersections de la poutre et des entretoises.

Pour une poutre nous avons la distribution de charges suivante :

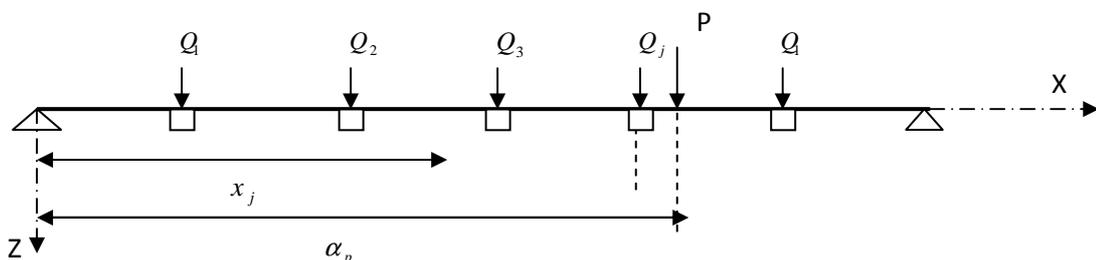


Figure –C.2- Distribution des charges sur une poutre

Pour déterminer la répartition des charges équivalentes, nous écrivons qu'en un point de coordonnée  $x$ , la flèche créée par la charge  $P$  appliquée en un point de coordonnée  $\alpha_p$  est égale à la somme de 1 à  $N$  des flèches créées par les charges équivalentes  $Q_j$  appliquées aux points de coordonnées  $x_j$ . Ce qui se traduit par l'équation :

$$Q_1 K_x^{x_1} + Q_2 K_x^{x_2} + \dots + Q_j K_x^{x_j} + Q_N K_x^{x_N} \quad (\text{C.1})$$

$$\sum_{j=1}^N (Q_j K_x^{x_j}) = P K_x^{\alpha_p} \quad (\text{C.2})$$

Nous calculerons les charges équivalentes  $Q_j$  en écrivant cette équation en chaque point d'intersection poutre/entretoise, et en résolvant le système de  $N$  équations linéaires à  $N$  inconnues qui en découlent  $K_x^{x_j} = K_x^x$ , désignant la flèche prise par la poutre simplement appuyée, supposée non liée aux entretoises, dans la section d'abscisse  $y$ , sous l'action de la seule charge d'unité appliquée dans la section d'abscisse  $x$ .

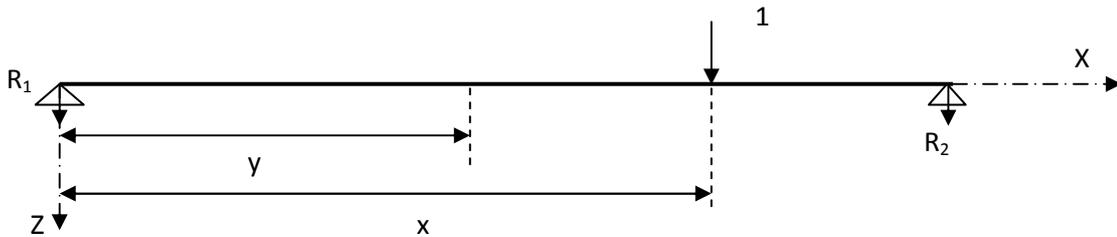


Figure –C.3- Charge appliquée en  $x$

La flèche  $K_x^y$  de la poutre (de module de Young  $E$ , d'inertie  $I$  et de longueur  $L$ ) a pour expression :

$$\text{Pour } y < x : K_x^y = \frac{-I}{EI} \left[ \frac{L-x}{6L} y^3 + \left( \frac{-x^3}{6L} + \frac{x^2}{2} - \frac{Lx}{3} \right) y \right] \quad (\text{C.3.a})$$

$$\text{Pour } y > x : K_x^y = \frac{-I}{EI} \left[ \left( \frac{Ly^2}{2} - \frac{y^3}{6} \right) \frac{x}{L} + \left( \frac{-x^3}{6L} - \frac{Lx}{3} \right) y + \frac{x^3}{6} \right] \quad (\text{C.3.b})$$

