

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE BLIDA

INSTITUT DE MECANIQUE

## MEMOIRE DE MAGISTERE

Présenté par : MAHIEDDINE Ali

POUR L'OBTENTION DU DIPLOME DE  
MAGISTERE EN GENIE MECANIQUE

Option : construction

Thème

Les effets de la piézoélectricité et de l'amortissement  
structural sur le contrôle des vibrations des poutres

Devant le jury :

Président	N. E. BACHA	Maître de conférences	U. Blida
Examineur	B. NECIB	Professeur	U. Constantine
	A. AIAD	Maître de conférences	U. Blida
Rapporteur	M. OUALI	Maître de conférences	U. Blida

Algérie 2002



## Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein de l'institut de mécanique de l'Université de Blida sous la direction et la responsabilité scientifique du Docteur M. OUALI, Maître de conférences à l'Université de Blida.

Je tiens à remercier particulièrement le Docteur M. OUALI, pour l'attention avec laquelle il a suivi ce travail. Je salue également ses compétences scientifiques et ses qualités humaines.

Je remercie le Docteur N. E. BACHA, Maître de conférences à l'Université de Blida, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de cette thèse.

Je remercie également le Professeur B. NECIB, professeur à l'Université de Constantine, ainsi que le Docteur A. AIAD, Maître de conférences à l'Université de Blida, pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à ce travail en acceptant aussi de participer au jury.

Je ne saurais clore ces remerciements sans en adresser à mes parents, ma sœur et Sihem.

## ملخص

الهدف الرئيسي من هذا البحث هو دراسة تأثير التخماد الداخلي للمواد في حالة الأعمدة مع قطع بيزو كهربائية.

يأخذ بعين الاعتبار تأثير القص و التشويه الجانبي الذي يعمل في اغلب الأحيان في النماذج الاصطلاحية للأعمدة.

طريقة العناصر المنتهية مبنية على نظرية كيرشوف استعملت لدراسة الأعمدة بشروط حدودية مختلفة.

بالموازات مع دراسة تأثير التخماد الداخلي، عناصر أخرى كطول و سمك القطعة البيزو كهربائية تمت دراستها.

## RESUME

Le but de ce mémoire concerne l'étude et l'analyse de l'influence de l'amortissement structural dans le cas des poutres avec des actionneurs et capteurs piézoélectriques.

Il est pris en considération les effets du cisailèment et des déformations latérales qui sont souvent négligées dans les modèles conventionnels de poutres.

Une formulation par éléments finis basée sur la théorie de Kirchoff est utilisée pour l'étude des poutres avec différentes conditions aux limites.

Parallèlement à l'étude de l'influence de l'amortissement interne, d'autres paramètres tels que la longueur et l'épaisseur de la pièce piézoélectrique sont examinés.

## ABSTRACT

The main object of this thesis is the study and analysis of the influence of internal damping in the case of beams with piezoelectric actuators and sensors.

This study accounts the effects of shear deformations and lateral strains which are often neglected in conventional models

Finite elements formulation based on Kirchoff theory is utilised for the study of beams with different boundary conditions.

Parallel to the study of the influence of internal damping, others parameters are investigated such as the length and the thickness of the piezoelectric patch.

**Chapitre IV : Introduction de l'amortissement structural**

4.1. Introduction .....	30
4.2. Energie de dissipation .....	30
4.3. Equation du contour de la boucle d'hystérésis .....	32
4.4. Equivalence entre amortissement visqueux et amortissement d'hystérésis .....	34
4.4.1. Amortissement visqueux .....	34
4.4.2. Amortissement structural.....	35
4.5. Détermination du coefficient d'amortissement .....	37

**Chapitre V : Approche numérique**

<b>5.1. Modélisation par éléments finis .....</b>	<b>40</b>
5.1.1. Introduction.....	40
5.1.2. Choix de l'élément .....	40
5.1.3. Détermination des matrices de rigidité et de masse élémentaires .....	42
5.1.3.1. Calcul de la matrice masse élémentaire.....	42
5.1.3.2. Calcul de la matrice rigidité élémentaire .....	43
5.1.4. Calcul du vecteur charge élémentaire des forces extérieures.....	44
5.1.4.1. Détermination du vecteur charge équivalent .....	45
5.1.5. Processus d'assemblage .....	46
<b>5.2. Méthode de résolution.....</b>	<b>48</b>
5.2.1. Introduction.....	48
5.2.2. Description de la méthode de Newmark .....	49
<b>5.3. Programmation .....</b>	<b>54</b>
5.3.1. Introduction.....	54
5.3.2. Présentation du programme de calcul .....	54
5.3.2.1. Introduction des données .....	55
5.3.2.2. Calcul des matrices masse et rigidité élémentaires .....	59
5.3.2.3. Calcul du vecteur charge élémentaire .....	60

5.3.2.4. Assemblage des matrices masse et rigidité et du vecteur charge	.61
5.3.2.5. Introduction des coefficients de l'amortissement structural.....	62
5.3.2.6. Introduction des conditions aux limites.....	63
5.3.2.7. Affichage des résultats.....	64

**Chapitre VI : Résultats et interprétations**

6.1. Introduction .....	65
6.2. Validation du programme.....	65
6.3. Influence de l'amortissement structural.....	68
6.4. Influence de l'effet piézoélectrique .....	74
6.5. Influence de la longueur de la pièce piézoélectrique.....	80
6.6. Influence de l'épaisseur de la pièce piézoélectrique.....	86

<b>Conclusion.....</b>	<b>92</b>
------------------------	-----------

**Références**

**Annexe A : Caractéristiques des PZT**

**Annexe B : Présentation delphi**

**Annexe C : Communication ; Ouali M., Mahieddine A., "Influence de l'amortissement structural dans le cas des poutres avec des éléments piézoélectriques" ; Séminaire international de génie mécanique SIGMA'02 – ENSET Oran**

## Liste des figures

Figure 2.1 : Principe d'un dispositif de contrôle actif par anticipation.....	9
Figure 2.2 : Principe de base d'un dispositif de contrôle actif par feedback.....	10
Figure 2.3 : Principe de casque de protection auditive actif.....	11
Figure 2.4 : Bras de satellite équipé d'un dispositif de contrôle actif de vibrations .....	12
Figure 2.5 : Dispositif de contrôle actif de vibrations d'une aile d'avion.....	12
Figure 2.6 : Contrôle actif du rayonnement acoustique d'un transformateur.....	13
Figure 2.7 : Cycle de fabrication des céramiques PZT par voie solide.....	15
Figure 3.1 : Schéma de la ligne moyenne et de la section droite.....	17
Figure 3.2 : Schéma d'une poutre droite .....	18
Figure 3.3 : Rotation de la section droite.....	19
Figure 3.4 : Déformation d'un point M de la section droite.....	20
Figure 3.5 : Eléments piézoélectriques collés à une poutre.....	22
Figure 3.6 : Numérotation des directions en notation tensorielle condensée .....	23
Figure 4.1 : Cycle d'hystérésis.....	31
Figure 4.2 : Détermination de la constante $\lambda$ .....	38
Figure 5.1 : Élément (e) de la poutre.....	41
Figure 5.2 : (a) charge répartie (b) charge équivalente .....	44
Figure 6.1 : Algorithme de la méthode de Newmark.....	52
Figure 5.3.1 : Nouvelle application .....	55
Figure 5.3.2 : Choix du type de section.....	56
Figure 5.3.3 : Fenêtre d'introduction des dimensions.....	56
Figure 5.3.4 : Fenêtre des caractéristiques du matériau .....	57
Figure 5.3.5 : Fenêtre des caractéristiques de la pièce piézoélectrique.....	58
Figure 5.3.6 : Fenêtre d'introduction des charges réparties .....	58

Figure 5.3.7 : Fenêtre d'introduction des charges ponctuelles .....	59
Figure 5.3.8 : Matrice masse élémentaire .....	59
Figure 5.3.9 : Matrice rigidité élémentaire .....	60
Figure 5.3.10 : Vecteur charge élémentaire .....	60
Figure 5.3.11 : Matrice masse globale.....	61
Figure 5.3.12 : Matrice rigidité globale.....	61
Figure 5.3.13 : Vecteur charge global .....	62
Figure 5.3.14 : Introduction des coefficients de l'amortissement structural .....	62
Figure 5.3.15 : Introduction des conditions aux limites .....	63
Figure 5.3.16 : Affichage des résultats .....	64
Figure 6.1 : Déplacement $w[m]$ .....	67

### **Influence de l'amortissement structural**

Figure 6.2.a : Déplacement $w[m]$ en fonction du nombre d'éléments Poutre encastree – libre.....	69
Figure 6.2.b : Rotation $\psi$ [rad] en fonction du nombre d'éléments Poutre encastree – libre.....	69
Figure 6.3.a : Déplacement $w[m]$ en fonction du nombre d'éléments Poutre encastree – encastree .....	70
Figure 6.3.b : Rotation $\psi$ [rad] en fonction du nombre d'éléments Poutre encastree – encastree .....	70
Figure 6.4.a : Déplacement $w[m]$ en fonction du nombre d'éléments Poutre appuyee – appuyee .....	71
Figure 6.4.b : Rotation $\psi$ [rad] en fonction du nombre d'éléments Poutre appuyee – appuyee .....	71
Figure 6.5.a : Déplacement $w[m]$ en fonction du nombre d'éléments Poutre encastree – appuyee.....	72
Figure 6.5.b : Rotation $\psi$ [rad] en fonction du nombre d'éléments Poutre encastree – appuyee.....	72

**Influence de l'effet piézoélectrique**

Figure 6.6.a : Déplacement  $w$ [m] en fonction du nombre d'éléments  
     Poutre encastree – libre.....75

Figure 6.6.b : Rotation  $\psi$  [rad] en fonction du nombre d'éléments  
     Poutre encastree – libre.....75

Figure 6.7.a : Déplacement  $w$ [m] en fonction du nombre d'éléments  
     Poutre encastree – encastree .....76

Figure 6.7.b : Rotation  $\psi$  [rad] en fonction du nombre d'éléments  
     Poutre encastree – encastree .....76

Figure 6.8.a : Déplacement  $w$ [m] en fonction du nombre d'éléments  
     Poutre appuyée – appuyée .....77

Figure 6.8.b : Rotation  $\psi$  [rad] en fonction du nombre d'éléments  
     Poutre appuyée – appuyée .....77

Figure 6.9.a : Déplacement  $w$ [m] en fonction du nombre d'éléments  
     Poutre encastree – appuyée.....78

Figure 6.9.b : Rotation  $\psi$  [rad] en fonction du nombre d'éléments  
     Poutre encastree – appuyée.....78

**Influence de la longueur de la pièce piézoélectrique**

Figure 6.10.a : Déplacement  $w$ [m] en fonction du nombre d'éléments  
     Poutre encastree – libre.....81

Figure 6.10.b : Rotation  $\psi$  [rad] en fonction du nombre d'éléments  
     Poutre encastree – libre.....81

Figure 6.11.a : Déplacement  $w$ [m] en fonction du nombre d'éléments  
     Poutre encastree – encastree .....82

Figure 6.11.b : Rotation  $\psi$  [rad] en fonction du nombre d'éléments  
     Poutre encastree – encastree .....82

Figure 6.12.a : Déplacement  $w$ [m] en fonction du nombre d'éléments  
     Poutre appuyée – appuyée .....83



Figure 6.12.b : Rotation $\psi$ [rad] en fonction du nombre d'éléments	
Poutre appuyée – appuyée .....	83
Figure 6.13.a : Déplacement $w$ [m] en fonction du nombre d'éléments	
Poutre encastree – appuyée.....	84
Figure 6.13.b : Rotation $\psi$ [rad] en fonction du nombre d'éléments	
Poutre encastree – appuyée.....	84
<b>Influence de l'épaisseur de la pièce piézoélectrique</b>	
Figure 6.14.a : Déplacement $w$ [m] en fonction du nombre d'éléments	
Poutre encastree – libre.....	87
Figure 6.14.b : Rotation $\psi$ [rad] en fonction du nombre d'éléments	
Poutre encastree – libre.....	87
Figure 6.15.a : Déplacement $w$ [m] en fonction du nombre d'éléments	
Poutre encastree – encastree .....	88
Figure 6.15.b : Rotation $\psi$ [rad] en fonction du nombre d'éléments	
Poutre encastree – encastree .....	88
Figure 6.16.a : Déplacement $w$ [m] en fonction du nombre d'éléments	
Poutre appuyée – appuyée .....	89
Figure 6.16.b : Rotation $\psi$ [rad] en fonction du nombre d'éléments	
Poutre appuyée – appuyée .....	89
Figure 6.17.a : Déplacement $w$ [m] en fonction du nombre d'éléments	
Poutre encastree – appuyée.....	90
Figure 6.17.b : Rotation $\psi$ [rad] en fonction du nombre d'éléments	
Poutre encastree – appuyée.....	90

## Liste des tableaux

Tableau 3.1 : Définition et dimension des termes.....	24
Tableau 4.1 : Sources d'amortissement – Fréquence caractéristique .....	35
Tableau 5.2.1 : Valeurs de $\gamma$ et $\beta$ pour quelques méthodes .....	48
Tableau 6.1 : Validation du programme ; déplacement $w[m]$ .....	66

## Nomenclature

$A$	Section de la poutre
$b$	Largeur de la poutre
$b_p$	Largeur de la pièce piézoélectrique
$c$	Coefficient d'amortissement visqueux
$c_{eq}$	Amortissement équivalent
$[C_G]$	Matrice d'amortissement
$D$	Induction
$d$	Constante de charge
$dW$	Travail des forces non potentielles
$E$	Module d'élasticité
$e$	Constante piézoélectrique
$E_D$	Energie dissipée par cycle
$E_i$	Champ électrique
$F_D$	Force dissipée par cycle
$\{F\}$	Vecteur charge élémentaire
$\{F_G\}$	Vecteur charge global
$\{F_p\}$	Vecteur dû à l'élément piézoélectrique
$g$	Constante de tension
$h$	Epaisseur de la poutre
$h_p$	Epaisseur de la pièce piézoélectrique
$K$	Facteur de correction
$[K]$	Matrice rigidité élémentaire
$[K_G]$	Matrice rigidité globale
$L$	Longueur de la poutre
$l$	Longueur de l'élément
$L_p$	Longueur de la pièce piézoélectrique
$[M]$	Matrice masse élémentaire

$[M_G]$	Matrice masse globale
$N$	Nombre d'éléments
$(O,x,y,z)$	Repère global orthonormé
$Q$	Raideur
$\{q\}$	Vecteur coordonnées généralisées
$s$	Souplesse
$T$	Energie cinétique
$U$	Energie de déformation
$u$	Déplacement suivant la direction x
$v$	Déplacement suivant la direction y
$w$	Déplacement suivant la direction z
$\beta$	Angle de cisaillement
$\bar{\beta}$	impermeabilité diélectrique
$\Delta W$	Surface de la boucle d'hystérésis
$\varepsilon$	déformation relative
$\bar{\varepsilon}$	Permittivité
$\lambda$	Coefficient d'amortissement structural
$\rho$	Masse volumique
$\sigma$	Contrainte
$\omega$	Pulsation d'excitation
$\psi$	Rotation autour de l'axe Oy

# CHAPITRE I

## INTRODUCTION

## INTRODUCTION

Les améliorations des propriétés d'amortissement des vibrations sont nécessaires et souvent exigées dans plusieurs domaines de la science et de la technologie dans le but d'atteindre des conditions de confort et de sécurité optimales [1]. De ce fait et pour satisfaire aux exigences élevées d'obtention de hautes performances pour les diverses structures, la conception et le contrôle des structures élastiques par des matériaux piézoélectriques fait l'objet de plusieurs mémoires, thèses et d'un nombre considérable de travaux de recherche ces dernières années [2, 32, 33, 39]. Le principe des techniques dites actives est de générer un champ interférant avec le champ de la perturbation. Le champ superposé doit donc être identique à celui de la perturbation en terme d'amplitude mais de phase opposée pour chacune des fréquences concernées.

Né dans les années trente, le contrôle actif ne s'est vraiment développé qu'avec l'avènement des processeurs de signaux digitaux dans les années quatre-vingt. Si quelques applications de cette technologie existent, beaucoup sont en développement, notamment dans le secteur spatial, l'avionique et l'automobile. Si on s'intéresse spécifiquement au contrôle actif des vibrations, les progrès sont encore plus récents. En effet, les encombrements et masses supplémentaires apportés par les capteurs et actionneurs nécessaires au contrôle actif de vibrations ont freiné le développement de nombreuses applications. Ce n'est que récemment, depuis une dizaine d'années, que l'utilisation de transducteurs à base de matériaux piézoélectriques a permis de toucher à des applications jusqu'alors interdites. Par leur faible encombrement, leur poids réduit et leur aptitude à la conversion électromécanique, les matériaux piézoélectriques montrent effectivement toutes les qualités requises pour une utilisation dans le cadre d'un contrôle actif de vibrations. En outre, ils peuvent être employés pour constituer aussi bien les actionneurs électromécaniques que les capteurs de vibrations d'un dispositif.

H. S. Tzou et M. Gadre [3] ont présenté une étude théorique et expérimentale d'une technique active d'isolation des vibrations en utilisant des matériaux piézoélectriques. Ils ont remarqué que les résultats théoriques et expérimentaux montrent que l'atténuation des vibrations est une fonction linéaire du voltage d'excitation à une fréquence constante et une fonction quadratique de la fréquence à un voltage d'excitation constant.

E. F. Crawley et E. H. Luis [4] ont utilisé les matériaux piézoélectriques comme structures intelligentes. Des modèles analytiques, statique et dynamique sont proposés pour des actionneurs piézoélectriques. Ces modèles sont alors utilisés pour prédire la réponse et le placement optimal de l'actionneur.

Un modèle proposé par Hagood et Von Flotow [5] décrit la capacité d'amortissement des matériaux piézoélectriques. Il est basé sur la variation de la rigidité du matériau piézoélectrique. Le modèle proposé a donné une meilleure compréhension de la capacité d'amortissement du matériau.

M. C. Brennan [6] a développé un modèle analytique pour le contrôle des vibrations. Des tests expérimentaux sont faits pour valider le modèle proposé. Il est montré que la conception piézoélectrique est essentiellement une fonction des propriétés géométriques des actionneurs piézoélectriques.

S. M. Peelamedu, A. R. Barnett, R. V. Dukkipati et N. G. Naganathan [7] proposent un schéma de solution numérique basé sur la méthode des éléments finis pour analyser les déformations et le potentiel à travers les matériaux piézoélectriques sujets à une charge statique externe. Les résultats obtenus sont en excellente concordance avec ceux déjà publiés.

B. K. Taleghani, J. F. Campbell [8] ont développé un modèle non linéaire en éléments finis pour prédire les vibrations des actionneurs piézoélectriques. Les résultats obtenus sont validés analytiquement par l'approximation de Von Karmen. Ces résultats sont également comparés avec des résultats expérimentaux [8].

B. K. Taleghani [9] a développé et évalué deux modèles d'éléments finis, l'un utilisant l'analogie thermique et l'autre utilisant la capacité piézoélectrique

pour prédire les déformations des actionneurs piézoélectriques. Les modèles obtenus ont donné des résultats concordant avec ceux des expériences.

J. Wojciechowski, T Szuster, J. Pietrucha [10] ont soumis une partie de l'extrados d'un profil d'aile laminaire à des vibrations forcées de fréquence connue au moyen d'actionneurs piézoélectriques. L'expérience conduite en soufflerie montre une réduction significative de la traînée de profil pour une gamme d'angles d'attaque et de nombres de Reynolds.

G.L. Wojcil et D.K. Vaughan [11] ont présenté une alternative pour un algorithme mixte explicite/implicite pour l'intégration directe du domaine temporel des équations électromécaniques en deux et trois dimensions. Une formulation par éléments finis est proposée. Ils ont démontré que ce modèle explicite est efficace et pratique pour l'analyse de la propagation du son dans les structures électromécaniques.

P. Beaumier, M. Costes et D. Petot [12] ont décrit les couplages entre phénomènes aérodynamiques et dynamiques qui apparaissent sur le rotor principal d'un hélicoptère et qui sont indispensables pour son fonctionnement. Ils ont démontré que la prévision de l'aérodynamique de la pale peut être grandement améliorée en utilisant une aérodynamique en 3D.

S. Biwersi, J. F. Manceau, F. Bastien [13] ont abordé les problèmes liés à la miniaturisation des moteurs ultrasonores, et plus particulièrement ceux utilisant l'excitation piézoélectrique. Divers procédés de fabrication sont présentés et ils permettent de réaliser de manière simple des moteurs piézoélectriques ultrasonores de petite taille.

H. H. Law, P. L. Possiter, G. P. Simon et L. L. Koss [14] ont étudié les caractéristiques de l'amortissement des vibrations mécaniques par des matériaux piézoélectriques. Une expérience à deux degrés de liberté est réalisée pour tester la validité du modèle proposé.

K. Shintani et S. Minagawa [15] ont traité les champs de déplacement et du potentiel électrique produit par les dislocations mobiles dans les cristaux piézoélectriques anisotropiques en utilisant la méthode des fonctions de Green.



D'après les graphes obtenus pour les contraintes, ils remarque que le contour dévie doucement d'une forme elliptique à une forme circulaire due à l'effet piézoélectrique.

I. Legrain, B. Petitjean [16] ont réalisé une étude expérimentale du comportement des matériaux piézoélectriques. L'objectif de cette étude consiste à faire une évaluation de céramiques électrostrictives en vue d'une utilisation en dynamique comme actionneurs dans des systèmes de contrôle de vibrations exploitant leur comportement non linéaire. Un modèle tenant compte des non-linéarités du matériau a pu ainsi être validé.

S. A. Wise, M. W. Hooker [17] ont décrit les caractéristiques de force, déplacement et charge de quatre matériaux piézoélectriques commercialisés. Un modèle pour des degrés de vibrations spécifiques est proposé. Les résultats de cette étude montrent que les actionneurs commercialisés répondent amplement aux nécessités d'isolation dans le domaine de l'aérospatial.

M. W. Hooker [18] a mesuré les propriétés diélectriques, ferroélectriques et piézoélectriques de trois céramiques piézoélectriques en fonction de la température. Les résultats expérimentaux de ces matériaux sont comparés. Des considérations sont données pour le choix des matériaux convenables pour l'utilisation dans des applications aérospatiales.

Z. Ounaies, J. A. Young, J. S. Harrison [19] ont présenté une étude sur l'activité piézoélectrique dans les polymères piézoélectriques amorphes. Les critères d'application des polymères piézoélectriques sont discutés. Des données mécaniques comparatives sont données en fonction de la température, ainsi qu'un sommaire de polarisation et de propriétés électromécaniques est proposé pour chaque polymère considéré.

T. Jordan, Z. Ounaies, J. Tripp et P. Tcheng [20] ont évalué les caractéristiques électriques des matériaux piézoélectriques pour l'utilisation dans les applications aéronautiques comme contrôle actif du bruit dans les avions. Un modèle électrique équivalent est proposé pour développer la relation entre les

valeurs de la capacité et ceux de la résistance. Les valeurs obtenues donnent de bonnes prédictions comparées aux valeurs mesurées.

B. T. Wang, R. A. Burdisso et C. R. Fuller [21] ont présenté une formulation du problème d'optimisation pour le placement et le dimensionnement des actionneurs piézoélectriques. A part le placement optimal, un bon dimensionnement permet d'avoir de meilleurs résultats. Cependant, il n'est pas toujours facile de trouver une configuration optimale pour les structures piézoélectriques actives parce qu'il n'est pas possible de changer la configuration quand la fréquence d'excitation change. En pratique, seulement le voltage appliqué à l'actionneur peut être changé.

V. V. Varadan, J. Kim et J. K. Varadan [22] ont étudié le placement optimal des actionneurs piézoélectriques pour réduire les radiations du son dans l'espace au-dessus d'une structure plaque quand il est excité par un champ de pression acoustique produit par une source localisée au-dessous de la plaque. La méthode des éléments finis est utilisée pour simuler la plaque piézoélectrique active. Le modèle proposé permet de diminuer les radiations du son pour un large rang de fréquences.

B. Camus, J. -L. Petitniot et H. -M. des Rochettes [23] ont fait une présentation des caractéristiques, de la disponibilité et des limitations des matériaux piézoélectriques, des actionneurs et des électroniques de commande. Ils ont traité des problèmes technologiques de braquage de volet et des vrillages de sections de profils de maquettes de pales d'hélicoptère. Ils ont exposé les développements à promouvoir pour palier aux déficiences actuelles. Ils concluent que les céramiques dures, de capacité électrique moindre, sont mieux pressenties pour réaliser des stacks et des actionneurs de puissance présentant de bonnes caractéristiques dynamiques, mais leur production dans des dimensions acceptables est encore délicate et peu fiable.

D. Sun, D. Wang et Z. L. XU [24] introduisent la méthode des segments piézoélectriques distribués pour le contrôle des poutres intelligentes. Les résultats obtenus montrent qu'avec cette méthode les capteurs/actionneurs peuvent

capter/actionner non seulement la déformation locale mais aussi la déformation totale. Il est observé aussi que le changement des modes contrôlés ne nécessite pas le changement de la forme des actionneurs et capteurs piézoélectriques dans les structures.

A partir de la théorie de Kirchoff du troisième degré pour la suppression des vibrations des poutres lamellées avec des capteurs et actionneurs piézoélectriques, K. Chandrashekhara et P. Donthireddy [25] obtiennent des résultats et les comparent avec les solutions exactes en utilisant le modèle de la poutre conventionnel.

M. Bernadou et C. Haenel [26] établissent une modélisation linéaire de coques minces piézoélectriques en utilisant une représentation de la géométrie par un ensemble de coordonnées curvilignes. Les résultats obtenus donnent des bases mathématiques solides pour aborder d'autres études comme celles des problèmes piézothermoélastiques et piézoélastodynamiques. Les résultats permettent d'aborder les problèmes liés à la contrôlabilité des structures.

S. Yang et W. Huang [27] ont obtenu, à partir des équations générales piézoélectriques basées sur l'hypothèse de Kirchoff de la théorie classique des plaques lamellées, les équations constitutives pour des capteurs/actionneurs piézoélectriques en forme de plaque. L'avantage de cette théorie est que les constantes de ces nouvelles équations peuvent être obtenues à partir de ceux des équations piézoélectriques générales.

V. Piéfort, N. Loix et A. Preumont [28] développent la théorie des plaques piézolamellées pour le contrôle des vibrations en se basant sur les plaques de Mindlin. La méthode des éléments finis est utilisée. Les équations fondamentales pour les charges piézoélectriques équivalentes sont obtenues. Différentes conditions aux limites sont examinées. Les résultats obtenus démontrent que ce modèle facilite le calcul pour les capteurs et actionneurs encastés ou collés à la structure.

Dans le travail présenté par S. Peelamedu, N. Naganathan et R. Dukkipati [29], les auteurs ont étudié le transfert des déformations dans les systèmes

piézoélectriques en utilisant la méthode des éléments finis. Les résultats obtenus pour une poutre en console sont comparés avec ceux obtenus par la méthode des différences finies et par un travail expérimental. La méthode Tagushi est utilisée pour minimiser le nombre d'analyses. Les résultats obtenus sont bien conformes et indiquent que la méthode des éléments finis est un outil efficace pour concevoir une structure avec des actionneurs et capteurs distribués.

Y. C. Lee et H. Reissman [49] ont étudié les vibrations libres et forcées des plaques rectangulaires et suite à cette étude, ils ont comparé les solutions de la réponse dynamique en utilisant la théorie d'élasticité tridimensionnelle avec la théorie de Mindlin et la théorie de Kirchoff.

J. Souletie a étudié le phénomène de l'hystérésis magnétique [50]. Il a décrit l'évolution des différents cycles d'hystérésis en fonction du champ de la température et du temps avec une référence particulière au cas des verres de spins.

R. C. Smith et Z. Ounaies [51] ont abordé la conception de l'hystérésis dans les matériaux piézoélectriques. Le modèle employé est basé sur les théorie d'hystérésis développé auparavant pour les matériaux ferroélectriques. Des algorithmes pour la détermination des paramètres estimés des matériaux sont détaillés. La précision du modèle et sa capacité de prédiction de la polarisation mesurée est illustrée à travers une comparaison avec des données expérimentales des composés PZT5A, PZT5H et PZT4.

P. M. Sain a présenté des définitions mathématiques de quatre modèles d'hystérésis pouvant décrire une large variété de phénomène d'hystéritiques [52]. A partir des résultats obtenus, il déduit que chaque modèle est capable de représenter plusieurs formes de comportement hystéritique et mathématiquement maniable pour la conception de contrôle des structures.

Un algorithme de convergence est présenté par Y. Ouled Amor, M. Féliachi et H. Mohellebi [53] pour résoudre les problèmes d'intégrations de l'hystérésis en calcul par éléments finis. L'étude des comportements magnétique



et ferromagnétique considérée dans les tests a été améliorée par cet algorithme pour confirmer la convergence à des points critiques de la boucle d'hystérésis.

