

**UNIVERSITE SAAD DAHLEB DE BLIDA**

**Faculté des Sciences de l'Ingénieur**

Département d'Aéronautique

**MEMOIRE DE MAGISTER**

Spécialité : Aéronautique

**ECOULEMENT SUPERSONIQUE A HAUTE TEMPERATURE  
AUTOUR D'UN DIEDRE**

Par

**Hafsa TAIBI**

devant le jury composé de :

A. ALLALI	Maître de conférences A, U. de Blida	Président
T. ZEBBICHE	Maître de conférences A, U. de Blida	Rapporteur
A. CHEGRANI	Maître assistant A, U. de Blida	Examineur
R. HAQUI	Maître de conférences A, U.S.T.H.B	Examineur

Blida, Janvier 2011

## TABLE DES MATIERES

RESUME

REMERCIEMENTS

LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX

INTRODUCTION.....	18
1. GENERALITES.....	20
1.1. Classification des gaz .....	20
1.1.1. Le gaz caloriquement parfait thermiquement parfait (callorically perfect thermally perfect) .....	20
1.1.2. Le gaz thermiquement parfait caloriquement imparfait (thermally perfect callorically imperfect).....	21
1.1.3. Le Mélange chimiquement réactif d'un gaz parfait (Chemically Reacting Mixture of Perfect Gases) .....	22
1.1.4. Le gaz réel .....	22
1.1.5. Récapitulation.....	23
1.2. Les différents modes d'énergie de la molécule.....	23
1.3. La chaleur spécifique.....	27
2. LES ONDES DE CHOCS.....	32
2.1. Introduction.....	32

2.2. Onde de choc oblique.....	32
2.3. Les cas spéciaux de l'onde de choc oblique.....	34
2.4. Le choc fort et le choc faible.....	36
2.5. Le choc attaché et le choc détaché.....	37
2.6. La différence entre un écoulement autour d'un dièdre et un écoulement autour d'un cône.....	40
2.7. L'intérêt de l'onde choc oblique.....	42
3. MODÈLE MATHÉMATIQUE .....	43
3.1. Introduction.....	43
3.2. Modèle d'un gaz parfait.....	43
3.2.1. Onde de choc normale.....	44
3.2.2. Onde de choc oblique.....	45
3.3. Modèle d'un gaz à haute température	
3.3.1. Introduction.....	47
3.3.2. Paramètres à haute température Paramètres à haute température.....	47
3.3.3. La résolution d'un problème à haute température.....	50
3.3.4. Onde de choc normale.....	54
3.3.5. Onde de choc oblique.....	56
3.4. L'erreur relative de modèle du gaz parfait.....	58
4. PRÉSENTATION ET INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS.....	59
4.1. Introduction.....	59
4.2. Présentation des résultats .....	60
4.3. Discussion des résultats de choc oblique.....	106

4.3.1. Résultats en fonction de l'angle de déviation de dièdre $\psi$ .....	106
4.3.2. Résultats en fonction de la température totale $T_0$ .....	118
4.3.3. Résultats en fonction de nombre de Mach amont $M_1$ .....	120
4.4. Discussions des résultats de l'onde de choc normale.....	122
4.5. Calculs d'erreurs relatives de modèle GP en fonction de nombre de Mach $M_1$ .....	125
4.5.1. Cas de choc oblique faible.....	125
4.5.2. Cas de choc normal.....	127
4.6. Validation des résultats.....	128
CONCLUSION .....	129
APPENDICE A.....	131
APPENDICE B.....	134
APPENDICE C.....	135
REFERENCE.....	136

## RÉSUMÉ

Beaucoup de calculs de l'ingénierie de l'aéronautique pour l'écoulement compressible dépasse les limites de la température de la thèse d'un gaz parfait (caloriquement parfait) et sur ce, l'utilisation de l'hypothèse de  $\gamma = cte$  produit des erreurs significatives. La solution dans ce cas, c'est de prendre en considération un gaz à haute température (thermiquement parfait), autrement dit  $\gamma \neq cte$ .

Le but de ce travail est d'élaborer un modèle mathématique pour l'onde de choc oblique à haute température (gaz thermiquement parfait) où la température totale est prise en considération, non la dissociation des molécules.

Le modèle est basé sur l'utilisation d'une fonction polynômiale de la chaleur spécifique en fonction de la température interpolé à partir des tables de Peterson, ainsi que sur le traitement des équations de conservations de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie et l'équation d'état afin d'obtenir de nouvelles relations qui servent les besoins de ce domaine. Le modèle et les équations élaborés sont valable quel que soit le gaz à condition de trouver une nouvelle interpolation de la chaleur spécifique convient au gaz utilisé (l'application est pour l'air). Il est à noter ici que le modèle de la haute température HT n'est qu'une généralisation du modèle de gaz parfait GP.

Le code qui traite le modèle sert à calculer les différents paramètres thermodynamiques à travers le choc oblique fort et faible attachés pour un angle de dièdre  $\psi$ , un nombre de Mach  $M_1$  et une température totale  $T_0$  donnés.

Afin de démontrer l'application limitée de modèle GP, on a calculé l'erreur relative de modèle HT par rapport au modèle GP en fonction de  $M_1$ , aussi pour confirmer la fiabilité de notre modèle HT, on a validé nos résultats, avec ceux obtenu par la NASA [1] et par les références [2] [3].

## ABSTRACT

Many calculations of Engineering Aeronautics for compressible flow exceeds the temperature limits of the theory of an ideal gas (calorically perfect) and the use of the hypothesis of  $\gamma = cte$  Product significant errors. The solution in this case is to consider a gas at high temperature (thermally perfect)  $\gamma \neq cte$ .

The aim of this work is to develop a mathematical model for the oblique shock wave at high temperature (thermally perfect gas) where the total temperature is taken into account, less than the dissociation of the molecules.

The model is based on the use of a polynomial function of the specific heat versus temperature interpolated from the tables by Peterson, as well as the treatment of conservation equations of mass, momentum and energy and the equation of state to obtain new relations that serve the needs of this area. The model and equations developed are valid no matter what is the gas if you can find a new interpolation of the specific heat should be used with gas (the application is for air). It should be noted here that the model of high temperature HT is a generalization of the ideal gas model GP.

The code that processes the model used to calculate the various thermodynamic parameters around the strong and weak oblique shock attached for a dihedral angle  $\psi$ , a Mach number  $M_1$ , and a total temperature  $T_0$  given. One of our most important results here is a chart  $\psi$ - $\sigma$ - $M$  for gas at high temperature for a given total temperature. The code also includes the special case of the normal shock wave.

To demonstrate the limited application of GP model, we calculated the relative error of the model HT compared to model GP, also confirm the reliability of our HT model; we validated our results with those obtained NASA [1] and references [2] [3].

$$\gamma \neq cte$$

).

T0

M1

$\psi$

$\psi - \sigma - M$

M1

## REMERCIEMENTS

Je remercie Allah tout puissant de m'avoir donné la volonté, le courage et la confiance en moi même pour pouvoir continuer mes études et arriver à ce stade.

Mes sincères remerciements vont :

À mes très chères parents pour leur soutien et encouragement, tout au long de ces dures années ; merci beaucoup maman et merci beaucoup papa.

À M<sup>r</sup> le promoteur ; le distingué M<sup>r</sup> **ZEBBICHE Toufik** Professeur au département d'aéronautique que dieu le garde qui m'a honoré de travailler avec lui, qui m'a aidé beaucoup pour la réalisation de ce travail, aussi pour son grand et total soutien, son suivi et ses conseils précieuses durant mon projet et pour toute sa confiance qu'il m'a témoigné aussi ;  
merci beaucoup Monsieur.

À M<sup>r</sup> **BOUKARBOUTE Abd Nour** qui m'a aidé beaucoup dans ce travail.

Ainsi qu'au M<sup>r</sup> **HAOUI Rabah** et Mr **TAHI Ali** pour leurs directives.

À mes très chères grandes mères que dieu les gardes.

À mes frères Mourad, Yassine et Mohamed que dieu les protèges.

À ma très chère cousine, ma sœur LOUZ Keira pour tout instant qu'on a passé ensemble.

À mes amies BADIS Ouarda, AMAR Aida et HAMIDI Nariman, mes camarades KHODJET KESBA Mohamed, OTHMANI Belgacem et notamment DJOUDI Hamza pour leur aide, leur soutien.

À Amou Zoubir le comptable de Blida Computer à Khazrouna.

À tout les membres de ma famille notamment mes tantes TAIBI Zhor, BENCHIDI Khadidja et mon oncle BENCHIDI Mohamed.

À tous je vous dis : **MERCI.**

Merci pour votre précieuse contribution et aide.

Merci pour votre patience

Merci pour votre soutien

Merci pour votre dévouement.

*TAIBI Hafsa*

## LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX

Figure 1.1 : Les modes d'énergies d'une molécule.....	26
Figure 1.2 : La variation de la chaleur spécifique à volume constant en fonction de la température pour un gaz diatomique.....	30
Figure 2.1 : La différence entre le choc oblique et l'onde de détente.....	33
Figure 2.2 : différents cas de choc oblique suivant la géométrie. (a) coin. (b) dièdre symétrique. (c) dièdre asymétrique.....	33
Figure 2.3 : Image Schlieren d'un écoulement bidimensionnel autour d'un dièdre avec angle de déviation total de $20^{\circ}$ .....	34
Figure 2.4 : Comparaison entre l'angle de Mach $\mu$ et l'angle de choc $\sigma$ .....	34
Figure 2.5 : La différence entre le choc oblique et le choc normal et l'onde de Mach.....	35
Figure 2.6 : Le choc faible et le choc fort.....	36
Figure 2.7 : La différence entre l'onde de choc oblique faible et fort autour d'un dièdre.....	37
Figure 2.8 : L'influence de l'angle de déviation d'un dièdre sur la nature de choc oblique....	37
Figure 2.9 : La différence entre la nature d'un choc attaché et détaché autour d'un dièdre...	38
Figure 2.10 : L'effet de l'accroissement de l'angle de déviation $\psi$ .....	39
Figure 2.11 : L'effet de l'accroissement de nombre de Mach $M_1$ .....	39

Figure 2.12 : Visualisation de l'effet de l'accroissement de nombre de Mach $M_1$ par la technique PIV.....	40
Figure 2.13 : Schéma représentant la différence entre le dièdre et le cône.....	40
Figure 3.1 : Diagramme de l'onde de choc normale.....	44
Figure 3.2 : Diagramme de l'onde de choc oblique.....	45
Figure 3.3 : Comparaison entre les différentes formules de la chaleur spécifique.....	49
Figure 4.1 : Diagramme $\psi$ - $\sigma$ -M pour un gaz parfait avec $\gamma=1.402$ .....	61
Figure 4.2 : Diagramme $\psi$ - $\sigma$ -M pour un gaz à haute température ( $T_0=1000K$ ).....	61
Figure 4.3 : Diagramme $\psi$ - $\sigma$ -M pour un gaz à haute température ( $T_0=2000K$ ).....	62
Figure 4.4 : Diagramme $\psi$ - $\sigma$ -M pour un gaz à haute température ( $T_0=3000K$ ).....	62
Figure 4.5 : Comparaison de diagramme $\psi$ - $\sigma$ -M entre le modèle d'un gaz parfait et le modèle d'un gaz à haute température.....	63
Figure 4.6 : L'évolution du rapport des températures $T_2/T_1$ en fonction de l'angle de déviation de dièdre $\psi$ pour différents nombre de Mach $M_1$ . (a) gaz parfait $\gamma=1.402$ . (b) gaz à haute température pour $T_0=1000$ K. (c) gaz à haute température pour $T_0=2000$ K. (d) gaz à haute température pour $T_0=3000$ K.....	64
Figure 4.7 : Comparaison de la variation du rapport $T_2/T_1$ en fonction de $\psi$ entre le modèle d'un gaz parfait et le modèle d'un gaz à haute température (pour une température totale $T_0=1000$ K, $T_0=2000$ K et $T_0=3000$ K) pour différents $M_1$ .....	65
Figure 4.8 : L'évolution du rapport des masses volumiques $\rho_2/\rho_1$ en fonction de l'angle de déviation de dièdre $\psi$ pour différents nombre de Mach $M_1$ . (a) gaz parfait $\gamma=1.402$ . (b) gaz à haute température pour $T_0=1000$ K. (c) gaz à haute température pour $T_0=2000$ K. (d) gaz à haute température pour $T_0=3000$ K.....	66
Figure 4.9 : Comparaison de la variation de rapport $\rho_2/\rho_1$ en fonction de $\psi$ entre le modèle d'un gaz parfait et le modèle d'un gaz à haute température (pour une température totale $T_0=1000$ K, $T_0=2000$ K et $T_0=3000$ K) pour différents $M_1$ .....	67

Figure 4.10 : L'évolution du rapport des pressions  $P_2/P_1$  en fonction de l'angle de déviation de dièdre  $\psi$  pour différents nombre de Mach  $M_1$ . (a) gaz parfait  $\gamma=1.402$ . (b) gaz à haute température pour  $T_0=1000$  K. (c) gaz à haute température pour  $T_0=2000$  K. (d) gaz à haute température pour  $T_0=3000$  K.....68

Figure 4.11 : Comparaison de la variation de rapport  $P_2/P_1$  en fonction de  $\psi$  entre le modèle d'un gaz parfait et le modèle d'un gaz à haute température (pour une température totale  $T_0=1000$  K,  $T_0=2000$  K et  $T_0=3000$  K) pour différents  $M_1$ .....69

Figure 4.12 : L'évolution du rapport des pressions totale  $P_{02}/P_{01}$  en fonction de l'angle de déviation de dièdre  $\psi$  pour différents nombre de Mach  $M_1$ . (a) gaz parfait  $\gamma=1.402$ . (b) gaz à haute température pour  $T_0=1000$  K. (c) gaz à haute température pour  $T_0=2000$  K. (d) gaz à haute température pour  $T_0=3000$  K.....70

Figure 4.13 : Comparaison de la variation de rapport  $P_{02}/P_{01}$  en fonction de  $\psi$  entre le modèle d'un gaz parfait et le modèle d'un gaz à haute température (pour une température totale  $T_0=1000$  K,  $T_0=2000$  K et  $T_0=3000$  K) pour différents  $M_1$ .....71

Figure 4.14 : L'évolution de l'entropie  $S_{12}/R$  en fonction de l'angle de déviation de dièdre  $\psi$  pour différents nombre de Mach  $M_1$ . (a) gaz parfait  $\gamma=1.402$ . (b) gaz à haute température pour  $T_0=1000$  K. (c) gaz à haute température pour  $T_0=2000$  K. (d) gaz à haute température pour  $T_0=3000$  K.....72

Figure 4.15 : Comparaison de la variation d'entropie  $S_{12}/R$  en fonction de  $\psi$  entre le modèle d'un gaz parfait et le modèle d'un gaz à haute température (pour une température totale  $T_0=1000$  K,  $T_0=2000$  K et  $T_0=3000$  K) pour différents  $M_1$ .....73

Figure 4.16 : L'évolution de nombre de Mach  $M_2$  en fonction de l'angle de déviation de dièdre  $\psi$  pour différents nombre de Mach  $M_1$ . (a) gaz parfait  $\gamma=1.402$ . (b) gaz à haute température pour  $T_0=1000$  K. (c) gaz à haute température pour  $T_0=2000$  K. (d) gaz à haute température pour  $T_0=3000$  K.....74

Figure 4.17 : Comparaison de la variation de  $M_2$  en fonction de  $\psi$  entre le modèle d'un gaz parfait et le modèle d'un gaz à haute température (pour une température totale  $T_0=1000$  K,  $T_0=2000$  K et  $T_0=3000$  K) pour différents  $M_1$ .....75

Figure 4.18 : L'évolution du rapport des températures  $T_2/T_1$  du choc faible en fonction de la température totale  $T_0$  pour  $M_1$  et  $\psi$  donnés. (a)  $M_1=3$  et  $\psi=5^\circ$ . (b)  $M_1=3$  et  $\psi=24^\circ$ . (c)  $M_1=5$  et  $\psi=5^\circ$ . (d)  $M_1=5$  et  $\psi=41^\circ$  .....76