Pour calculer les charges équivalentes de la poutre chargée, en chacun des appuis poutre / entretoise, nous résolvons le système matriciel suivant en calculant  $K_x^y$  pour une charge unité :

$$\begin{pmatrix} K_{x_1}^{x_1} & K_{x_1}^{x_2} & \dots & K_{x_1}^{x_j} & \dots & K_{x_1}^{x_N} \\ K_{x_2}^{x_1} & K_{x_2}^{x_2} & \dots & K_{x_2}^{x_j} & \dots & K_{x_2}^{x_N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{x_j}^{x_1} & K_{x_j}^{x_2} & \dots & K_{x_j}^{x_j} & \dots & K_{x_j}^{x_N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{x_N}^{x_1} & K_{x_N}^{x_2} & \dots & K_{x_N}^{x_j} & \dots & K_{x_N}^{x_N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \dots \\ Q_j \\ \dots \\ Q_N \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} K_{x_1}^{\alpha_p} \\ K_{x_2}^{\alpha_p} \\ \dots \\ K_{x_j}^{\alpha_p} \\ \dots \\ K_{x_N}^{\alpha_p} \end{pmatrix} \quad (\text{C.4})$$

Les charges équivalentes  $Q_i$  sont alors connues et la théorie des poutres peut alors s'appliquer aisément pour obtenir les efforts tranchants, les moments et les flèches des poutres.

## ANNEXE D

### MÉTHODE DU GRILLAGE DE POUTRES ET DE LA DALLE ORTHOTROPE

#### Principe de la méthode et hypothèses

Cette méthode vise à déterminer les efforts transisant dans un grillage de poutres soumis à un chargement quelconque, ponctuel ou réparti. Le système dalle-poutre discret est remplacé par un système uniforme composé d'une dalle anisotrope ou orthotrope ayant des caractéristiques constantes suivant chacun de ses axes transversal et longitudinal. Ce passage d'une répartition discrète de la rigidité, à une répartition continue, est l'hypothèse principale sur laquelle repose cette méthode. La deuxième hypothèse consiste à admettre que le coefficient de Poisson du matériau constitutif est nul. Cette hypothèse est plus ou moins contestable, mais, dans la mesure où le but de la méthode est de déterminer la répartition des efforts dans les différentes parties de la structure et où les variations de ces efforts ne sont pas très importantes, l'erreur qui en résulte peut être considérée comme négligeable.

Le réseau de poutres est assimilé à une dalle orthotrope possédant deux bords libres (selon Ox) et deux bords simplement appuyés (selon Oy). La méthode s'appuie sur la résolution approchée de l'équation différentielle d'un grillage simple constitué, dans le sens des y, de n poutres espacées de  $b_0$ , et de N entretoises, dans les sens des x, espacées de  $l_0$ . Cette équation est équivalente à celle d'une plaque orthotrope :

$$q_p \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (\gamma_p + \gamma_E) \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial x^2} + q_E \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y) \quad (D.1)$$

dont :

$q_p$  : rigidité flexionnelle des poutres, répartie par unité de longueur.

$q_E$  : rigidité flexionnelle des entretoises, répartie par unité de longueur.

$\gamma_p$  : rigidité torsionnelle des poutres, répartie par unité de longueur.

$\gamma_E$  : rigidité torsionnelle des entretoises, répartie par unité de longueur.

$w$  : déformée de la dalle.

$P(x,y)$  : chargement de la dalle.

La résolution analytique directe de cette équation conduit à des calculs compliqués et peu

pratiques à mettre en œuvre. La méthode de Massonnet permet de s'affranchir de cette difficulté en utilisant une méthode approximative basée sur les coefficients de répartition.