Y. Ouled Amor et M. Féliachi [54] ont proposé un modèle scalaire et un autre analytique pour le cycle d'hystérésis. Ils ont ensuite réalisé une intégration par éléments finis des deux modèles. L'effet de la température dans le comportement hystérotique a été introduit. En comparant les deux modèles, les auteurs déduisent que le modèle scalaire est plus rapide, mais l'analytique est plus adéquat pour une meilleure description du comportement hystérotique

Dans une étude réalisée par Y. Ouled Amor et M. Féliachi [55], les auteurs ont présenté une modification de la fonction de Lorentz pour générer de manière plus précise des cycles d'hystérésis. Cette modification consiste à introduire deux paramètres  $a$  et  $b$  variables permettant à la fonction d'augmenter la précision du cycle généré tout en gardant ses propriétés de base. Cette précision se traduit non seulement par un meilleur suivi du cycle mais aussi par une meilleure précision dans l'évaluation de l'aire du cycle.

Le but de ce mémoire consiste en l'analyse des poutres avec des capteurs et actionneurs piézoélectriques. On propose pour l'étude des vibrations d'une poutre une formulation par éléments finis basée sur la théorie de Kirchoff du premier degré. Il est pris en considération l'amortissement structural et les déformations latérales qui sont souvent négligées dans les modèles conventionnels de poutres [25]. Des résultats numériques sont présentés pour étudier l'efficacité des capteurs et actionneurs piézoélectriques dans le contrôle actif des vibrations. De même, on analyse l'influence de l'amortissement structural dans le cas des poutres.

# CHAPITRE II

## GENERALITES

## 2.1. Contrôle actif

### 2.1.1. Principe de base

Le contrôle actif est basé sur l'interférence destructive de deux champs, sonores ou vibratoires :

Pour les sources générant ces champs, on parle respectivement de sources primaires et de sources secondaires.

- le champ primaire correspond à la perturbation qu'on cherche à atténuer,
- le champ secondaire est créé par le dispositif de contrôle.

Les principales méthodes de contrôle sont :

#### 2.1.1.1. Le contrôle par anticipation (*feedforward*)

Parmi les travaux et recherches sur le contrôle actif, on cite ceux de P. Lueg (1933) concernant le bruit dans un conduit. P. Lueg est considéré comme l'un des précurseurs dans le domaine contrôle actif. Ces travaux nécessitent un signal de référence corrélé avec la perturbation. En effet, il existe des systèmes où la perturbation est prévisible. Cela est notamment courant dans deux cas [30] :

- quand le contrôle concerne le bruit ou les vibrations émises par une machine tournante, la perturbation tend alors à être harmonique.
- quand la perturbation se propage de telle sorte qu'elle est en tout point du système fonction de sa valeur en amont.

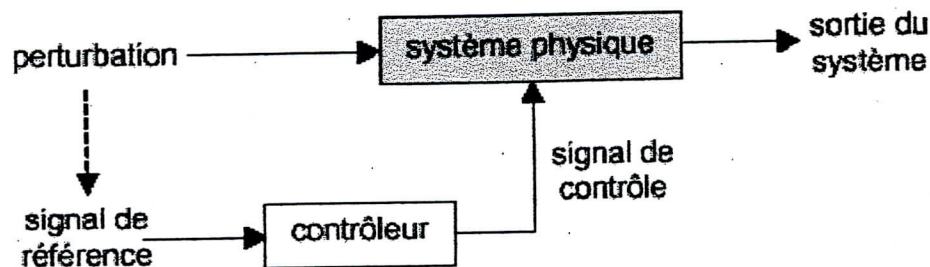


Figure 2.1 : Principe d'un dispositif de contrôle actif par anticipation.

### 2.1.1.2. Le contrôle par rétroaction (*feedback*)

Le contrôle par rétroaction (*feedback*) est développé pour la première fois par Olson et May en 1955. Il résulte uniquement du traitement d'un signal d'erreur. Ce signal d'erreur filtré par le contrôleur commande alors les actionneurs de contrôle (figure 2.2).

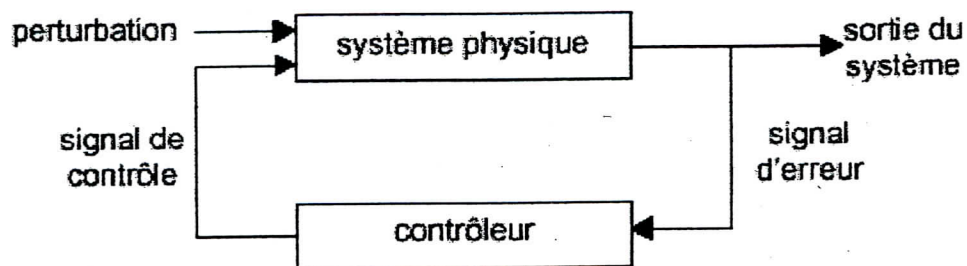


Figure 2.2 : Principe de base d'un dispositif de contrôle actif par *feedback*.

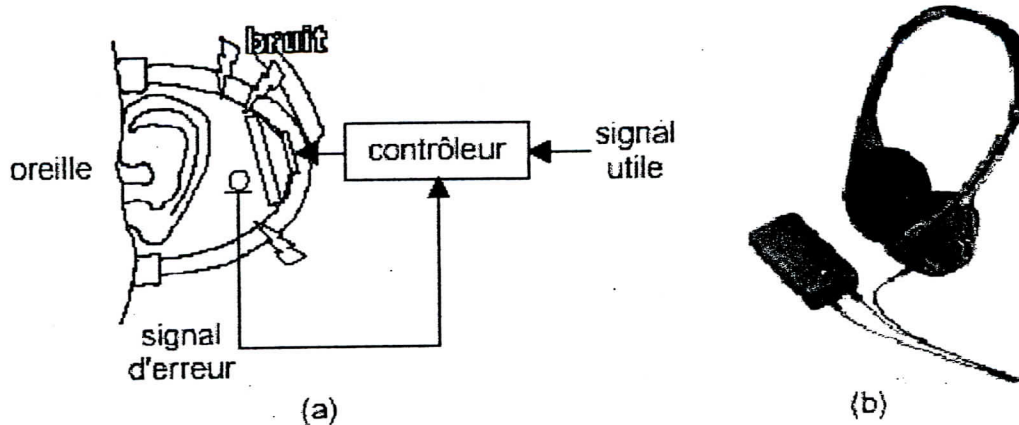
Le contrôle actif peut être considéré comme un domaine relativement récent [7,14,27]. Les progrès enregistrés au début des années quatre-vingt en traitement numérique des signaux ont relancé ce champ de recherche.

Quelques applications typiques concernant le contrôle actif du bruit ou le contrôle actif de vibrations, commercialisées ou à l'étude, sont illustrées ci-après.

#### Casque de protection auditive actif :

C'est une des premières applications du contrôle actif [34]. Les casques actifs (figure 2.3) utilisent un contrôle *feedback* ou *feedforward* leur permettant d'atténuer les bruits stationnaires de basses fréquences du type moteur d'avion, turbine...





**Figure 2.3 :** (a) Principe du casque de protection auditive actif par contrôle *feedback*.

(b) Modèle de casque actif commercialisé.

Réduction des vibrations d'un bras de satellite :

Le contrôle actif de vibrations des structures flexibles est un thème de recherche qui s'est beaucoup développé ces dernières années [35]. Beaucoup de ces travaux sont consacrés spécifiquement aux grandes structures, en vue des applications aux futures stations spatiales (figure 2.4).

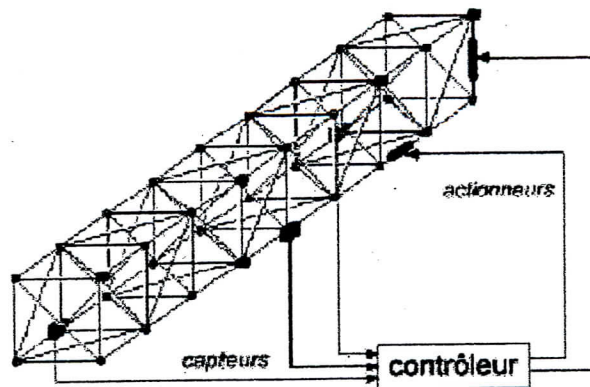


Figure 2.4 : Bras de satellite équipé d'un dispositif de contrôle actif de vibrations.

Réduction des vibrations dans les ailes d'avions :

Certains angles de vols induisent à haute vitesse des vibrations importantes en bout d'aile, fatiguant la structure [34]. Des travaux sont menés pour contrôler la flexion et la torsion en utilisant des transducteurs piézoélectriques comme capteurs et comme actionneurs (figure 2.5).

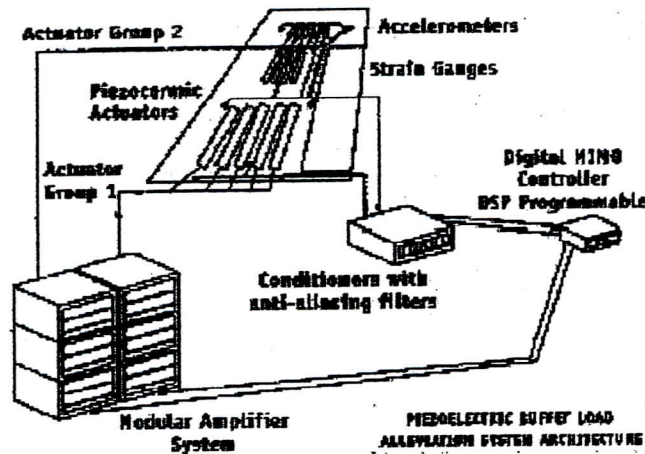


Figure 2.5 : Dispositif de contrôle actif de vibrations d'une aile d'avion.

Contrôle actif du bruit rayonné par le fuselage d'un avion :

Le fuselage engendre un bruit basses fréquences significatifs à l'intérieur de l'avion. Des dispositifs sont à l'étude pour contrôler ces modes avec un contrôle actif acoustique structural [35]. Le contrôleur est de type *feedforward*. Il utilise des microphones comme capteurs et des couches piézoélectriques couplées au fuselage comme actionneurs structuraux.

Contrôle actif du bruit émis par les transformateurs :

Le contrôle du bruit émis par les transformateurs électriques de puissance est une application typique du contrôle actif. Des dispositifs basés sur un contrôleur *feedforward* sont réalisés afin d'atténuer le bruit [32]. L'installation illustrée (figure 2.6) utilise des actionneurs piézoélectriques en jonction avec des microphones d'erreur.

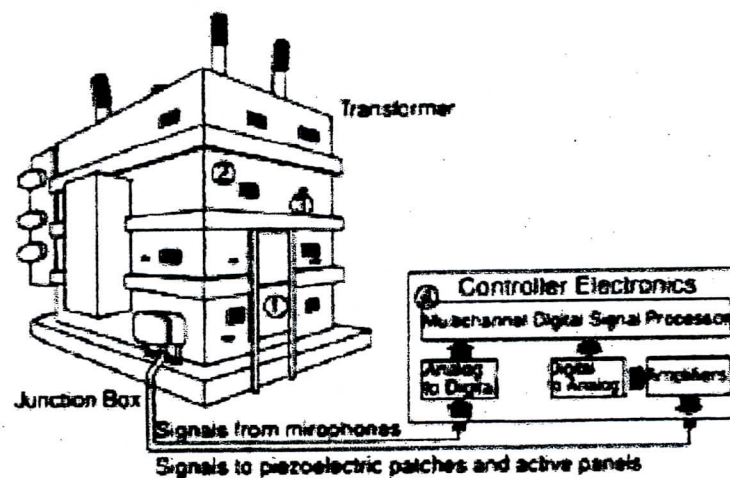


Figure 2.6 : Contrôle actif du rayonnement acoustique d'un transformateur.

## 2.2. L'effet piézoélectrique

La piézoélectricité est une interaction électromécanique : les matériaux piézoélectriques sont des diélectriques qui se déforment sous l'effet d'un champ électrique et qui produisent une polarisation sous l'effet de déformations.

La piézoélectricité a été découverte en 1880 par Pierre et Jacques Curie sur le quartz, bien que la première observation qualitative de cette propriété ait été faite par Hauy en 1817 [36]. Walter Cady développera un peu plus tard les oscillateurs radioélectriques à quartz. Les premiers développements mathématiques de la piézoélectricité ont été menés par Voigt en 1910 où apparaît la théorie de l'élasticité des matériaux [31,32,33].

L'effet piézoélectrique est dû au déplacement d'ions dans un cristal dont la cellule élémentaire, plus simple polyèdre de la structure du cristal, est asymétrique. Sous l'effet de la compression du cristal, les ions de toutes les cellules élémentaires sont déplacés, ce qui engendre une polarisation de ces cellules [32]. Comme la structure cristalline est régulière, cette polarisation se propage vers d'autres cellules, créant ainsi une différence de potentiel entre certaines faces du cristal. Lorsqu'un champ électrique externe est appliqué au cristal, les ions des cellules élémentaires sont déplacés par des forces électrostatiques, ce qui engendre la déformation mécanique du cristal.

Deux phénomènes de base sont distingués et permettent aux pièces piézoélectriques d'être utilisées comme capteur ou actionneur dans le système de contrôle. Le premier phénomène est appelé l'effet piézoélectrique direct qui implique que lorsqu'une force mécanique ou pression (déformation) est appliquée dans un composant piézoélectrique, une charge électrique ou tension est induite dans le matériau piézoélectrique. Réciproquement, si une charge ou tension est imposée dans le matériau piézoélectrique, le matériau réagit en générant une force mécanique et une déformation. Ce phénomène est appelé effet piézoélectrique inverse.

Très peu de solides sont naturellement piézoélectriques, le quartz étant le plus connu. Les céramiques piézoélectriques de synthèse apparaissent dans les années quarante [33]. Par leurs coefficients piézoélectriques bien supérieurs à ceux des cristaux, elles permettent un net élargissement des applications du phénomène piézoélectrique. Parmi ces matériaux de synthèse, les titanozirconates de plomb (PZT). Leur cycle de fabrication par voie solide est illustré Figure 2.7. Ils ne deviennent piézoélectriques qu'après l'étape finale de polarisation qui consiste en l'application d'un champ électrique continu de valeur élevée dans le but d'orienter les différents vecteurs de polarisation dans la même direction.

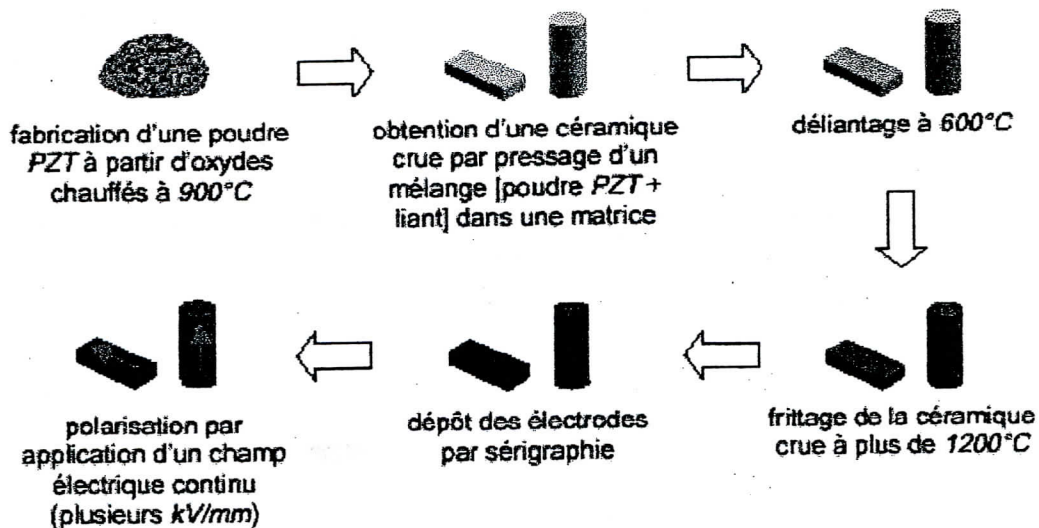


Figure 2.7 : Cycle de fabrication des céramiques PZT par voie solide.

Les films polymères piézoélectriques de type polyfluorure de vinilydène (PVF2 ou PVDF) apparaissent sur le marché au début des années quatre-vingt. Ils présentent l'avantage d'être très flexible et de pouvoir être découpés facilement et en des formes complexes ; par contre leurs constantes piézoélectriques sont moins élevées que celles des PZT [31].

En contrôle actif de vibrations, les matériaux piézoélectriques sont utilisés aussi bien pour constituer des actionneurs électromécaniques que des capteurs de vibrations. Peu encombrants et légers, les éléments piézoélectriques employés présentent l'avantage de ne pas perturber de façon significative la structure accueillante.

# CHAPITRE III

## THEORIE DES POUTRES

### 3.1. Introduction

#### 3.1.1. Définition

Soient :

- $C$  une courbe orientée appelée ligne moyenne.
- $G$  son point courant et soit  $l$  son abscisse curviligne mesurée à partir d'un point fixe  $O$  de  $C$ .
- $\{t, n, b\}$  un trièdre orthonormé associé à la ligne moyenne  $C$  en  $G$ .

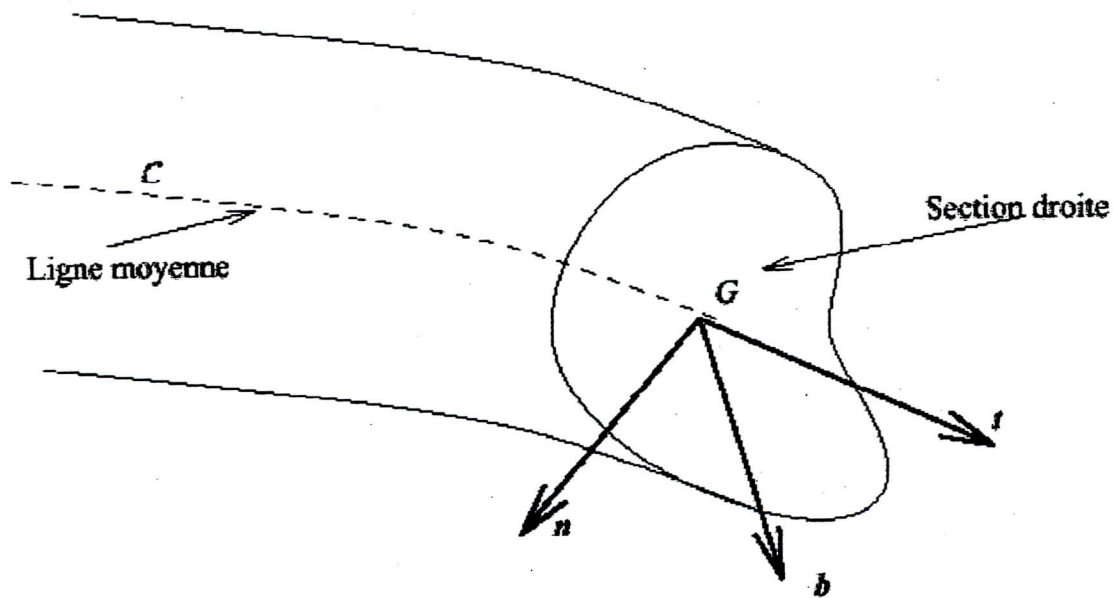


Figure 3.1 : Schéma de la ligne moyenne et de la section droite.

Le plan  $\{n, b\}$  est appelé plan normal en  $G$ . Dans ce plan on définit la section droite  $A$  de la poutre, de contour extérieur fermé  $\Omega$  et de centre de gravité  $G$  sur la ligne moyenne.



On appelle poutre, le volume engendré par les sections droites lorsque  $G$  décrit la ligne moyenne.

### 3.1.2. Hypothèses relatives à la déformation d'une poutre

Considérons une poutre de longueur  $L$ , de masse volumique  $\rho$  et de section droite  $A$  (figure 3.2). Pour l'étude des vibrations transversales de la poutre en flexion [37], les hypothèses suivantes sont faites :

- La dimension transversale " $h$ " de la section droite est très inférieure à la longueur  $L$  de la poutre.
- La section droite de la poutre est indéformable.
- La poutre possède un plan de symétrie  $\Pi(Oxz)$ .
- La flexion se fait autour de l'axe  $Oy$ .
- Les effets dus au cisaillement sont pris en compte.

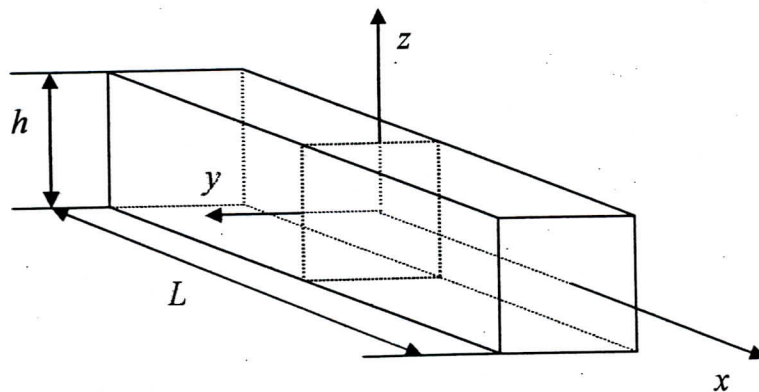


Figure 3.2 : Schéma d'une poutre droite.

### 3.2. Déplacement d'un point de la poutre

On admet que les points matériels qui sont dans une section droite constituent une figure invariable et, en particulier, demeurent dans une section plane qui ne reste pas orthogonale à la ligne neutre en raison des effets de cisaillement [37,38]. On note  $\psi$  l'angle de  $Ox$  avec la normale  $PX$  à la section plane (figure 3.3) et  $\beta$  l'angle de cisaillement, c'est-à-dire l'angle de  $PX$  avec la ligne neutre de sorte que :

$$\psi + \beta = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.1)$$

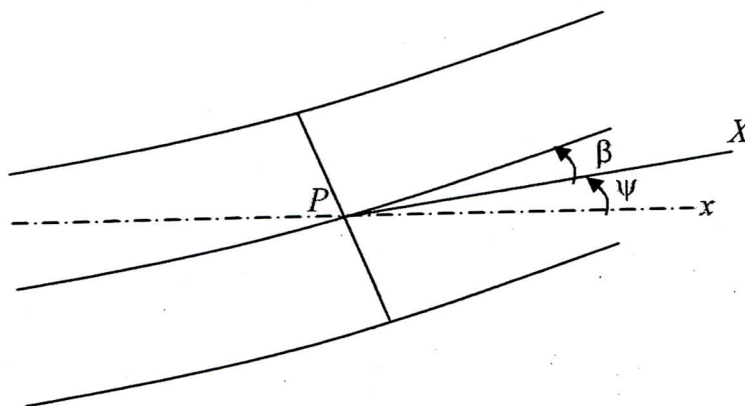


Figure 3.3 : Rotation de la section droite.

Pour exprimer les déplacements, on utilise le schéma de Kirchoff du premier degré [25]. On considère un point  $M$  de la section droite (figure 3.4) avant et après déformation. Les déplacements sont alors exprimés par :

$$\begin{cases} U = u(x) - z\psi(x) \\ V = 0 \\ W = w(x) \end{cases} \quad (3.2)$$

où  $u$ ,  $v$  et  $w$  représentent les déplacements du matériau dans les directions  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  respectivement.

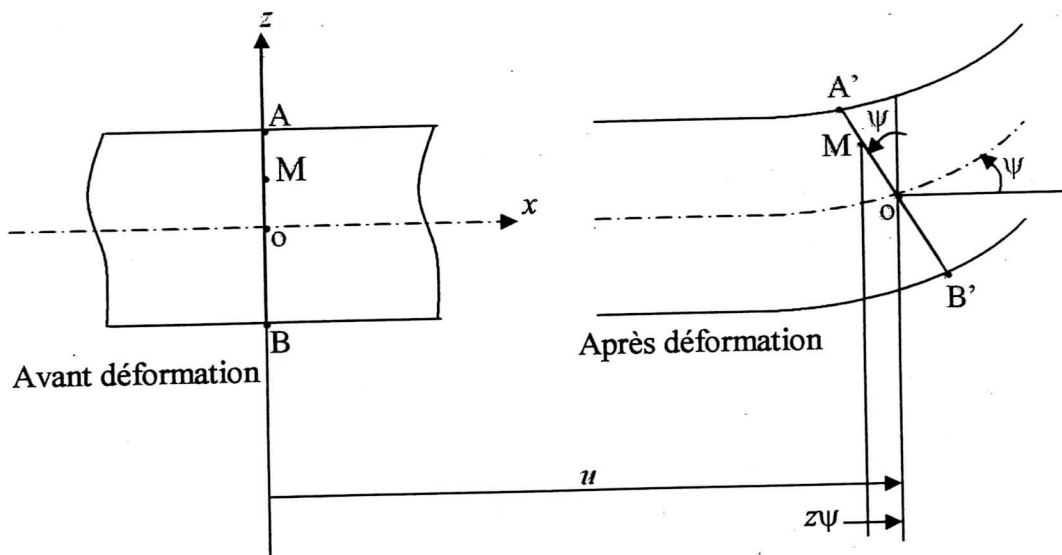


Figure 3.4 : Déformation d'un point  $M$  de la section droite.

### 3.3. Relation déformation – déplacement

Les déformations de la poutre sont données par les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y} \\ \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \end{array} \right. \quad (3.3)$$

En remplaçant les équations (3.2) dans les équations (3.3), on obtient les relations suivantes entre les déformations et les déplacements :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \varepsilon_y = 0 \\ \varepsilon_z = 0 \\ \gamma_{xy} = 0 \\ \gamma_{xz} = -\psi + \frac{\partial w}{\partial x} = \beta \\ \gamma_{yz} = 0 \end{array} \right. \quad (3.4)$$

### 3.4. Equations de la piézoélectricité

Considérons le dispositif décrit sur la figure 3.5 où un élément piézoélectrique est parfaitement collé sur une poutre soumise à la flexion selon l'axe  $x$ . L'application d'une tension entre les faces externes des éléments et la

poutre induit alors une extension dans une plaquette et une compression dans l'autre, générant ainsi une flexion de la poutre selon l'axe  $x$ .

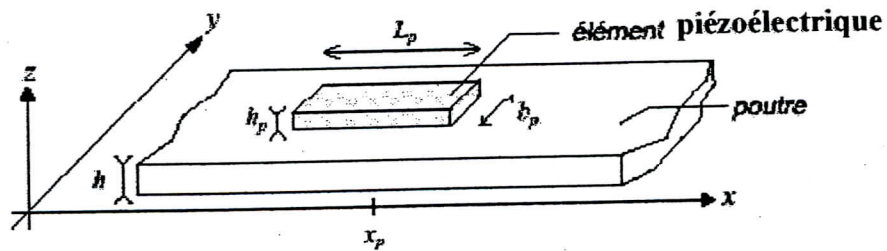


Figure 3.5 : Eléments piézoélectriques collés à une poutre.

La piézoélectricité étant un phénomène de couplage entre l'énergie électrique et l'énergie mécanique, les équations de l'état piézoélectrique, si on néglige les effets thermiques, relie une variable mécanique (déformation  $\varepsilon$  ou contrainte  $\sigma$ ) et une variable électrique (champ électrique  $E$  ou induction électrique  $D$ ). Selon le choix de ces variables, les équations peuvent se présenter, en quatre couples, sous les formes suivantes [4,7,25,31,32,33]:

$$\begin{aligned}
 D_m &= d_{mi} \sigma_i + \bar{\varepsilon}_{mk} E_k & \varepsilon_i &= s_{ij}^E \sigma_j + d_{mi}^t E_m \\
 E_m &= -g_{mi} \sigma_i + \bar{\beta}_{mk} D_k & \varepsilon_i &= s_{ij}^D \sigma_j + g_{mi}^t D_m \\
 D_m &= e_{mi} \varepsilon_i + \bar{\varepsilon}_{mk} E_k & \sigma_i &= Q_{ij}^E \varepsilon_j - e_{mi}^t E_m \\
 E_m &= -h_{mi} \varepsilon_i + \bar{\beta}_{mk} D_k & \sigma_i &= Q_{ij}^D \varepsilon_j - h_{mi}^t D_m
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

où :  $( )^t$  indique une transposée de la matrice considérée.

$( )^x$  indique que la grandeur considérée est définie à  $x$  constant ou nul.

$$i, j = 1, \dots, 6$$

$$m, k = 1, \dots, 3$$

Les coefficients  $i, j, m$  et  $k$  respectent la notation tensorielle de la figure 3.6. La définition et la dimension de chacun des termes sont données dans le tableau 3.1.

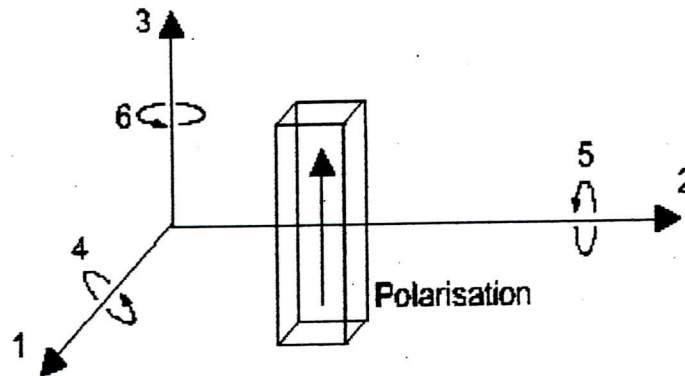


Figure 3.6 : Numérotation des directions en notation tensorielle condensée.

### 3.4.1. Définition des coefficients piézoélectriques

#### La constante de charge $d$

Elle traduit la proportionnalité entre la contrainte et l'induction électrique à champ nul ou constant (en C/N ou m/V).