Figure 4.19 : L'évolution du rapport des masses volumique  $\rho_2/\rho_1$  du choc faible en fonction de la température totale  $T_0$  pour  $M_1$  et  $\psi$  donnés. (a)  $M_1=3$  et  $\psi=5^\circ$ . (b)  $M_1=3$  et  $\psi=24^\circ$ . (c)  $M_1=5$  et  $\psi=5^\circ$ . (d)  $M_1=5$  et  $\psi=41^\circ$  .....77

Figure 4.20 : L'évolution du rapport des pressions  $P_2/P_1$  du choc faible en fonction de la température totale  $T_0$  pour  $M_1$  et  $\psi$  donnés. (a)  $M_1=3$  et  $\psi=5^\circ$ . (b)  $M_1=3$  et  $\psi=24^\circ$ . (c)  $M_1=5$  et  $\psi=5^\circ$ . (d)  $M_1=5$  et  $\psi=41^\circ$  .....78

Figure 4.21 : L'évolution du rapport des pressions totale  $P_{02}/P_{01}$  du choc faible en fonction de la température totale  $T_0$  pour  $M_1$  et  $\psi$  donnés. (a)  $M_1=3$  et  $\psi=5^\circ$ . (b)  $M_1=3$  et  $\psi=24^\circ$ . (c)  $M_1=5$  et  $\psi=5^\circ$ . (d)  $M_1=5$  et  $\psi=41^\circ$  .....79

Figure 4.22 : L'évolution de l'entropie  $S_{12}/R$  du choc faible en fonction de la température totale  $T_0$  pour  $M_1$  et  $\psi$  donnés. (a)  $M_1=3$  et  $\psi=5^\circ$ . (b)  $M_1=3$  et  $\psi=24^\circ$ . (c)  $M_1=5$  et  $\psi=5^\circ$ . (d)  $M_1=5$  et  $\psi=41^\circ$  .....80

Figure 4.23 : L'évolution de nombre de Mach  $M_2$  du choc faible en fonction de la température totale  $T_0$  pour  $M_1$  et  $\psi$  donnés. (a)  $M_1=3$  et  $\psi=5^\circ$ . (b)  $M_1=3$  et  $\psi=24^\circ$ . (c)  $M_1=5$  et  $\psi=5^\circ$ . (d)  $M_1=5$  et  $\psi=41^\circ$  .....81

Figure 4.24 : L'évolution du rapport des températures  $T_2/T_1$  de choc faible en fonction de nombre de Mach  $M_1$  pour un angle de déviation de dièdre  $\psi$  donné. (a) cas de  $\psi=3^\circ$ . (b) cas de  $\psi=22^\circ$  .....82

Figure 4.25 : L'évolution du rapport des masses volumiques  $\rho_2/\rho_1$  de choc faible en fonction de nombre de Mach  $M_1$  pour un angle de déviation de dièdre  $\psi$  donné. (a) cas de  $\psi=3^\circ$ . (b) cas de  $\psi=22^\circ$  .....83

Figure 4.26 : L'évolution du rapport des pressions  $P_2/P_1$  de choc faible en fonction de nombre de Mach  $M_1$  pour un angle de déviation de dièdre  $\psi$  donné. (a) cas de  $\psi=3^\circ$ . (b) cas de  $\psi=22^\circ$  .....84

Figure 4.27 : L'évolution du rapport des pressions totales $P_{02}/P_{01}$ de choc faible en fonction de nombre de Mach $M_1$ pour un angle de déviation de dièdre $\psi$ donné. (a) cas de $\psi=3^\circ$ . (b) cas de $\psi=22^\circ$ .....	85
Figure 4.28 : L'évolution de saut d'entropie $S_{12}/R$ de choc faible en fonction de nombre de Mach $M_1$ pour un angle de déviation de dièdre $\psi$ donné. (a) cas de $\psi=3^\circ$ . (b) cas de $\psi=22^\circ$ .....	86
Figure 4.29 : L'évolution de nombre de Mach $M_2$ de choc faible en fonction de nombre de Mach $M_1$ pour un angle de déviation de dièdre $\psi$ donné. (a) cas de $\psi=3^\circ$ . (b) cas de $\psi=22^\circ$ .....	87
Figure 4.30 : L'évolution du rapport de température $T_2/T_1$ en fonction de nombre de Mach $M_1$ pour le cas du choc normal.....	88
Figure 4.31 : L'évolution du rapport de température $T_2/T_1$ en fonction de la température totale $T_0$ pour $M_1$ donné pour le cas du choc normal .....	88
Figure 4.32 : L'évolution du rapport de masse volumique $\rho_2/\rho_1$ en fonction de nombre de Mach $M_1$ pour le cas du choc normal .....	89
Figure 4.33 : L'évolution du rapport de masse volumique $\rho_2/\rho_1$ en fonction de la température totale $T_0$ pour $M_1$ donné pour le cas du choc normal .....	89
Figure 4.34 : L'évolution du rapport de pression $P_2/P_1$ en fonction de nombre de Mach $M_1$ pour le cas du choc normal .....	90
Figure 4.35 : L'évolution du rapport de pression $P_2/P_1$ en fonction de la température totale $T_0$ pour $M_1$ donné pour le cas du choc normal .....	90
Figure 4.36 : L'évolution du rapport de pression totale $P_{02}/P_{01}$ en fonction de nombre de Mach $M_1$ pour le cas du choc normal .....	91
Figure 4.37 : L'évolution du rapport de masse volumique $P_{02}/P_{01}$ en fonction de la température totale $T_0$ pour $M_1$ donné pour le cas du choc normal .....	91
Figure 4.38 : L'évolution de l'entropie $S_{12}/R$ en fonction de nombre de Mach $M_1$ pour le cas du choc normal.....	92

Figure 4.39 : L'évolution de l'entropie $S_{12}/R$ en fonction de la température totale $T_0$ pour $M_1$ donné pour le cas du choc normal .....	92
Figure 4.40 : L'évolution de nombre de Mach $M_2$ en fonction de nombre de Mach $M_1$ pour le cas du choc normal .....	93
Figure 4.41 : L'évolution de nombre de Mach $M_2$ en fonction de la température totale $T_0$ pour $M_1$ donné pour le cas du choc normal .....	93
Figure 4.42 : L'évolution de l'erreur relative de rapport des températures $T_2/T_1$ du choc faible en fonction de nombre de Mach $M_1$ pour un angle de déviation de dièdre $\psi$ donné. (a) cas de $\psi=3^0$ . (b) cas de $\psi=22^0$ .....	94
Figure 4.43 : L'évolution de l'erreur relative de rapport des masses volumiques $\rho_2/\rho_1$ du choc faible en fonction de nombre de Mach $M_1$ pour un angle de déviation de dièdre $\psi$ donné. (a) cas de $\psi=3^0$ . (b) cas de $\psi=22^0$ .....	95
Figure 4.44 : L'évolution de l'erreur relative de rapport des pressions $P_2/P_1$ du choc faible en fonction de nombre de Mach $M_1$ pour un angle de déviation de dièdre $\psi$ donné. (a) cas de $\psi=3^0$ . (b) cas de $\psi=22^0$ .....	96
Figure 4.45 : L'évolution de l'erreur relative de rapport des pressions totales $P_{02}/P_{01}$ du choc faible en fonction de nombre de Mach $M_1$ pour un angle de déviation de dièdre $\psi$ donné. (a) cas de $\psi=3^0$ . (b) cas de $\psi=22^0$ .....	97
Figure 4.46 : L'évolution de l'erreur relative de l'entropie $S_{12}/R$ du choc faible en fonction de nombre de Mach $M_1$ pour un angle de déviation de dièdre $\psi$ donné. (a) cas de $\psi=3^0$ . (b) cas de $\psi=22^0$ .....	98
Figure 4.47 : L'évolution de l'erreur relative de nombre de Mach $M_2$ du choc faible en fonction de nombre de Mach $M_1$ pour un angle de déviation de dièdre $\psi$ donné. (a) cas de $\psi=3^0$ . (b) cas de $\psi=22^0$ .....	99
Figure 4.48 : L'évolution de l'erreur relative des paramètres thermodynamique en fonction de nombre de Mach $M_1$ .....	100
Figure 4.49 : Validation de diagramme $\psi$ - $\sigma$ - $M$ pour un gaz à haute température (a) $T_0=3000$ K. (b) $T_0=1000$ K.....	101

Figure 4.50 : Validation de l'évolution du rapport de température $T_2/T_1$ du choc faible en fonction de nombre de Mach $M_1$ pour un gaz à haute température lorsque $T_0=2000$ et $\psi=5^0$ .....	102
Figure 4.51 : Validation l'évolution du rapport de la masse volumique $\rho_2/\rho_1$ du choc faible en fonction de nombre de Mach $M_1$ pour un gaz à haute température lorsque $T_0=2000$ K et $\psi=5^0$ .....	102
Figure 4.52 : Validation de l'évolution du rapport de pression $P_2/P_1$ du choc faible en fonction de nombre de Mach $M_1$ pour un gaz à haute température lorsque $T_0=2000$ K et $\psi=5^0$ .....	103
Figure 4.53 : Validation de l'évolution de nombre de Mach $M_2$ du choc faible en fonction de nombre de Mach $M_1$ pour un gaz à haute température lorsque $T_0=2000$ K et $\psi=5^0$ .....	103
Figure 4.54 : Validation de l'évolution du rapport de température $T_2/T_1$ du choc faible en fonction de nombre de Mach $M_1$ pour un gaz à haute température lorsque $T_0=3000$ K pour $\sigma=30^0$ et $\sigma=50^0$ .....	104
Figure 4.55 : Validation l'évolution du rapport de la masse volumique $\rho_2/\rho_1$ du choc faible en fonction de nombre de Mach $M_1$ pour un gaz à haute température lorsque $T_0=3000$ K pour $\sigma=30^0$ et $\sigma=50^0$ .....	104
Figure 4.56 : Validation de l'évolution du rapport de pression $P_2/P_1$ du choc faible en fonction de nombre de Mach $M_1$ pour un gaz à haute température lorsque $T_0=3000$ K pour $\sigma=30^0$ et $\sigma=50^0$ .....	105
Figure 4.57 : Validation de l'évolution de nombre de Mach $M_2$ du choc faible en fonction de nombre de Mach $M_1$ pour un gaz à haute température lorsque $T_0=3000$ K pour $\sigma=30^0$ et $\sigma=50^0$ .....	105
Tableau 4.1 : Présentation de la limite de déviation de dièdre $\psi_{\max}$ et l'angle de choc $\sigma_{\max}$ correspondant à $\psi_{\max}$ .....	108
Tableau 4.2 : l'influence de $M_1$ et de $\psi$ sur la différence de $\sigma$ entre le modèle GP et le modèle HT .....	109

Tableau 4.3 : Présentation du rapport $T_2/T_1$ correspondant à $\psi_{\max}$ pour le modèle GP et le modèle HT.....	111
Tableau 4.4 : présentation de rapport $P_2/P_1$ correspondant à $\psi_{\max}$ pour le modèle d'un gaz parfait et le modèle d'un gaz à haute température.....	114
Tableau 4.5 : Présentation de nombre de Mach $M_2$ correspondant à $\psi_{\max}$ pour les modèles GP et HT.....	117
Tableau 4.6 : L'influence de $M_1$ et de $\psi$ sur les paramètres thermodynamiques correspondant à $T_0 = 0$ K.....	119
Tableau 4.7 : Présentation des paramètres thermodynamique pour le cas de $\psi = 3^0$ et $M_1 = 3.00$ .....	121
Tableau 4.8 : Présentation des paramètres thermodynamique pour le cas de $\psi = 22^0$ et $M_1 = 3.00$ .....	121
Tableau 4.9 : Présentation des rapports de pressions $P_2/P_1$ pour le choc oblique et le choc normal.....	123
Tableau 4.10 : Présentation de nombre de Mach $M_2$ pour le choc oblique et le choc normal.....	124
Tableau 4.11 : Présentation de l'erreur des paramètres thermodynamique pour le cas de $\psi = 3^0$ et $M_1 = 3.00$ .....	126
Tableau 4.12 : Présentation de l'erreur des paramètres thermodynamique pour le cas de $\psi = 22^0$ et $M_1 = 3.00$ .....	126
Tableau 4.13 : Présentation de l'erreur des paramètres thermodynamique pour le cas $M_1 = 3.00$ .....	127

## INTRODUCTION

L'hypothèse d'un gaz parfait (caloriquement parfait) était universellement faite, et beaucoup de formules détaillées et de résultats ont été obtenus sous l'hypothèse de  $\gamma = cte$ , [50] [53].

En effet, pour n'importe quel gaz poly-atomique, les chaleurs spécifiques  $C_p$  et  $C_v$ , et leur rapport  $\gamma$  peuvent être considérés comme des constants uniquement pour une marge étroite de la température, mais lorsque la température augmente le  $C_p$  augmente et commence à varier en fonction de la température, ainsi que  $C_v$  et  $\gamma$  et tous les paramètres thermodynamiques.

D'une autre part, beaucoup de calculs d'écoulements compressibles dépassent souvent les limites de la température de la thèse d'un gaz caloriquement parfait est de là, l'application des équations et des résultats obtenus sous l'hypothèse de  $\gamma = cte$  peut produire des erreurs significatives.

Parmi les calculs des écoulements compressibles, le cas des calculs des propriétés à travers les ondes de chocs normales et obliques qui sont présentés largement pour le cas du gaz parfait dans plusieurs références comme [7, 8, 17, 41, 42, 49, 52, 57, 58, 59, 60, 71 et 72]....etc, sont valide juste pour une marge de température définis, mais une fois que la température dépasse une certaine limite l'application de ces calculs risque de diverger. De là, on suggère de prendre en considération le gaz à haute température (thermiquement parfait) et d'utiliser un autre modèle mathématique mieux adapté au besoins de ce domaine (thermiquement parfait).

Pour cela, on a élaboré un modèle mathématique [4, 5, 63, 64, 65] pour l'onde de choc oblique à haute température (gaz thermiquement parfait) basé sur l'utilisation de la fonction polynômiale de la chaleur spécifique en fonction de la température  $C_p(T)$ , du 9<sup>ème</sup> degré, interpolé à partir des tables de Peterson [6], et valable dans la marge de température [55 K, 3550 K], et de ce fait notre modèle de la haute température HT n'est qu'une généralisation du modèle de gaz parfait GP. Le modèle basé aussi sur la résolution des équations algébriques non linéaire par la méthode de Dichotomie et l'intégration des fonctions complexes par la méthode de Simpson.

Le modèle élaboré est traité par le soft FORTRAN sert à calculer les différents paramètres thermodynamiques à travers le choc oblique fort et faible pour une température totale donnée, en mettant l'accent sur l'influence énorme de la température totale  $T_0$  ainsi que le choix du nombre de Mach  $M_1$  et de l'angle de dièdre  $\psi$  sur les paramètres du modèle HT d'une part et sur la différence entre les modèles HT et GP d'une autre part. Et pour approfondir l'étude on traite le cas de choc normal qui n'est qu'un cas spécial de l'onde de choc oblique.

Tous les résultats sont illustrés pour le cas du gaz parfait et le cas du gaz à haute température pour mieux différencier entre les caractéristiques de choc oblique et normal dans chacun des deux gaz.

Pour démontrer l'exactitude de nos recherches, en terminant l'étude, par le calcul d'erreur relative pour prouver la limitation du modèle de gaz parfait GP, et par la validation de nos résultats avec celles des références [1], [2] et [3].

L'utilisation réelle de ce problème s'effectue au niveau des souffleries [62] pour une température donnée, pour simuler par exemple les rentrés des navettes spatiales [51], où il doit être prendre le gaz thermiquement parfait et de chercher la variation des paramètres thermodynamiques en fonction de la température qui est le facteur principale et plus qu'elle augmente plus la correction du modèle du gaz parfait augmente.