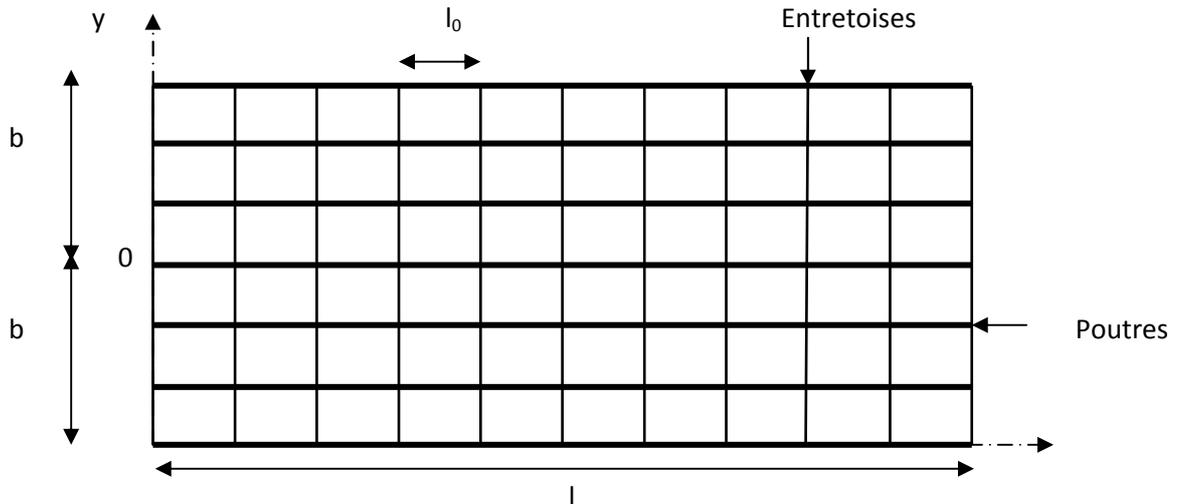


Figure -D.1- Grillage de poutre

La construction réelle est remplacée par une dalle orthotrope présentant les mêmes rigidités moyennes de flexion et de torsion. La répartition réelle du chargement est remplacée par celle qui naît sous une charge répartie le long de l'axe X de la construction et d'excentrement e. Une fois la distribution transversale déterminée dans la plaque orthotrope, les autres calculs obéissent aux règles ordinaires de l'équilibre des forces et des moments.

### Les deux paramètres fondamentaux

Deux paramètres fondamentaux caractérisent l'ouvrage calculé. Le premier:  $\vartheta$ , est le paramètre d'entretoisement. Il détermine la souplesse de l'entretoisement. Plus  $\vartheta$  est grand, plus souple est l'entretoisement.

$$\vartheta = \frac{b}{l} \sqrt[4]{\frac{q_p}{q_E}} \quad (\text{D.2})$$

Le deuxième:  $\alpha$ , est le paramètre de torsion. Il caractérise la résistance à la torsion de l'ouvrage.

$$\alpha = \frac{\gamma_p + \gamma_E}{2 \cdot \sqrt{q_p \cdot q_E}} \quad (\text{D.3})$$

Ces deux paramètres sans dimension sont très importants car ils conditionnent la détermination de tous les coefficients de répartition transversales.

Le paramètre d'entretoisement se calcule facilement car:  $q_p = \frac{E_p \cdot I_p}{b_0}$  et  $q_E = \frac{E_E \cdot I_E}{l_0}$

Par contre, le paramètre de torsion impose le calcul des rigidités de torsion, généralement difficile à évaluer, de sorte que nous devons utiliser des hypothèses simplificatrices pour obtenir une valeur approchée de  $\alpha$ . Heureusement, le paramètre de torsion prend une expression particulièrement simple dans le cas d'une construction mixte. En effet, nous pouvons admettre que la rigidité propre de torsion des poutrelles métalliques est négligeable et assimiler par conséquent le pont à une plaque dont les rigidités à la flexion dans les deux sens  $q_p$  et  $q_E$  sont celles de la dalle isotrope en béton majorées dans les rapports :

$$\pi = \frac{q_p}{D} \text{ et } \varepsilon = \frac{q_E}{D} \text{ avec } D = \frac{E_d e_d^3}{12}$$