#### La constante de tension $g$

Elle indique la proportionnalité entre la contrainte mécanique et le champ électrique à induction nulle ou constante (en Vm/N ou m<sup>2</sup>/C).

La constante piézoélectrique  $e$

Elle traduit la proportionnalité entre la déformation et l'induction électrique à champ nul ou constant (en  $C/m^2$  ou  $N/Vm$ ).

La constante piézoélectrique  $h$

C'est le coefficient piézoélectrique traduisant la proportionnalité entre la déformation et le champ électrique à induction nulle ou constante (en  $V/m$  ou  $N/C$ ).

**3.4.2. Définition des coefficients mécaniques et électriques :**

Type	Signification	Unité	Dimensions
Electrique	$D$ déplacement électrique ou induction	$C/m^2$	$3 \times 1$
	$E$ champ électrique	$V/m$	$3 \times 1$
	$\bar{\epsilon}$ permittivité	$F/m$	$3 \times 3$
	$\bar{\beta}$ imperméabilité diélectrique	$M/F$	$3 \times 3$
Mécanique	$\epsilon$ déformation relative		$6 \times 1$
	$\sigma$ contrainte	$N/m^2$	$6 \times 1$
	$s$ souplesse	$m^2/N$	$6 \times 6$
	$Q$ raideur	$N/m^2$	$6 \times 6$
Piézoélectrique	$d$ constante reliant la contrainte $\sigma$ et l'induction $D$ à $E$ constant	$C/N$ ou $m/V$	$3 \times 6$
	$e$ constante reliant la déformation $\epsilon$ et l'induction $D$ à $E$ constant	$C/m^2$ ou $N/Vm$	$3 \times 6$
	$g$ constante reliant la contrainte $\sigma$ et le champ $E$ à $D$ constant	$Vm/N$ ou $m^2/C$	$3 \times 6$
	$h$ constante reliant la déformation $\epsilon$ et le champ $E$ à $D$ constant	$V/m$ ou $N/C$	$3 \times 6$

Tableau 3.1 : Définition et dimension des termes.

### 3.5. Relation contrainte – déformation

La matrice des coefficients de contrainte piézoélectrique  $[e]$  peut être exprimée en fonction de la matrice des coefficients de charge  $[d]$  par la relation [25]:

$$[e] = [Q] \cdot [d] \quad (3.6)$$

En remplaçant dans l'équation (3.5) on obtient :

$$\{\sigma\} = [Q] \cdot (\{\varepsilon\} - [d] \cdot \{E\}) \quad (3.7)$$

Le matériau piézoélectrique possède des propriétés anisotropiques. La matrice de d'élasticité est définie par 13 constantes indépendantes [25,30]:

$$[Q] = [Q_{ij}] \quad (3.8)$$

avec  $i, j = 1 \div 6$ .

Pour le problème de poutre plusieurs hypothèses simplificatrices sont faites [32]:

- la poutre impose sa déformation à la pièce piézoélectrique,
- les contraintes  $\sigma_y$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{xz}$  sont négligeables par rapport aux contraintes  $\sigma_x$  et  $\tau_{xz}$ ,
- la surface supérieure du matériau piézoélectrique est libre de se déplacer donc pas de contrainte  $\sigma_z$ ,
- les champs électriques  $E_1$  et  $E_2$  sont négligeables comparés au champ transversal  $E_3$ .



En remplaçant les équations (3.4) et (3.8) dans l'équation (3.7) et en tenant compte des hypothèses ci-dessus, l'expression contrainte – déformation devient :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & 0 \\ 0 & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \cdot \left( \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} d_{31} \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot E_3 \right) \quad (3.9)$$

Où  $\bar{Q}_{11}$  et  $\bar{Q}_{55}$  sont données en terme de  $Q_{ij}$  ( $i, j = 1 \div 6$ ) par :

$$\begin{cases} \bar{Q}_{11} = Q_{11} + Q_{12} \cdot \left( \frac{Q_{16}Q_{26} - Q_{12}Q_{66}}{Q_{22}Q_{66} - Q_{26}^2} \right) + Q_{16} \cdot \left( \frac{Q_{12}Q_{26} - Q_{16}Q_{22}}{Q_{22}Q_{66} - Q_{26}^2} \right) \\ \bar{Q}_{55} = Q_{55} - \frac{Q_{45}^2}{Q_{44}} \end{cases} \quad (3.10)$$

### 3.6. Expression de l'énergie cinétique et de déformation

#### 3.6.1. Energie cinétique

La variation de l'énergie cinétique est donnée par l'équation :

$$T = \frac{1}{2} \int \rho (\dot{U}^2 + \dot{V}^2 + \dot{W}^2) \cdot dv \quad (3.11)$$

où  $\dot{U}$ ,  $\dot{V}$  et  $\dot{W}$  sont les vitesses absolues.

En remplaçant les expressions de  $\dot{U}$ ,  $\dot{V}$  et  $\dot{W}$ , et après intégration, l'expression de l'énergie cinétique peut être donnée sous la forme matricielle :

$$T = \frac{1}{2} \int \rho \{ \dot{u} \quad \dot{w} \quad \dot{\psi} \} \cdot [\bar{T}] \cdot \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} \cdot b \cdot dx \quad (3.12)$$

avec :

$$[\bar{T}] = \begin{bmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^3}{12} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

### 3.6.2. Energie de déformation

L'énergie de déformation est donnée par :

$$U = \frac{1}{2} \int (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) \cdot dv \quad (3.14)$$

en remplaçant les équations (3.4) et (3.7) on obtient :

$$U = \frac{1}{2} \int \left[ \bar{Q}_{11} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \tau_{xz} \beta \right] \cdot dv \quad (3.15)$$

En remplaçant l'expression de  $\tau_{xz}$ , l'énergie de déformation prend la forme :

$$U = \frac{1}{2} \int \left( \bar{Q}_{11} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & -z \\ -z & z^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{Bmatrix} + KA \bar{Q}_{55} \{ \gamma_{xz} \}^T \{ \gamma_{xz} \} \right) dv \quad (3.16)$$

où  $K$  est un facteur de correction de contraintes de cisaillement. Le facteur  $K$  est introduit pour prendre compte de la non-uniformité des contraintes de cisaillement de sorte que la valeur de l'effort tranchant soit la même dans le modèle exact (théorique) et dans le modèle simplifié (poutre) [37,38]. Le facteur  $K$  vaut par exemple  $5/6$  pour une section droite rectangulaire pleine et  $1/1.175$  pour section droite circulaire pleine.

### 3.7. Equation de mouvement : Formulation Lagrangienne

Les équations de Lagrange permettent d'obtenir les équations du mouvement à partir des expressions de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle [37].

Soit  $T = T(q, \dot{q}, t)$  l'énergie cinétique exprimée en fonction des coordonnées et vitesses généralisées, et  $U = U(q, t)$  l'énergie potentielle exprimée en fonction de coordonnées généralisées.

La différentielle de l'énergie totale est donnée par :

$$d(T + U) = dW \quad (3.17)$$

où  $dW$  est le travail des forces non potentielles exprimé en fonction des coordonnées généralisées:

$$dW = \sum_{i=1}^N F_i dq_i \quad (3.18)$$

où  $F_i$  sont les forces généralisées.

La différentielle de l'énergie totale exprimée en fonction de  $T$ ,  $U$ ,  $q$ ,  $\dot{q}$  et  $t$  est donnée sous la forme [37,40]:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = F_i \quad (3.19)$$

avec :  $\{q_i\} = \{u_1, w_1, \psi_1, \dots, u_N, w_N, \psi_N\}$   
 $\{\dot{q}_i\} = \{\dot{u}_1, \dot{w}_1, \dot{\psi}_1, \dots, \dot{u}_N, \dot{w}_N, \dot{\psi}_N\}$

En remplaçant  $U$  et  $T$  par leurs expressions dans l'équation (3.19), nous obtenons après dérivation un système d'équation sous la forme :

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{F\} \quad (3.20)$$

# CHAPITRE IV

## INTRODUCTION DE L'AMORTISSEMENT STRUCTURAL

#### 4.1. Introduction

Quand un corps rigide réel est soumis à un chargement cyclique, une partie de l'énergie absorbée est dissipée par des mécanismes de frottement interne [41, 42, 43, 44]. Dans ce cas, la courbe charge – décharge possède deux branches : la branche supérieure correspond au chargement et la branche inférieure correspond au déchargement. Le contour produit par les branches s'appelle boucle d'hystérésis.

#### 4.2. Energie de dissipation

La dissipation d'une partie de l'énergie absorbée est due au fait que l'élasticité du matériau n'est pas parfaite [40]. La valeur de l'énergie dissipée par cycle dans le cas d'un amortissement hystérétique est donnée par la surface de la courbe d'hystérésis  $\Delta W$ .

La courbe d'hystérésis, pour un cycle de déformation, peut être représentée dans le système de coordonnées contrainte – déformation (figure 4.1).

La surface de cette courbe détermine l'énergie dissipée dans le matériau par unité de volume pour une amplitude de déformation  $\varepsilon_0$  [40,41]. Elle caractérise les propriétés d'amortissement du matériau.

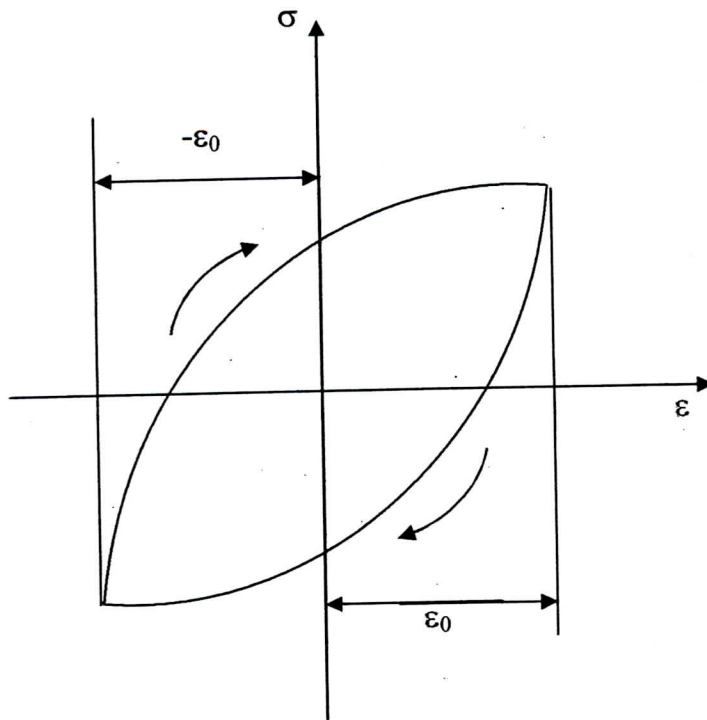


Figure 4.1 : Cycle d'hystérésis.

L'aire de la boucle est donnée par [41]:

$$\Delta W = \int_{-\varepsilon_0}^{\varepsilon_0} \bar{\sigma}(\varepsilon) d\varepsilon - \int_{-\varepsilon_0}^{\varepsilon_0} \bar{\sigma}(\varepsilon) d\varepsilon \quad (4.1)$$

où  $\bar{\sigma}(\varepsilon)$  et  $\bar{\sigma}(\varepsilon)$  décrivent respectivement les branches supérieure et inférieure du cycle.





Un système vibrant discret, c'est-à-dire avec un nombre fini  $n$  de degré de liberté, est gouverné par une équation de la forme

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = f$$

où  $x$  est un vecteur de coordonnées généralisées représentant les déplacements structuraux. Cette équation exprime l'équilibre entre les forces extérieures, d'inertie, de rappel élastique et d'amortissement, supposé visqueux, c'est-à-dire proportionnel au champ de vitesse. Les matrices  $M$ ,  $C$  et  $K$  sont symétriques définies non négatives.  $M$  et  $K$  résultent de la discrétisation de la structure, le plus souvent par Eléments Finis. Il est fréquent qu'une des masses  $M$  diagonale procure une présentation suffisante de l'inertie de la structure. La matrice d'amortissement  $C$  représente un mécanisme de dissipation complexe ayant essentiellement trois composantes, associées respectivement à la dissipation interne du matériau, à la dissipation aérodynamique et aux microglissements dans les joints et assemblages ; elle est en général mal connue. Pour compenser cette ignorance, il est coutume de faire des hypothèses quant à sa forme. Une hypothèse attrayante sur le plan de la simplicité est celle de l'amortissement de Rayleigh

$$[C] = \alpha_1 [M] + \alpha_2 [K]$$

où  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont des constantes dépendant du facteur d'amortissement et de la fréquence du mode considéré.

Un autre modèle d'amortissement fut introduit par Young connu sous le nom : Module de Young complexe ou le module d'élasticité est sous forme complexe défini ainsi :

$$E^* = E(1 + j\lambda)$$

et cela dans le cas où la contrainte et la déformation varient d'une façon sinusoïdale avec le temps donnant une meilleure approximation par rapport au modèle visqueux.

#### 4.4. Equivalence entre amortissement visqueux et amortissement d'hystérésis

##### 4.4.1. Amortissement visqueux

Dans l'étude des vibrations des systèmes mécanique, on distingue trois formes d'amortissement : liquide, sec et intérieur. L'amortissement liquide, à son tour, peut être visqueux ou turbulent.

On utilise le plus souvent l'amortissement visqueux ; et les autres formes, dans le cas des petites forces dissipatives, peuvent être approximées à celui-ci. Dans ce cas les équations de mouvement peuvent être linéarisées.

Sous l'amortissement visqueux, la force d'amortissement est proportionnelle à la vitesse de vibration. Dans ce cas la force dissipée s'écrit sous la forme :

$$F_D = c\dot{x} \quad (4.5)$$

avec  $c$  : coefficient d'amortissement visqueux.

Sous sollicitations harmoniques, l'énergie dissipée par cette force par cycle vaut [41]:

$$U_D = \pi c \omega x_A^2 \quad (4.6)$$

**4.4.2. Amortissement structural**

Lorsqu'un matériau est parfaitement élastique, l'énergie absorbée lors de la mise en charge est entièrement restituée lors de la décharge.

La plupart des matériaux n'ont pas un comportement élastique idéal. L'énergie de ces matériaux sous contraintes cycliques est dissipée à l'intérieur du matériau lui même.

Cette dissipation est conditionnée par la déformation plastique des micros volumes du matériau, c'est-à-dire les déformations plastiques locales des micros volumes du matériau apparaissent sous l'action des contraintes du deuxième genre. Ces déformations conduisent à l'irréversibilité du processus conditionné par les pertes d'énergie dans le matériau au cours des déformations cycliques.

L'amortissement structural est une caractéristique du matériau et sa valeur est fortement liée à la température et aux fréquences d'excitation.

L'amortissement structural a diverses origines, chaque source possède une fréquence caractéristique à laquelle correspond un pic d'amortissement. A titre indicatif on donne le tableau suivant :

Phénomène typique de frottement interne	
Phénomène	Fréquence caractéristique (Hz)
Diffusion thermique	
- Dans les grains	$10^4$
- Dans les éprouvettes	$10$ à $10^2$
Atomes interstitiels (pic de Snoek)	$10^{-2}$
Glissement des joints	$10^{-8}$
Dislocation	Variable

Tableau 4.1 : Sources d'amortissement – Fréquence caractéristique

Pour représenter l'amortissement structural, la force d'amortissement est supposée proportionnelle à la vitesse [41]. L'énergie dissipée pendant un cycle de mouvement est:

$$U_D = a x_A^2 \quad (4.7)$$

où  $a$  est une constante.

En comparant les équations (4.6) et (4.7), on peut définir un amortissement équivalent à un amortissement visqueux tel que :

$$c_{eq} = \frac{a}{\pi \omega} \quad (4.8)$$

Pour déterminer l'amortissement visqueux équivalent, on considère un système avec un amortissement structural soumis à une force harmonique et gouverné par l'équation de mouvement :

$$m\ddot{x} + c_{eq}\dot{x} + kx = F \quad (4.9)$$

avec :  $F = F_0 e^{j\omega t}$ ,

la solution est de la forme  $x = x_0 e^{j\omega t}$

En remplaçant les expressions de  $F$  et  $x$  l'équation (4.9) devient :

$$\left( -m\omega^2 + k \left( 1 + j \frac{a}{\pi k} \right) \right) x_0 = F_0 \quad (4.10)$$



En posant  $\frac{a}{\pi k} = \lambda$ , l'amortissement équivalent et l'énergie dissipée sont donnés

par :

$$c_{eq} = \frac{\lambda}{\omega} k \quad (4.11)$$

$$U_D = \lambda \pi k x_A^2 \quad (4.12)$$

L'équation de mouvement peut donc s'écrire sous la forme :

$$m\ddot{x} + \frac{\lambda}{\omega} k\dot{x} + kx = F \quad (4.13)$$

où  $\lambda$  est la constante d'amortissement hystérétique qui dépend des propriétés du matériau.

#### 4.5. Détermination du coefficient d'amortissement

L'énergie dissipée  $U_D$  donnée par la surface  $\Delta W$  peut être représentée dans le système de coordonnées force cyclique en fonction de la déflexion figure 4.2.

# CHAPITRE V

## APPROCHE NUMERIQUE

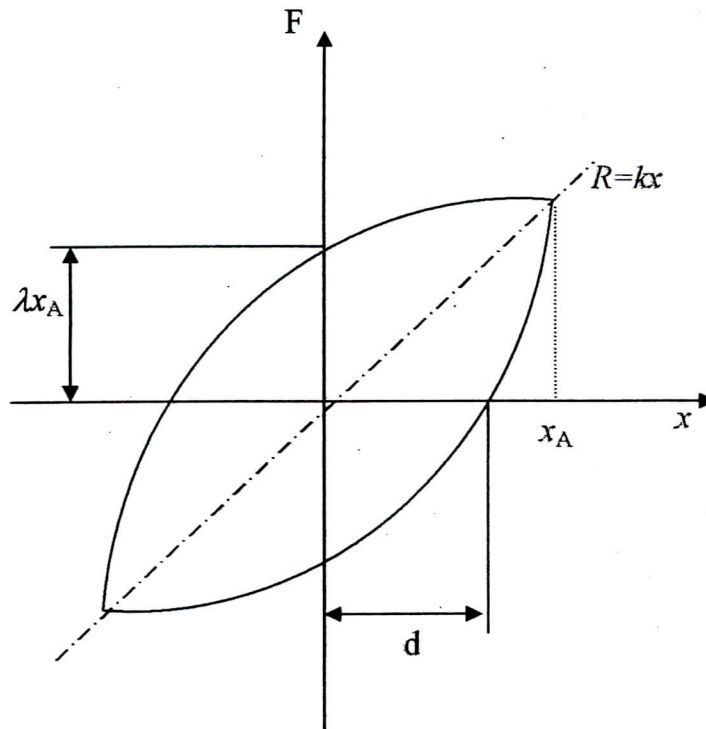


Figure 4.2 : Détermination de la constante  $\lambda$ .

Si  $d$  est la distance entre le point d'intersection du cycle d'hystérésis avec l'axe  $Ox$ , alors on a :

$$\frac{\lambda}{k} = \frac{d}{\sqrt{(x_A^2 - d^2)}} \quad (4.14)$$

Si l'amortissement est faible,  $d$  est petite par rapport à  $x_A$  donc on peut utiliser la relation approximative :

$$\frac{\lambda}{k} = \frac{d}{x_A} \quad (4.15)$$

Le rapport entre l'énergie dissipée par cycle et l'énergie élastique maximale vaut :

$$\frac{U_D}{U_E} = 2\pi\lambda \quad (4.16)$$

Ceci nous donne un moyen de déterminer le coefficient d'amortissement.



## **5.1. MODELISATION PAR ELEMENTS FINIS**

### **5.1.1. Introduction**

La méthode des éléments finis a été développée pour donner une solution numérique aux problèmes de la mécanique des milieux déformables dont les solutions analytiques n'existent pas ou sont laborieuses et difficiles à obtenir [45]. Le principe est de discrétiser la structure à modéliser en sous parties appelées éléments. Les sommets des éléments sont appelés nœuds. Un certain nombre d'inconnues appelées degrés de liberté est défini sur chaque nœud.

L'approximation de la solution se fait par des fonctions polynomiales locales appelées fonctions d'interpolation ou fonction de forme [46]. Les matrices de rigidité et de masse ainsi que le vecteur charge équivalent sont élaborées et caractérisent les propriétés et conditions de chaque élément du maillage.

Le déplacement en chaque point de la structure est obtenu par approximation à partir des résultats obtenus aux nœuds. Cette méthode est bien sûr assistée par ordinateur vue la lourdeur des calculs à effectuer.

### **5.1.2. Choix de l'élément**

Soit une poutre fractionnée en  $N$  éléments de longueur  $l$ . Chaque élément est défini par deux nœuds  $i$  et  $j$  (figure 5.1.1) ayant trois degrés de liberté  $(u, w, \psi)$  chacun.

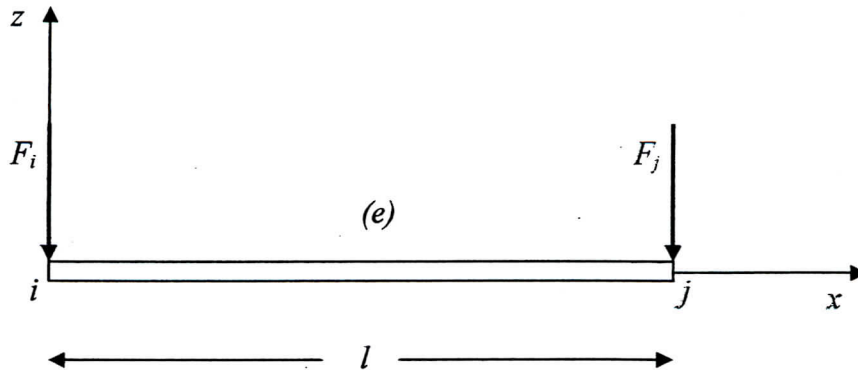


Figure 5.1.1 : Élément (e) de la poutre.

Les fonctions d'interpolation sont obtenues à partir de fonctions continues de type polynomial telles que :

$$u = [N_x] \cdot \{q\} \quad (5.1.1)$$

$$w = [P_x] \cdot [B]^{-1} \cdot \{q\} \quad (5.1.2)$$

$$\psi = [R_x] \cdot [B]^{-1} \cdot \{q\} \quad (5.1.3)$$

où

$[N_x]$  ,  $([P_x] \cdot [B]^{-1})$  et  $([R_x] \cdot [B]^{-1})$  sont les matrices des fonctions de forme de l'élément  $e$

et  $\{q\}$  est le vecteur des degrés de liberté de l'élément  $e$  avec

$$\{q\} = \{u_1 \quad w_1 \quad \psi_1 \quad u_2 \quad w_2 \quad \psi_2\}^T \quad (5.1.4)$$

L'indice  $T$  indique la transposée de la matrice.

### 5.1.3. Détermination des matrices de rigidité et de masse élémentaires

#### 5.1.3.1. Calcul de la matrice masse élémentaire

La matrice masse élémentaire est déduite de l'énergie cinétique qui s'écrit d'après l'équation (3.12) sous la forme suivante :

$$T = \frac{1}{2} \rho \left[ h \int_0^l \{\dot{u}\}^T \{\dot{u}\} dx + h \int_0^l \{\dot{w}\}^T \{\dot{w}\} dx + \frac{h^3}{12} \int_0^l \{\dot{\psi}\}^T \{\dot{\psi}\} dx \right] \quad (5.1.5)$$

En remplaçant les équations (5.1.1), (5.1.2) et (5.1.3) l'expression de l'énergie cinétique devient :

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T \left( \rho h \int_0^l ([N_x]^T [N_x]) + \left( ([B]^{-1})^T [P_x]^T [P_x] [B]^{-1} \right) + \left( \frac{h^2}{12} ([B]^{-1})^T [R_x]^T [R_x] [B]^{-1} \right) dx \right) \{\dot{q}\} \quad (5.1.6)$$

or l'expression de l'énergie cinétique est de la forme :

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T \cdot [M] \cdot \{\dot{q}\} \quad (5.1.7)$$

En égalisant l'équation (5.1.6) avec l'équation (5.1.7), on peut écrire l'expression de la matrice masse élémentaire sous la forme :

$$[M] = \left( \rho h \int_0^l ([N_x]^T [N_x]) + \left( ([B]^{-1})^T [P_x]^T [P_x] [B]^{-1} \right) + \left( \frac{h^2}{12} ([B]^{-1})^T [R_x]^T [R_x] [B]^{-1} \right) dx \right) \quad (5.1.8)$$

**5.1.3.2. Calcul de la matrice rigidité élémentaire**

La matrice rigidité élémentaire est déduite de l'énergie de déformation. Après simplification de l'équation (3.16), l'énergie de déformation prend la forme :

$$U = \frac{1}{2}bh \left( \int_0^l \bar{Q}_{11} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \right\}^T \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \right\} dx + \frac{h^2}{12} \int_0^l \bar{Q}_{11} \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\}^T \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\} dx + \int_0^l K\bar{Q}_{55} \{\gamma_{xz}\}^T \{\gamma_{xz}\} dx \right) \quad (5.1.9)$$

En remplaçant les équations (5.1.1), (5.1.2) et (5.1.3) dans l'équation (5.1.9) on trouve :

$$U = \frac{1}{2}bh\{q\}^T \left( \int_0^l (\bar{Q}_{11} [N'_x]^T [N'_x]) + \left( \frac{h^2}{12} \bar{Q}_{11} ([A_x]^{-1})^T [R'_x]^T [R'_x] [A_x]^{-1} \right) + \left( K\bar{Q}_{55} \frac{\phi l^2}{12} ([A_x]^{-1})^T [P_x]^T [P_x] [A_x]^{-1} \right) dx \right) \{q\} \quad (5.1.10)$$

avec :  $\phi = \frac{12EI}{K\bar{Q}_{55}Al^2}$

L'expression de l'énergie de déformation est de la forme

$$U = \frac{1}{2} \{q\}^T \cdot [K] \cdot \{q\}, \quad (5.1.11)$$

donc on peut écrire l'expression de la matrice rigidité, en égalisant les équations (5.1.10) et (5.1.11),

$$[K] = bh \left( \int_0^l (\bar{Q}_{11} [N'_x]^T [N'_x]) + \left( \frac{h^2}{12} \bar{Q}_{11} ([A_x]^{-1})^T [R'_x]^T [R'_x] [A_x]^{-1} + \left( K \bar{Q}_{55} \frac{\phi l^2}{12} ([A_x]^{-1})^T [P'_x]^T [P'_x] [A_x]^{-1} \right) dx \right) \right) \quad (5.1.12)$$

#### 5.1.4. Calcul du vecteur charge élémentaire des forces extérieures

Dans cette étude on considère deux types de charges :

- charges concentrées aux nœuds,
- charges uniformément réparties qu'on transforme en charges ponctuelles concentrées aux nœuds (figure 5.1.2).

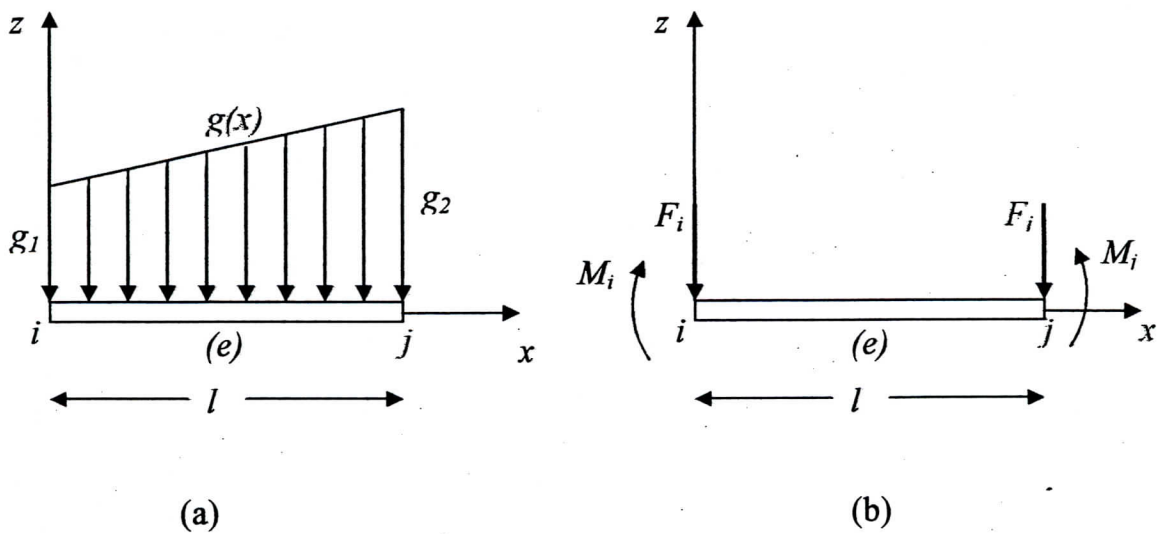


Figure 5.1.2 : (a) charge répartie  
(b) charge équivalente

### 5.1.4.1. Détermination du vecteur charge équivalent

Soit un élément ( $e$ ) soumis à une charge répartie. On égalise le travail virtuel des charges réparties à celui des charges ponctuelles pour obtenir le vecteur charge équivalent.