## CHAPITRE 1

### GÉNÉRALITÉS

Pour bien clarifier l'entourage de cette étude, ce chapitre présente les principales définitions qu'ils ont besoin.

#### 1.1. Classification des gaz [7], [31] et [35]

Un gaz parfait est un gaz où les forces intermoléculaires sont négligeables.

Un gaz réel est un gaz où les forces intermoléculaires sont importantes et doivent être prise en compte.

Pour l'analyse des problèmes de gazodynamique, on peut identifier quatre catégories de gaz, comme suit.

##### 1.1.1. Le gaz caloriquement parfait thermiquement parfait (calorically perfect thermally perfect) [7] [1]

On note d'abord :

Caloriquement parfait signifie que ; les chaleurs spécifiques à pression et à volume constants  $C_p$ ,  $C_v$  sont constantes. Thermiquement parfait signifie que l'équation d'état est valable. [1]

Par définition ; un gaz caloriquement parfait thermiquement parfait est un gaz où les chaleurs spécifique à volume constant  $C_v$  et à pression constante  $C_p$  sont constantes ainsi que

leur rapport  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ .

Pour ce gaz, l'enthalpie et l'énergie sont en fonction de la température, définie explicitement par  $H = C_p T$  et  $E = C_v T$

Et l'équation d'état est  $Pv = RT$  Où R est une constante.

L'hypothèse d'un gaz caloriquement parfait thermiquement parfait (gaz parfait GP) est presque universellement fait, et beaucoup de formules détaillées et de résultats ont été obtenus sous l'hypothèse de  $\gamma = cte$

### 1.1.2. Le gaz thermiquement parfait caloriquement imparfait (thermally perfect calorically imperfect)[7] [1]

Par définition ; un gaz thermiquement parfait caloriquement imparfait est un gaz où les chaleurs spécifique à volume  $C_v$  et à pression  $C_p$  sont variables en fonction de la température seulement.

$$C_p = C_p [T]$$

$$C_v = C_v [T]$$

Par conséquent le rapport des chaleurs spécifique n'est plus constant et devient  $\gamma = \gamma [T]$

Donc l'enthalpie et l'énergie, eux aussi deviennent variables en fonction de la température.

$$dH = C_p dT \quad H = H [T]$$

$$dE = C_v dT \quad E = E [T]$$

L'équation d'état reste valable  $Pv = RT$  (l'équation d'état thermique)

La nature d'un gaz thermiquement parfait caloriquement imparfait est due à l'excitation de l'énergie de vibration dans les molécules du gaz [1], lorsque la température augmente. (Ce gaz est également appelé ; gaz à haute température [4] [5], gaz semi-parfait ou gaz imparfait dans la littérature. [11])

### 1.1.3. Le Mélange chimiquement réactif d'un gaz parfait (Chemically Reacting Mixture of Perfect Gases). [7]

Lorsque la température augmente de plus en plus, la dissociation aura lieu et le gaz sera un mélange gazeux où chaque espèce se comporte comme un gaz thermiquement parfait, et a son propre équation d'état  $P_i v = M_i R_i T$ , et les forces intermoléculaires sont négligeables.

Supposant qu'à la température 5000 K et à pression 1atm, les différents espèces deviennent stables et la dissociation terminée, on peut ainsi parler de l'équilibre d'un gaz chimiquement réactif où les différents paramètres dépendent uniquement de la température T et de la pression P.

Mais, si à une température moins que la précédente, les espèces ne se sont pas encore stabilisées, on parle ici de l'hors équilibre d'un gaz chimiquement réactif où les différents paramètres dans ce cas dépendent de la température T, de la pression P et du temps aussi.

### 1.1.4. Le gaz réel [7]

Un gaz se comporte comme un gaz réel dans des conditions de très haute pression et basse température, les forces intermoléculaires se tiennent en considération.

L'enthalpie H et l'énergie interne E dépendent de la pression P (ou du volume v) comme suit:

$$H = H(T, P)$$

$$E = E(T, v)$$

$$C_p = C_p(T, P)$$

$$C_v = C_v(T, v)$$

En outre, l'équation d'état des gaz parfaits n'est plus valable ici, elle sera remplacée par l'équation, de Van der Waals, donnée par :

$$\left( P + \frac{a}{v^2} \right) (v - b) = RT$$

Où : a, b sont des constants qui dépendent du type de gaz.

Notant que l'équation de Van der Waals se réduit à l'équation d'état des gaz parfaits lorsque  $a = b = 0$ .

### 1.1.5. Récapitulation [7], [28] et [35]

Pour reformuler ces différents types de gaz, pour l'air on a :

- À la température ambiante l'air est essentiellement caloriquement parfait.
- Lorsque la température augmente aux environs de 800 K, l'excitation de l'énergie de vibration est très importante, et l'air est considéré thermiquement parfait.
- Si la température augmente de plus en plus, au-dessus de 2500 K, les réactions chimiques auront lieu, et l'air devient un mélange d'un gaz parfait chimiquement réactif.
- Dans le sens contraire de l'accroissement de la température ; si elle est en dessous de la température ambiante et si la pression augmente environ 1000 atm, les forces intermoléculaires vont se manifester, et l'air est considéré comme un gaz réel.

Remarque :

Selon la référence [1] de la NASA qui est basé sur les calculs expérimentaux on a :

L'excitation de l'énergie de vibration commence aux environs de 450 K à 500 K et la dissociation commence aux environs de 1500 K, dans ces conditions l'air est considéré comme étant thermiquement parfait dans la marge de 450 K à 1500 K.

### 1.2. Les différents modes d'énergie de la molécule [7, 25, 26, 27, 30, 32, 33, 34, 35 et 40]

- L'énergie de translation

L'origine de l'énergie de translation est l'énergie cinétique de translation du centre de masse de la molécule. La molécule peut se traduire suivant les 3 axes X, Y et Z (voir la figure 1.1.b) alors ; on dit que la molécule possède 3 degrés de liberté géométrique (geometric degrees of freedom) et si, le mouvement de translation selon chaque axe contribue à l'énergie cinétique total, là ; on dit que la molécule possède 3 degrés de liberté thermique (thermal degrees of freedom).

L'expression de l'énergie de translation est obtenue à partir de la mécanique quantique

$$e_{trans} = \frac{3}{2} RT$$

- L'énergie de rotation

L'origine de l'énergie de rotation c'est l'énergie cinétique de rotation associé à la vitesse de rotation de la molécule et leur moment cinétique. La rotation ne se compte que pour les molécules ayant plus d'un atome. La molécule tourne autour de chaque axe, alors qu'en réalité ; la rotation autour de l'axe Z pour une molécule diatomique est négligeable, car le moment cinétique est très petit (voir la figure 1.1.c). Là, on peut dire que la molécule possède 2 degrés de liberté géométrique (geometric degrees of freedom) aussi bien que 2 degrés de liberté thermique (thermal degrees of freedom).

Ceci reste valable pour une molécule poly-atomique linéaire comme  $\text{CO}_2$  (figure 1.1.d), mais pour une molécule poly-atomique non linéaire telle que  $\text{H}_2\text{O}$  (figure 1.1.d), le nombre de degrés de liberté géométrique et thermique s'élève à 3.

L'expression de l'énergie de rotation est obtenue à partir de la mécanique quantique pour une molécule diatomique

$$e_{rot} = RT$$

- L'énergie de vibration [55], [56]

L'origine de l'énergie de vibration est l'énergie cinétique de mouvement linéaire de l'atome et le potentiel d'énergie.

Pour la molécule diatomique qui vibre seulement et uniquement selon une direction fixe, on parle d'un degré de liberté géométrique, alors qu'en réalité, l'énergie cinétique et le potentiel d'énergie se sont eux qui agissent à la création de cette énergie de vibration, donc on peut affirmer que la molécule diatomique possède 2 degrés de liberté thermique [7] (figure 1.1.e).

Pour la molécule poly-atomique la vibration est très complexe où il existe plusieurs modes de vibration.

L'expression de l'énergie de vibration est obtenue à partir de la mécanique quantique pour une molécule diatomique

$$e_{vib} = \frac{\frac{h\nu}{KT}}{\left( e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1 \right)} RT$$

Où  $h$  est la constante de Planck et  $\nu$  est la fréquence caractéristique de la vibration moléculaire et  $K$  est la constante de Boltzmann et on définit aussi la température caractéristique de la vibration qui dépend de la nature de gaz, comme  $\Theta_{vib} = \frac{h\nu}{K}$

- L'énergie électronique

La figure 1.1.f présente le mouvement d'électrons autour de son noyau dans un atome.

L'origine de l'énergie électronique est l'énergie cinétique due à la translation de l'électron dans leur orbite, et le potentiel d'énergie due à la position de l'électron.

Le mouvement de l'électron est très complexe et le concept de degré de liberté n'a aucun sens ici.

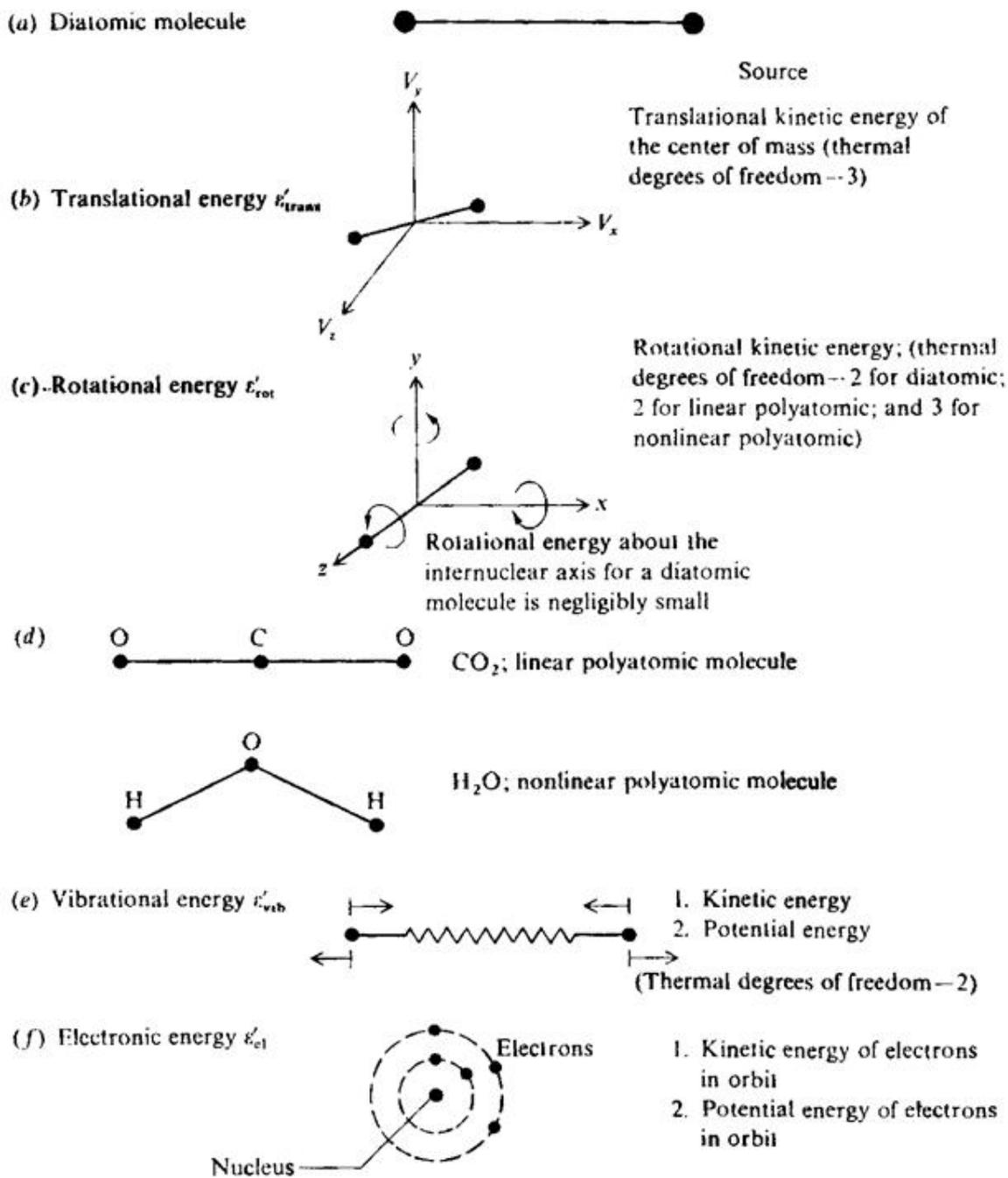


Figure 1.1 : Les modes d'énergie d'une molécule [7].

Finalement l'énergie interne totale de la molécule est la somme de leurs énergies: la translation, la rotation, la vibration et l'énergie électronique.

- Pour monoatomique

$$e_{Tot} = \frac{3}{2}RT + e_{elect} \quad (1.1)$$

$\frac{3}{2}RT$  : L'énergie de Translation  
 $e_{elect}$  : L'énergie Electronique

- Pour diatomique

$$e_{Tot} = \frac{3}{2}RT + RT + \underbrace{\left( \frac{\frac{h\nu}{KT}}{e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1} \right) RT}_{\text{L'énergie de Vibration}} + e_{elect} \quad (1.2)$$

$\frac{3}{2}RT$  : L'énergie de Translation  
 $RT$  : L'énergie de Rotation  
 $\left( \frac{\frac{h\nu}{KT}}{e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1} \right) RT$  : L'énergie de Vibration  
 $e_{elect}$  : L'énergie Electronique

### 1.3. La chaleur spécifique [29], [30], [32], [35] et [37]

On donne l'expression de la chaleur spécifique à volume constant

$$C_v = \left( \frac{\partial e}{\partial T} \right) = \frac{\partial e_{trans}}{\partial T} + \frac{\partial e_{rot}}{\partial T} + \frac{\partial e_{vib}}{\partial T} + \frac{\partial e_{elect}}{\partial T} = \frac{3}{2}R + R + \frac{\left( \frac{\Theta_{vib}}{T} \right)^2 e^{\frac{\Theta_{vib}}{T}}}{\left( e^{\frac{\Theta_{vib}}{T}} - 1 \right)^2} R + \frac{\partial e_{elect}}{\partial T} \quad (1.3)$$

Et la chaleur spécifique à pression constante  $C_p = \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right) = C_v + R \quad (1.4)$

Le rapport des chaleurs spécifique  $\gamma = \frac{C_p}{C_v} \quad (1.5)$

D'une autre part selon la théorie cinétique des gaz à température modérée

$$\gamma = \frac{m+2}{m} \text{ où } m \text{ est le nombre de degré de liberté. [19]}$$

Remarque

L'effet de l'énergie électronique est négligeable pour la majorité des applications des gaz à haute température. [13]

- Pour un gaz monoatomique

Il n'y a que l'énergie de translation qui est excitée, et la chaleur spécifique ne varie pas avec la température, dans ce cas on parle d'un gaz caloriquement parfait.

$$C_v = \frac{\partial e_{trans}}{\partial T} = \frac{3}{2} R \quad (1.6)$$

$$C_p = C_v + R = \frac{5}{2} R \quad (1.7)$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{5}{3} \quad (1.8)$$

- Pour un gaz diatomique (l'air)

- À très basse température

Là, il n'y a que l'énergie de translation qui est excitée, de ce fait on parle d'un gaz monoatomique.