(  $E_d$  est le module de Young et  $e_d$  la hauteur de la dalle en béton). on obtient pour un

pont mixte :  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}}$

### **Les coefficients de répartition transversale**

L'étude analytique d'un grand nombre de cas a permis à Massonnet de déterminer des coefficients de répartition transversale  $K$  en fonction des deux paramètres fondamentaux. Ces coefficients sont définis dans des tables pour les deux valeurs extrêmes  $\alpha = 0$  et  $\alpha = 1$ . Des formules d'interpolation permettent de déterminer  $K$  pour la valeur de  $\alpha$  réelle. Chaque type d'effort (moments, efforts tranchants, etc) fait intervenir un coefficient de répartition transversale des charges différent. Ce dernier est alors multiplié par le moment moyen pour obtenir le moment fléchissant existant dans une poutre déterminée. Le moment moyen correspond au moment de flexion de la poutre seule sous la charge et appuyée à ses extrémités. La répartition transversale des charges étant connue, l'étude du pont se poursuit par les méthodes ordinaires de la stabilité des constructions.

## ANNEXE E

### MODÉLISATION TRIDIMENSIONNELLE

#### Résultats expérimentaux

La figure 01 valide clairement la modélisation de Zhou. Une loi de comportement non-linéaire du béton est utilisée afin de considérer sa fissuration. Cependant le modèle béton utilisé converge difficilement et la charge maximale expérimentale n'a pas pu être atteinte. A partir d'une charge de 25 kN, le calcul diverge, probablement à cause de la définition de la charge appliquée. En effet, cette dernière est une charge ponctuelle, appliquée à un nœud au centre de l'ouvrage. Cette charge très localisée conduit probablement à un poinçonnement du béton et à une forte localisation des déformées plastiques sous la charge. De plus, ce chargement ne peut s'apparenter à celui d'un camion (au moins trois essieux donc six points d'impact). Il aurait été préférable de charger l'ouvrage par une charge plus diffuse, plus proche de la réalité, et qui assurerait une meilleure convergence numérique du calcul.

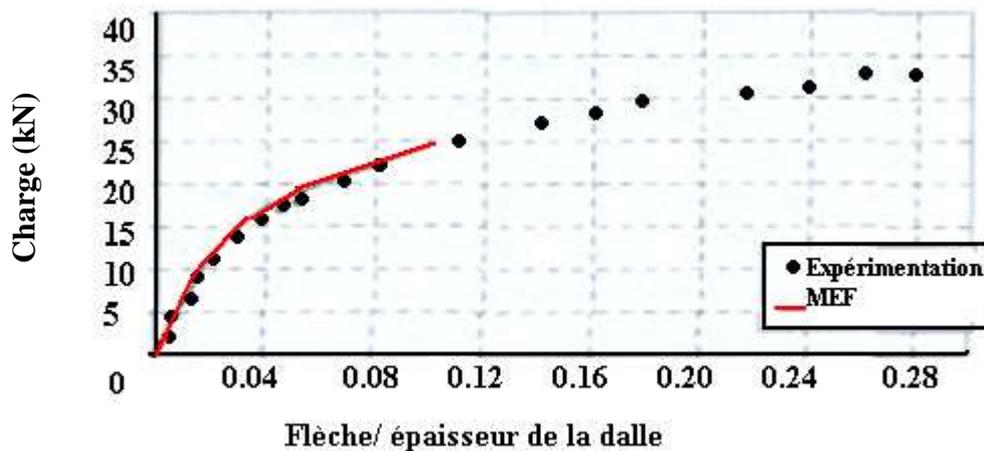


Figure –E.1- Comparaison expérience et numérique [15]

Quatre entretoises relient les quatre poutres du pont étudié dont deux sont positionnées sur appuis. Comme Tedesco et al., Zhou et al. modélisent les entretoises à l'aide d'éléments barres à deux nœuds formant deux diagonales entre les poutres. Certes la raideur des entretoises est mieux approchée que précédemment car les semelles inférieures et supérieures des poutres sont la base des diagonales. Mais l'âme des poutres n'est pas rigidifiée ; chaque âme des poutres est alors libre de fléchir transversalement. Des éléments supplémentaires représentant les montants des poutres pourraient palier facilement à ce manque de raideur. Comme toujours, les auteurs concluent que l'impact du diaphragme est très faible pour un chargement réduit du pont. Cependant pour des charges proches de

l'ultime, l'entretoise permet de réduire la fissuration de la dalle et la flèche globale de l'ouvrage de 30%.