Les travaux virtuels des charges ponctuelles et des charges réparties ont respectivement pour expressions :

$$\delta W_{eq} = \{\delta q\}^T \{F_{eq}\} \quad (5.1.13)$$

et

$$\delta W_{reel} = \int_0^l \{\delta w\}^T g(x) \cdot dx \quad (5.1.14)$$

où  $\{\delta w\}$  est le vecteur déplacement virtuel qui d'après l'équation (5.1.2) est :

$$\delta w = [P_x] \cdot [B]^{-1} \cdot \{\delta q\} \quad (5.1.15)$$

D'autre part, on peut écrire le vecteur des charges réparties sous la forme :

$$g(x) = c_1 x + c_2 \quad (5.1.16)$$

En tenant compte des conditions aux limites, la charge répartie devient :

$$g(x) = [1 \quad x] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ l & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{Bmatrix} \quad (5.1.17)$$

On égalise le travail virtuel des charges réparties à celui des charges ponctuelles pour obtenir le vecteur charge équivalent.

On remplace l'équation (5.1.17) dans l'équation (5.1.14). On égalise le résultat obtenu pour le travail virtuel des charges réparties à celui des charges ponctuelles (5.1.13) pour déterminer le vecteur charge équivalent.

$$\{F_{eq}\} = \int_0^l ([B]^{-1})^T [P_x]^T \cdot g(x) dx \quad (5.1.18)$$

### 5.1.5. Processus d'assemblage

Après avoir établi les matrices masse et rigidité et le vecteur charge de tous les éléments, il est nécessaire de les assembler afin d'obtenir les matrices globales.

Le principe est basé sur le fait que pour un nœud obtenu par assemblage de deux nœuds appartenant à deux éléments adjacents, la force est égale à la somme des forces des deux nœuds avec des déplacements identiques à ceux de chaque nœud composant l'ensemble.

Comme on l'a vu précédemment, l'application des équations de Lagrange donne les équations différentielles du mouvement exprimées en coordonnées généralisées.

L'équation de mouvement est donc de la suivante:

$$[M_G] \{\ddot{q}\} + [C_G] \{\dot{q}\} + [K_G] \{q\} = \{F_G\} + \{F_p\} \quad (5.1.19)$$

avec :

$[M_G]$  matrice des masses globale.

$[K_G]$  matrice des rigidités globale.

$\{F_G\}$  vecteur des charges global.

$[C_G]$  matrice d'amortissement représentant le mécanisme de dissipation interne du matériau donnée par :

$$[C_G] = \alpha_1 [M_G] + \alpha_2 [K_G], \quad (5.1.20)$$

où les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  sont choisis pour que la forme (5.1.19) représente le mieux possible la dissipation de la structure considérée. Dans notre cas, on prend

(chapitre IV) :  $\alpha_1 = 0$  et  $\alpha_2 = \frac{\lambda}{\omega}$

$\{F_p\}$  est le vecteur charge du à l'élément piézoélectrique calculé comme suit :

$$F_p = \int d_{31} \bar{Q}_{11} \epsilon_x E_3 \cdot dv \quad (5.1.21)$$

Après intégration on trouve

$$\{F_p\} = -b_p d_{31} \bar{Q}_{11} E_3 \left( h + \frac{h_p}{2} \right) \frac{l_p}{l^3 (1 + \phi)} \{f\}, \quad (5.1.22)$$

où  $b_p$ ,  $h_p$  et  $l_p$  sont respectivement la largeur, l'épaisseur et la longueur de la pièce piézoélectrique.



## 5.2. METHODE DE RESOLUTION

### 5.2.1. Introduction

Pour la résolution des équations de mouvement (5.1.19), plusieurs méthodes sont proposées dans la littérature. Le choix d'une méthode de résolution doit prendre en compte des paramètres qui doivent être ajustés en fonction de la précision et la stabilité requises.

Parmi les méthodes de résolution on cite les méthodes directes d'intégration temporelle : les méthodes de la différence centrée, de fox et Goodwin, de Houbolt, de Newmark, de Wilson...

Notre choix s'est porté sur la méthode de Newmark, car elle présente une bonne stabilité et une bonne précision [37]. On peut aussi, facilement, faire l'équivalence entre la méthode de Newmark et d'autres méthodes en faisant varier les paramètres de celle-ci ( $\gamma$  et  $\beta$ ).

A titre indicatif, on donne le tableau suivant [37] :

Algorithme	$\gamma$	$\beta$
Purement explicite	0	0
Différence centrée	1/2	0
Fox & Goodwin	1/2	1/12

Tableau 5.2.1 : Valeurs de  $\gamma$  et  $\beta$  pour quelques méthodes.

### 5.2.2. Description de la méthode de Newmark

La méthode de Newmark est une méthode d'intégration temporelle [38]. On y calcule la solution du système à un instant donné  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$  en fonction de l'état connu à l'instant  $t_n$  par la formule de Taylor :

$$f(t_n + \Delta t) = f(t_n) + \Delta t f'(t_n) + \frac{\Delta t^2}{2} f''(t_n) + \dots + \frac{\Delta t^s}{s!} f^{(s)}(t_n) + R_s \quad (5.2.1)$$

où  $R_s$  est le reste du développement à l'ordre  $s$ .

La formule (5.2.1) permet de calculer la vitesse et le déplacement du système à l'instant  $t_{n+1}$

$$\begin{aligned} \dot{q}_{n+1} &= \dot{q}_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \ddot{q}(\tau) d\tau \\ q_{n+1} &= q_n + \Delta t \dot{q}_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - \tau) \ddot{q}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

L'approximation consiste à calculer les intégrales de l'accélération dans l'équation (5.2.2).

Pour cela, exprimons  $\ddot{q}(\varepsilon)$  en fonction de  $\ddot{q}_n$  et  $\ddot{q}_{n+1}$  aux bornes de l'intervalle  $[t_n, t_{n+1}]$  :

$$\begin{aligned} \ddot{q}_n &= \ddot{q}(\tau) + q^{(3)}(\tau)(t_n - \tau) + q^{(4)}(\tau) \frac{(t_n - \tau)^2}{2} + \dots \\ \ddot{q}_{n+1} &= \ddot{q}(\tau) + q^{(3)}(\tau)(t_{n+1} - \tau) + q^{(4)}(\tau) \frac{(t_{n+1} - \tau)^2}{2} + \dots \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

En multipliant les équations (5.2.3) par  $(1-\gamma)$  et par  $\gamma$  respectivement et en les additionnant on obtient :

$$\ddot{q}(\tau) = (1-\gamma)\ddot{q}_n + \gamma\ddot{q}_{n+1} + q^{(3)}(\tau)(\varepsilon - \Delta t\gamma - t_n) + O(\Delta t^2 q^{(4)}) \quad (5.2.4)$$

De même, en multipliant les équations (5.2.3) par  $(1-2\beta)$  et par  $2\beta$ , on obtient :

$$\ddot{q}(\tau) = (1-2\beta)\ddot{q}_n + 2\beta\ddot{q}_{n+1} + q^{(3)}(\tau)(\tau - 2\Delta t\beta - t_n) + O(\Delta t^2 q^{(4)}) \quad (5.2.5)$$

Si on substitue alors les équations (5.2.4) et (5.2.5) dans les intégrales (5.2.2), on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \ddot{q}(\tau) d\tau &= (1-\gamma)\Delta t\ddot{q}_n + \gamma\Delta t\ddot{q}_{n+1} + r_n \\ \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - \tau)\ddot{q}(\tau) d\tau &= \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\Delta t^2\ddot{q}_n + \beta\Delta t^2\ddot{q}_{n+1} + r'_n \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

où  $r_n$  et  $r'_n$  sont des erreurs données par :

$$\begin{aligned} r_n &= \left(\gamma - \frac{1}{2}\right)\Delta t^2 q^{(3)}(\tau) + O(\Delta t^3 q^{(4)}) \\ r'_n &= \left(\beta - \frac{1}{6}\right)\Delta t^3 q^{(3)}(\tau) + O(\Delta t^4 q^{(4)}) \end{aligned} \quad t_n < \tau < t_{n+1}$$

(5.2.7)

Lorsque les constantes  $\gamma$  et  $\beta$  sont égales respectivement  $1/2$  et  $1/6$ , les approximations (5.2.6) consistent à supposer une accélération variant linéairement sur l'intervalle  $[t_n, t_{n+1}]$ .

De même, lorsque les constante  $\gamma = \frac{1}{2}$  et  $\beta = \frac{1}{4}$ , ces approximations consistent à supposer une accélération constante dans l'intervalle  $[t_n, t_{n+1}]$  et égale à sa valeur moyenne [38].

La substitution des équations (5.2.6) dans les équations (5.2.2) fournit les approximations pour la méthode de Newmark :

$$\begin{aligned} \dot{q}_{n+1} &= \dot{q}_n + (1-\gamma)\Delta t\ddot{q}_n + \gamma\Delta t\ddot{q}_{n+1} \\ q_{n+1} &= q_n + \Delta t\dot{q}_n + \Delta t^2\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\ddot{q}_n + \Delta t^2\beta\ddot{q}_{n+1} \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

Nous avons vu précédemment que l'équation de mouvement est de la forme :

$$[M_G]\{\ddot{q}\} + [C_G]\{\dot{q}\} + [K_G]\{q\} = \{F_G\} + \{F_p\} \quad (5.2.9)$$

En introduisant le schéma numérique (5.2.8) dans l'équation du mouvement au temps  $t_{n+1}$  afin de calculer l'accélération  $\ddot{q}_{n+1}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} (M_G + \gamma\Delta t C_G + \beta\Delta t^2 K_G)\ddot{q}_{n+1} &= F_{G(n+1)} + F_{p(n+1)} - C_G(\dot{q}_n + (1-\gamma)\Delta t\ddot{q}_n) \\ &\quad - K_G\left(q_n + \Delta t\dot{q}_n + \left(\frac{1}{2}-\beta\right)\Delta t^2\ddot{q}_n\right) \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

Après résolution de l'équation (5.2.10), on procède au calcul des vitesses et déplacements  $\dot{q}_{n+1}$  et  $q_{n+1}$  par les équations (5.2.8).

La procédure de calcul associée à la méthode de Newmark est résumée dans la figure 5.2.1.

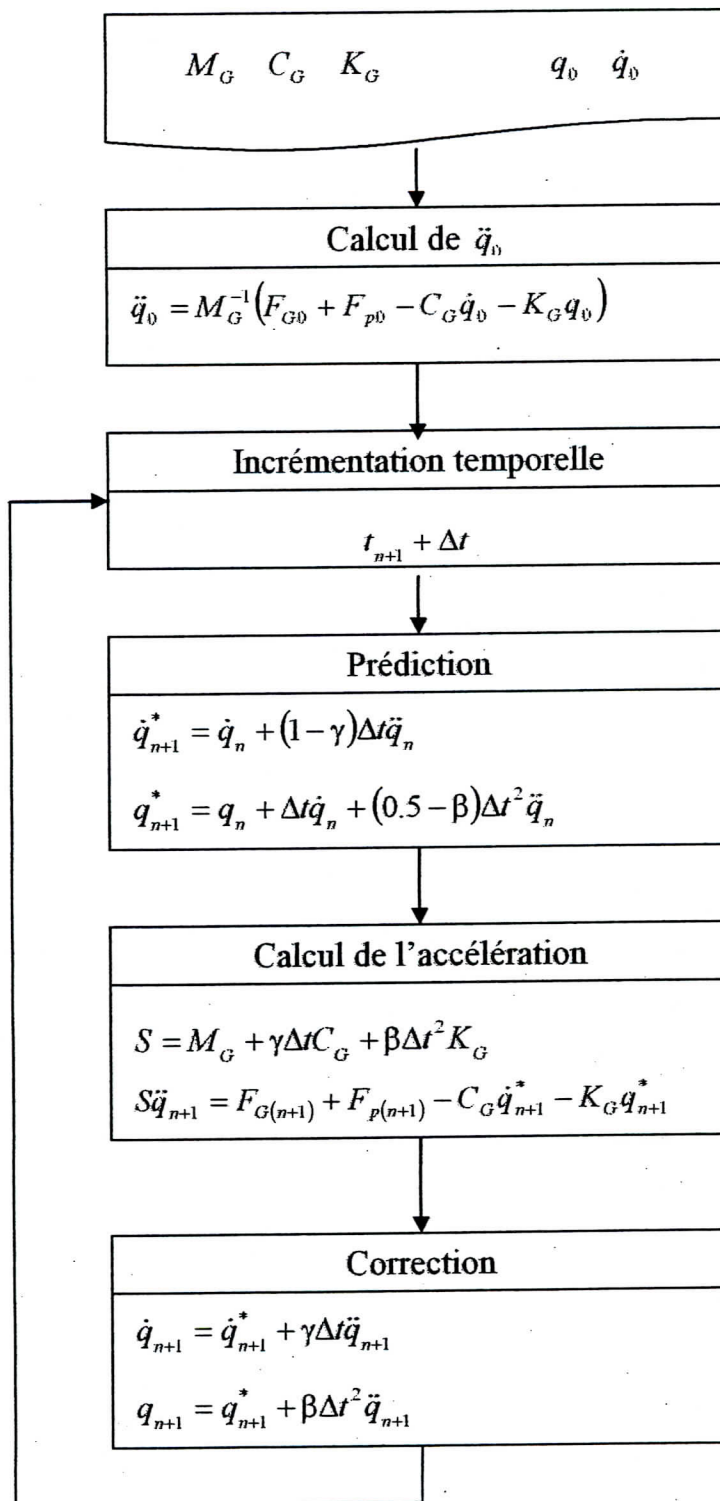


Figure 5.2.1 : Algorithme de la méthode de Newmark.

On peut également introduire un amortissement numérique dans le schéma de l'accélération moyenne, sans détériorer la propriété de précision de celle-ci [38]. Cette méthode est appelée méthode de Hilbert – Hugues – Taylor. Elle consiste à choisir les paramètres  $\gamma$  et  $\beta$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{2} + \alpha \\ \beta &= \frac{(1 + \alpha)^2}{4} \end{aligned} \quad \alpha \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \quad (5.2.11)$$

La mise en œuvre de cette méthode est similaire à celle de l'algorithme de l'accélération moyenne de Newmark.

Le pas maximum autorisé pour la méthode de Newmark en fonction de  $\gamma$  et  $\beta$  est obtenu à partir de la condition :

$$\left(\gamma + \frac{1}{2}\right)^2 - 4\beta \leq \frac{4}{\omega^2 \Delta t^2} \quad (5.2.12)$$

Si  $\beta \geq \frac{1}{4} \left(\gamma + \frac{1}{2}\right)^2$ , cette condition est automatiquement satisfaite quelque soit le pas d'intégration  $\Delta t$  : le schéma est donc inconditionnellement stable si  $\gamma \geq \frac{1}{2}$ .

### 5.3. PROGRAMMATION

#### 5.3.1. Introduction

Dans les chapitres précédents, une formulation en éléments finis appliquées aux poutres avec prise en considération de l'amortissement structural et de l'effet piézoélectrique a été présentée ; Ainsi, vu la lourdeur des calculs à effectuer, l'outil informatique est indispensable.

Nous avons élaboré un programme IASEPVP (Influence de l'Amortissement Structural et de l'Effet Piézoélectrique sur les vibrations des poutres) pour la détermination des déplacements de la poutre. Ce programme est écrit en DELPHI3.

Les étapes de base de ce programme sont les suivantes :

- 1- Lecture des données.
- 2- Calcul des matrices masse et rigidité pour chaque élément.
- 3- Calcul du vecteur charge élémentaire.
- 4- Assemblage des matrices et vecteurs élémentaires.
- 5- Introduction des conditions aux limites.
- 6- Détermination des matrices et vecteur globaux réduits par les conditions aux limites.
- 7- Résolution du système d'équations.
- 8- Impression des résultats.

#### 5.3.2. Présentation du programme de calcul

Ce programme s'exécute sous Windows qui est une extension graphique de MS-DOS. Il se présente sous une interface formée de fenêtres, de menus et d'icônes, ce qui rend son application facile à comprendre et à utiliser.

Pour commencer une nouvelle application, il faut choisir *Fichier/Nouveau* dans le menu principal comme l'indique la figure 5.3.1.

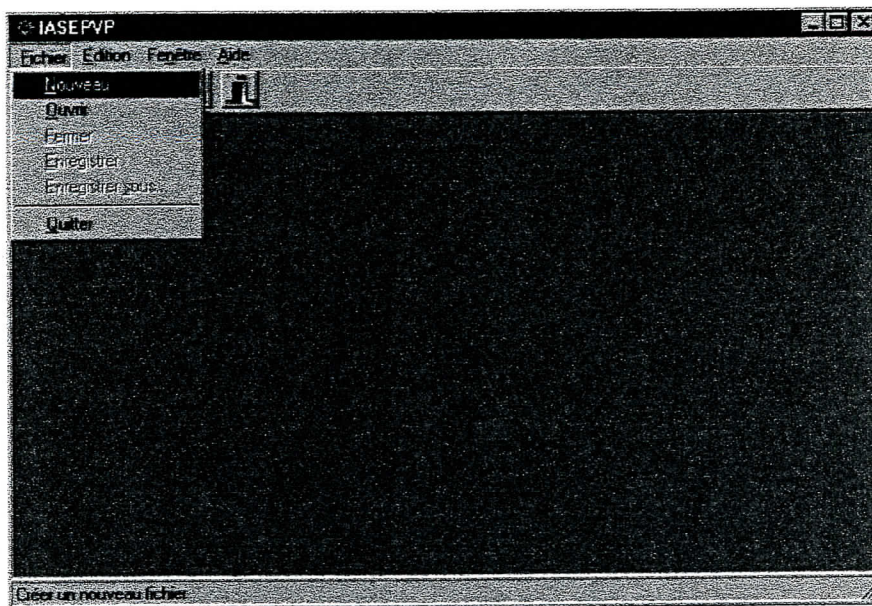


Figure 5.3.1 : Nouvelle application.

### **5.3.2.1. Introduction des données**

Les données nécessaires sont introduites à travers des fenêtres de dialogue comme suit :

#### **5.3.2.1.1. Introduction des caractéristiques géométriques**

Cinq sections sont proposées dans cette fenêtre (figure 5.3.2) :

- Section rectangulaire.
- Section en U.
- Section en I.
- Section en H.
- Section en L.



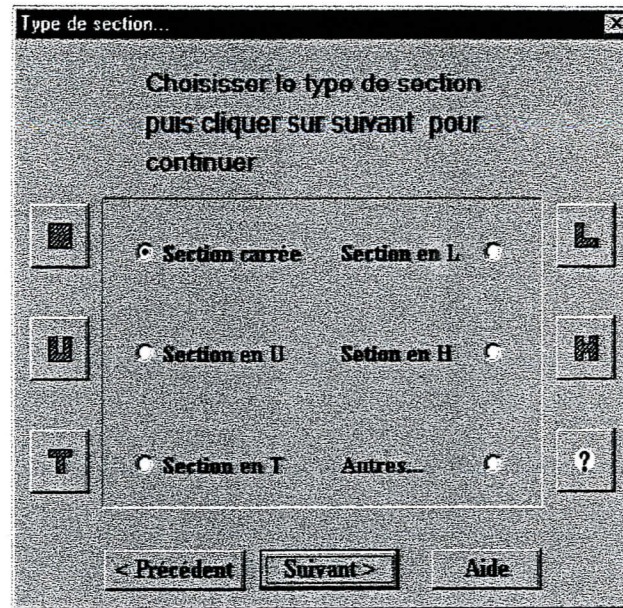


Figure 5.3.2 : Choix du type de section.

Après avoir choisi le type de section, et en cliquant sur *Suivant*, une autre fenêtre s'affiche pour introduire les dimensions nécessaires (figure 5.3.3).

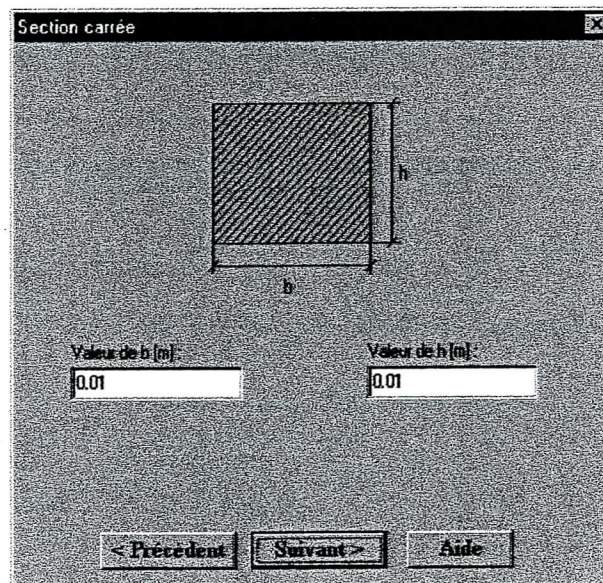


Figure 5.3.3 : Fenêtre d'introduction des dimensions.

Dans ce cas, le calcul de l'aire de la section et du moment d'inertie se fait automatiquement après introduction des dimensions nécessaires.

Il est possible d'introduire des caractéristiques géométriques différentes que celles proposées.

### 5.3.2.1.2. Introduction des caractéristiques du matériau :

Une autre fenêtre propose d'introduire les caractéristiques du matériau (figure 5.3.4). Il faut introduire :

- Le module de Young.
- Le facteur de correction.
- La masse volumique du matériau.
- La longueur de la poutre.
- Le nombre d'éléments désirés.

Paramètre	Valeur
Modulo d'élasticité E (N/m²)	21000000000
Facteur de correction K	0.84
Densité (rho) (Kg/m³)	7500
Longueur de la poutre L (m)	1
Nombre d'éléments N	2

Figure 5.3.4 : Fenêtre des caractéristiques du matériau.

En cliquant sur *Suivant*, une autre fenêtre propose d'introduire les caractéristiques de la pièce piézoélectrique (figure 5.3.5). Il faut introduire :

- La longueur de la pièce piézoélectrique.
- La largeur de la pièce piézoélectrique.
- L'épaisseur de la pièce piézoélectrique.

- La constante  $d_{31}$ .
- La valeur du champ  $E_3$ .

Figure 5.3.5 : Fenêtre des caractéristiques de la pièce piézoélectrique.

### 5.3.2.1.3. Introduction des charges

Dans ce cas deux types de chargement sont proposés.

Dans la première fenêtre, il est demandé d'introduire (figure 5.3.6) :

- Le nœud du début de chargement et sa valeur.
- Le nœud de fin de chargement et sa valeur.

Figure 5.3.6 : Fenêtre d'introduction des charges réparties.

Une deuxième fenêtre s'affiche pour introduire les charges ponctuelles (figure 5.3.7). Il faut introduire le nœud où est appliquée la charge et la valeur de celle-ci.

Noeud d'application de la charge	Valeur de la charge [N]
Noeud 1	0.0
Noeud 2	0.0
Noeud 3	0.0
Noeud 4	0.0

Figure 5.3.7 : Fenêtre d'introduction des charges ponctuelles.

### 5.3.2.2. Calcule des matrices masse et rigidité élémentaires :

Après introduction de ces données, les matrices masse et rigidité élémentaires sont calculées automatiquement et s'affichent dans deux fenêtres différentes sous forme de tableaux comme le montrent les figures 5.3.8 et 5.3.9.

0.125	0	0
0	0.3235	0.0098119
0	0.0098119	0.00089199
0	0	0
0	0.048277	0.0058131
0	-0.0058131	-0.00067051

Figure 5.3.8 : Matrice masse élémentaire.

1.9048E7	0	0
0	7624.3	1906.1
0	1906.1	635.24
0	0	0
0	7624.3	-1906.1
0	1906.1	317.8

Figure 5.3.9 : Matrice rigidité élémentaire.

**5.3.2.3. Calcul du vecteur charge élémentaire :**

De la même manière que les matrices masse et rigidité, le vecteur charge élémentaire est calculé et affiché (figure 5.3.10).

205.61
3.5448
495.2
205.61
-3.5448

Figure 5.3.10 : Vecteur charge élémentaire.

**5.3.2.4. Assemblage des matrices masse et rigidité et du vecteur charge :**

Suivant le processus défini dans les chapitres précédents, les matrices masse et rigidité ainsi que les vecteurs charges élémentaires sont assemblés automatiquement pour obtenir les matrices et vecteurs globaux.

Les matrices et vecteurs obtenus sont affichés dans des fenêtres sous forme de tableaux comme le montrent les figures 5.3.11, 5.3.12 et 5.3.13.

	1	2	3
1	0.125	0	0
2	0	0.3235	0.0098119
3	0	0.0098119	0.00089199

Figure 5.3.11 : Matrice masse globale.

	1	2	3
1	304827	0	0
2	0	7624.3	1906.1
3	0	1906.1	625.24

Figure 5.3.12 : Matrice rigidité globale.

1	495.1
2	205.61
3	3.5448
4	990.4

Figure 5.3.13 : Vecteur charge global.

### 5.3.2.5. Introduction des coefficients de l'amortissement structural :

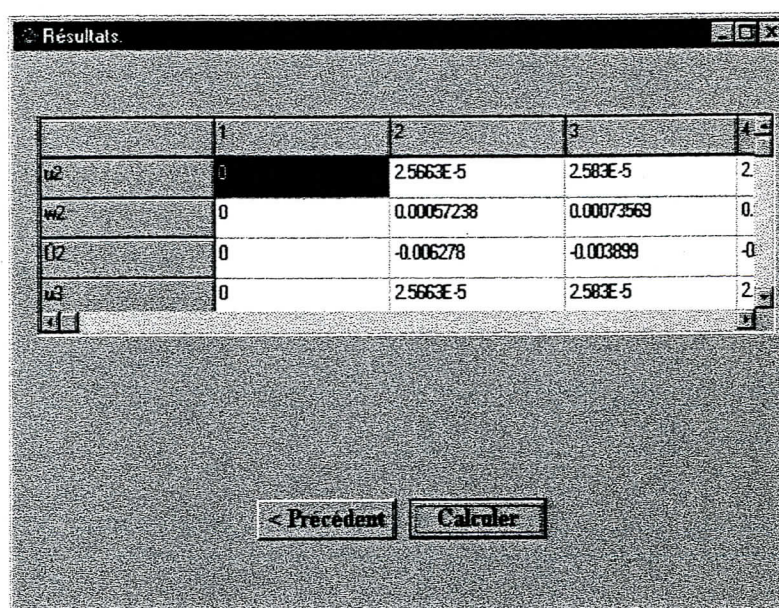
Les coefficients de l'amortissement doivent être introduits dans une autre fiche (figure 5.3.14).

Le pas de temps doit être introduit pour la résolution du système d'équations, voir les chapitres précédents, par la méthode de Newmark.

Figure 5.3.14 : Introduction des coefficients de l'amortissement structural.

**5.3.2.7. Affichage des résultats :**

Après l'introduction des conditions aux limites, les résultats s'affichent dans une autre fenêtre (figure 5.3.16) sous forme de tableau. On peut naviguer sur ce tableau pour consulter les déplacements aux nœuds de la poutre.



	1	2	3	4
u2	0	2.5663E-5	2.583E-5	2
w2	0	0.00057238	0.00073569	0
02	0	-0.006278	-0.003899	-0
u3	0	2.5663E-5	2.583E-5	2

< Précédent    Calculer

Figure 5.3.16 : Affichage des résultats.



### 6.1. Introduction

Ce chapitre est consacré à la validation et la comparaison des résultats obtenus en introduisant l'effet de l'amortissement structural et la piézoélectricité du matériau.

Le comportement des poutres dépend de plusieurs paramètres dont certains sont souvent négligés. Pour savoir si un paramètre peut être négligé, nous devons étudier son influence sur le comportement de la poutre.

Les paramètres qui ont été traités sont :

- La variation du coefficient d'amortissement structural.
- L'épaisseur de la pièce piézoélectrique.
- La longueur de la pièce piézoélectrique.
- La nature des conditions aux limites.

### 6.2. Validation du programme

Pour la validation de notre programme (I.A.S.E.P.V.P.), nous avons comparé l'amplitude maximale de déplacement obtenue pour une poutre en console avec les résultats obtenus par le model de M. Sunar et S. S. Rao [56].

Le déplacement vertical dans le modèle de M. Sunar et S. S. Rao est donné par la formule suivante :

$$w(x) = \frac{de_{31}(h+h_p)V}{2(EI + E_p I_p)} x^2 \quad (6.1)$$

où :  $e_{31}$  est une constante piézoélectrique.

$h$  est l'épaisseur de la poutre.

$h_p$  est l'épaisseur de la pièce piézoélectrique.

$V$  est le voltage appliqué entre les pièces piézoélectriques.

$E$  et  $E_p$  sont respectivement les modules de Young de la poutre et de la pièce piézoélectrique

$I$  et  $I_p$  sont respectivement les moments d'inertie de la poutre et de la pièce piézoélectrique

Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau suivant :

Modèle [56]	Présente analyse	
	Nombre d'éléments	Déplacement w[m]
0.0030689828	4	0.0031585552
	8	0.0030748958
	12	0.003069089
	16	0.0030686962
	20	0.0030686696
	24	0.0030686678

Tableau 6.1 : déplacement w[m].

Ces résultats sont également représentés dans la figure 6.1. On observe que l'erreur en fonction du nombre d'éléments, varie de 0.009% à 3%.