Lorsque la température augmente un peu (à la température normale)

Ici la rotation devient significative, Les chaleurs spécifique et leur rapport ne varie pas avec la température, donc ce gaz est aussi considéré comme un gaz caloriquement parfait.

$$C_v = \frac{\partial e_{trans}}{\partial T} + \frac{\partial e_{rot}}{\partial T} = \frac{5}{2} R \quad (1.9)$$

$$C_p = C_v + R = \frac{7}{2} R \quad (1.10)$$

$$\gamma = \frac{7}{5} \quad (1.11)$$

○ À très haute température

Où la vibration est excitée aux environs de 600 K, Les chaleurs spécifiques et leurs rapports vont dépendre uniquement de la température, ici le gaz devient thermiquement parfait. [7], [13], [25].

$$C_v(T) = \frac{\partial e_{trans}}{\partial T} + \frac{\partial e_{rot}}{\partial T} + \frac{\partial e_{vib}}{\partial T} = \frac{5}{2}R + \frac{\left(\frac{\Theta_{vib}}{T}\right)^2 e^{\frac{\Theta_{vib}}{T}}}{\left(e^{\frac{\Theta_{vib}}{T}} - 1\right)^2} R \quad (1.12)$$

$$C_p(T) = C_v(T) + R = \frac{7}{2}R + \frac{\left(\frac{\Theta_{vib}}{T}\right)^2 e^{\frac{\Theta_{vib}}{T}}}{\left(e^{\frac{\Theta_{vib}}{T}} - 1\right)^2} R \quad (1.13)$$

$$\gamma(T) = \frac{C_p(T)}{C_v(T)} = 1.4 \left\{ \frac{1 + \frac{\frac{2}{7}\left(\frac{\Theta_{vib}}{T}\right)^2 e^{\frac{\Theta_{vib}}{T}}}{\left(e^{\frac{\Theta_{vib}}{T}} - 1\right)^2}}{\frac{\frac{2}{5}\left(\frac{\Theta_{vib}}{T}\right)^2 e^{\frac{\Theta_{vib}}{T}}}{\left(e^{\frac{\Theta_{vib}}{T}} - 1\right)^2}} R \right\} \quad (1.14)$$

Lorsque  $T \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{\Theta_{vib}}{T} \rightarrow 0$  alors  $e^x \rightarrow 1+x$  pour des petits valeurs de x

$$\left(\frac{\Theta_{vib}}{T}\right)^2 \frac{e^{\frac{\Theta_{vib}}{T}}}{\left(e^{\frac{\Theta_{vib}}{T}} - 1\right)^2} \approx \frac{\left(e^{\frac{\Theta_{vib}}{T}} - 1\right)^2}{e^{\frac{\Theta_{vib}}{T}}} \approx 1$$

Ainsi  $\gamma = \frac{9}{7}$

Et par conséquent  $C_v$  devient constant  $C_v = \frac{7}{2}R$  et  $C_p = \frac{9}{2}R$

Bien que le niveau de température parait très élevé, il faut préciser ici que la dissociation n'a pas encore eu lieu, par contre si elle apparait la variation de  $C_v$  saurait seulement due aux réactions chimiques.[7]

La figure 1.2 ici présente, résume la variation de  $C_v$  en fonction de la température pour le cas de l'air de manière à ce que : [7]

À très basse température ( $<1$  K) ici c'est seulement la translation qui est excitée  $\Rightarrow$  gaz caloriquement parfait.

Entre 1 K et 3 K la rotation commence, et elle est totalement excitée à partir de 3 K  $\Rightarrow$  gaz caloriquement parfait.

Au dessus de 600 K la vibration est prise en considération  $\Rightarrow$  gaz Thermiquement parfait.

À Plus de 2000 K la dissociation est entamée.

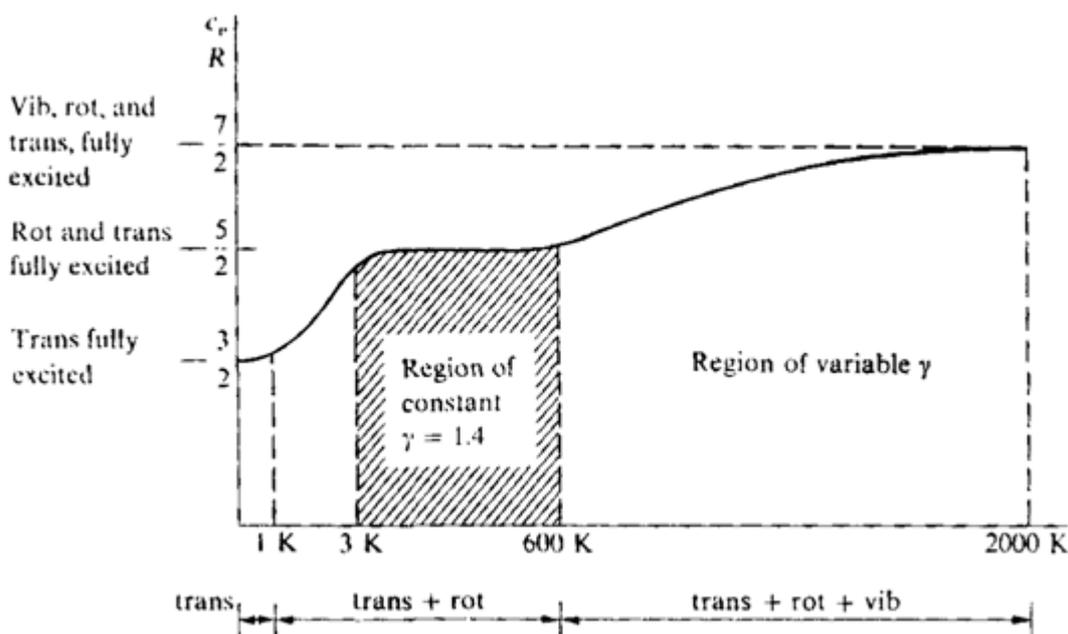


Figure 1.2 : La variation de la chaleur spécifique à volume constant en fonction de la température pour un gaz diatomique.

- Pour un gaz poly-atomique avec  $m$  atome [15]

Pour des températures très hautes  $T \rightarrow \infty$  on considère que pour un gaz :

- Poly-atomique linéaire

$$C_v = \frac{3}{2}R + R + (3m - 5)R = \left(3m - \frac{5}{2}\right)R \quad (1.15)$$

- Poly-atomique non linéaire

$$C_v = \frac{3}{2}R + \frac{3}{2}R + (3m - 6)R = (3m - 2)R \quad (1.16)$$

## CHAPITRE 2

### LES ONDES DE CHOCS

#### 2.1. Introduction [78]

Lorsqu'on place un obstacle dans un écoulement de gaz en régime supersonique, l'arrêt non isentropique du fluide se caractérise par l'apparition d'une onde de choc.

Dans la réalité, ce choc apparaît comme une très fine région de l'espace où l'on observe de très forte variation des propriétés thermodynamiques et de la vitesse du fluide.

Une onde de choc, c'est un champ où il y a une transition spatiale discontinue en mouvement.

un choc est une région où se transforme une partie de l'énergie cinétique (vitesse moyenne organisée des particules) en énergie interne (fluctuations internes désorganisées des particules: chaleur ou température).

#### 2.2. Onde de choc oblique

Chaque fois qu'un écoulement supersonique est tourné sur lui-même d'un angle de déviation  $\psi > 0$  positive, une onde de choc oblique peut se produire.

Et lorsque l'écoulement est détourné de lui-même d'un angle de déviation  $\psi < 0$  négative, une onde de détente peut se produire.[8]

La géométrie du choc oblique et de l'onde de détente est donnée sur la figure 2.1 ci-dessous.

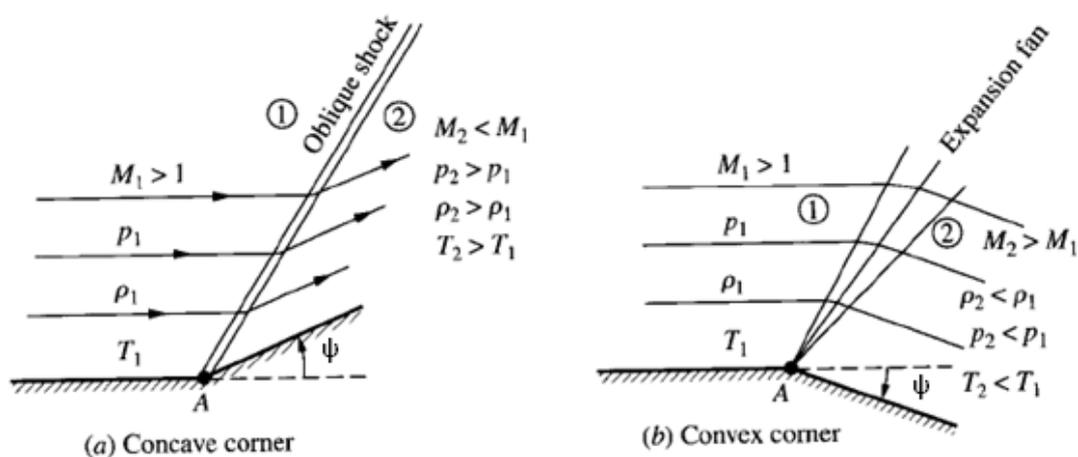


Figure 2.1 : La différence entre le choc oblique et l'onde de détente

La figure 2.2 présente les différents cas d'un choc oblique autour d'un dièdre selon la géométrie de dièdre. La géométrie (a) n'est qu'un cas spécial de la géométrie (b).

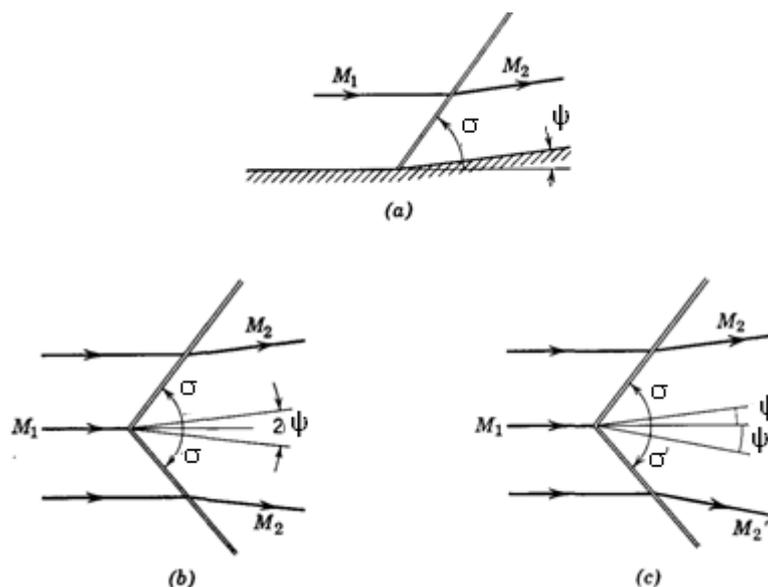


Figure 2.2 : différents cas de choc oblique suivant la géométrie. (a) coin. (b) dièdre. [10]

symétrique. (c) dièdre asymétrique.

La figure 2.3 présente une visualisation de l'onde de choc oblique autour d'un dièdre utilisant la technique Schlieren.

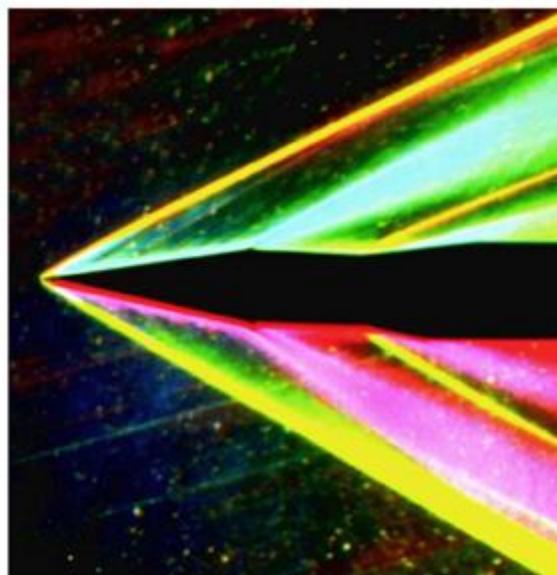


Figure 2.3 : Image Schlieren d'un écoulement bidimensionnel autour d'un dièdre avec angle de déviation total de  $20^\circ$ . [14], [54]

### 2.3. Les cas spéciaux de l'onde de choc oblique

Lorsque l'onde oblique est infiniment faible, elle devient une onde de Mach, qui fait un angle  $\mu$  par rapport au sens d'écoulement en amont;  $\mu$  est appelé l'angle de Mach, défini

$$\text{comme } \mu = \sin^{-1} \frac{1}{M}$$

Indiquée ci-dessous dans la figure 2.4 :

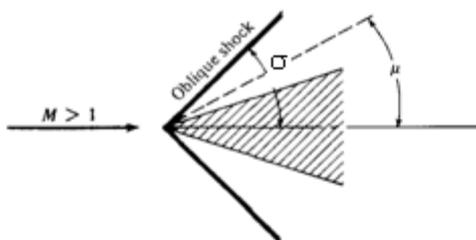


Figure 2.4 : Comparaison entre l'angle de Mach  $\mu$  et l'angle de choc  $\sigma$ .

Lorsque l'onde oblique devient forte où l'écoulement conserve sa direction, elle deviendra une onde de choc normal.

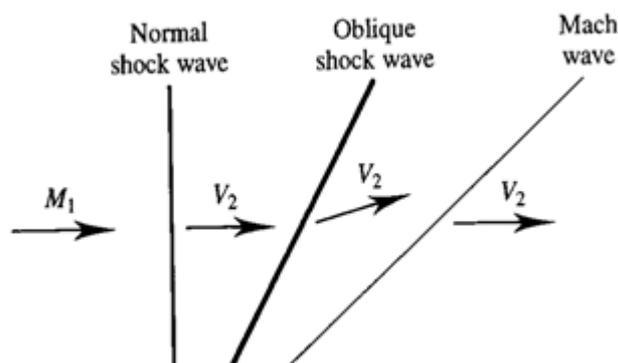


Figure 2.5 : La différence entre le choc oblique, le choc normal et l'onde de Mach. [13, 38]

Remarque [13]

D'après la figure ci-dessus le choc normal et l'onde de Mach ne sont que des cas limites de choc oblique, où l'angle de choc est limité entre  $\sin^{-1} \frac{1}{M} < \sigma < 90^\circ$

L'onde de choc normal ; est un problème unidirectionnelle (selon x) où tout les paramètres thermodynamiques varient seulement en fonction du nombre de Mach.

L'onde de choc oblique est un problème bidimensionnel (selon x et y) où tous les paramètres thermodynamique varient en fonction du nombre de Mach et de l'angle de déviation.

Mais comme les vitesses tangentielles sont les mêmes avant et après le choc, là on n'utilise que les directions normaux de la vitesse, dans ce cas le problème sera unidirectionnelle.

## 2.4. Le choc fort et le choc faible

Une onde de choc oblique ne peut apparaître qu'en écoulement supersonique, par contre l'écoulement après le choc peut être subsonique ou supersonique, il y a toutefois diminution du nombre de Mach, augmentation de la pression, de la température et de la masse volumique. [22]

Lorsque l'écoulement après le choc oblique reste supersonique, on l'appelle choc faible, mais lorsqu'il devient subsonique, on l'appelle choc fort, néanmoins ce dernier reste insignifiant et il n'est utilisé seulement que pour l'étude théorique.

Cependant il est à souligner que la différence entre le choc faible et le choc fort se détermine par l'intensité de la pression aval (le taux de compression) ; où le choc fort se distingue par un grand taux de compression par rapport au choc faible. [8]

Représenté ici par les schémas (figures 2.6 et 2.7).

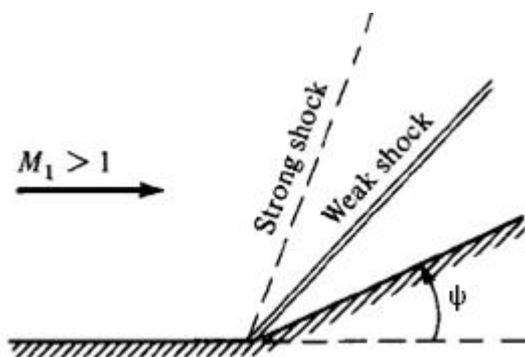


Figure 2.6 : Le choc faible et le choc fort.