## ANNEXE F

### THÉORIE DE MINDLIN

Lorsque l'épaisseur de la plaque ne permet plus de vérifier les hypothèses de Kirchhoff quant à leur mouvement de flexion (i.e. elle n'est plus très petite devant les dimensions des ondes de flexion), une théorie plus complète basée sur celle des poutres de Timoshenko est nécessaire. Rayleigh en 1877 puis Timoshenko en 1921 montrent que la prise en compte des effets d'inertie de rotation et de cisaillement affecte les fréquences propres de flexion des poutres. Ces deux effets tendent à diminuer les fréquences de résonances calculées en raison de la croissance de l'inertie et de la flexibilité du système [17].

Une extension à la théorie d'une plaque quant au cisaillement est proposée par Reissner en 1945 dans le cas statique. Une première théorie pour le cas dynamique, incluant les effets du cisaillement et de l'inertie de rotation est proposée par Uflyand en 1948. C'est cependant l'article de Mindlin, publié 3 ans plus tard qui fera date [17].

#### ❖ Hypothèses

Les hypothèses de Mindlin, reprennent les points 1 et 4 de celles de Kirchhoff (chapitre 2 §2.2.1). Les points 2 et 3 des précédentes hypothèses ne sont plus retenus afin de prendre en compte les deux nouveaux effets.

#### ❖ Champs de déplacement

Dans la théorie d'une plaque de Reissner-Mindlin [17], les composantes des champs de déplacement sont définies comme (figure F.1) :

$$u(x, y, t) = u_0(x, y, t) - z\psi_x(x, y, t) \quad (\text{F.1.a})$$

$$v(x, y, t) = v_0(x, y, t) - z\psi_y(x, y, t) \quad (\text{F.1.b})$$

$$w(x, y, t) = w_0(x, y, t) - z\psi_z(x, y, t) \quad (\text{F.1.c})$$

$\psi_x(x, y, t)$  et  $\psi_y(x, y, t)$  sont les inconnues du problème de vibration.

$\psi_x(x, y, t)$  et  $\psi_y(x, y, t)$  peuvent être interprétés comme des rotations autour des axes  $x$  et  $y$ .

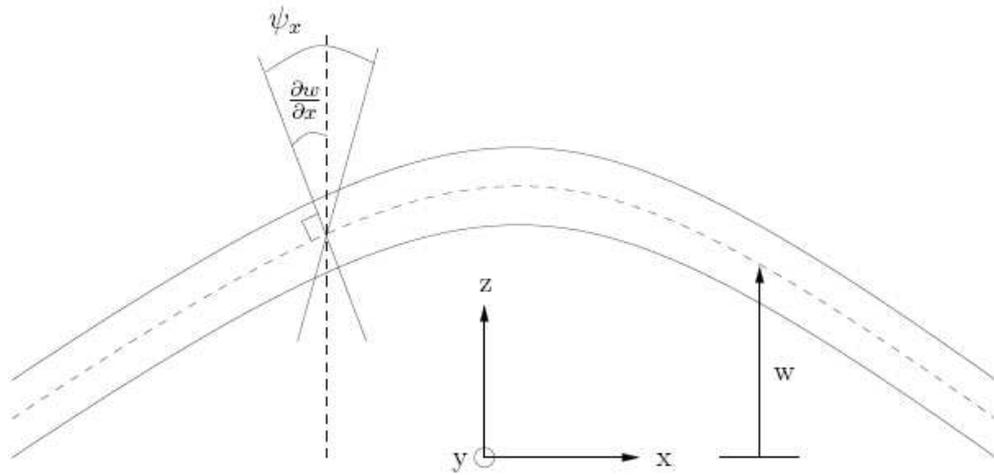


Figure – F.1- Schéma des déplacements pour la théorie des plaques de

Contrairement à la théorie de Love-Kirchhoff, dans la théorie de Mindlin, les conditions aux limites sur les surfaces d'une plaque ne sont plus respectées :

$$\sigma_{xz} = \rho \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \Psi_x \right) \neq 0 \quad (\text{F.2.a})$$

$$\sigma_{yz} = \rho \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \Psi_y \right) \neq 0 \quad (\text{F.2.b})$$