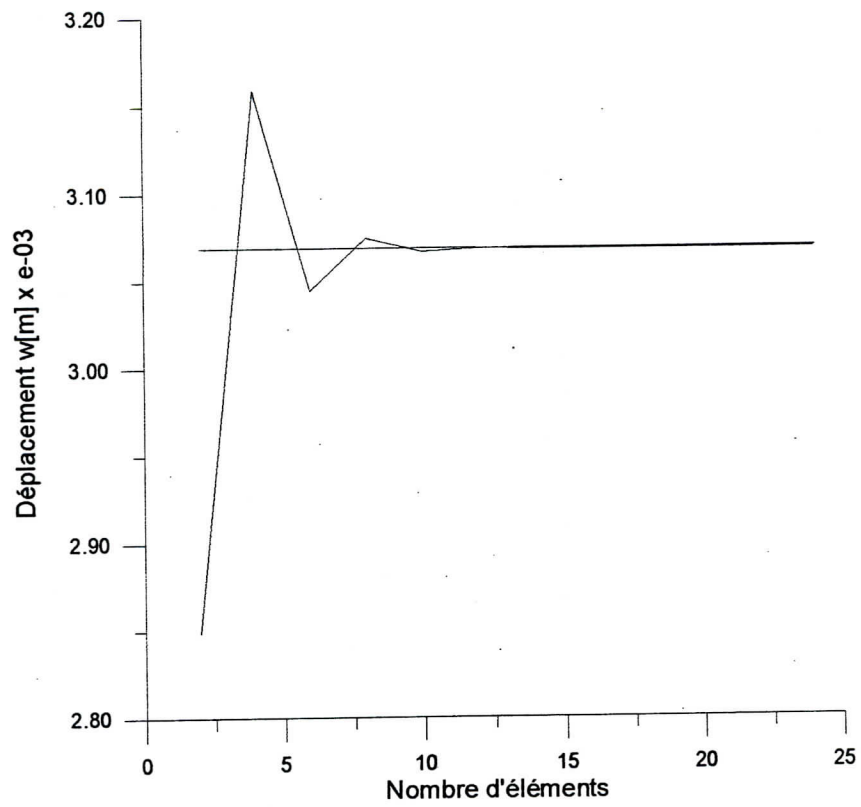


Figure 6.1 : déplacement  $w$  [m].

- Présente analyse.
- Modèle [7].

### **6.3. Influence de l'amortissement structural**

Les graphes (6.2 a-b, 6.3 a-b, 6.4 a-b, 6.5 a-b) représentent les variations des amplitudes maximales de déplacement et de rotation, au centre d'une poutre de section carrée soumise à une charge répartie, en fonction du coefficient de l'amortissement structural.

Ces résultats sont obtenus pour différentes conditions aux limites.

Le pas de temps pour la méthode de Newmark est égal à 0.001s.

La poutre est discrétisée jusqu'à 24 éléments.

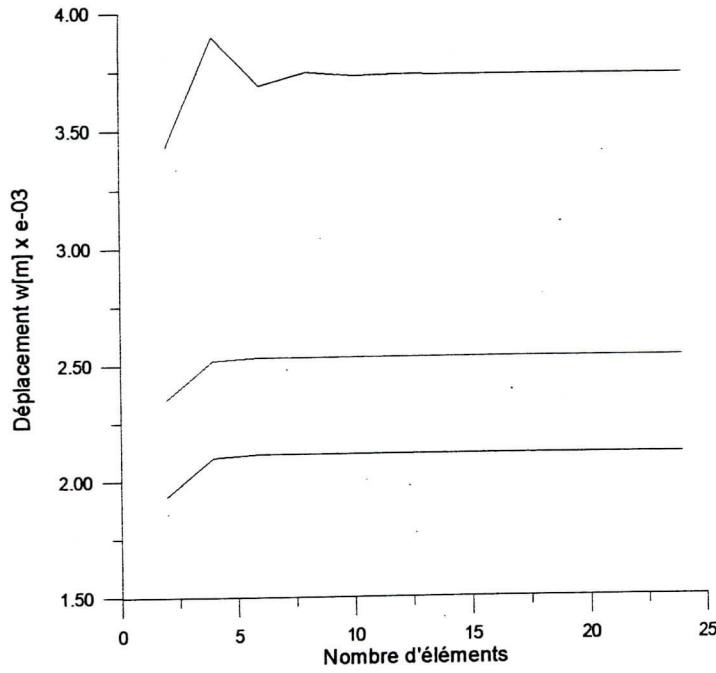


Figure 6.2.a : Déplacement  $w[m]$  en fonction du nombre d'éléments.  
Poutre encastée – libre.

— :  $\alpha_2 = 0.0$ , — :  $\alpha_2 = 0.004$ , — :  $\alpha_2 = 0.008$

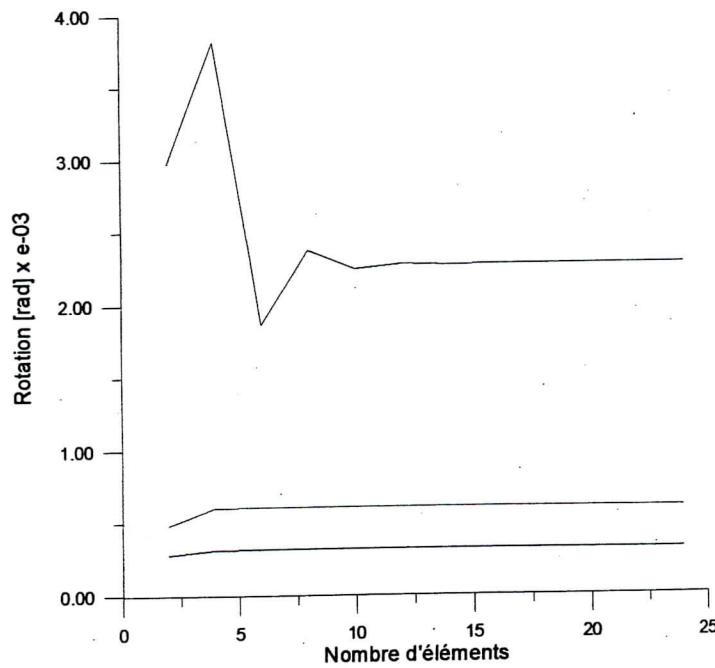


Figure 6.2.b : Rotation  $\psi [rad]$  en fonction du nombre d'éléments.  
Poutre encastée – libre.

— :  $\alpha_2 = 0.0$ , — :  $\alpha_2 = 0.004$ , — :  $\alpha_2 = 0.008$

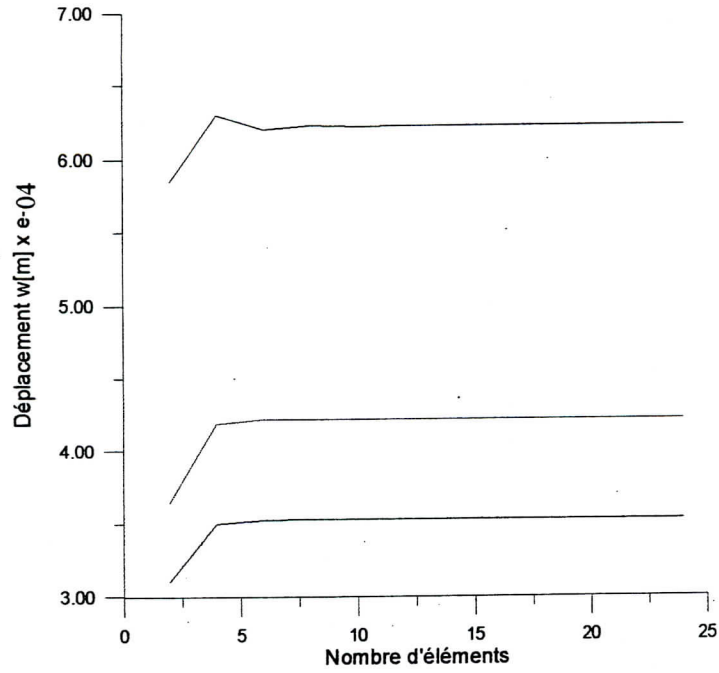


Figure 6.3.a : Déplacement  $w[m]$  en fonction du nombre d'éléments.  
Poutre encastree – encastree.

— :  $\alpha_2 = 0.0$ , — :  $\alpha_2 = 0.004$ , — :  $\alpha_2 = 0.008$

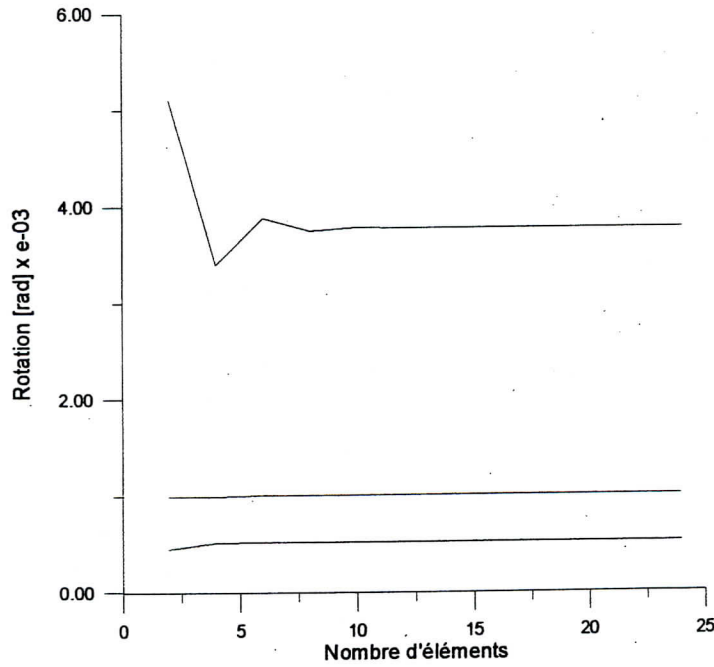
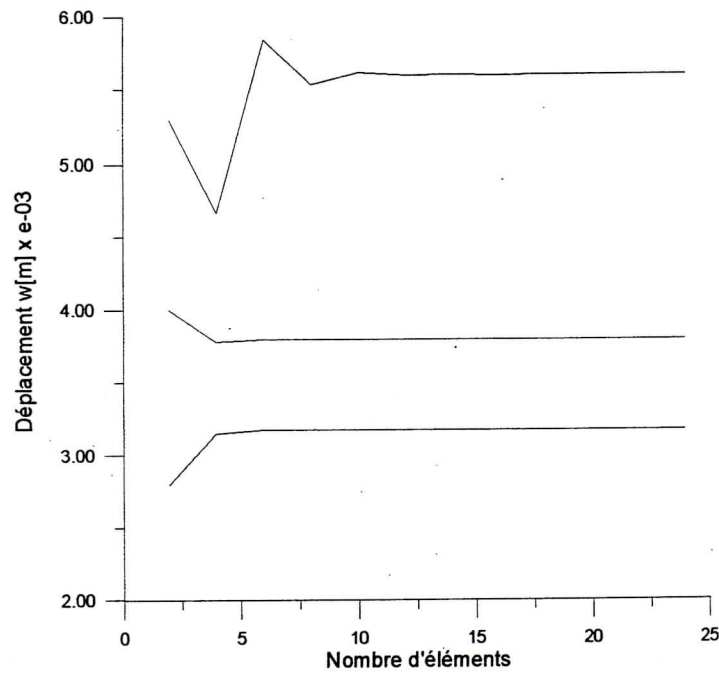


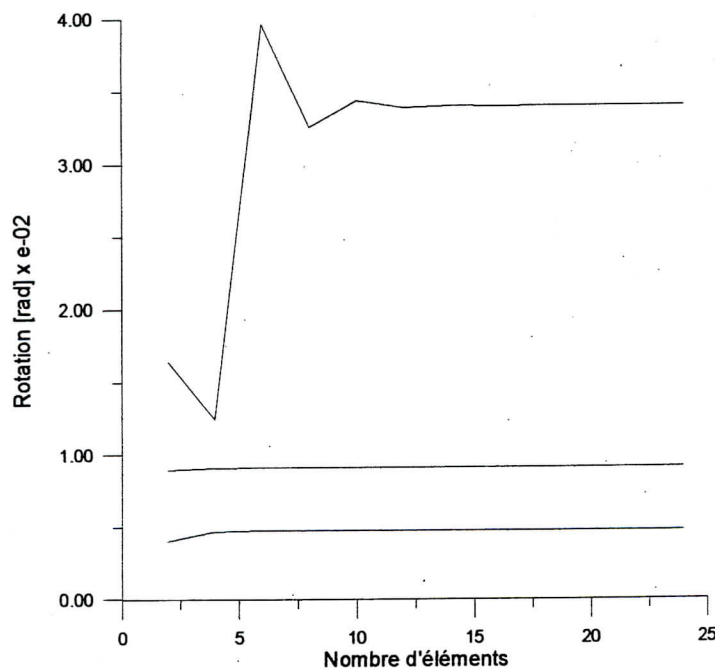
Figure 6.3.b : Rotation  $\psi [rad]$  en fonction du nombre d'éléments.  
Poutre encastree – encastree.

— :  $\alpha_2 = 0.0$ , — :  $\alpha_2 = 0.004$ , — :  $\alpha_2 = 0.008$



**Figure 6.4.a :** Déplacement  $w[m]$  en fonction du nombre d'éléments.  
Poutre appuyée – appuyée.

— :  $\alpha_2 = 0.0$ , — :  $\alpha_2 = 0.004$ , — :  $\alpha_2 = 0.008$



**Figure 6.4.b :** Rotation  $\psi [rad]$  en fonction du nombre d'éléments.  
Poutre appuyée – appuyée.

— :  $\alpha_2 = 0.0$ , — :  $\alpha_2 = 0.004$ , — :  $\alpha_2 = 0.008$ .

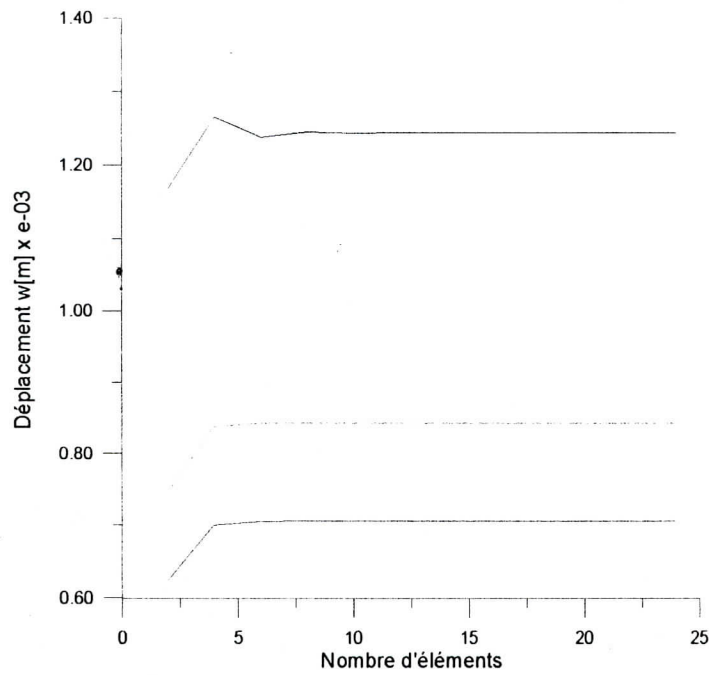


Figure 6.5.a : Déplacement  $w[m]$  en fonction du nombre d'éléments.  
Poutre encastree – appuyée.

— :  $\alpha_2 = 0.0$ , - - :  $\alpha_2 = 0.004$ , - . - :  $\alpha_2 = 0.008$

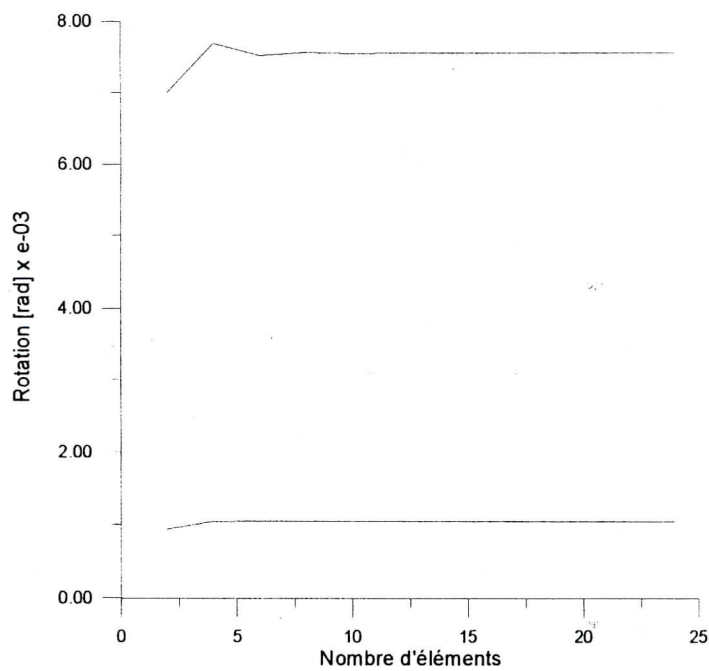


Figure 6.5.b : Rotation  $\psi [rad]$  en fonction du nombre d'éléments.  
Poutre encastree – appuyée.

— :  $\alpha_2 = 0.0$ , - - :  $\alpha_2 = 0.004$ , - . - :  $\alpha_2 = 0.008$



On remarque, à partir de ces résultats, une diminution de l'amplitude de déplacement de 32 à 43% et une diminution de l'amplitude de rotation de 73 à 80% pour les coefficients d'amortissement respectivement de 0.004 et 0.008.

On remarque que les résultats sont instables jusqu'à un certain nombre d'éléments et que l'amortissement a un effet stabilisant sur ces résultats.

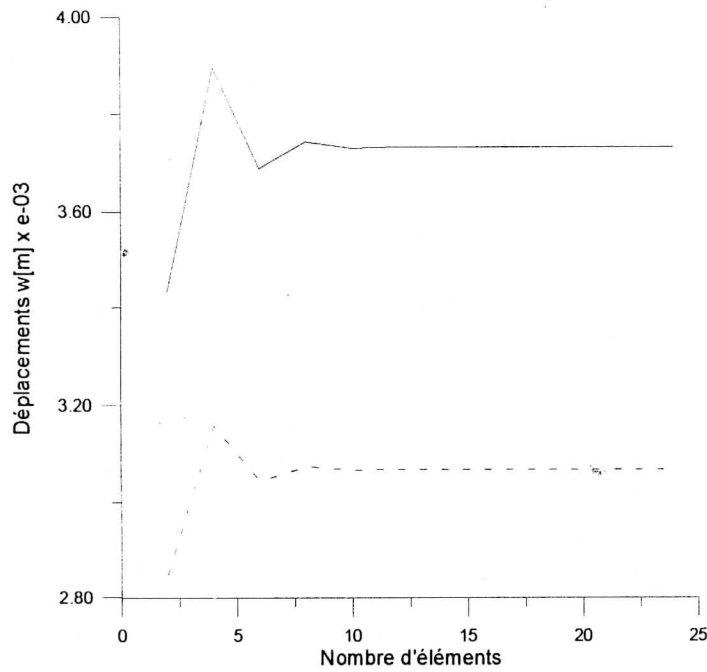
#### 6.4. Influence de l'effet piézoélectrique

Nous verrons dans ce paragraphe la contribution de l'effet piézoélectrique pour la diminution des amplitudes de déplacement et de rotation.

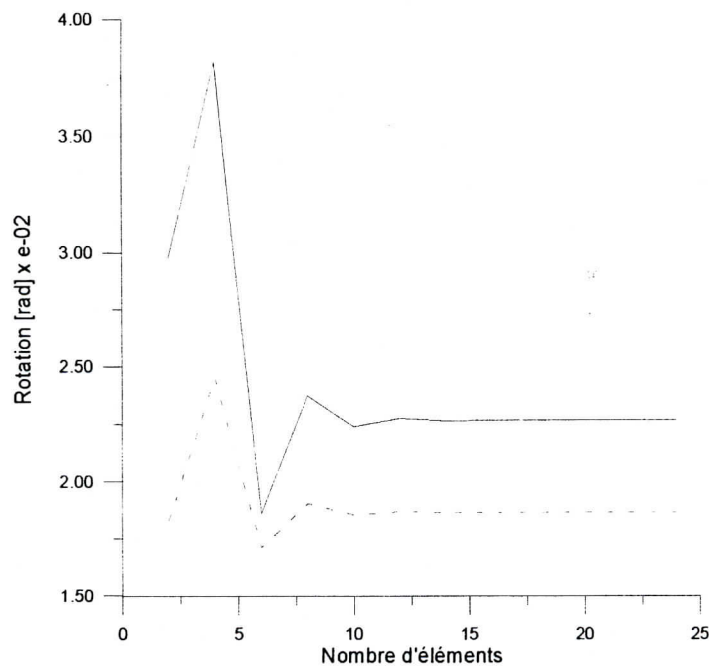
Les graphes (6.6 a-b, 6.7 a-b, 6.8 a-b, 6.9 a-b) représentent les amplitudes maximales de déplacement et de rotation au milieu de la poutre en prenant en considération l'effet piézoélectrique.

La poutre est soumise à une charge uniformément répartie, et est discrétisée jusqu'à 24 éléments.

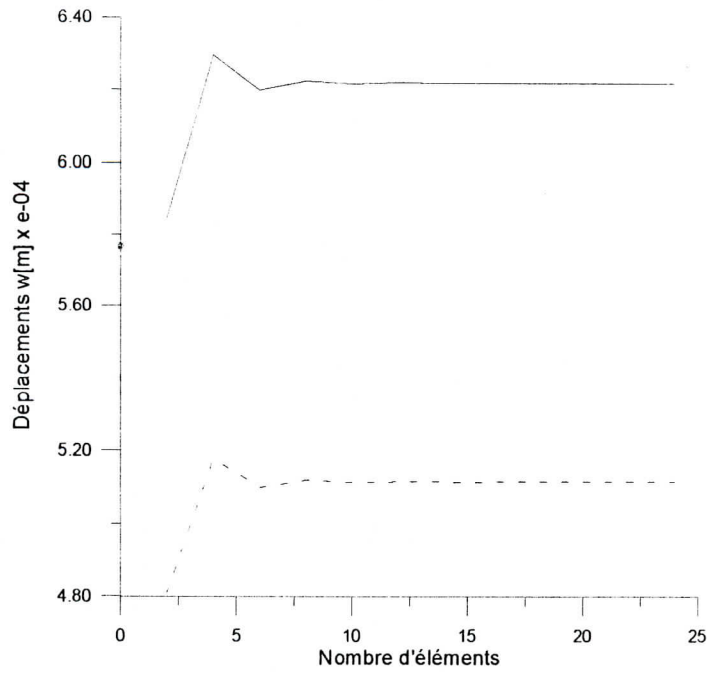
Le pas de temps est pris égal à 0.001s pour la résolution avec la méthode de Newmark.



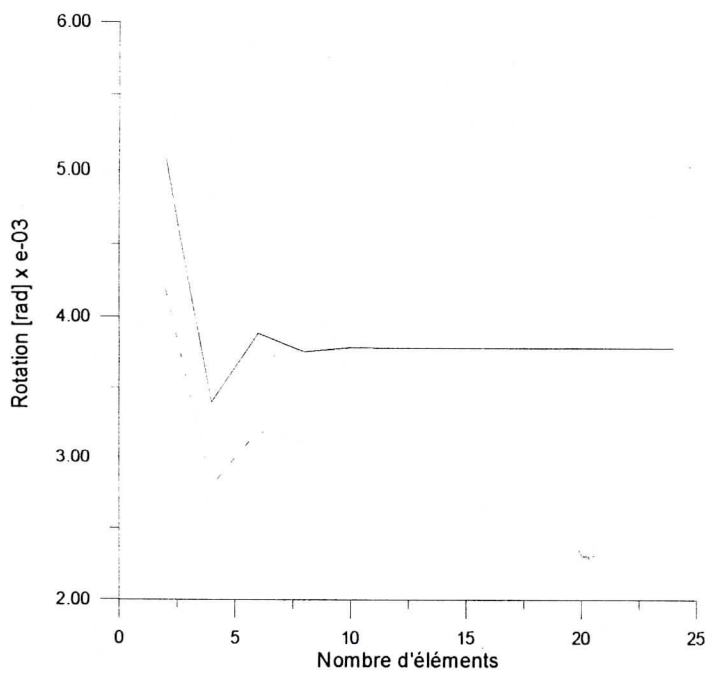
**Figure 6.6.a** : Déplacement  $w[m]$  en fonction du nombre d'éléments.  
 Poutre encastée – libre.  
 — : sans effet piézoélectrique ; --- : avec effet piézoélectrique



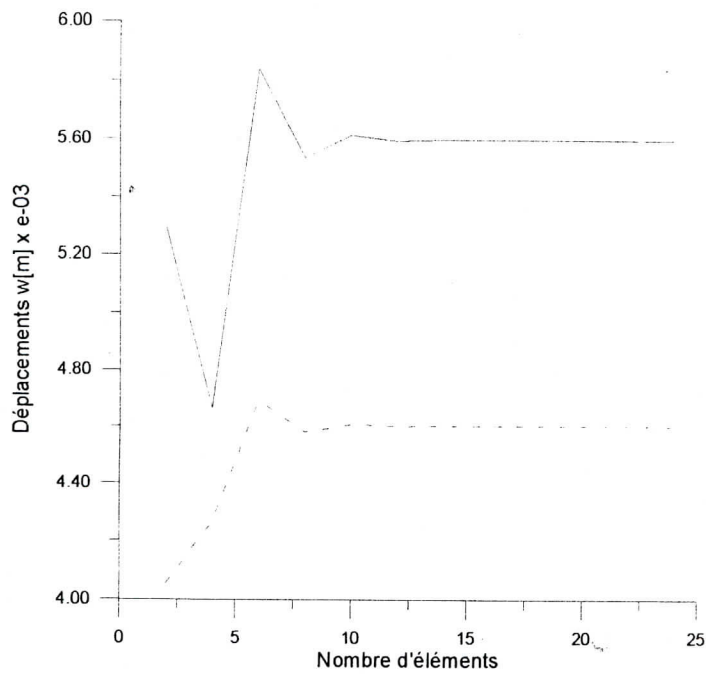
**Figure 6.6.b** : Rotation  $\psi$  [rad] en fonction du nombre d'éléments.  
 Poutre encastée – libre.  
 — : sans effet piézoélectrique ; --- : avec effet piézoélectrique



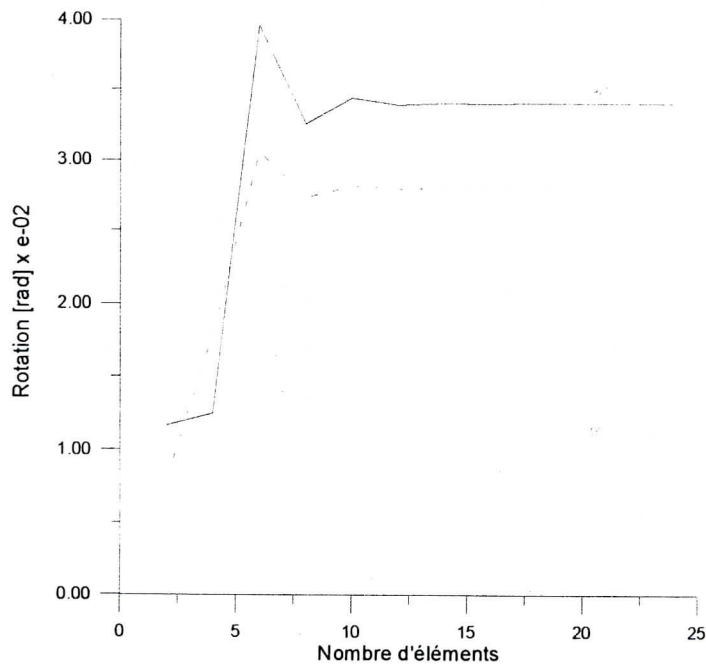
**Figure 6.7.a :** Déplacement  $w[m]$  en fonction du nombre d'éléments.  
Poutre encastree – encastree.  
--- : sans effet piézoélectrique ; --- : avec effet piézoélectrique



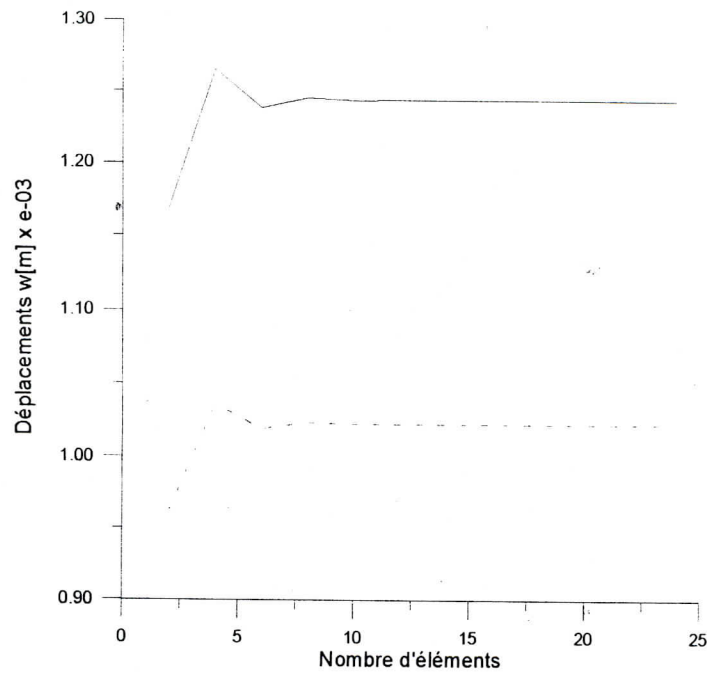
**Figure 6.7.b :** Rotation  $\psi$  [rad] en fonction du nombre d'éléments.  
Poutre encastree – encastree.  
— : sans effet piézoélectrique ; --- : avec effet piézoélectrique



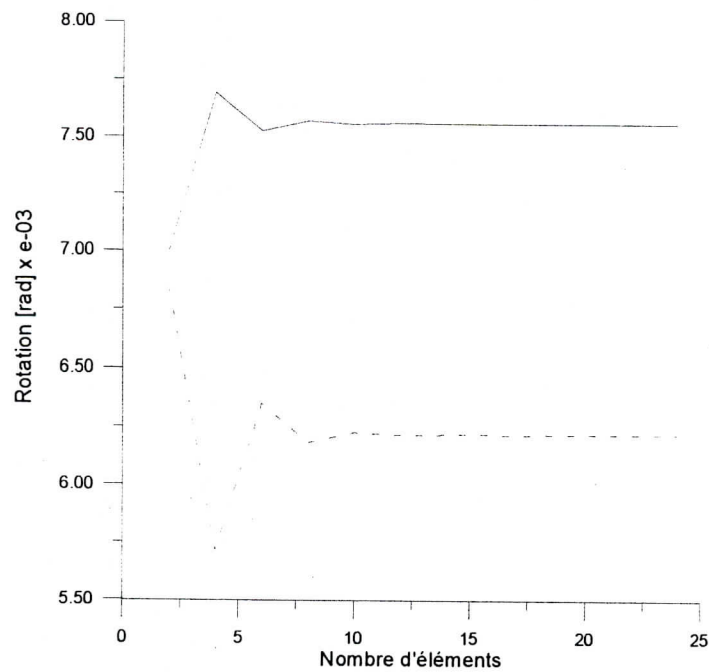
**Figure 6.8.a** : Déplacement  $w[m]$  en fonction du nombre d'éléments.  
 Poutre appuyée – appuyée.  
 — : sans effet piézoélectrique ; --- : avec effet piézoélectrique



**Figure 6.8.b** : Rotation  $\psi [rad]$  en fonction du nombre d'éléments.  
 Poutre appuyée – appuyée.  
 — : sans effet piézoélectrique ; --- : avec effet piézoélectrique



**Figure 6.9.a** : Déplacement  $w[m]$  en fonction du nombre d'éléments.  
 Poutre encastree – appuyée.  
 — : sans effet piézoélectrique ; --- : avec effet piézoélectrique



**Figure 6.9.b** : Rotation  $\psi$  [rad] en fonction du nombre d'éléments.  
 Poutre encastree – appuyée.  
 — : sans effet piézoélectrique ; --- : avec effet piézoélectrique

Pour une constante de charge de l'ordre de  $(-6.5 \cdot 10^{-12} \text{ m/V})$ , on constate une diminution de 20% des amplitudes de déplacement et de rotation.