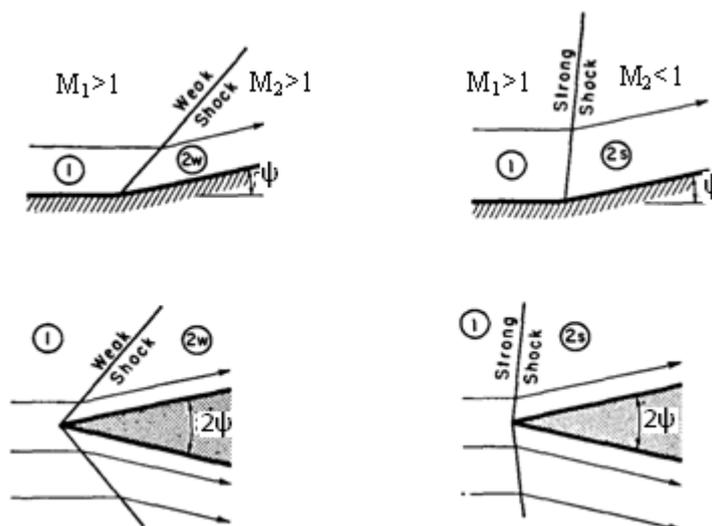


Figure 2.7 : La différence entre l'onde de choc oblique faible et fort autour d'un dièdre.[17]

### 2.5. Le choc attaché et le choc détaché

Il est à noter que lorsque l'angle de déviation  $\psi$  dépasse une certaine limite  $\psi_{\max}$ , le modèle du choc oblique attaché n'est plus valable où il se détache comme l'indique ici la figure 2.8. En pratique un choc courbe se forme en amont avec une poche sonique.

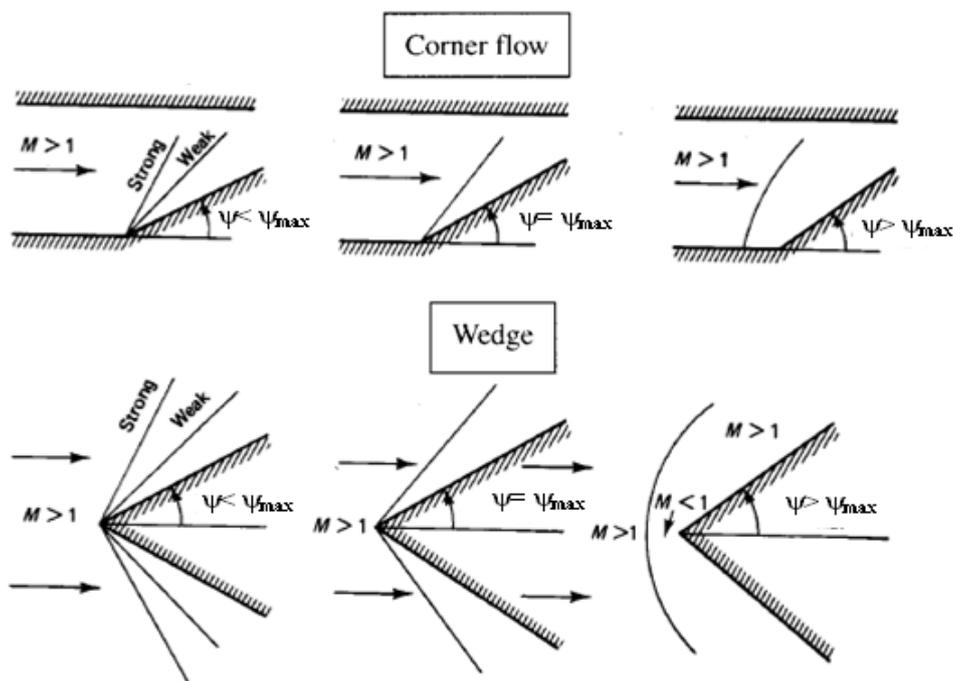


Figure 2.8 : L'influence de l'angle de déviation d'un dièdre sur la nature de choc oblique.[12]

La figure 2.9 présente la différence entre la structure d'un choc attaché et d'un choc détaché autour d'un dièdre de façon à ce que dans le cas du choc attaché ( $\psi < \psi_{\max}$ ); l'onde de choc oblique sera présente et les lignes de courants après ce choc restent parallèles et rectilignes. Par ailleurs dans le cas du choc détaché ( $\psi > \psi_{\max}$ ); un choc courbé va avoir lieu ; ce dernier sera composé d'un choc normal à la partie centrale, suivi d'un choc fort où l'écoulement en aval dans cette zone est subsonique ,ainsi qu' une ligne sonique limitant les différents cas, après cette ligne sonique, un choc faible va se produire où l'écoulement devient supersonique, et à la fin une onde de Mach va apparaître une fois que le choc faible est devenu infiniment faible.[22] [23]

Les lignes de courants après le choc détaché sont parallèles et courbées.

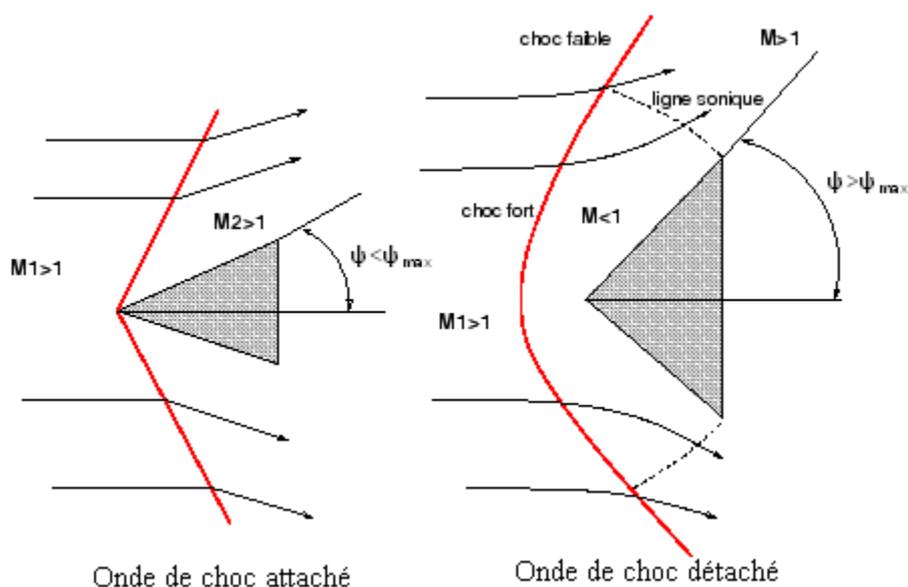


Figure 2.9 : La différence entre la nature d'un choc attaché et détaché autour d'un dièdre.[78]

Remarque [8] [24]

Pour un nombre de Mach  $M_1$  donné, plus l'angle de déviation de dièdre  $\psi$  augmente, plus on aura un choc fort (figure 2.10), et ce n'est qu'une fois qu'il dépassera une

certaine limite, qu'on obtiendra un choc détaché.

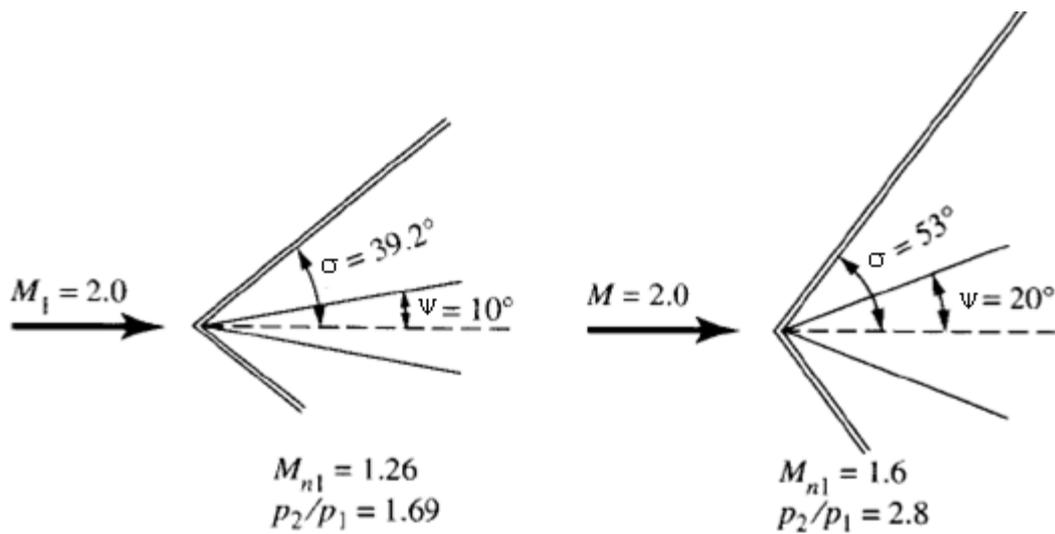


Figure 2.10 : L'effet de l'accroissement de l'angle de déviation  $\psi$ .

Pour un angle de déviation  $\psi$  donné, plus le nombre de mach  $M_1$  augmente, plus on aura un choc fort (figure 2.11).

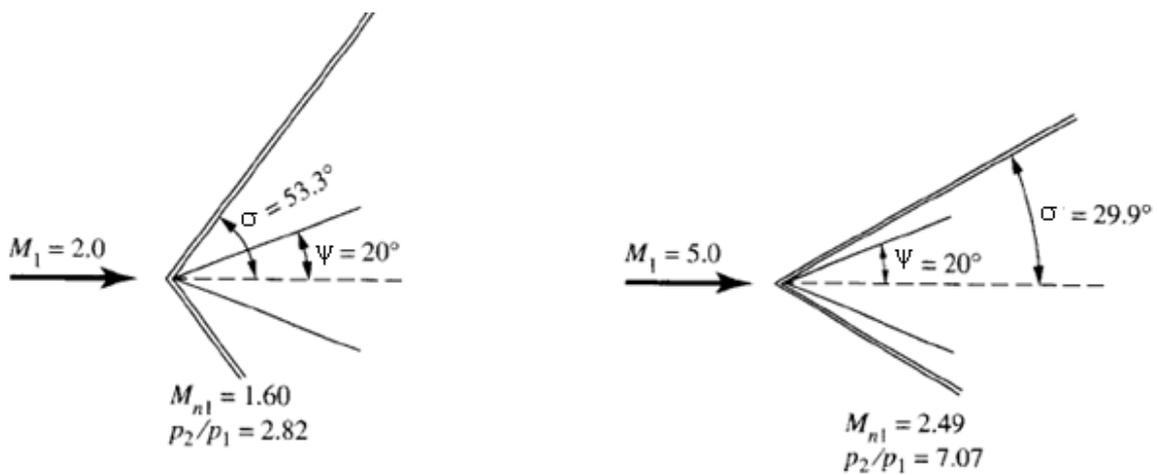


Figure 2.11 : L'effet de l'accroissement du nombre de Mach  $M_1$ .

La figure 2.12 visualise l'effet de l'accroissement du nombre de Mach amont pour un dièdre d'angle  $\psi=20^\circ$  où dans la figure de gauche  $M_1=4.50$  alors que dans celle de droite  $M_1=6.00$  de façon à ce que cette dernière possède le choc le plus intense.

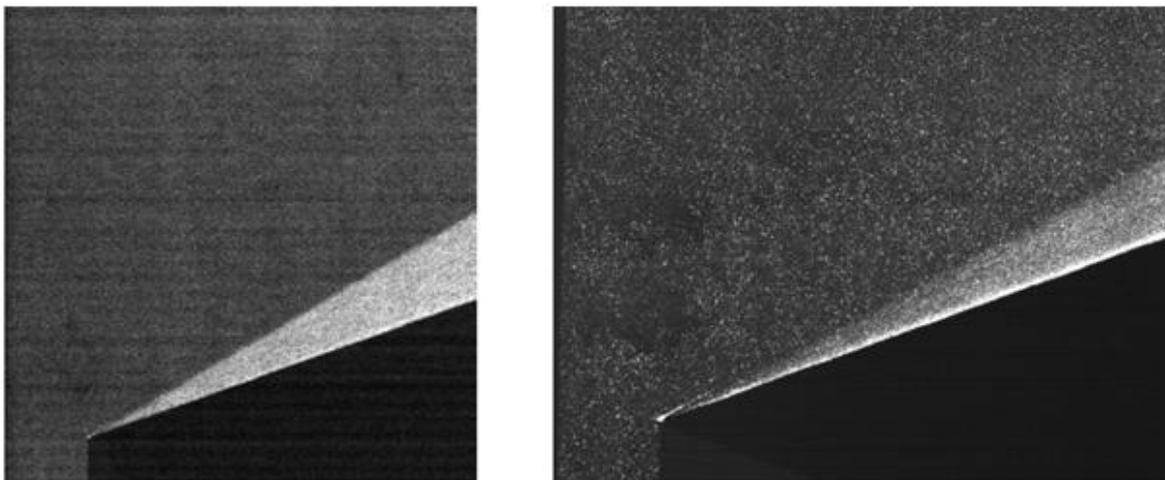


Figure 2.12 : Visualisation de l'effet de l'accroissement du nombre de Mach  $M_1$  par la technique PIV.[16]

2.6. La différence entre un écoulement autour d'un dièdre et un écoulement autour d'un cône  
[8]

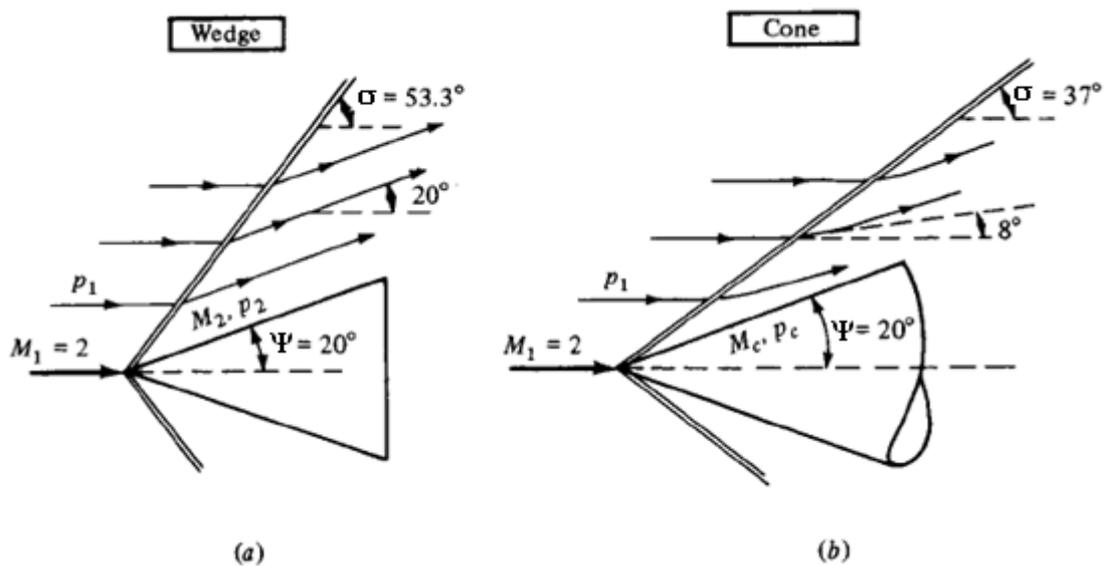


Figure 2.13 : Schéma représentant la différence entre le dièdre et le cône.

dièdre	cône
<p>-le dièdre est un profil 2D, écoulement bidimensionnel.</p> <p>-choc oblique attaché rectiligne à partir du nez.</p> <p>-écoulement aval uniforme avec des lignes de courants parallèles au dièdre.</p> <p>-la pression sur la surface de dièdre est égale à la pression statique après le choc <math>P_2</math>.</p> <p>-pour le même angle de déviation, et même nombre de Mach amont, l'angle de choc faible de dièdre est plus grand par rapport à celui du cône, c'est l'inverse du cas de choc fort.</p> <p>-le choc est plus fort par rapport au cône.</p>	<p>-le cône est une géométrie 3D, écoulement bidimensionnel axisymétrique.</p> <p>- choc oblique attaché rectiligne émanant du bout.</p> <p>-les lignes de courants après le choc sont courbées, où elles s'inclinent d'un angle plus petit que celui de l'angle de déviation et deviendront plus tard droite.</p> <p>- la pression sur la surface de cône <math>P_c</math> est inférieure que la pression statique après le choc <math>P_2</math> pour le cas de dièdre.</p> <p>-pour le même nombre de Mach <math>M_1</math>, l'angle de déviation maximale du cône est plus grand par rapport au dièdre surtout pour un nombre de Mach <math>M_1</math> petit.</p> <p>-le nombre de Mach aval <math>M_c</math> d'un cône est supérieur que le nombre de Mach <math>M_2</math> pour le cas de dièdre.</p>

## 2.7. L'intérêt de l'onde choc oblique

L'un des objectifs d'une onde de choc oblique est la conception des entrées d'air supersonique où on obtient un écoulement plus performant à l'entrée du compresseur (moins de vitesse avec moins de perte de pression total), sachant que la recherche d'une efficacité élevée, c'est-à-dire la recherche de chocs faibles. En suggérant qu'une série de chocs faibles devrait remplacer un choc normal pour augmenter l'efficacité. [14], [39].