Pour compenser l'erreur commise, Mindlin fait introduire un nouveau coefficient de cisaillement  $\mu'$  qui est déterminé en comparant les résultats théoriques et expérimentaux dans les cas particuliers de plaques où les solutions exactes sont connues, c'est-à-dire, une plaque avec au moins deux côtés simplement appuyée comme conditions aux limites. L'élimination de  $\Psi_x(x, y, t)$  et  $\Psi_y(x, y, t)$  entre les équations d'équilibre et la loi de Hooke donne l'équation différentielle de Mindlin sous la forme :

$$\left( \Delta^2 - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \cdot \left( D \Delta^2 - \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{F.3})$$

Nous remarquons que pour E grand et h petite, nous nous retrouvons dans l'équation (2.3) de Love-Kirchhoff. La théorie de Mindlin permet la modélisation des ponts par plaques épaisses.

Comme nous l'avons déjà cité au par avant, il existe d'autres théories 'raffinées' de plaques qui consiste à développer par rapport à z les déplacements u, v et w sous la forme de séries de Taylor. Selon l'ordre de développement auquel nous nous arrêtons, nous aurons une théorie d'ordre n. La théorie de Mindlin est d'ordre 1.

## RÉFÉRENCES

- [1] : Microsoft® Encarta®2006. “ Pont (structure) ”. [CD. ROM] Microsoft corporation, 2005.
- [2] : J.- A Calgaro et R. Lacroix, “Maintenance et réparation des ponts”, presse de l'école nationale des ponts et chaussées, Paris, 1997.
- [3] : <http://www.lefildutemps.free.fr/pontprimitif>
- [4] : <http://www.tripalbum.net/album5/photo198>
- [5] : David Benette, “Les ponts histoire et techniques”, édition Eyrolles, 1998.
- [6] : <http://www.membres.lycos.fr/pontstpe/haubans.htm>
- [7] : <http://www.vtom.voyages.free.fr/venise/images/rialto.jpg>
- [8] : <http://www.vtom.voyages.free.fr/venise/images/soupirs.jpg>
- [9] : <http://www.mcfarlandolson.com/photoPlates/pont2.html>
- [10] : International Iron. and Steel Institute, “L'art des ouvrages”, 1998.
- [11] : <http://www.mcfarlandolson.com>
- [12] : Ministère des travaux public, “les travaux publics en Algérie histoire et perspectives”, 2005.
- [13] : [http:// www.el-djazair.info.com](http://www.el-djazair.info.com)
- [14] : [http://www.fr.wikipedia.org/wiki/Pont\\_de\\_Normandie](http://www.fr.wikipedia.org/wiki/Pont_de_Normandie)
- [15] : Yannick Sieffert, “L’entretoisement des ponts mixtes multipoutres ferroviaires”, thèse de doctorat : INSA de Lyon, 2004.
- [16]: Houman Kamalzadeh, “modélisation 2D du comportement pont-véhicule”, thèse de DEA : Institut National des Sciences et Techniques Nucléaires (INSTN), paris, 1996.
- [17]: Luc Jaouen, “Vibrations de flexion des plaques”, Rapport: université de Sherbrooke, 2002
- [18]: Roberto Lopez-Anido et Hota V.S. Ganga Rao, “macroapproch closed-form series solution for orthotropic plates”, ASCE. ISSN, journal of structural engineering, vol. 121.No.3, march 1995.

[19]: Ladislav Fryba, “vibration of solids and structures under moving loads”, Noordhoff, International publishing, Groningen, 1972.

[20]: M. Mace, “La construction navale en composites”, IFREMER Actes de colloques n° 15, communication n° 19 Paris, 7-9 décembre 1992.

[21]: Rachid Lassoued, “Modélisation analytique de structures unidimensionnelles et bidimensionnelle sous charges mobiles”, thèse de doctorat : Université Mentouri, Constantine, 2007.

[22]: S. P. Timoshenko et D. H. Young, “Theory of structures”, McGraw-Hill, New York, 1965.