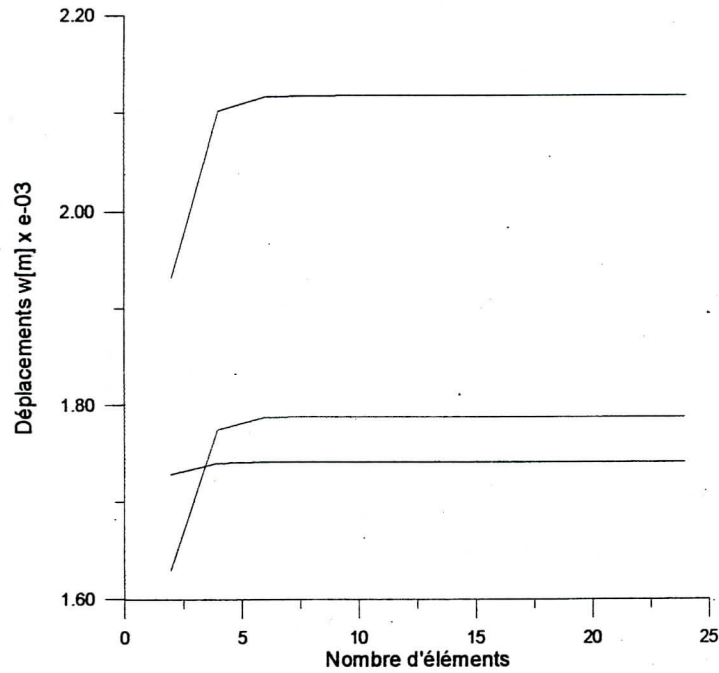
**6.5. Influence de la longueur de la pièce piézoélectrique**

Les graphes (6.10 a-b, 6.11 a-b, 6.12 a-b, 6.13 a-b) représentent l'influence de la longueur de la poutre sur les amplitudes de déplacement et de rotation.

Les amplitudes de déplacement et de rotation sont calculées au centre de la poutre soumise à une charge uniformément répartie.

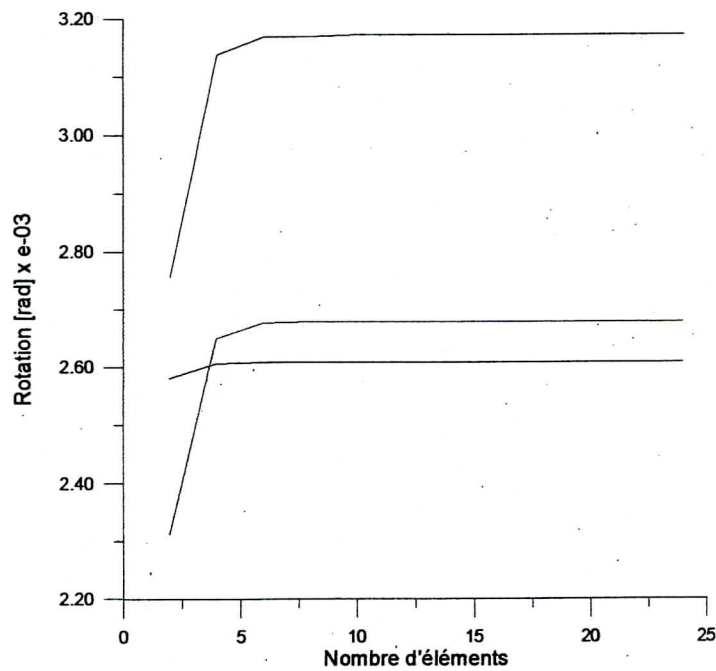
Comme précédemment, le pas de temps pour la méthode de Newmark est pris égal à 0.001s.





**Figure 6.10.a** : Déplacement  $w[m]$  en fonction du nombre d'éléments.  
Poutre encastree – libre.

— :  $L_p = L$ , — :  $L_p = 0.8L$ , — :  $L_p = 0.4L$



**Figure 6.10.b** : Rotation  $\psi [rad]$  en fonction du nombre d'éléments.  
Poutre encastree – libre.

— :  $L_p = L$ , — :  $L_p = 0.8L$ , — :  $L_p = 0.4L$

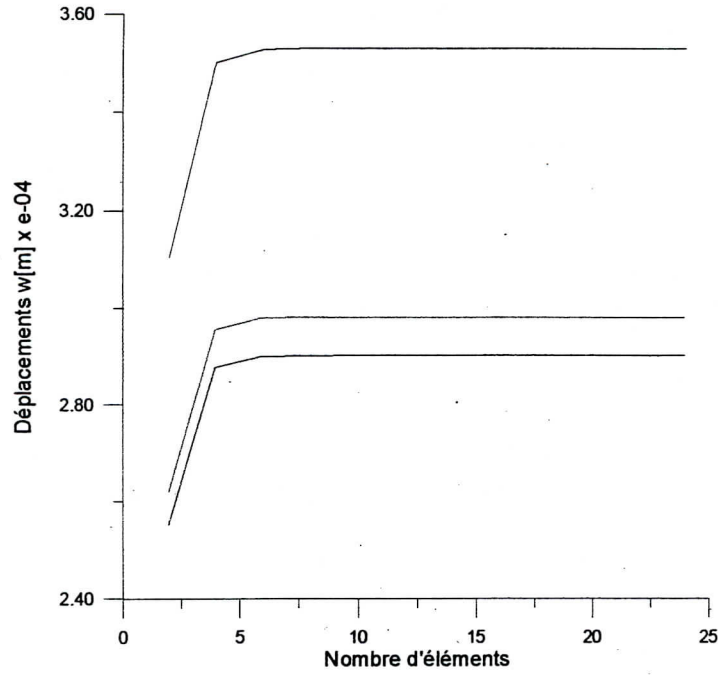


Figure 6.11.a : Déplacement  $w[m]$  en fonction du nombre d'éléments.  
Poutre encastree – encastree.

— :  $L_p = L$ , — :  $L_p = 0.8L$ , — :  $L_p = 0.4L$

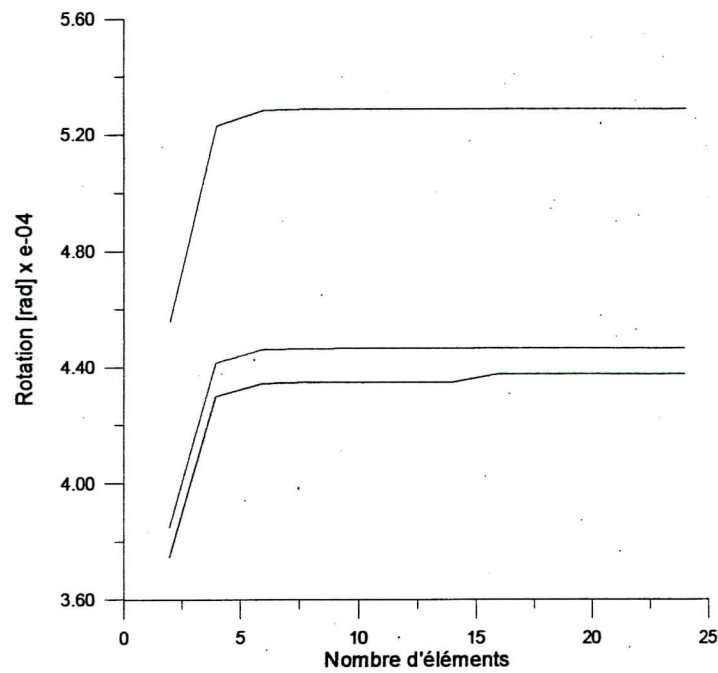


Figure 6.11.b : Rotation  $\psi$  [rad] en fonction du nombre d'éléments.  
Poutre encastree – encastree.

— :  $L_p = L$ , — :  $L_p = 0.8L$ , — :  $L_p = 0.4L$

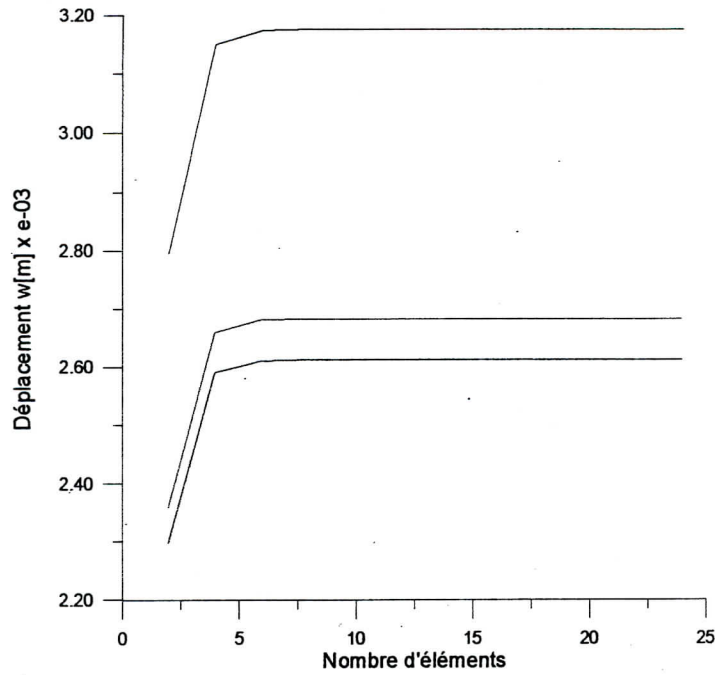


Figure 6.12.a : Déplacement  $w[m]$  en fonction du nombre d'éléments.  
Poutre appuyée – appuyée.

— :  $L_p = L$ , — :  $L_p = 0.8L$ , — :  $L_p = 0.4L$

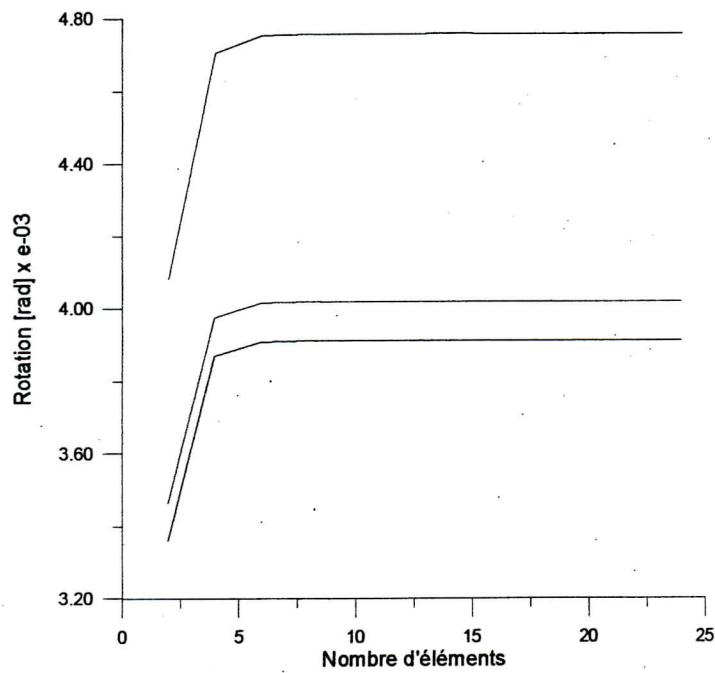


Figure 6.12.b : Rotation  $\psi$  [rad] en fonction du nombre d'éléments.  
Poutre appuyée – appuyée.

— :  $L_p = L$ , — :  $L_p = 0.8L$ , — :  $L_p = 0.4L$

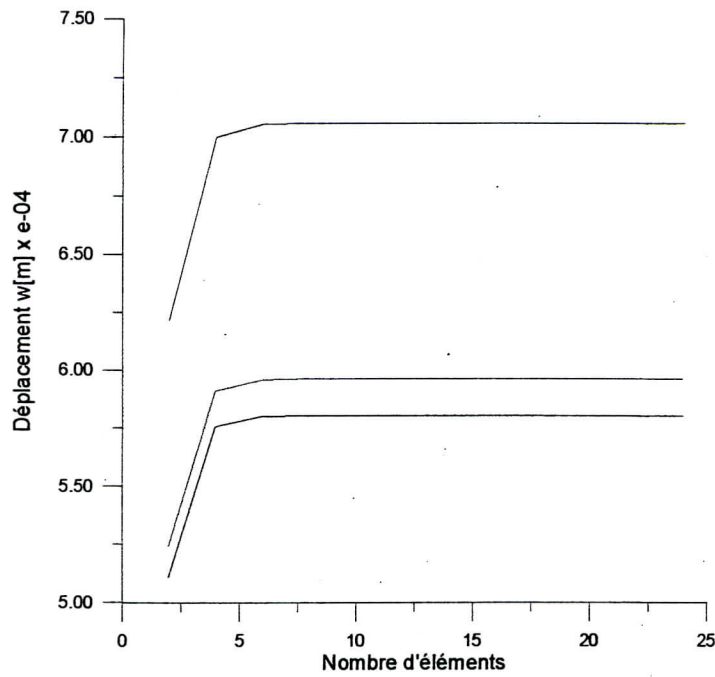


Figure 6.13.a : Déplacement  $w[m]$  en fonction du nombre d'éléments.

Poutre encastée – appuyée.

— :  $L_p = L$ , — :  $L_p = 0.8L$ , — :  $L_p = 0.4L$

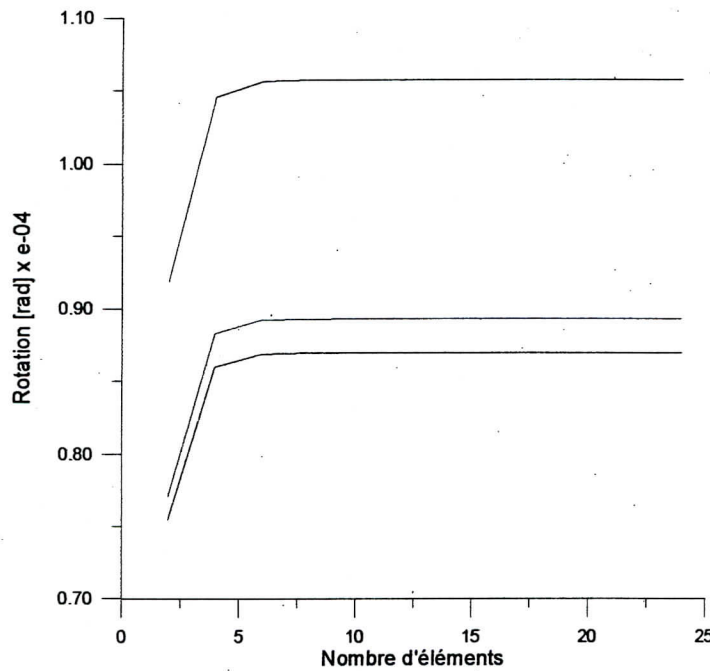


Figure 6.13.b : Rotation  $\psi [rad]$  en fonction du nombre d'éléments.

Poutre encastée – appuyée.

— :  $L_p = L$ , — :  $L_p = 0.8L$ , — :  $L_p = 0.4L$

On remarque une augmentation des amplitudes de déplacement et de rotation en augmentant la longueur de la pièce piézoélectrique. Cela peut s'expliquer par le fait que le vecteur charge dû à l'élément piézoélectrique tend vers zéro quand la longueur de la pièce piézoélectrique tend vers la longueur de la poutre.

Ces résultats concordent bien, donc, avec les résultats obtenus par K. Chadrashekhara et P. Donthireddy. [25]

### **6.6. Influence de l'épaisseur de la pièce piézoélectrique**

Pour étudier l'influence de la pièce piézoélectrique, on calcul les amplitudes maximales de déplacement et de rotation au centre d'une poutre soumise à une charge uniformément répartie.

Les graphes (6.14 a-b, 6.15 a-b, 6.16 a-b, 6.17 a-b) représentent l'influence de l'épaisseur de la poutre sur les amplitudes de déplacement et de rotation.

Le pas de temps pour la résolution avec la méthode de Newmark est pris égal à 0.001s.

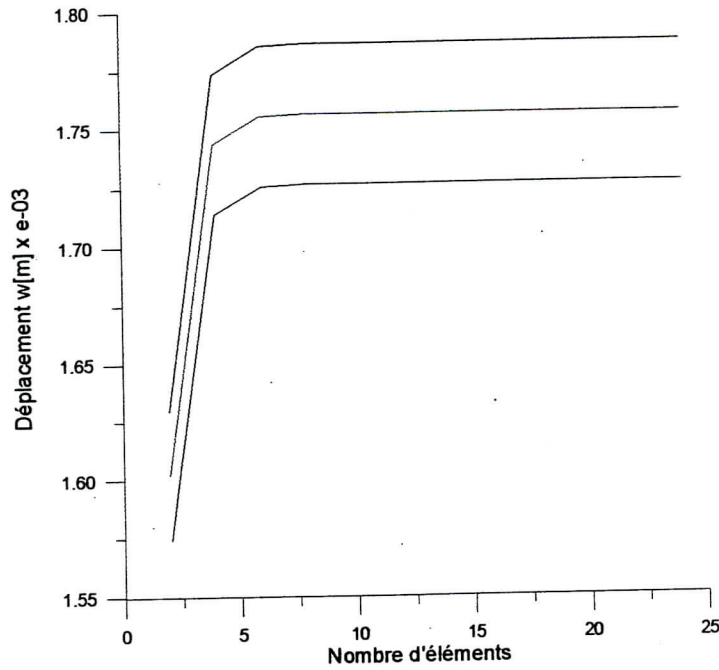


Figure 6.14.a : Déplacement  $w[m]$  en fonction du nombre d'éléments.  
Poutre encastée – libre.

— :  $h_p = 0.6h$ , — :  $h_p = 0.4h$ , — :  $h_p = 0.2h$

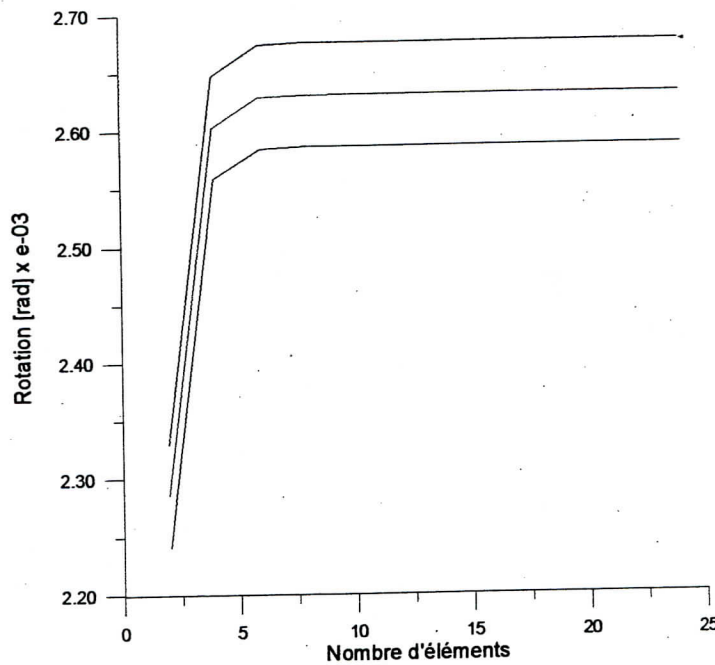
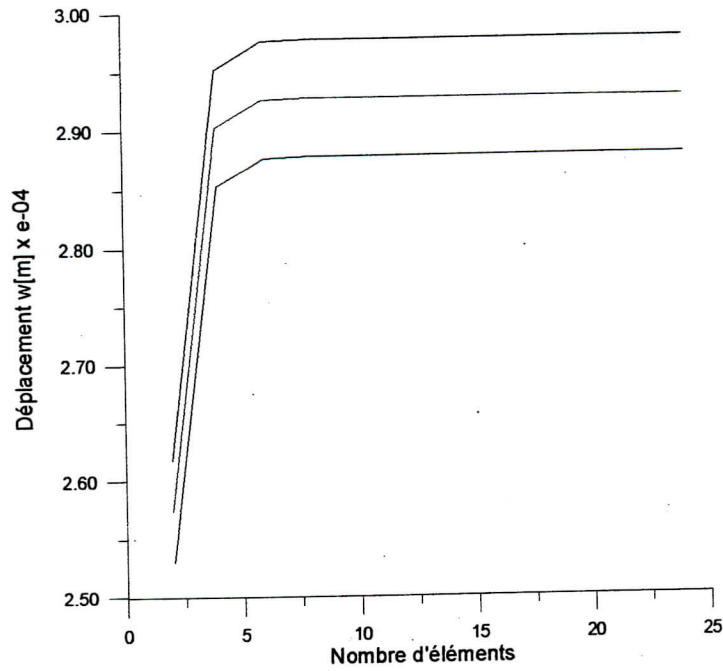


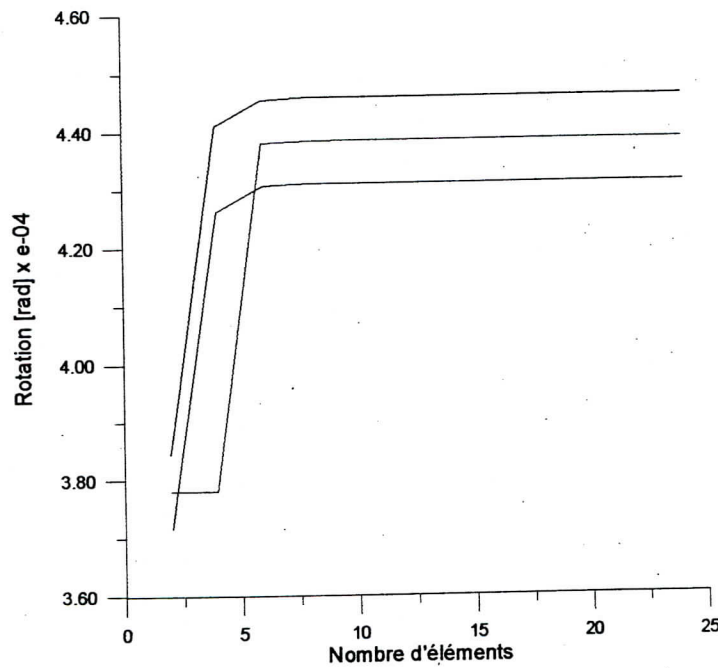
Figure 6.14.b : Rotation  $\psi [rad]$  en fonction du nombre d'éléments.  
Poutre encastée – libre.

— :  $h_p = 0.6h$ , — :  $h_p = 0.4h$ , — :  $h_p = 0.2h$



**Figure 6.15.a :** Déplacement  $w[m]$  en fonction du nombre d'éléments.  
Poutre encastree – encastree.

— :  $h_p = 0.6h$ , — :  $h_p = 0.4h$ , — :  $h_p = 0.2h$



**Figure 6.15.b :** Rotation  $\psi$  [rad] en fonction du nombre d'éléments.  
Poutre encastree – encastree.

— :  $h_p = 0.6h$ , — :  $h_p = 0.4h$ , — :  $h_p = 0.2h$



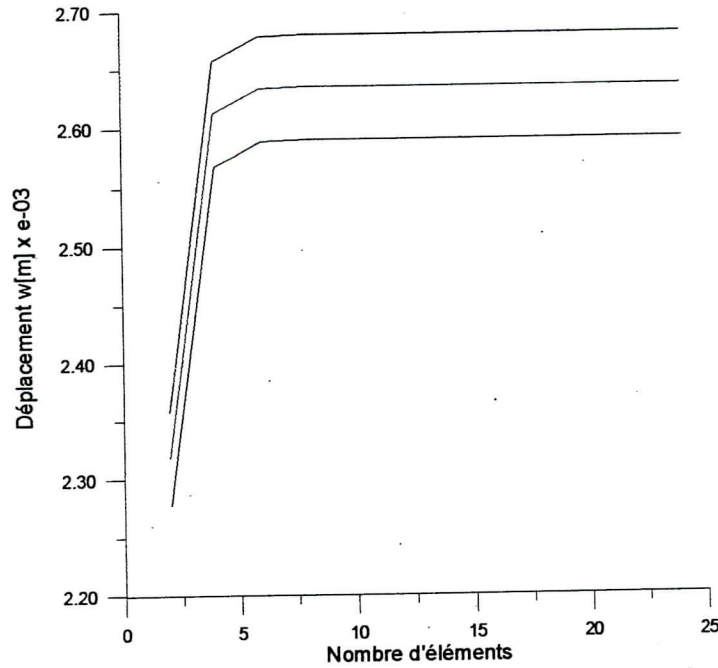


Figure 6.16.a : Déplacement  $w[m]$  en fonction du nombre d'éléments.  
Poutre appuyée – appuyée.