Les entrées d'air supersoniques ont pour objet de ralentir l'écoulement relatif de l'air en amont de la captation jusqu'à un certain nombre de Mach interne imposé par le fonctionnement des appareils qu'elles alimentent.[18]

Ce nombre de Mach est généralement subsonique mais peut exceptionnellement être supersonique, s'il s'agit par exemple, d'un statoréacteur à combustion supersonique. [18]

La chute de l'efficacité avec le nombre de Mach reflète évidemment l'accroissement des intensités des chocs. [18]

## CHAPITRE 3

### MODÈLE MATHÉMATIQUE

#### 3.1. Introduction

L'objectif principal de cette étude est l'élaboration d'un modèle mathématique sert à calculer les paramètres thermodynamiques à travers l'onde de choc produite dans un gaz à haute température, non la dissociation des molécules.

Dans ce chapitre on va présenter les différents équations et leurs démonstrations qu'on a utilisé pour résoudre ce problème, commençant par la présentation des formules d'un gaz parfait (calloriquement parfait et thermiquement parfait) [8,43, 44, 45, 46, 47, 48, 61, 66], puis le développement des équations de gaz à haute température (thermiquement parfait et calloriquement imparfait) [4, 5, 63, 64, 65].

#### 3.2. Modèle d'un gaz parfait

On rappelle que pour un gaz parfait (calloriquement parfait et thermiquement parfait) :

$$H = cpT \quad \text{avec } cp \text{ constante.}$$

Pour un gaz diatomique comme l'air  $cp = 1001.15868 [JKg^{-1}K^{-1}]$ . Pour un écoulement stationnaire non visqueux unidirectionnel, les équations de base sont :

$$\text{Système (I) } \left\{ \begin{array}{l} \text{Bilan de masse:} \\ \text{Bilan de quantité de mouvement:} \\ \text{Conservation de l'énergie :} \\ \text{L'équation d'état :} \end{array} \right. \begin{array}{l} \rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \dots \dots \dots (1) \\ \rho_1 u_1^2 + p_1 = \rho_2 u_2^2 + p_2 \dots \dots \dots (2) \\ \frac{1}{2} u_1^2 + H_1 = \frac{1}{2} u_2^2 + H_2 \dots \dots \dots (3) \\ p = \rho RT \dots \dots \dots (4) \end{array}$$

### 3.2.1 Onde de choc normale

La figure 3.1 présente une onde de choc normale qui est un problème unidirectionnelle où les paramètres thermodynamique dépendent uniquement de nombre de Mach amont  $M_1$ .

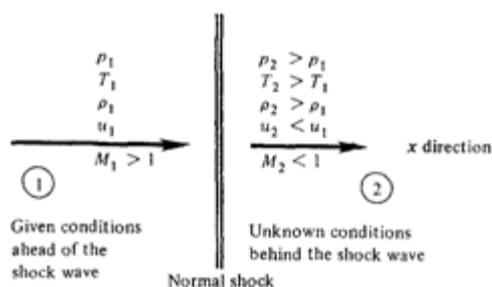


Figure 3.1 : Diagramme de l'onde de choc normale.

La résolution d'un problème d'une onde de choc normale nécessite de traiter le système (I) ainsi, les paramètres thermodynamiques après le choc et ceux correspondant au point d'arrêts sont les suivants [8, 24 et 73]:

$$M_2^2 = \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{1 - \gamma + 2\gamma M_1^2} \quad (3.1)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left[ 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 - 1) \right] \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{(\gamma + 1) M_1^2} \quad (3.2)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_1^2} \quad (3.3)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 - \gamma + 2\gamma M_1^2}{1 + \gamma} \quad (3.4)$$

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \quad (3.5)$$

$$\frac{P_0}{P} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad (3.6)$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} \quad (3.7)$$

$$T_{01} = T_{02} \quad \text{Et} \quad P_{01} > P_{02} \quad (3.8)$$

$$S_2 - S_1 = -R \text{Log} \frac{P_{02}}{P_{01}} \quad (3.9)$$

### 3.2.2. Onde de choc oblique

La figure 3.2 présente une onde de choc oblique qui est un problème bidimensionnelle où les paramètres thermodynamique dépendent de nombre de Mach amont  $M_1$  et de l'angle de déviation de dièdre  $\psi$ .

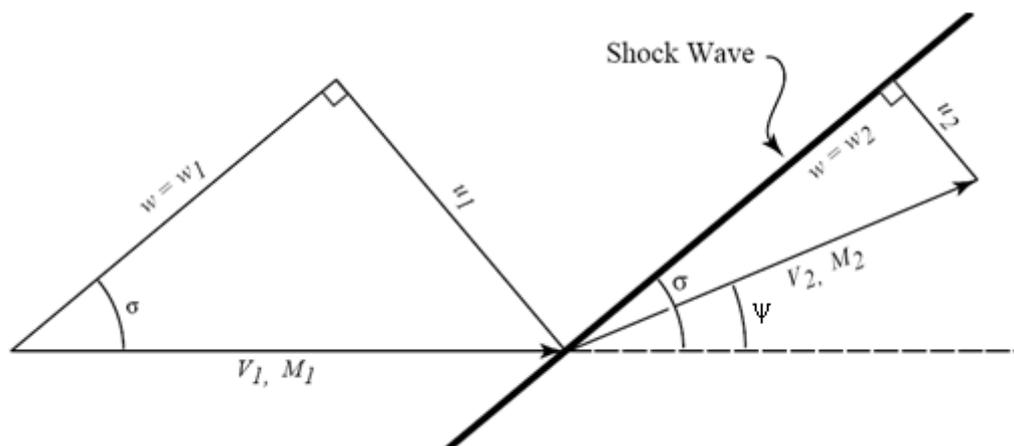


Figure 3.2 : Diagramme de l'onde de choc oblique.

Comme l'écoulement amont provient sans un angle d'attaque, les composantes tangentielles de la vitesse avant et après le choc sont les mêmes.

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega \quad (3.10)$$

Donc ce n'est que les composantes normales de la vitesse qui influent, ainsi le système d'équation (I) est valable et les paramètres thermodynamiques de l'onde de choc oblique sont les mêmes tel que ceux de l'onde de choc normale, en remplaçant le nombre de Mach amont  $M_1$  par la composante normale  $M_{n1}$  comme il est indiqué dans la figure 3.2.

La composante normale de nombre de Mach amont

$$M_{n1} = M_1 \sin \sigma \quad (3.11)$$

La composante normale de nombre de Mach aval

$$M_{n2} = M_2 \sin(\sigma - \psi) \quad (3.12)$$

D'après la figure 3.2 on a aussi :

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{u_1}{\omega_1} \quad (3.13)$$

$$\operatorname{tg}(\sigma - \psi) = \frac{u_2}{\omega_2} \quad (3.14)$$

Alors  $\frac{\operatorname{tg}(\sigma - \psi)}{\operatorname{tg} \sigma} = \frac{u_2}{u_1}$  Et d'après l'équation de continuité, on trouve :

$$\frac{\operatorname{tg}(\sigma - \psi)}{\operatorname{tg} \sigma} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad (3.15)$$

À la fin, la relation qui lie l'angle de déviation  $\psi$  avec l'angle de choc  $\sigma$  et le nombre de Mach  $M_1$  est : [8, 24]

$$\operatorname{tg} \psi = 2 \cot \sigma \frac{M_1^2 \sin^2 \sigma - 1}{M_1^2 (\gamma + \cos 2\sigma) + 2} \quad (3.16)$$



En comparant dans la figure 3.3 notre formule de la chaleur spécifique [6] avec celle utilisé dans les références [9], [1] ainsi que avec la formule de la chaleur spécifique (qui inclut l'énergie de vibration, voir chapitre 1)

[9]

$$\left\{ \begin{array}{l} 300K < T < 1000K \rightarrow cp(T) = \left[ 3.65359 - \frac{1.33736}{10^3}T + \frac{3.29421}{10^6}T^2 - \frac{1.91142}{10^9}T^3 + \frac{0.275462}{10^{12}}T^4 \right] R \\ 1000K < T < 5000K \rightarrow cp(T) = \left[ 3.04473 + \frac{1.33805}{10^3}T - \frac{0.488256}{10^6}T^2 + \frac{0.0855475}{10^9}T^3 - \frac{0.00570132}{10^{12}}T^4 \right] R \end{array} \right. \quad (3.18)$$

[1]

$$\left\{ \begin{array}{l} cp(T) = \left[ A_1 \left( \frac{1}{T^2} \right) + A_2 \left( \frac{1}{T} \right) + A_3 + A_4 T + A_5 T^2 + A_6 T^3 + A_7 T^4 + A_8 T^5 \right] R \\ 80K < T < 1000K \rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} A_1 = -3.7319821 & A_5 = -2.7653130D-06 \\ A_2 = 5.4196701D-01 & A_6 = 8.1886142D-09 \\ A_3 = 3.4693586 & A_7 = -7.7368690D-12 \\ A_4 = 3.8353798D-04 & A_8 = 2.4348723D-15 \end{array} \right. \\ 1000K < T < 6000K \rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} A_1 = 2.3769851D+05 & A_5 = 6.8321801D-08 \\ A_2 = -1.2440527D+03 & A_6 = -1.0553542D-11 \\ A_3 = 5.1266690D+00 & A_7 = 6.6450071D-16 \\ A_4 = -2.0400644D-04 & A_8 = 0.00000000D+00 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (3.19)$$

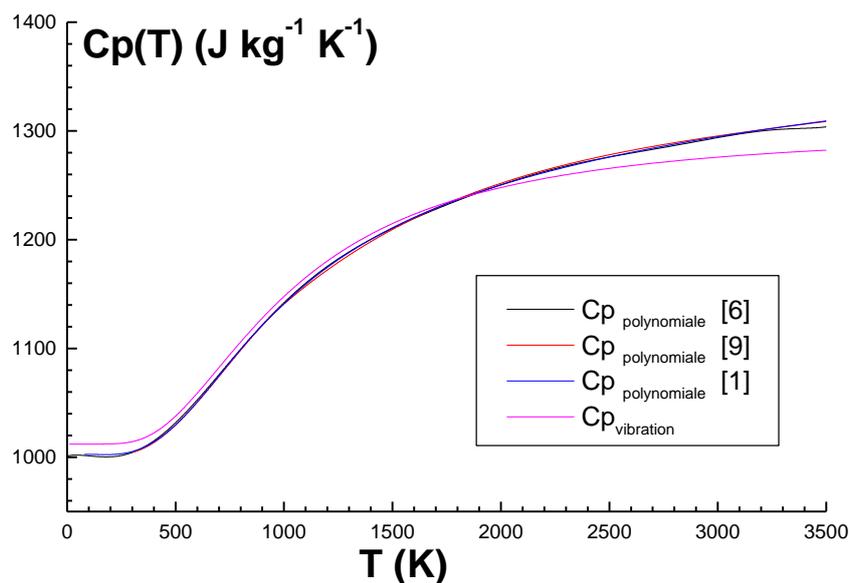


Figure 3.3 : Comparaison entre les différentes formules de la chaleur spécifique.

On constate que les trois polynômes de la chaleur spécifique ([6], [9] et [1]) possèdent la même allure avec la formule qui utilise l'énergie de vibration.

- Le rapport des chaleurs spécifiques

Le rapport des chaleurs spécifiques  $\gamma$  est en fonction de la chaleur spécifique  $C_p$  et de la température  $T$ .

$$\gamma(T) = \frac{cp(T)}{cp(T) - R} \quad (3.20)$$

- L'enthalpie

On intègre la fonction de  $C_p(T)$  dans l'intervalle  $[T, T_0]$ , ainsi l'enthalpie sera en fonction de la température total  $T_0$ , et elle est définie lorsque  $T < T_0$ :

$$H(T) = \int_T^{T_0} cp(T) dT \quad (3.21)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T_0 < \bar{T} \rightarrow H(T) = \bar{c}_p(T_0 - T) \\ T_0 > \bar{T} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} T \leq \bar{T} \rightarrow H(T) = \bar{c}_p(\bar{T} - T) + H(\bar{T}) \\ T > \bar{T} \rightarrow H(T) = H_0 - \left[ c_1 + T \left( c_2 + T \left( c_3 + T \left( c_4 + T \left( c_5 + T \left( c_6 + T \left( c_7 + T \left( c_8 + T \left( c_9 + T \left( c_{10} \right) \right] \\ \text{Avec} \\ H_0 = T_0 \left[ c_1 + T_0 \left( c_2 + T_0 \left( c_3 + T_0 \left( c_4 + T_0 \left( c_5 + T_0 \left( c_6 + T_0 \left( c_7 + T_0 \left( c_8 + T_0 \left( c_9 + T_0 \left( c_{10} \right) \right] \\ c_i = \frac{a_i}{i} \quad i = (1, 2, 3, \dots, 10) \end{array} \right. \quad (3.22)$$

### 3.3.3. La résolution d'un problème à haute température

Pour déduire les différents paramètres restant dans le cas d'un gaz à haute température [67] ; on utilise la forme différentielle des équations de base.

$$\text{Système (II)} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{Bilan de masse:} & \rho V = \text{cte} \dots \dots \dots (1) \\ \text{Bilan de quantité de mouvement:} & dP + \rho V dV = 0 \dots \dots \dots (2) \\ \text{Conservation de l'énergie :} & cpdT + VdV = 0 \dots \dots \dots (3) \\ \text{L'équation d'état thermique:} & dp = \rho R dT + RT d\rho \dots \dots \dots (4) \end{array} \right.$$

Pour un écoulement adiabatique

$$TP^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{cte} \quad (3.23)$$

$$\frac{dT}{T} + \frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{dP}{P} = 0 \quad (3.24)$$

$$cpdT - \frac{RT}{P} (\rho R dT + RT d\rho) = 0 \quad (3.25)$$

$$cpdT - RT \frac{d\rho}{\rho} = R dT \quad (3.26)$$

$$\frac{cp}{\gamma} dT - RT \frac{d\rho}{\rho} = 0 \quad (3.27)$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dT}{T(\gamma(T)-1)} \quad (3.28)$$

- Vitesse de son

Ici l'équation de Poisson (isentropique) :

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = \text{cte} \quad (3.29)$$

La forme logarithmique de cette dernière nous donne :

$$\frac{dP}{P} - \gamma \frac{d\rho}{\rho} = 0 \quad (3.30)$$

$$a^2 = \left( \frac{dP}{d\rho} \right)_{S=\text{cte}} \quad (3.31)$$

Et on a la forme différentielle de l'équation d'état

$$dP = \rho R dT + RT d\rho \quad (3.32)$$

$$\frac{dP}{d\rho} = R dT \frac{\rho}{d\rho} + RT \quad (3.33)$$

On remplace l'équation (3.28) dans (3.33)

$$\frac{dP}{d\rho} = R dT \frac{T(\gamma(T)-1)}{dT} + RT \quad (3.34)$$

$$a^2(T_i) = \gamma(T_i) RT_i \quad i=1,2 \quad (3.35)$$

- La vitesse

On intègre l'équation différentielle de la conservation d'énergie dans l'intervalle  $[T, T_0]$

$$\int_T^{T_0} c_p(T) dT + \int_V^{V_0=0} V dV = 0 \quad (3.36)$$

On obtient la formule de vitesse à haute température

$$V^2(T_i) = 2 \int_T^{T_0} c_p(T_i) dT = 2H(T_i) \quad i=1,2 \quad (3.37)$$

- Nombre de Mach

$$M(T) = \frac{V(T)}{a(T)} = \frac{\sqrt{2H(T)}}{\sqrt{\gamma(T)RT}} \quad (3.38)$$

- Température statique

La dernière équation, on peut la reformuler comme suit :

$$2H(T_1) - M^2(T_1)a^2(T_1) = 0 \quad (3.39)$$

La détermination de la température  $T_1$  amont, s'effectue à partir de l'équation (3.39) en utilisant la méthode de dichotomie sachant que le nombre de Mach  $M_1$  et la température total  $T_0$  sont connus.

Pour rappelle : la température statique est la plus petite valeur des températures  $T < T^* < T_0$

Pour utiliser l'algorithme de Dichotomie, on suppose que la température statique  $T_1$  est comprise entre deux valeurs  $[T_a, T_b] = [0, T^*]$  sachant que la température critique  $T^*$  est déjà calculée de la même manière que  $T_1$  dans l'intervalle  $[T_c, T_d] = [0, T_0]$ .

- Masse volumique statique et totale

On intègre l'équation différentielle de la conservation de quantité de mouvement dans l'intervalle  $[T, T_0]$ .

$$\int_{v_0=0}^v v dv + \int_{P_0}^P \frac{dP}{\rho} = 0 \quad (3.40)$$

$$\frac{V^2(T)}{2} + \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{1}{\rho} a^2(T) d\rho = 0 \quad (3.41)$$

$$\int_T^{T_0} cp(T) dT = -a^2(T) \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} \quad (3.42)$$

Il suffit d'intégrer cette formule (3.42) pour obtenir la masse volumique

$$\frac{\rho_i}{\rho_{0i}} = E \exp \left[ - \int_T^{T_0} \frac{cp(T_i)}{a^2(T_i)} dT \right] \quad i=1,2 \quad (3.43)$$

Utilisons la méthode de Simpson [68] pour résoudre l'intégrale ci-dessus dans l'intervalle  $[T_i, T_0]$

- Pression statique et totale

Après avoir calculé la température et la masse volumique, la pression se déduit de l'équation d'état :

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1} \quad (3.44)$$

$$\frac{P_i}{P_{0i}} = \frac{\rho_i T_i}{\rho_{0i} T_{0i}} \quad i=1,2 \quad (3.45)$$

- Température totale

Suivant la définition de la vitesse dans la relation (3.37) on peut écrire :

$$\circ \text{ Dans l'intervalle } [T_1, T_{01}] \quad V_1^2(T) = 2 \int_{T_1}^{T_{01}} cp(T) dT \quad (3.46)$$

$$\circ \text{ Dans l'intervalle } [T_2, T_{02}] \quad V_2^2(T) = 2 \int_{T_2}^{T_{02}} cp(T) dT \quad (3.47)$$

$$\circ \text{ Dans l'intervalle } [T_1, T_2] \quad V_2^2 - V_1^2 = 2 \int_{T_2}^{T_1} cp(T) dT \quad (3.48)$$

La différence entre la relation (3.47) et (3.46) donne

$$2 \int_{T_2}^{T_{02}} cp(T) dT - 2 \int_{T_1}^{T_{01}} cp(T) dT = 2 \int_{T_2}^{T_1} cp(T) dT \quad (3.49)$$

D'une part on remarque que le résultat de la soustraction est le même que l'équation (3.48)

Et d' autre part on peut écrire ce résultat comme :

$$2 \int_{T_2}^{T_1} cp(T) dT = 2 \int_{T_2}^{T_{02}} cp(T) dT + 2 \int_{T_{02}}^{T_{01}} cp(T) dT + 2 \int_{T_{01}}^{T_1} cp(T) dT \quad (3.50)$$

Autrement dit

$$T_0 = T_{02} = T_{01} \quad (3.51)$$

Ce qui nous ramène à dire que la température totale pour un gaz à haute température reste constante à travers le choc.

### 3.3.4. Onde de choc normale

D'après l'équation d'énergie

$$2H(T_1) - 2H(T_2) = u_2^2 - u_1^2 = (u_2 - u_1)(u_2 + u_1) \quad (3.52)$$

Et d'après l'équation de conservation de quantité de mouvement, on a

$$u_2 - u_1 = \frac{P_1 - P_2}{q} = \frac{P_1 - P_2}{\rho_1 u_1} \quad (3.53)$$

On remplace (3.53) dans l'équation (3.52) pour obtenir

$$2H(T_1) - 2H(T_2) = \left( \frac{P_1 - P_2}{\rho_1 u_1} \right) (u_2 + u_1) \quad (3.54)$$

En introduisant l'équation d'état, on aura :

$$2H(T_1) - 2H(T_2) = RT_1 + RT_1 \left( \frac{1}{\frac{\rho_2}{\rho_1}} \right) - \frac{\rho_2 RT_2}{\rho_2} - \frac{\rho_2 RT_2}{\rho_1} \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad (3.55)$$

$$2H(T_1) - 2H(T_2) = RT_1 + RT_1 \left( \frac{1}{x_\rho} \right) - RT_2 x_\rho - RT_2 \quad (3.56)$$

$$\frac{2H(T_1) - 2H(T_2)}{RT_1} = \left(1 + \frac{1}{x_\rho}\right) - x_T(1 + x_\rho) \quad (3.57)$$

$$x_T x_\rho^2 - x_\rho \left[ \frac{2H(T_1) - 2H(T_2)}{RT_1} + x_T - 1 \right] - 1 = 0 \quad (3.58)$$

L'équation (3.58) est une équation non linéaire où la température et la masse volumique sont couplées.

D'après la conservation de la quantité de mouvement :

$$p_2 - p_1 = \rho_1 u_1 (u_1 - u_2) \quad (3.59)$$

Introduisant l'équation d'état, en multipliant et divisant par le terme  $\gamma(T_1)$

$$p_2 - p_1 = \frac{\gamma(T_1)}{\gamma(T_1)} \frac{P_1}{RT_1} u_1^2 \left(1 - \frac{u_2}{u_1}\right) \quad (3.60)$$

$$x_T x_\rho^2 - x_\rho \left[1 + \gamma(T_1) M_1^2(T)\right] + \gamma(T_1) M_1^2(T) = 0 \quad (3.61)$$

L'équation (3.61) est aussi une équation non linéaire où la température et la masse volumique sont couplées.

Alors comme solution, on déduit l'équation (3.61) de l'équation (3.58)

$$x_T x_\rho^2 - x_\rho \left[ \frac{2H_1 - 2H_2}{RT_1} + x_T - 1 \right] - 1 - x_T x_\rho^2 + x_\rho \left[1 + \gamma(T_1) M_1^2(T)\right] - \gamma(T_1) M_1^2(T) = 0$$

À partir de cette dernière, on peut obtenir le rapport de la masse volumique en fonction de  $T_1$  et  $T_2$  (cette dernière n'a pas encore été déterminée).

$$x_\rho = \frac{RT_1 \left[1 + \gamma(T_1) M_1^2(T)\right]}{2H_2 - 2H_1 + RT_1 \left[x_T + \gamma(T_1) M_1^2(T)\right]} \quad (3.62)$$

Afin de résoudre ce problème couplé entre la température et la masse volumique on remplace l'expression de rapport de la masse volumique dans l'équation (3.61), pour obtenir une fonction algébrique non linéaire en fonction de la température  $T_2$ .  $F(T_2) = 0$

Le discriminateur de cette fonction est

$$\Delta = (1 + \gamma(T_1)M_1^2(T))^2 - 4x_r\gamma(T_1)M_1^2(T)$$

Pour avoir une solution, il faut que  $\Delta > 0$  donc la solution réside à ce que  $T_2 < T_{\max}$

$$\text{Avec } T_{\max} = \frac{[1 + \gamma(T_1)M_1^2(T)]^2}{4\gamma(T_1)M_1^2(T)} T_1$$

Cette formule montre que  $T_1 < T_{\max}$  donc  $T_1 < T_2 < T_{\max}$

Pour obtenir les racines de la fonction  $F(T_2) = 0$  on utilise la méthode de dichotomie dans

l'intervalle  $[T_1, T_{\max}]$  [68], et posant  $T_M$  comme milieu de l'intervalle  $T_M = \frac{T_1 + T_{\max}}{2}$

Soulignant que  $F(T_1) = 0$  signifie d'une part qu'il n'existe pas de choc et que  $F(T_{\max}) > 0$

Alors si 
$$\begin{cases} F(T_M) > 0 \text{ la solution est dans } [T_1, T_M] \\ F(T_M) < 0 \text{ la solution est dans } [T_M, T_{\max}] \end{cases}$$

L'entropie est calculée en utilisant le rapport de pression totale

$$S_{12} = S_2 - S_1 = -R \text{Log} \frac{P_{02}}{P_{01}} \quad (3.63)$$

### 3.3.5. Onde de choc oblique

D'une part les relations (3.10) à (3.15) de cas d'un gaz parfait restent valables pour le cas d'un gaz à haute température

Et d'une autre part on a vu précédemment que l'équation de la conservation d'énergie s'écrit comme :

$$2H(T_1) - 2H(T_2) = RT_1 + RT_1 \left( \frac{1}{x_\rho} \right) - RT_2 x_\rho - RT_2 \quad (3.56)$$

Aussi d'après l'équation de la conservation de la quantité de mouvement on a déjà trouvé la relation (3.61).

$$x_T x_\rho^2 - x_\rho \left[ 1 + \gamma(T_1) M_1^2(T) \right] + \gamma(T_1) M_1^2(T) = 0 \quad (3.61)$$

A partir de cette dernière, on peut extraire le nombre de Mach amont selon la direction normale

$$M_1^2 \sin^2 \sigma = \frac{1}{\gamma(T_1)} \frac{\frac{\rho_2}{\rho_1}}{1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}} \left( 1 - \frac{P_2}{P_1} \right) \quad (3.64)$$

En conclut donc qu'on peut extraire le rapport de la température de la façon suivante

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\frac{\rho_2}{\rho_1} - M_1^2 \sin^2 \sigma \gamma(T_1) \left( 1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)}{\left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2} \quad (3.65)$$

On voit qu'il s'agit ici d'un problème couplé entre la température et la masse volumique où le rapport de la température est en fonction de celui de la masse volumique ; pour ça utilisant l'équation (3.15) pour déterminer  $\rho_2/\rho_1$  (sachant que l'angle de déviation est une donné et l'angle de choc est déjà déterminé) puis extraire  $T_2$ .

Remarque

$$\text{Notant que } \frac{\rho_2}{\rho_1} = \text{Fct}(\sigma) \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \text{Fct}(\sigma)$$

Et tout les paramètres sont en fonction de température  $T_2$  alors sont dépendant de l'angle de choc  $\sigma$ , cette dernière admet deux valeurs : une faible et l'autre fort ,ce qui implique que tout les paramètres thermodynamique admettent aussi deux valeurs ; l'une faible et l'autre fort.

D'après la conservation de quantité de mouvement, on a aussi

$$p_2 - p_1 = \frac{\gamma(T_2)}{\gamma(T_1)} \frac{P_2}{RT_2} u_2^2 \left( \frac{u_1}{u_2} - 1 \right) \quad (3.66)$$

On extrait le nombre de Mach après le choc selon la direction normale

$$M_{2n}^2 = \frac{1}{\gamma(T_2)} \frac{\frac{P_2 - P_1}{\rho_1}}{\frac{P_2}{\rho_2 - 1}} \quad (3.67)$$

Et finalement on calcul le nombre de Mach après le choc  $M_2$  selon la relation ci-dessous

$$M_2^2 \sin^2(\sigma - \psi) = \frac{1}{\gamma(T_2)} \frac{1 - \frac{P_2}{P_1}}{1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{P_2}{P_1}} \quad (3.68)$$

#### 3.4. L'erreur relative de modèle du gaz parfait

Le modèle mathématique de gaz parfait est développé sur la base à considérer la chaleur spécifique  $C_p$  et le rapport  $\gamma$  comme constantes, qui donne des résultats acceptables pour la basse température. Selon cette étude, nous pouvons noter une différence sur les résultats donnés entre le modèle de gaz parfait et avons développé ici le modèle. L'erreur donnée par le modèle GP comparé à notre modèle HT peut être calculée pour chaque paramètre. Ainsi pour chaque valeur ( $T_0, M_1$ ).

L'erreur  $\varepsilon$  peut être évaluée par la relation suivante :

$$\varepsilon_x = \left| 1 - \frac{x_{GP}}{x_{HT}} \right| \times 100 \quad (3.69)$$

$$\varepsilon_x(T_0, M) = \left| 1 - \frac{x_{GP}(T_0, M)}{x_{HT}(T_0, M)} \right| \times 100 \quad (3.70)$$

Où le terme ( $x$ ) présente chaque paramètre thermodynamique  $\frac{T_2}{T_1}, \frac{\rho_2}{\rho_1}, \frac{P_2}{P_1}, \frac{P_{02}}{P_{01}}, \frac{S_{12}}{R}, M_2$ .

## CHAPITRE 4

### PRÉSENTATION ET INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS

#### 4.1. Introduction

Suite à nos recherches ; nous allons présenter ici deux différents cas :

- Le choc oblique.
- Le choc normal.

Les résultats sont déterminés en fonction de 3 paramètres influents : l'angle de déviation de dièdre  $\psi$  (pour le cas de choc oblique), la température totale  $T_0$  et le nombre de Mach amont  $M_1$ . On a démontré pour chacun de ces paramètres leur influence sur la variation de la température, la masse volumique, la pression, la pression totale, l'entropie à travers le choc ainsi que sur le nombre de Mach aval.

D'une autre part, les résultats sont élaborés pour le cas d'un gaz parfait (calloriquement parfait et thermiquement parfait)[8] et le cas d'un gaz à haute température (calloriquement imparfait et thermiquement parfait) pour mieux voir la différence entre eux, où les résultats d'un gaz à haute température sont présentés pour une température totale de :  $T_0=1000$  K,  $T_0=2000$  K et  $T_0=3000$  K (estimer comme étant la limite extrême pour considérer un gaz thermiquement parfait [thermally perfect] [1]).

Les résultats sont illustrés pour le cas du choc faible et du choc fort, de manière à mieux cerner la différence entre eux. Néanmoins, on ne s'intéresse qu'au choc faible bien que le choc fort soit important pour d'autres applications physiques. [2]

Le diagramme  $\psi_{\sigma_M}$  est l'un de nos résultats le plus important qui a été effectué pour le cas d'un gaz parfait et le cas d'un gaz à haute température pour ( $T_0=1000$  K,  $T_0=2000$  K et  $T_0=3000$  K).(voir l'appendice E)

Afin de comparer le modèle GP, et le modèle HT, on a déterminé l'erreur relative du modèle HT par rapport au modèle GP en fonction de  $M_1$ .

À la fin, on a validé nos résultats (modèle HT), avec ceux qui étaient obtenu par les références [1], [2] et [3] de la manière suivante :

- Le diagramme  $\psi_{\sigma_M}$  à  $T_0=3000$  K (figure 4.17) est validé avec les références [1] [2].
- Le diagramme  $\psi_{\sigma_M}$  à  $T_0=1000$  K (figure 4.15) est validé avec les références [2] [3].
- Les résultats en fonction de  $M_1$  pour  $T_0=3000$  K sont validés uniquement avec la référence [1].

Sachant que cette dernière [1] utilise un code TPG basé sur un modèle différent au notre, et qui utilise une interpolation par un polynôme de 8ème degré pour la chaleur spécifique  $C_p(T)$ , (voir l'équation 3.19).