— :  $h_p = 0.6h$ , — :  $h_p = 0.4h$ , — :  $h_p = 0.2h$

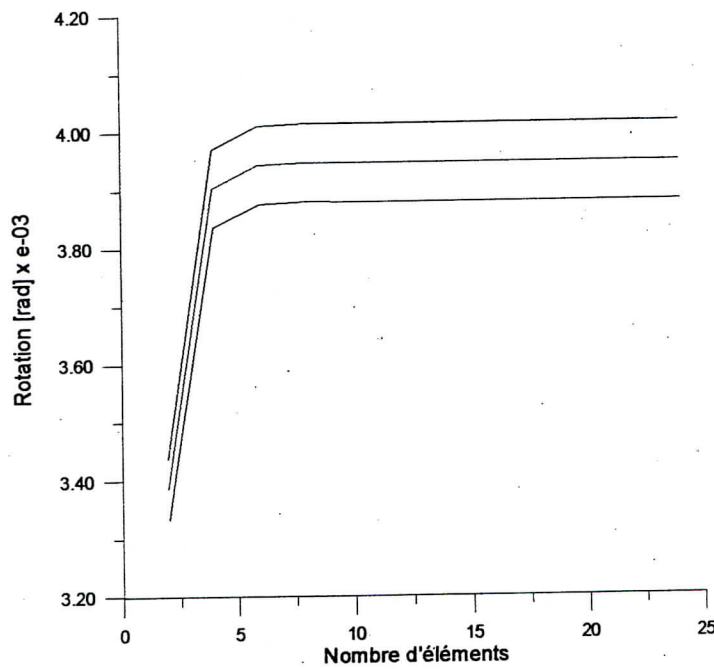
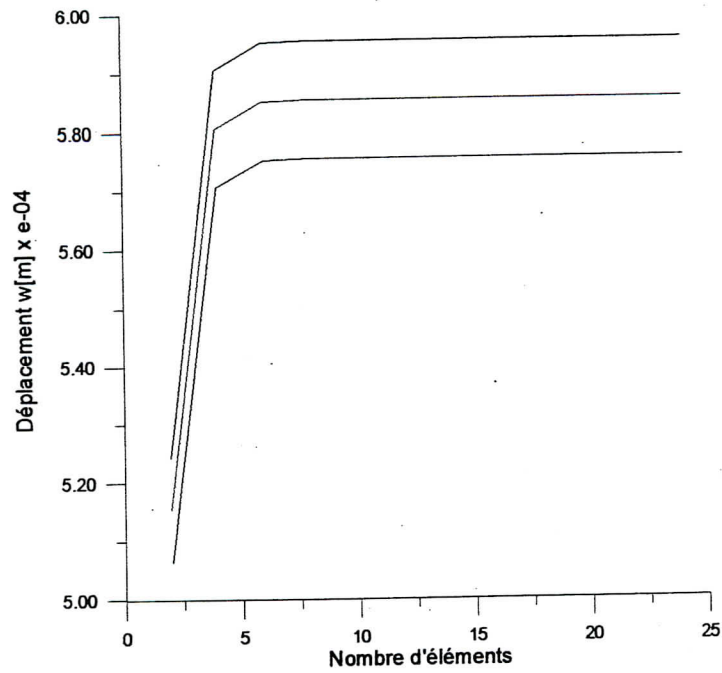


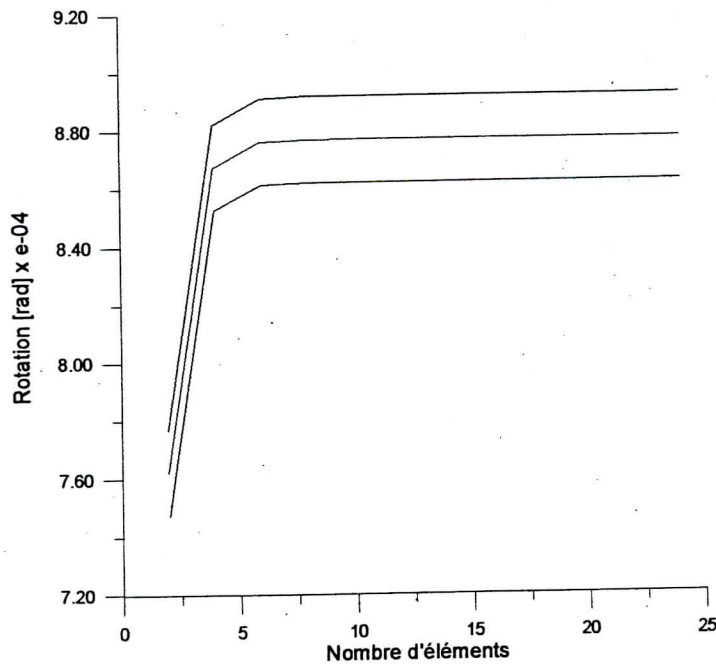
Figure 6.16.b: Rotation  $\psi$  [rad] en fonction du nombre d'éléments.  
Poutre appuyée – appuyée.

— :  $h_p = 0.6h$ , — :  $h_p = 0.4h$ , — :  $h_p = 0.2h$



**Figure 6.17.a :** Déplacement  $w[m]$  en fonction du nombre d'éléments.  
Poutre encastree – appuyée.

— :  $h_p = 0.6h$ , — :  $h_p = 0.4h$ , — :  $h_p = 0.2h$



**Figure 6.17.b :** Rotation  $\psi$  [rad] en fonction du nombre d'éléments.  
Poutre encastree – appuyée.

— :  $h_p = 0.6h$ , — :  $h_p = 0.4h$ , — :  $h_p = 0.2h$

On remarque une légère diminution des amplitudes de déplacement et de rotation pour des épaisseurs de la pièce piézoélectrique de  $h_p = (0.2 \div 0.6)h$

Ceci est dû à l'augmentation du vecteur charge due à l'élément piézoélectrique en augmentant l'épaisseur de la pièce piézoélectrique ce qui diminue le vecteur charge global.

# CONCLUSION



## Conclusion

Dans ce mémoire, on se préoccupe particulièrement de l'étude et de l'analyse de l'influence de l'amortissement structural dans le cas des poutres avec des actionneurs et capteurs piézoélectriques.

Les effets du cisaillement et des déformations latérales sont pris en considération.

Une formulation par éléments finis basée sur la théorie de Kirchoff est utilisée pour l'étude des poutres avec différentes conditions aux limites.

La méthode de Newmark est utilisée pour la résolution du système d'équations obtenu.

Un programme en langage DELPHI 3, est présenté pour le calcul des déplacements et des rotations.

Les résultats obtenus sont présentés sous formes de graphes.

Pour la validation, on comparé les résultats obtenus pour l'amplitude maximale de déplacement pour une poutre en console avec ceux du modèle de M. Sunar et S. S. Rao [56]. L'erreur observée, en fonction du nombre d'éléments, varie de 0.009% à 3%.

On a fait varier différents paramètres pour analyser leur influence sur le comportement de la poutre : le coefficient de l'amortissement structural, l'épaisseur et la longueur de la pièce piézoélectrique avec différentes conditions aux limites.

Pour une variation du coefficient d'amortissement structural de 0.004 à 0.008, on observe une diminution des amplitudes maximales de déplacement de 32 à 43% et de rotation de 73 à 80%.

Pour une constante de charge de l'ordre de  $(-6.5 \cdot 10^{-12} \text{ m/V})$ , on constate une diminution de 20% des amplitudes de déplacement et de rotation.

On remarque pour les amplitudes de déplacement et de rotation :

- une variation (augmentation, diminution) en fonction de la longueur de la pièce piézoélectrique.

- une légère diminution pour des épaisseurs de la pièce piézoélectrique variant entre les valeurs de  $h_p = (0.2 \div 0.6)h$ .

Ces résultats concordent bien avec les résultats obtenus par K. Chadrashekhara et P. Donthireddy [25].

Ce modeste travail peut être enrichi en considérant d'autres phénomènes tels que l'influence de la température dans le cas des poutres. De même, il peut être élargi aux cas des barres et des plaques. On espère que les résultats de ce mémoire puissent servir à de futurs travaux.

# REFERENCES





- [12] P. Beaumier, M. Costes, D. Petot, "Couplage dynamique aérodynamique sur le rotor principal d'hélicoptère" ; Rapport ONERA N° DAAP9914 ; Novembre 1999.
- [13] S. Biwersi, J. F. Manceau, F. Bastien, "Conception et réalisation de micro-moteur piézoélectriques plats" ; Bulletin SSC N° 30 ; 1999.
- [14] H. H. Law, P. L. Rossiter, G. P. Simon and L. L. Koss, "Characterization of mechanical vibration damping by piezoelectric materials.", Journal of Sound and Vibration, Vol 197, N°4 ; 1996.
- [15] K. Shintani and S. Minagawa, "Fields of displacement and electric potential produced by moving dislocations in anisotropic piezoelectric crystals" ; Int. J. Engng. Sci., Vol 26, N° 8 ; 1988.
- [16] I. Legrain, B. Petitjean, "Evaluation de céramiques électrostrictives en vue d'une utilisation en tant qu'actionneurs dans le domaine du contrôle actif de vibration. " ; Rapport ONERA N°9776 ; 1997.
- [17] S. A. Wise, M. W. Hooker, "Characterization of multilayer piezoelectric actuators for use in active isolation mounts" ; NASA Technical Memorandum 4742 ; Mars 1997.
- [18] M. W. Hooker, "Properties of PZT-based piezoelectric ceramics between 150 and 250°C" ; NASA/CR 1998-208708 ; Septembre 1998.
- [19] Z. Ounaies, J. A. Young, J. S. Harrison, "Design requirements for amorphous piezoelectric polymers" ; NASA/TM 1999-209359 ; Aout 1999.
- [20] T. Jordan, Z. Ounaies, J. Tripp and P. Tcheng, "Electrical properties and power considerations of a piezoelectric actuator" ; ICASE Repport N° 2000-8 ; 2000
- [21] B. T. Wang, R. A. Burdisson, C. R. Fuller, "Optimal placement of piezoelectric actuators for active structural acoustic control" ; Journal of intelligent materials and structures, Vol. 5, N° 1 ; 1994.
- [22] V. V. Varadan, J. Kim and V. K. Varadan, "Optimal placement of piezoelectric actuators for active noise controle" ; AIAA Journal, Vol. 35, N°3 ; 1997.

- [23] B. Camus, J. -L. Petitniot, H. -M. des Rochettes, "Matériaux et actionneurs pour le contrôle de forme des structures" ; Rapport ONERA N° DMSE9942 ; Septembre 1999
- [24] D. Sun, D. Wang and Z. L. Xu, "Distributed piezoelectric segment method for vibration control of smart beams" ; AIAA Journal, Vol 35 N°3 ; 1996
- [25] K. Chandrashekhara and P. Donthireddy, "Vibration suppression of composite beams with devices using a higher order theory" ; European Journal Of Mechanics. A/Solids, Vol 16 N°4, 1997
- [26] M. Bernadou et C. Haenel, "Quelques remarques sur les coques piézoélectriques" ; rapport de recherche n° 2367, INRIA ; 1994.
- [27] S. Yang and W. Huang, " Piezoelectric constitutive equations for a plate shape Sensor/Actuator" ; AIAA Journal, Vol 35 N° 12, 1997
- [28] V. Piéfort, N. Loix and A. Preumont, "Modeling of piezolaminated composite shells for vibration controle" ; NASA/TM 1998-352487 ; 1998.
- [29] S. M. Peelamedu, N. G. Naganathan and R. V. Dukkipati, "Active strain transfer analysis in a piezoceramic system using finite element method and experemental work" ; NASA/TM 1999-156892 ; 1999.
- [30] A. A. Berlin, "Toward intelligent structures : Active control of buckling" ; Thèse pour obtenir le grade de Doctor of philosopy ; Massachusetts Institute of technology ; 1994.
- [31] B. Guiffard, "Elaboration et caractérisation de céramiques ferroélectriques de type PZT fluor" ; Thèse pour obtenir le grade de Docteur ; Institut national des sciences appliquées de Lyon ; 1999.
- [32] L. Goujon, "Etude des composites piézoélectriques pour applications électroacoustiques sous-marines" ; Thèse pour obtenir le grade de Docteur ; Institut national des sciences appliquées de Lyon ; 1999.
- [33] E. Defay, "Elaboration et caractérisation de couches minces piézoélectriques de  $Pb(Zr,Ti)O_3$  sur silicium pour applications aux microsystèmes" ; Thèse pour obtenir le grade de Docteur ; Institut national des sciences appliquées de Lyon ; 1999.
- [34] G. Akhras, "Des matériaux intelligents et des systèmes intelligent pour l'avenir" ; Revue militaire canadienne ; 2000.

[35] Z. Ouanaies, "Piezoelectric materials for sensor and actuator applications at NASA LaRC" ; Icase, Vol 8 N° 3 ; 1999.

[36] <http://www.admp6.jussieu.fr/historique.htm>

[37] M. Géradin, D. Rixen, "Théorie des vibrations : Application à la dynamique des structures" ; Edition MASSON ; 1993 ; France.

[38] M. Roseau, "Vibrations des systèmes mécaniques : Méthodes analytiques et applications" ; Edition MASSON ; 1984 ; France.

[39] A. Sène, "Modélisation asymptotique de plaques : contrôlabilité exacte frontière, piézoélectricité " ; Thèse pour obtenir le grade de Docteur ; Université Joseph Fourier – Grenoble I ; 1999.

[40] M. Benachour, "Influence de l'amortissement structural sur les vibrations des plaques" ; Thèse de magistère ; U.S.T.Oran

[41] M. Pavlovski, A. Apostoliouk, "Vibrations dans les appareils et machines" ; Office des publications universitaires ; 1992.

[42] <http://www.lassp.cornell.edu/sethna/hesteresis/hesteresis.htm>

[43] <http://fr.encyclopedia.yahoo.fr>

[44] [http://www.sestechno.com/\\_vti\\_bin/shtml.exe/hysteresis.htm](http://www.sestechno.com/_vti_bin/shtml.exe/hysteresis.htm)

[45] <http://www-ipst.u-strasbg/loic/el-finis/cours elements finis.mht>

[46] O. Rahmani, S. Kebdani, "Introduction à la méthode des éléments finis pour les ingénieurs" ; Office des publications universitaires ; 1994 ; Algérie

[47] <http://www-ipst.u-strasbg/pat/program/langageC.mht>

[48] G. Betz, "Delphi 1, 2 et 3" ; Edition SYBEX ; 1997 ; France

[49] Y. C. Lee et H. Reissman, "dynamique of rectangular plates" ; Int. J. Eng. Science, Volume 07, pp 99-113 ; 1969.

[50] J. Souletie, "Hysteresis and after – effects in massive substances. From the spin – glasses to the sand hill" ; J. Physique ; 1983

[51] R. C. Smith, Z. Ounaies, " A Domain Wall Model for Hysteresis in Piezoelectric Materials " ; ICASE Report No. 99-52 ; 1999.

[52] P. M. Sain, " Models for hysteresis and application to structural control " ; ICASE Report No. 99-72 ; 1999.

[53] Y. Ouled Amor, M. Féliachi, H. Mohellebi, " A new convergence procedure for the finite element computing associated to Preisach hysteresis model" ; Compumag 12eme International Conférence Sapporo Japon 25-26-27-28 octobre, 1999

[54] Y. Ouled Amor, M. Féliachi, " Magnetic hysteresis and its thermal behavior in finite element computing" ; 6th international conférence - ELECTRIMACS99 Lisbonne Portugal 14-15-16 septembre, 1999.

[55] Y. Ouled Amor, M. Féliachi, " Présentation d'une fonction de Lorentz modifiée pour une modélisation de l'hystérésis magnétique" ; IEEE CEFC'2000 ; 2000

[56] M. Sunar, S. S. Rao, " Thermopiezoelectric control design and actuator placement" ; AIAA Journal, Vol. 35, N° 3 ; 1997.

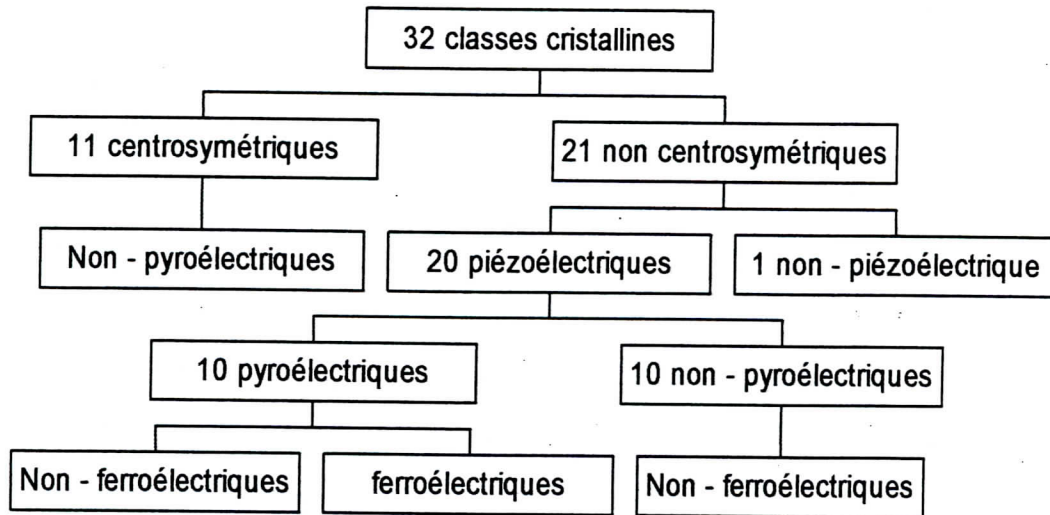
# ANNEXES

# **1. CARACTERISTIQUES DES PZT**

## **1.1. Définition**

L'objet de ce paragraphe est de préciser les termes de piézoélectricité, ferroélectricité et pyroélectricité.

Un milieu cristallin étant composé de particules chargées électriquement, l'apparition de charges de polarisation par déformation mécanique est donc prévisible. Des conditions de symétrie de l'édifice cristallin permettent de connaître les arrangements d'atomes susceptibles de donner un effet piézoélectrique. Le cristal ne doit pas posséder de centre de symétrie ce qui est le cas de 21 classes cristallines sur les 32 existantes. 20 classes sont piézoélectriques : lors de l'application d'une contrainte mécanique, le cristal se déforme et il y a séparation des centres de gravité des charges positives de celui des charges négatives au niveau de chaque maille du réseau cristallin ce qui a pour effet de produire un moment dipolaire. Parmi ces 20 classes, 10 sont pyroélectriques c'est à dire qu'elles possèdent une polarisation électrique en l'absence de champ électrique appliqué. La direction privilégiée de polarisation est appelée axe polaire. Elles sont pyroélectriques en raison de la variation de l'amplitude du moment dipolaire suivant la température qui peut être mesurée par l'écoulement des charges dans un circuit extérieur fermé. Parmi les cristaux pyroélectriques, on peut distinguer les ferroélectriques pour lesquels l'axe polaire, support d'un dipôle permanent, est mobile dans le réseau cristallin sous l'influence d'un champ électrique extérieur. La décomposition des 32 classes cristallines suivant ces différentes dénominations est résumée sur la figure 1.



**Figure 1 :** Regroupement des classes cristallines suivant leurs propriétés piézoélectriques, pyroélectriques et ferroélectriques.

## 1.2. Caractéristiques de quelques PZT

### Céramique PZT P188

Ce type de PZT est un matériau doux de type NAVY II.

Ses caractéristiques sont :

Masse volumique :  $7800 \text{ kg/m}^3$

$$\left[ Q_{ij}^E \right] = \begin{bmatrix} 17.47 & -6.86 & -8.08 & 0 & 0 & 0 \\ -6.86 & 17.47 & -8.08 & 0 & 0 & 0 \\ -8.08 & -8.08 & 20.31 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 49.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 49.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 48.7 \end{bmatrix} \cdot 10^{-12} \left( Pa^{-1} \right)$$

$$\left[ Q_{ij}^D \right] = \begin{bmatrix} 15.08 & -9.25 & -3.03 & 0 & 0 & 0 \\ -9.25 & 15.08 & -3.03 & 0 & 0 & 0 \\ -3.03 & -3.03 & 9.65 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 26.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 26.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 48.7 \end{bmatrix} \cdot 10^{-12} \left( Pa^{-1} \right)$$

$$d_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 615 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 615 & 0 & 0 \\ -202.3 & -202.3 & 427 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-12} \left( C/N \right)$$



**Céramique PZT P189**

Ce type de PZT est un matériau dur de type NAVY III.

Ses caractéristiques sont :

Masse volumique :  $7530 \text{ kg/m}^3$

$$\left[ Q_{ij}^E \right] = \begin{bmatrix} 10.66 & -3.34 & -4.52 & 0 & 0 & 0 \\ -3.34 & 10.66 & -4.52 & 0 & 0 & 0 \\ -4.52 & -4.52 & 13.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 21.77 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21.77 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 28.07 \end{bmatrix} \cdot 10^{-12} (\text{Pa}^{-1})$$

$$\left[ Q_{ij}^D \right] = \begin{bmatrix} 9.52 & -4.48 & -1.99 & 0 & 0 & 0 \\ -4.48 & 9.52 & -1.99 & 0 & 0 & 0 \\ -1.99 & -1.99 & 7.63 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16.04 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16.04 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 28.01 \end{bmatrix} \cdot 10^{-12} (\text{Pa}^{-1})$$

$$d_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 285 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 285 & 0 & 0 \\ -108 & -108 & 240 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-12} (\text{C/N})$$

**Céramique PZT P194**

Ce type de PZT est un matériau doux de type NAVY VI.

Ses caractéristiques sont :

Masse volumique :  $7900 \text{ kg/m}^3$

$$\left[ Q_{ij}^E \right] = \begin{bmatrix} 17.25 & -6.17 & -8.33 & 0 & 0 & 0 \\ -6.17 & 17.25 & -8.33 & 0 & 0 & 0 \\ -8.33 & -8.33 & 18.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30.16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 30.16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 46.8 \end{bmatrix} \cdot 10^{-12} \left( Pa^{-1} \right)$$

$$\left[ Q_{ij}^D \right] = \begin{bmatrix} 14.7 & -8.7 & -3.1 & 0 & 0 & 0 \\ -8.7 & 14.7 & -3.1 & 0 & 0 & 0 \\ -3.1 & -3.1 & 9.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 20.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 46.8 \end{bmatrix} \cdot 10^{-12} \left( Pa^{-1} \right)$$

$$d_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 554 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 554 & 0 & 0 \\ -305 & -305 & 640 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-12} \left( C/N \right)$$

**PZT - 4**Masse volumique : 7900 kg/m<sup>3</sup>

$$[Q_{ij}^D] = \begin{bmatrix} 13.9 & 7.78 & 7.43 & 0 & 0 & 0 \\ 7.78 & 13.9 & 7.43 & 0 & 0 & 0 \\ 7.43 & 7.43 & 11.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.56 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.56 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.06 \end{bmatrix} 10^{10} \left( N/m^2 \right)$$

$$[e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 12.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12.7 & 0 & 0 \\ -5.2 & -5.2 & 15.1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left( C/m^2 \right)$$



### Exemple de céramiques piézoélectriques commercialisées

Dans les tableaux 1 et 2 sont présentés les caractéristiques de quelques céramiques piézoélectriques commercialisées.

Fournisseur	Référence	Densité	$d_{33}$ ( $10^{-12}$ m/V)	$d_{31}$ ( $10^{-12}$ m/V)
Quartz&Silice	P1-88	7.70	425	-186
	P1-94	7.90	640	-305
Morgan Matroc	PC-5H	7.30	620	-250
	PC-5K	8	800	-306
Equipements scientifiques (FUJI)	C9	7.70	600	-300
	C62	7.50	500	-210
	C82	7.40	540	-260
Ferroperm	Pz 29	7.45	575	-240
	Pz 26	7.76	330	-130
	Pz 27	7.70	425	-170
Polytec P. I	PIC 151	7.80	450	-210
	PIC 251	7.75	450	-220
	PIC 255	7.80	400	-180
Ceramtec	Sonox P53	7.83	680	-275
	Sonox P88	7.83	325	-135

Tableau 1 : Caractéristiques de céramiques piézoélectriques pour actionneurs collés.

	PZT 5H	PVDF	PMN	CFA
Type d'actionneur	Céramique piézoélectrique	Film piézoélectrique	Céramique électrostrictive	Composite à fibres actives
Déformation maximale	0.11 %	0.07 %	0.13 %	0.18 %
Densité	60.6	2	64.5	35
Hystérésis	10 %	> 10 %	< 1 %	15 %
Plage d'utilisation	-20 à 200°C	0 à 80°C	0 à 40°C	0 à 200°C

**Tableau 2** : Principales caractéristiques de divers matériaux électroactifs

## 2. ANALOGIE ELECTROMECHANIQUE

Le comportement de tout système mécanique peut être traduit sous forme de schéma électrique en utilisant une analogie directe entre grandeurs mécaniques et électriques (Tableau 3).

<u>Grandeurs mécaniques</u>		<u>Grandeurs électriques</u>
<b>Mouvement rectiligne</b>	<b>Mouvement de rotation</b>	
Déplacement $x$ (m)	Déplacement $\theta$ (rad)	Charge électrique $q$ (C)
Vitesse $x$ ( $\text{m.s}^{-1}$ )	Vitesse angulaire $\theta$ ( $\text{rad.s}^{-1}$ )	Courant $I$ (A)
Force $F$ (N)	Couple $\Gamma$ ( $\text{N.m}^{-1}$ )	Tension $U$ (V)
Masse $M$ (kg)	Moment d'inertie $I$ ( $\text{kg.m}^2$ )	Inductance $L$ (H)
Souplesse $1/k$ ( $\text{m.N}^{-1}$ )	Torsion inverse ( $\text{m}^2.\text{N}^{-1}$ )	Capacité $C$ (F)
Amortissement $\xi$ ( $\text{kg.s}^{-1}$ )	Amortissement $\xi$ ( $\text{kg.s}^{-1}$ )	Résistance $R$ ( $\Omega$ )

Tableau 3 : Analogie électromécanique.

Ce même système peut généralement être représenté par sa masse dynamique, sa souplesse et ses pertes internes, ce qui conduit à un système équivalent masse/ressort/amortisseur. Un tel système ainsi que son schéma électrique équivalent sont représentés dans le Tableau 4.

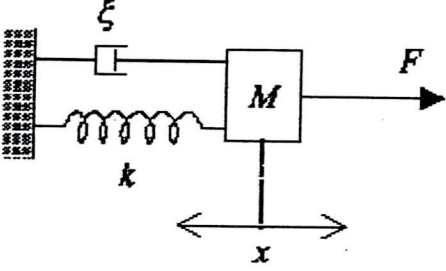
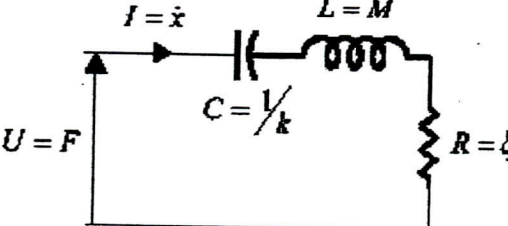
système mécanique	système électrique
 $F = M \frac{d^2 x}{dt^2} + \xi \frac{dx}{dt} + kx$	 $U = L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$

Tableau 4 : Equivalent électrique d'un système masse/ressort/amortisseur

## **PRESENTATION DELPHI**

### **1. Introduction**

Delphi est un produit qui combine compilateur de code natif, des outils visuels et une technologie d'accès évolutif aux bases de données dans le but de développer rapidement des applications Windows.

Avec Delphi, les développeurs disposent d'une méthode rapide pour construire les applications les plus rapides. Les développeurs de logiciels apprécient généralement la vitesse et la souplesse lorsqu'ils doivent créer des applications répondant aux besoins de leurs clients. En cela, Delphi répond à toutes leurs attentes.

Avec Delphi on peut réaliser :

- Des applications Windows très performantes. Grâce à un compilateur de code natif, Delphi surmonte les pertes de performances rencontrées dans les environnements à grande échelle.
- Une productivité accrue grâce à la possibilité de réutiliser le code.
- Une évolutivité illimitée des bases de données.
- Un développement rapide d'applications avec des outils visuels.

Le compilateur de Delphi comprend un utilitaire "MAKE" automatique ayant pour avantage de ne recompiler que le nouveau code lorsqu'une application change. Dans le cas de grosses applications, le temps d'exécution est considérablement réduit.

### **2. Avantages et fonctionnalités de Delphi**

#### **Compilateur de code natif à hautes performances**

Delphi utilise un compilateur de code natif pour générer du code machine Intel à la place du p-code. Le résultat est que les applications Delphi s'exécutent



### **Développement en équipe**

Permet aux développeurs de travailler en équipe. La vérification et le contrôle du code source intégré ainsi que la gestion du contrôle de version facilitent le développement des projets complexes.

### **Constructeur visuel de requête**

Permet aux développeurs de créer des requêtes visuelles répondant à des questions complexes.

### **Concepteur d'interface utilisateur visuel**

Le concepteur d'interface utilisateur visuel permet de créer rapidement des applications en sélectionnant des composants sur une palette. Les développeurs peuvent ainsi créer facilement l'interface de leur application et développer rapidement des prototypes.

### **Architecture basée sur des composants**

L'architecture basée sur des composants garantit la fiabilité et la facilité de maintenance des applications Delphi. On peut utiliser des objets existants (DLL écrites en C et C++) et créer des objets dans Delphi. Grâce au support de l'architecture à base de composants, on peut créer rapidement des applications Delphi à partir de composants existants. Et comme Delphi est totalement orienté objet, les développeurs peuvent créer leurs propres objets réutilisables dans Delphi, ce qui réduit les coûts de développement.

### **Outils bidirectionnels**

Delphi étant un outil bidirectionnel, les développeurs ont accès au code sous-jacent des objets qu'ils développent de manière visuelle. Par conséquent, ils n'ont pas à se préoccuper des éventuelles limitations que pourrait leur opposer Delphi, car ils ont toujours la possibilité de "revenir au code". Les outils bidirectionnels de Delphi permettent de supporter facilement le développement

en équipe grâce au contrôle de version et à d'autres outils développés par des parties tierces.

### **Débogueur graphique**

Delphi est doté d'un débogueur graphique qui facilite la recherche et la correction des erreurs de programmation. On peut définir des points d'arrêt, examiner et modifier des variables, exécuter le code pas à pas et comprendre son comportement.

### **Scruteur d'objet**

Le scruteur d'objet permet aux développeurs de visualiser la hiérarchie des objets réutilisables disponibles. C'est aussi un outil de navigation servant à comprendre le code écrit.

### **Galerie des modèles, experts et aide contextuelle**

Programmation minimale grâce à l'utilisation des galeries de modèles, des experts et de l'aide contextuelle.

### **Compilateur de code natif à hautes performances**

Delphi utilise un compilateur de code natif très performant pour créer des exécutables indépendants (EXE). Comme l'EXE est constitué de code machine natif et non pas de p-code interprété, les applications s'exécutent plus vite. La vitesse d'exécution du code est un critère primordial lorsqu'il faut faire évoluer des applications vers des ensembles de données volumineux où chaque enregistrement subit un traitement individuel.



ECOLE NORMALE SUPERIEURE  
D'ENSEIGNEMENT TECHNIQUE  
D'ORAN

ENSEIGNEMENT  
SUPERIEUR  
D'ORAN

Laboratoire Technologique

**RTM**  
Fabrication Mécanique



# Conference Proceeding

Avec le concours de



MESURELEC  
Electronique



دار الغرب



Dar El Gharb



Comité d'Organisation  
Organizing Committee

A. BENZIANE, *Président d'honneur*  
A. BENAMAR, *Président*  
A. NOUREDDINE  
A. KAROUJ  
K. OUAHOUNE  
M. HIRECHIE  
S. BELHARDJ  
F. KAZI AOUEL  
B. MEKERTA  
N. BENHARIR  
S. BOUAZIZ  
Y.Y. SEBBAR  
A. ARIS  
Y.H. MADANI  
A. LIAZID  
A. KHIAT

Comité Scientifique International  
International Scientific Committee

A. LIAZID, ENSET Oran-Algérie. *Président*  
A. BENAMAR, ENSET Oran-Algérie  
Y. H. MADANI, ENSET Oran-Algérie  
M. BOUSLAMA, ENSET Oran-Algérie  
P.M. LIGRANI, Univ. de l'Utah-USA  
G. THEODORIDIS, Univ. d'Athènes-Grèce  
D. LAKEHAL, Ecole Polytechnique-Lausanne-Suisse  
N. ZERHOUNI, ENSMM-France  
M. BOUMAHRAT, ISMCM-CESTI-France  
G. INGLEBERT, ISMCM-CESTI-France  
Y. CHEVALIER, ISMCM-CESTI-France  
J. F. FLAVENOT, CETIM-Paris-France  
H.P. LIEURADE, CETIM-Paris-France  
F. NOUREDDINE, ENI-Tarbes-France  
C. RICHARD, Univ. de Compiègne-France  
R. YOUNES, Univ. du Liban  
M. BOUABDALLAH, USTHB-Algérie  
A. YUCEFI, USTOran-Algérie  
M. ABIDAT, USTOran-Algérie  
L. ADJLOUT, USTOran-Algérie  
O. IMINE, USTOran-Algérie  
A. BOURDIM, USTOran-Algérie  
B. AIT SAADI, USTOran-Algérie  
I. BELAIDI, IGM-Univ. de BOUMERDES  
A. HADJOUJ, Univ. de Tlemcen-Algérie  
A. GHERNAOUT, Univ. de Tlemcen-Algérie  
B. BENYOUCEF, Univ. de Tlemcen-Algérie  
A. CHEIKH, Univ. de Tlemcen-Algérie  
M. BOUNAZEF, Univ. de Sidi Bel Abbes-Algérie  
N. OUYAHIA, SNVI-Rouiba-Algérie



## SOMMAIRE

Intitulé	Auteur	Page
<b>Plénière Session C</b>		
TEMIC: Industrial Cooperative Tele-Maintenance	Prof. Noureddine ZERHOUNI (L. Besençon, France)	1
<b>Session A : « Matériaux »</b>		
Sur la pertinence de l'utilisation de l'émission acoustique comme moyen de suivi des endommagements dans les M.C.	Zohair ABOURA, E.T. Compiègne	7
Les matériaux du futur : Propriétés et applications	Abdelkader BELAÏDI, ENSET Oran	13
Analyse paramétrique dans le collage des structures planes en matériaux composites	Saïda BELBAOCHIR, U. Sidi Bel-Abbes	21
Caractérisation des défauts de surface cristalline par la diffusion de phonons optiques	Hocine AOUCHICHE, U. Fizi-Ouzou	26
Effet du mode d'élaboration sur les caractéristiques mécaniques des alliages Al-Si	Mohamed BOURNANE, U. Fizi-Ouzou	31
Effet des surfaces libres sur la dispersion des contraintes au voisinage d'une dislocation situé à l'interface d'un bicristal ...	S. MADANI, U. Batna	37
Study of thermal degradation of a Cu-Zn-Al shape memory alloy	Saida CHOUI, U. Annaba	41
Analyse de données et reconnaissance de formes dans l'identification des mécanismes d'endommagement des matériaux	Amor BOUDEN, U. Paris VIII	47
Etude de la corrosion sous contrainte d'un acier inoxydable austénitique dans le chlorure de sodium	Bachir AIT SAADI, UST Oran	53
AES and EELS study of InGaAs/InP(100)	M'Hamed BOUSLAMA, ENSET Oran	59
Influence des précipités sur la diffusion intergranulaire Calcul à 3D	Nassima CHOUI, U. Annaba	66
Analyse des conditions de crise d'ébullition dans un tube vaporisateur de chaudière industrielle de haute pression	Kamel CHAOUI, U. Annaba	72
Elaboration des couches minces de la pyrite FeS <sub>2</sub> pour les applications photovoltaïques	N. HAMDADOU, U. Oran	78
Localisation de la zone plastifiée (par la méthode de rugosité à 3D) Inox 3041 sollicité en corrosion sous contrainte	Hayat SEDIKI, UST Oran	84
Modélisation d'un transducteur flexionnel à l'aide de la méthode des éléments finis	Hamad GHADDAR, U. Libanaise	89
Influence de l'amortissement structural dans le cas des poutres avec des éléments piézoélectriques »	Mohammed OUALI, U. Blida	94
Contraintes de flexion d'une pale d'éolienne sous l'action d'efforts aérodynamiques	Abderrazak MERABET, U. Constantine	100
Comportement à long terme des déformations résiduelles dans les tubes de gaz en PEHD	Kadjet KLASS, U. Annaba	107
Application de la méthode des éléments finis hiérarchiques à l'étude des vibrations libres d'un panneau de Mindlin	A. HOUMAI, U. Tlemcen	113
Etude de l'endommagement de la céramique mixte CC650 et du CBN7020 en tournage dur	Mohamed Amine YALLESE, C.U. Guelma	119
Proposition d'une technique de couplage E. F. frontières pour l'évaluation des facteurs d'intensité de contrainte	Benoumeur ACHIR, ENSET Oran	126
Modélisation de l'usure par la méthode des plans d'expériences	Mostefa BOUCHETARA, UST Oran	132
Les joints de grains dans les matériaux ionocovalents - Cas de NiO	Souad BESHAMARI, U. Annaba	145

## Session B : « Energétique »

Influence of lateral injection on stagnation film cooling effectiveness	Abbes AZZI, UST Oran	151
Numerical assessment of incidence losses in an annular blade cascade	Miloud ABIDAT, UST Oran	158
Etude numérique de l'écoulement des fluides non-newtoniens et de perte de charge à travers un élargissement brusque	Khalil KAHINE, U. Libanaise	164
The three-dimensional effects due to the oscillating flow around an array of circular cylinders at low KC numbers	Driss NEHARI, U. Mostaganem	172
Simulation numérique d'un écoulement tourbillonnaire constitué de deux jets coaxiaux: Amélioration du mélange dans les chambres de combustion	Ali KHELIL, U. Chlef	178
Simulation numérique d'un mélange de deux jets coaxiaux portés à des températures différentes	Kamel TALBI, U. Constantine	183
Etude numérique de l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible autour de corps profilés par une méthode combinée d'ordre	Y. Habib MADANI, ENSET Oran	190
Contribution à l'étude expérimentale de l'écoulement autour d'un cylindre radialement déformable	Hamid OUALLI, EMP/USTHB Alger	196
Etude expérimentale des profils des vitesses pour la quantification des zones tourbillonnaires autour d'obstacles	Omar SEBBANE, U. Tlemcen	203
Etude de l'apparition des zones tourbillonnaires au sein d'un écoulement confronté à des obstacles se trouvant à l'entrée d'un canal	Khaled ALIANE, U. Tlemcen	209
Simulation numérique d'un écoulement laminaire d'une solution nutritive dans un milieu poreux granulaire saturé utilisé en substrat de culture	Nacima TADJ, C.U. Béchar	215
Résolution numérique des équations de Luikov et celles de l'air dans l'interface par la méthodes des volumes finis (application au séchage des feuilles de menthe)	Boumediène TOUATI, SEES Adrar	224
Modélisation numérique de la convection naturelle turbulente dans une cellule type pièce d'habitation	Abdelkader MAHL, UST Oran	232
Solution non linéaire des problèmes de changement de phase lors de la solidification des métaux	Abdel Illah Nabil KORTI, U. Tlemcen	240
Numerical study of the cooling of internal combustion engines	M. S. BOUHLALIB, U. Constantine	246
Etude des performances statiques d'une turbine de suralimentation à géométrie variable	Mohamed BENCHERIF, ENSET Oran	256
Modélisation des caractéristiques mécaniques instationnaires d'un moteur diesel	Bachir KERBOUA, U. Tlemcen	260
Temperature profiles in the walls of cavities	A. BEGHIDJA, U. Constantine	268
Simulation du comportement thermique d'un capteur auto-stockeur composé de quatre cuves et équipé par un réflecteur	Hamid ABDI, SEES Adrar	272
Contribution à l'étude des capteurs à air utilisés dans la conservation des grains	Kawter DIHF, U. Annaba	278
Testing flat receiver of a CPC solar collector under stagnation conditions	Mebarek BOUKAR, SEES Adrar	285
Etude de trois dispositions en quinconce à 30, 45 et 60° de tubes à ailettes installés sur une tour de refroidissement	Kamel SIDI ALI, CRNB Ain Oussera	291
Dimensionnement d'une installation frigorifique photovoltaïque application au conservateur médical	E. BELHADI EL MEHDI, SEES Adrar	297

## Session C : « Productique »

Préhenseur de robot tolérant aux fautes	Farid NOUREDDINE, ENI Tarbes	305
Etat de l'art sur la conception mécanique et intégration de la CMAO dans l'industrie algérienne	Abderrahmane BELAIDI, U. Boumerdes	311
Research of optimal free motions of manipulators robots by non-linear optimisation	Taha CHETTIBI, EMP Alger	317
Two-sided time-frequency analysis of vibration signals for machinery diagnostics	Abdellah KACHA, U. Jijel	326
Réalisation d'un robot parallèle rapide de type DELTA	Tarik SAIDOUNI, EMP Alger	333
Modelling of process capability parameters for tolerance analysis through statistical process control	Mustapha BENACHOUR, U. Tlemcen	341
Analyse et supervision de l'intégration de modèles réseaux de Pétri dédiés aux systèmes flexibles de production	Myriam NOUREDDINE, UST Oran	347
Application des réseaux RBF récurrents (RRBF) à un problème de surveillance	R. ZEMOURI, U. Besançon	355
Extraction automatique des chaînes de cotes par la méthode des dispersions pour l'optimisation des tolérances des cotes de fabrication	Saïd HAMOU, U. Tlemcen	361
De l'approche systémique au tolérancement adaptative tridimensionnel pour la CAO mécanique	Salim BOUKEBBAB, U. Constantine	368

Commande multiboucle, une nouvelle approche pour la sélection de la meilleure configuration de commande: Méthode du graphe de fluence	Abdelmadjid KHELASSI, U. Boumerdes	375
Analyse des modes dégradés d'un robot manipulateur	Rachid NOUREDDINE, ENSET Oran	381
Modélisation de l'optimisation simultanée des tolérances de conception et de fabrication basée sur des niveaux de confiance fixes d'assemblage et de fonct'	Mohamed SAAL, ENSET Oran	388
Simulation du broutement sur les machines-outils	Rafik YOUNES, U. Libanaise	394
Exemple de calcul des valeurs des tolérances géométriques dans le cadre d'un enseignement post-DUT/BTS	Jean-Yves HERBIN, U. Savoie	404
Automatisation de l'ordonnancement des opérations d'ébauche en gamme d'usinage	Ali NOUREDDINE, ENSET Oran	410
Optimisation des conditions d'usinage à l'aide d'un critère combiné pour les opérations à plusieurs passes	Mekki ASSAS, U. Batna	418
Mechanical properties improvements of Rb40 steel through ball burnishing process	Hamid HAMADECHE, U. Annaba	425

## Session D : « Multimédia »

Automatisation de la Recherche et du Choix de l'Instrument en Métrologie Dimensionnelle	Arezki KAROUI, ENSET Oran	431
Le pied à coulisse: un didacticiel destiné à l'apprentissage de la mesure	Nourredine MELOUA, ENSET Oran	438
Apport du multimédia pour l'apprentissage des essais mécaniques	Khaled OUAHIOUNE, ENSET Oran	441
Le multimédia dans l'enseignement technique application au génie civil et au génie mécanique « La résistance des matériaux »	F. BENSLAFA KASI AOUAL, ENSET Oran	450
Utilité d'un système d'aide dans une application multimédia	Tamazouzt AIT SAADI, ENSET Oran	454

## Session « Posters »

Modèle self-consistant de la vitesse de recombinaison en mode EBIC en présence d'un précipité sphérique	Mounia DEBEZ, U. Annaba	461
Analyse de la lubrification hydrodynamique des systèmes tournants application aux paliers lisses	Hacène BELHANECHIE, ENP Alger	467
Etude de l'endommagement des surfaces des polymères sous contraintes de contact roulant	Djelloul GUERIBIZ, C.U. Laghouat	473
Microhardness behavior of Al-Fe deposits prepared by rf cathodic magnetron sputtering	Mohamed DRAISSIA, U. Annaba	479
Equivalent Ni & Cr et mode de solidification dans les soudures d'aciers inoxydables	Mustapha ARAIBI, U. Chlef	483
Intérêt des suspensions semi-actives dans l'amélioration du confort vibratoire des systèmes articulés complexes	S. BOUKERROUM, USTHB Alger	491
Ozone, CFC, Maghreb. Quel défi, quels enjeux?	Tawfik BENABDALLAH, U. P. Valencia	499
Modélisation des transferts thermiques lors de refroidissement des aubes des turbomachines	Ahmed AZZI, U. Tlemcen	505
Nouvelle procédure de la commande PWM appliquée au convertisseur DC/AC à fréquence variable	Abdelâali BOUMAARAF, SEES Adrar	510
Etude comparée de l'influence du frottement sur l'instabilité de Kelvin-Helmholtz	Yassine LAGHOUATI, UST Oran	516
Epaisseur optimale des isolants pour les applications frigorifiques	Cheikh MANSOURI, UST Oran	521
Traitement et acquisition des données sur machine à mesurer tridimensionnelle	Idriss AMARA, U. Constantine	528
Application des concepts de base de la théorie des poutres à l'évaluation et à la compensation des erreurs des bras manipulateurs	Moussa HADDAD, E.M.P. Alger	534
Design of stamping process parameters to improve manufacturing feasibility	Rachid RADJAI, U. Reims	544
L'utilisation optimale du microscope optique	Mohamed TAHRAOUI, U. Oran	550

## Influence de l'amortissement structural dans le cas des poutres avec des éléments piézoélectriques.

M. Ouali, A. Mahieddine

### Résumé

Le but de cette recherche concerne l'étude et l'analyse de l'influence de l'amortissement structural dans le cas des poutres avec des actionneurs et capteurs piézoélectriques. Il est pris en considération les effets du cisaillement et des déformations latérales qui sont souvent négligées dans les modèles conventionnels de poutres. Une formulation par éléments finis basée sur la théorie de Kirchoff est utilisée pour l'étude des poutres avec différentes conditions aux limites. Parallèlement, d'autres paramètres tels que la longueur et l'épaisseur de la pièce piézoélectrique sont examinés.

### Nomenclature

$A$	Section de la poutre
$b$	Largeur de la poutre
$c_{eq}$	Amortissement équivalent
$[C_G]$	Matrice d'amortissement
$D$	Induction
$d$	Constante de charge
$e$	Constante piézoélectrique
$E_i$	Champ électrique
$\{F\}$	Vecteur charge élémentaire
$\{F_G\}$	Vecteur charge global
$h$	Epaisseur de la poutre
$K$	Facteur de correction
$[K]$	Matrice rigidité élémentaire
$[K_G]$	Matrice rigidité globale
$L$	Longueur de la poutre
$[M]$	Matrice masse élémentaire
$[M_G]$	Matrice masse globale

$Q$	Raideur
$\{q\}$	Vecteur coordonnées généralisées
$T$	Energie cinétique
$U$	Energie de déformation
$u$	Déplacement suivant la direction x
$v$	Déplacement suivant la direction y
$w$	Déplacement suivant la direction z
$\Delta W$	Surface de la boucle d'hystérésis
$\varepsilon$	déformation relative
$\bar{\varepsilon}$	Permittivité
$\lambda$	Coef. d'amortissement structural
$\rho$	Masse volumique
$\sigma$	Contrainte
$\omega$	Pulsation d'excitation
$\psi$	Rotation autour de l'axe Oy

### 1. Introduction

Les améliorations des propriétés d'amortissement des vibrations sont nécessaires et souvent exigées dans plusieurs domaines de la science et de la technologie dans le but d'atteindre des conditions de confort et de sécurité optimales [1]. De ce fait et pour satisfaire ces exigences, la conception et le contrôle des structures élastiques par des matériaux piézoélectriques fait l'objet de plusieurs mémoires, thèses et d'un nombre considérable de travaux de recherche ces dernières années [2, 3, 4, 5]. Le principe des techniques dites actives est de générer un champ interférant avec le champ de la perturbation. Le champ superposé doit donc être identique à celui de la perturbation en terme d'amplitude mais de phase opposée pour chacune des fréquences concernées.



Par leur faible encombrement, leur poids réduit et leur aptitude à la conversion électromécanique, les matériaux piézoélectriques montrent effectivement toutes les qualités requises pour une utilisation dans le cadre d'un contrôle actif de vibrations.

Wang, Burdisso et Fuller [6] ont présenté une formulation du problème d'optimisation pour le placement et le dimensionnement des actionneurs piézoélectriques. Law, Possiter, Simon et Koss [7] ont étudié les caractéristiques de l'amortissement des vibrations mécaniques par des matériaux piézoélectriques. Legrain, Petitjean [8] ont réalisé une étude expérimentale du comportement des matériaux piézoélectriques. Smith et Ounaies [9] ont abordé la conception de l'hystérésis dans les matériaux piézoélectriques. Jordan, Ounaies, Hipp et Tcheng [10] ont évalué les caractéristiques électriques des matériaux piézoélectriques pour l'utilisation dans les applications aéronautiques comme contrôle actif du bruit dans les avions.

## 2. Déformation d'une poutre

Considérons une poutre de longueur  $L$ , de masse volumique  $\rho$  et de section droite  $A$ . Pour exprimer les déplacements, on utilise le schéma de Kirchoff du premier degré [11] :

$$\begin{cases} U = u(x) - z\psi(x) \\ V = 0 \\ W = w(x) \end{cases} \quad (1)$$

où  $u$ ,  $v$  et  $w$  représentent les déplacements du matériau dans les directions  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  respectivement.

## 3. Equations de la piézoélectricité

Considérons un dispositif où un élément piézoélectrique est parfaitement collé sur une poutre soumise à la flexion selon l'axe  $x$ . La piézoélectricité étant un phénomène de couplage entre l'énergie électrique et l'énergie mécanique, les équations de l'état piézoélectrique, si on néglige les effets thermiques, peuvent se présenter sous la forme suivante [12, 13, 11, 3, 4] :

$$\begin{aligned} D_m &= \bar{e}_{mj} \varepsilon_j + \bar{e}_{mk} E_k \\ \sigma_i &= Q_{ij}^T \varepsilon_j - e_{mi}^t E_m \end{aligned} \quad (2)$$

La matrice des coefficients de contrainte piézoélectrique  $[e]$  peut être exprimée en fonction de la matrice des coefficients de charge  $[d]$  par la relation :

$$[e] = [d] \cdot [d] \quad (3)$$

En remplaçant l'équation (3) dans l'équation (2) et en supposant que :

- la poutre impose sa déformation à la pièce piézoélectrique,
- les contraintes  $\sigma_y$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{xy}$  sont négligeables par rapport aux contraintes  $\sigma_x$  et  $\tau_{xz}$ ,
- la surface supérieure du matériau piézoélectrique est libre de se déplacer donc pas de contrainte  $\sigma_z$ ,
- les champs électriques  $E_1$  et  $E_2$  sont négligeables comparés au champ transversal  $E_3$ .

les relations entre les contraintes et les déformations sont exprimées par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & 0 \\ 0 & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} d_{31} \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot E_3 \quad (4)$$

Où  $\bar{Q}_{11}$  et  $\bar{Q}_{55}$  sont données en terme de  $Q_{ij}$  ( $i, j = 1 + 6$ ).

## 4. Formulation par éléments finis

Sachant que l'énergie cinétique est exprimée en fonction des vitesses généralisées. En remplaçant les expressions de ces vitesses on obtient l'expression de l'énergie cinétique sous la forme :

$$T = \frac{1}{2} \int \rho (\dot{u} \quad \dot{w} \quad \dot{\psi}) \cdot [\bar{T}] \cdot \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} \cdot b \cdot dx \quad (5)$$

$$\text{avec } [\bar{T}] = \begin{bmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^3}{12} \end{bmatrix} \quad (6)$$

après intégration, on écrit l'énergie cinétique sous la forme :

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T \cdot [M] \cdot \{\dot{q}\} \quad (7)$$

où  $[M]$  est la matrice masse élémentaire

### Influence de la longueur de la pièce piézoélectrique

La figure 3 représente l'influence de la longueur de la poutre sur l'amplitude de déplacement. On remarque une augmentation de l'amplitude de déplacement en augmentant la longueur de la pièce piézoélectrique. Cela peut s'expliquer par le fait que le vecteur charge dû à l'élément piézoélectrique tend vers zéro quand la longueur de la pièce piézoélectrique tend vers la longueur de la poutre.

Ces résultats concordent bien, donc, avec les résultats obtenus par K. Chadrashekhara et P. Donthireddy. [11]

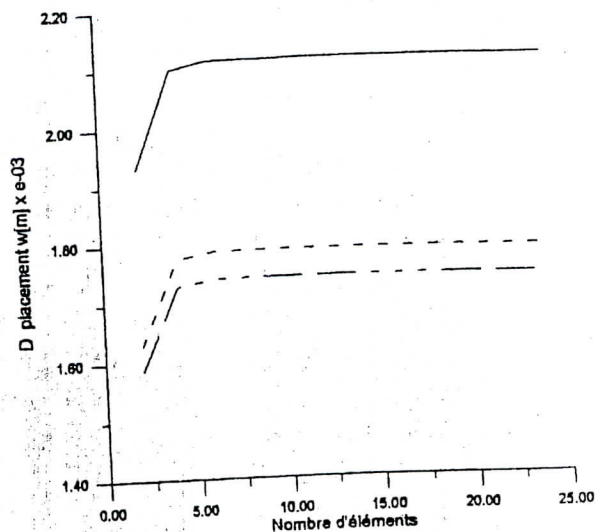


Figure 3 : Déplacement  $w[m]$  en fonction du nombre d'éléments.  
Poutre encastree - libre.

— :  $L_p = L$ , --- :  $L_p = 0.8L$ ,  
- · - :  $L_p = 0.4L$

### Influence de l'épaisseur de la pièce piézoélectrique

La figure 4 représente l'influence de l'épaisseur de la poutre sur l'amplitude de déplacement. On remarque une légère diminution de l'amplitude de déplacement pour des épaisseurs de la pièce piézoélectrique de  $h_p = (0.2 \div 0.6)h$

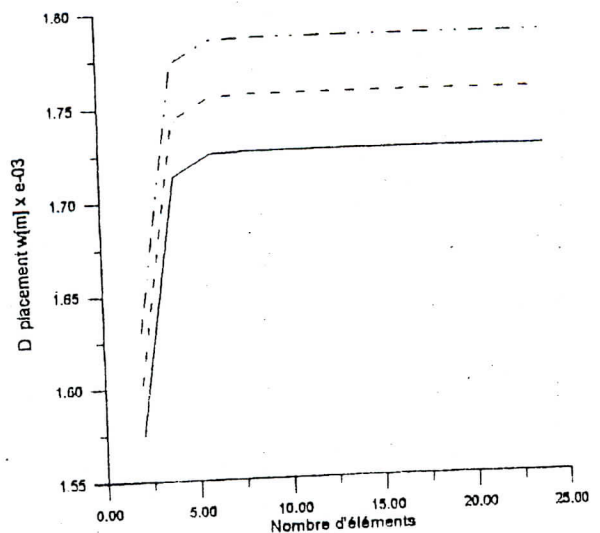


Figure 4 : Déplacement  $w[m]$  en fonction du nombre d'éléments.  
Poutre encastree - libre.

— :  $h_p = 0.6h$ , --- :  $h_p = 0.4h$ ,  
- · - :  $h_p = 0.2h$

### Conclusion

Dans cette recherche, on se préoccupe particulièrement de l'étude et de l'analyse de l'influence de l'amortissement structural dans le cas des poutres avec des actionneurs et capteurs piézoélectriques. Les effets du cisaillement et des déformations latérales sont pris en considération. Une formulation par éléments finis basé sur la théorie de Kirchoff est utilisée pour l'étude des poutres avec différentes conditions aux limites. La méthode de Newmark est utilisée pour la résolution du système d'équations obtenu. Les résultats obtenus sont présentés sous formes de graphes.

Pour la validation, on compare les résultats obtenus pour l'amplitude maximale de déplacement pour une poutre en console avec ceux du modèle de M. Sunar et S. S. Rao [17]. L'erreur observée, en fonction du nombre d'éléments, varie de 0.009% à 3%. Pour une variation du coefficient d'amortissement structural de 0.004 à 0.008, on observe une diminution des amplitudes maximales de déplacement de 32 à 43% et de rotation de 73 à 80%.

Pour une constante de charge de l'ordre de  $(-6.5 \cdot 10^{-12} \text{ m/V})$ , on constate une diminution

de 20% des amplitudes de déplacement et de rotation.

On remarque pour les amplitudes de déplacement et de rotation :

- une variation (augmentation, diminution) en fonction de la longueur de la pièce piézoélectrique.
- une légère diminution pour des épaisseurs de la pièce piézoélectrique variant entre les valeurs de  $h_p = (0.2 \div 0.6)h$ .

Ces résultats concordent bien avec les résultats obtenus par K. Chandrashekhara et P. Donthireddy [11].

### **Bibliographie**

[1] Akihiko Goto, Zenichiro Maekawa and Kumiko Miyake, "Analysis of vibration damping properties of hybrid composite with flexible matrix resin"; Materials Science Research International, Vol.2, N°3, pp.160-165, 1996

[2] SS Rao and M Sunar, "Piezoelectricity and its use in disturbance sensing and contrôle of flexible structures : A survey"; Appl Mach Rev Vol 47 N°4 April 1994

[3] L. Goujon, "Etude des composites piézoélectriques pour applications électroacoustiques sous-marines"; Thèse pour obtenir le grade de Docteur; Institut national des sciences appliquées de Lyon ; 1999.

[4] E. Defay, "Elaboration et caractérisation de couches minces piézoélectriques de  $Pb(Zr,Ti)O_3$  sur silicium pour applications aux microsystèmes"; Thèse pour obtenir le grade de Docteur; Institut national des sciences appliquées de Lyon ; 1999.

[5] A. Sène, "Modélisation asymptotique de plaques : contrôlabilité exacte frontière, piézoélectricité "; Thèse pour obtenir le grade de Docteur ; Université Joseph Fourier - Grenoble I ; 1999.

[6] B. T. Wang, R. A. Burdisson, C. R. Fuller, "Optimal placement of piezoelectric actuators for active structural acoustic control"; Journal of intelligent materials and structures, Vol. 5, N° 1 ; 1994.

[7] H. H. Law, P. L. Rossiter, G. P. Simon and L. L. Koss, "Characterization of

mechanical vibration damping by piezoelectric materials.", Journal of Sound and Vibration, Vol 197, N°4 ; 1996.

[8] I. Legrain, B. Petitjean, "Evaluation de céramiques électrostrictives en vue d'une utilisation en tant qu'actionneurs dans le domaine du contrôle actif de vibration. " ; Rapport ONERA N°9776 ; 1997.

[9] R. C. Smith, Z. Ounaies, " A Domain Wall Model for Hysteresis in Piezoelectric Materials " ; ICASE Report No. 99-52 ; 1999.

[10] T. Jordan, Z. Ounaies, J. Tripp and P. Tcheng, "Electrical properties and power considerations of a piezoelectric actuator" ; ICASE Repport N° 2000-8 ; 2000

[11] K. Chandrashekhara and P. Donthireddy, "Vibration suppression of composite beams with devices using a higher order theory"; European Journal Of Mechanics. A/Solids, Vol 16 N°4, 1997

[12] E. F. Crawley, E. H. Anderson, "Detailed models of piezoceramic actuation of beams"; J. Intelligent Mat Syst and Struct., Vol. 1, N° 1 ; 1990.

[13] E. F. Crawley, E. H. Anderson, "Detailed models of piezoceramic actuation of beams"; J. Intelligent Mat Syst and Struct., Vol. 1, N° 1 ; 1990.

[14] M. Géradin, D. Rixen, "Théorie des vibrations : Application à la dynamique des structures"; Edition MASSON ; 1993 ; France.

[15] M. Benachour, "Influence de l'amortissement structural sur les vibrations des plaques"; Thèse de magistère ; U.S.T.Oran

[16] M. Pavlovski, A. Apostoliouk, "Vibrations dans les appareils et machines"; Office des publications universitaires ; 1992.

[17] M. Sunar, S. S. Rao, " Thermopiezoelectric control design and actuator placement" ; AIAA Journal, Vol. 35, N° 3 ; 1997.