#### 4.2. Présentation des résultats

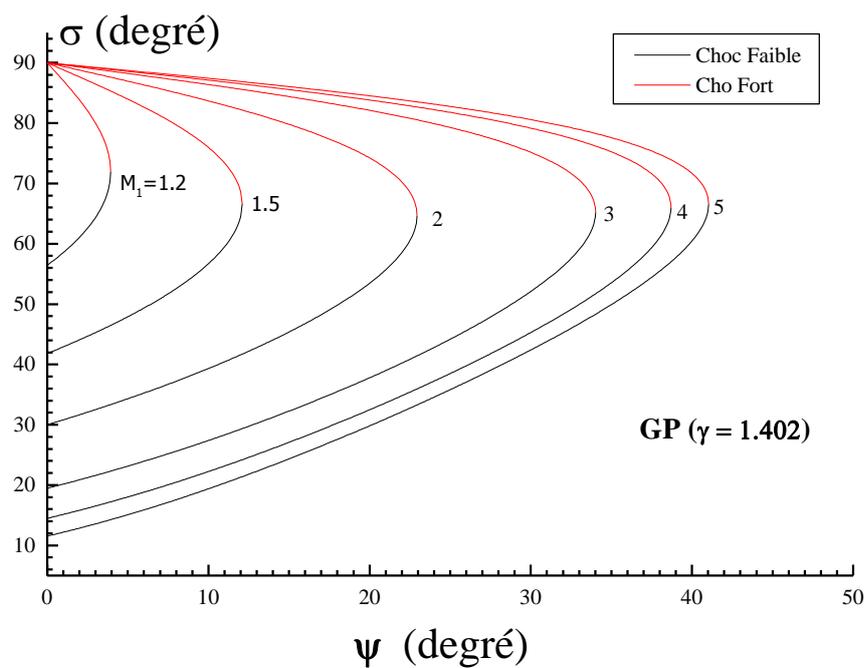


Figure 4.1 : Diagramme  $\psi$ - $\sigma$ -M pour un gaz parfait avec  $\gamma=1.402$ .

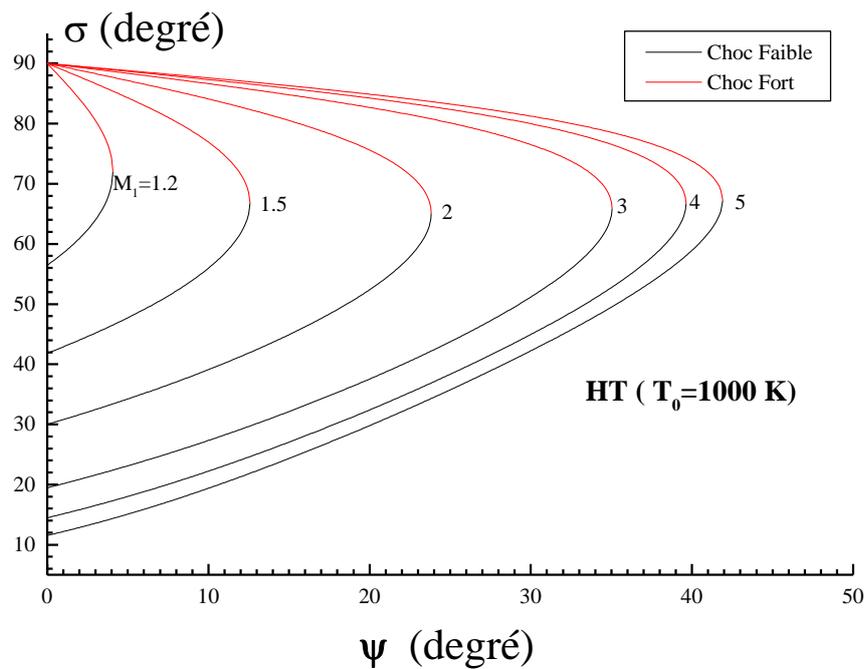


Figure 4.2 : Diagramme  $\psi$ - $\sigma$ -M pour un gaz à haute température ( $T_0=1000\text{K}$ ).

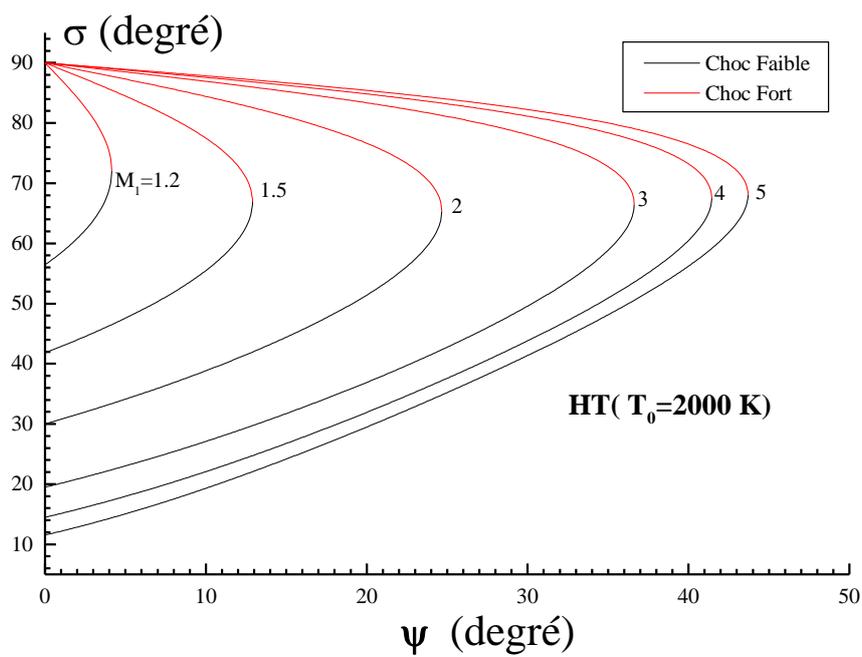


Figure 4.3 : Diagramme  $\psi$ - $\sigma$ - $M$  pour un gaz à haute température ( $T_0=2000\text{K}$ ).

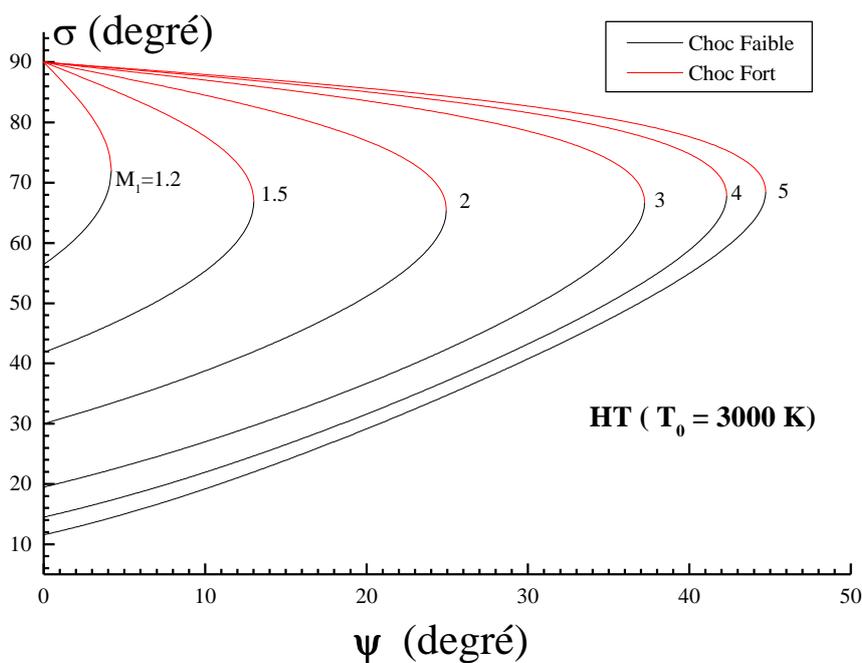


Figure 4.4 : Diagramme  $\psi$ - $\sigma$ - $M$  pour un gaz à haute température ( $T_0=3000\text{K}$ ).

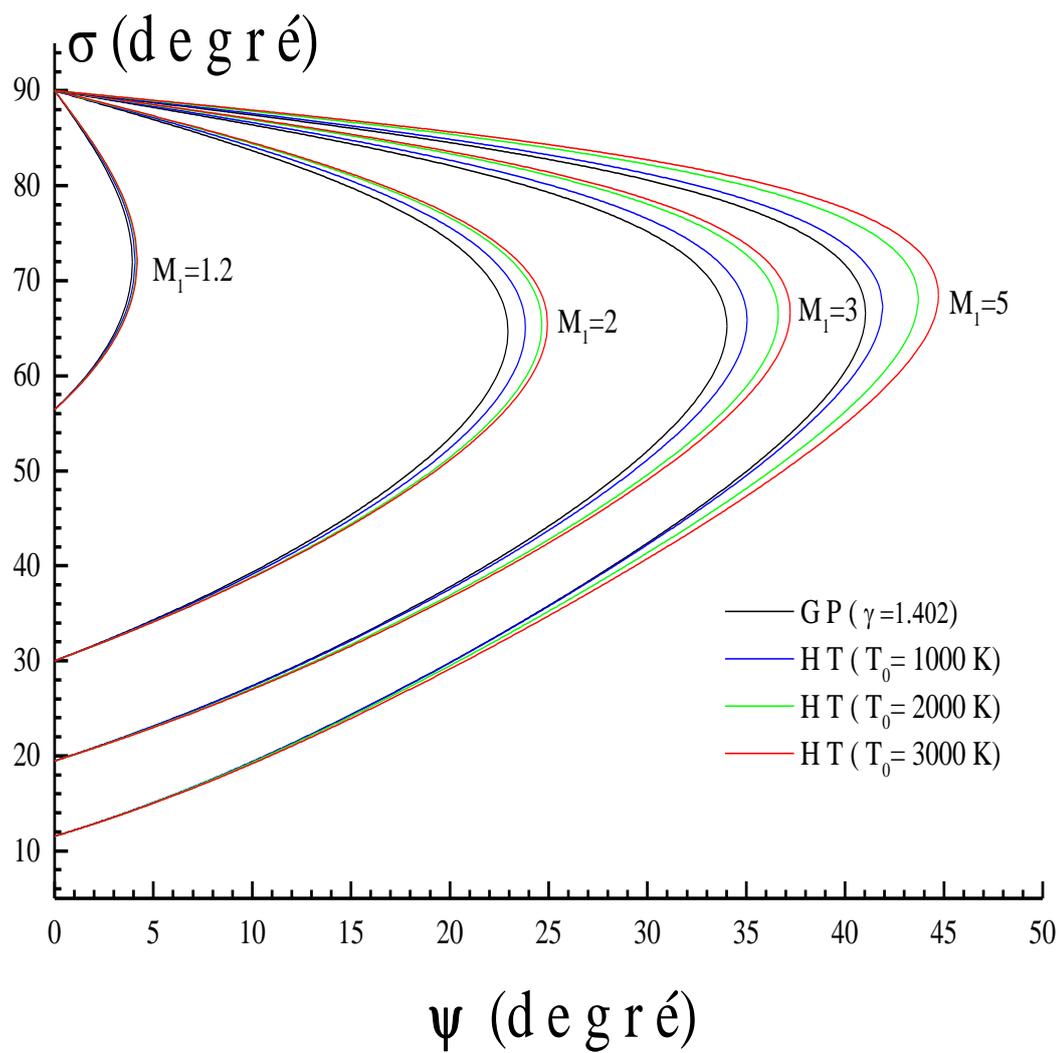


Figure 4.5 : Comparaison de diagramme  $\psi$ - $\sigma$ - $M$  entre le modèle d'un gaz parfait et le modèle d'un gaz à haute température.

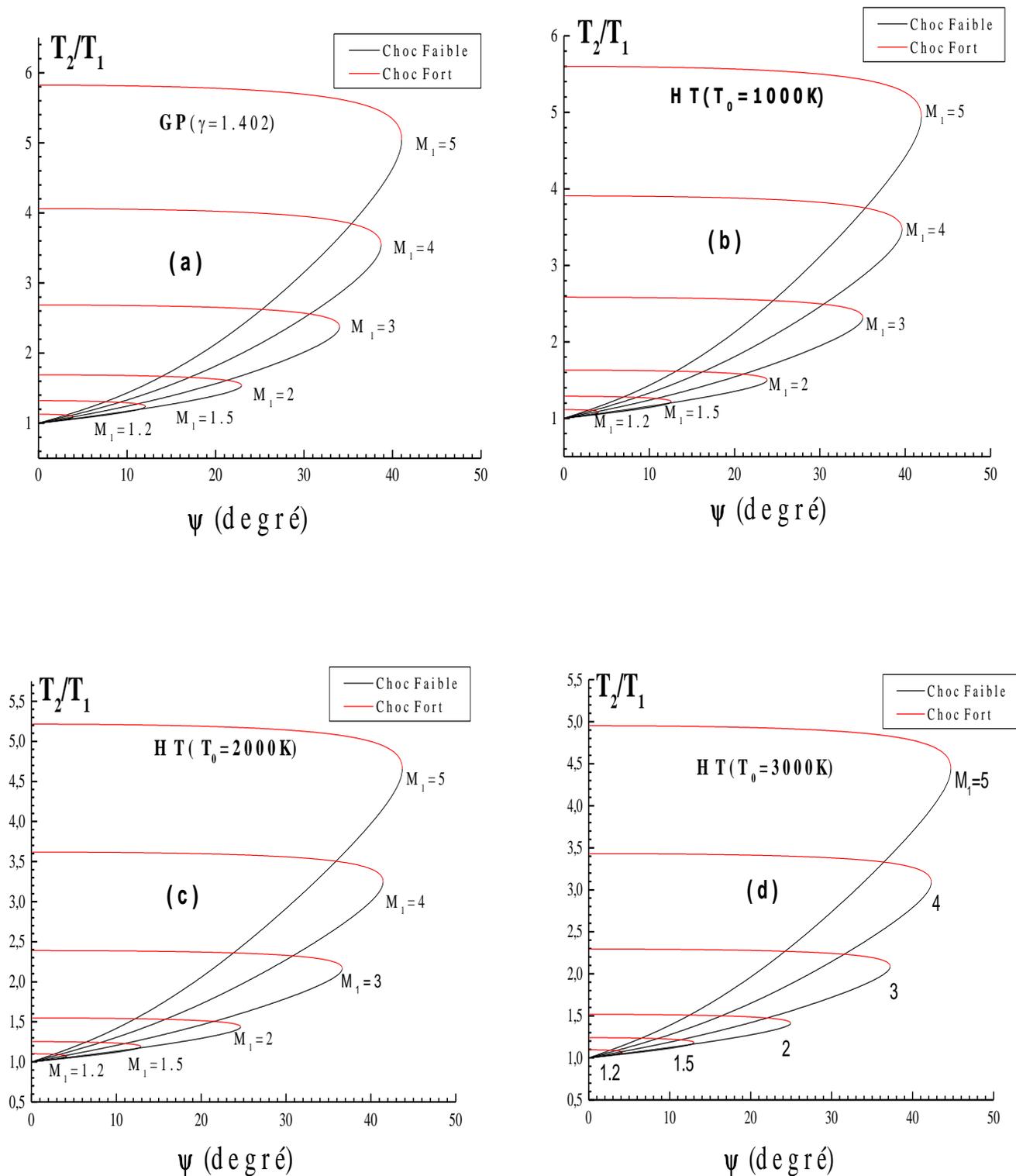


Figure 4.6 : L'évolution du rapport des températures  $T_2/T_1$  en fonction de l'angle de déviation de dièdre  $\psi$  pour différents nombre de Mach  $M_1$ . (a) gaz parfait  $\gamma=1.402$ . (b) gaz à haute température pour  $T_0=1000\text{ K}$ . (c) gaz à haute température pour  $T_0=2000\text{ K}$ . (d) gaz à haute température pour  $T_0=3000\text{ K}$ .

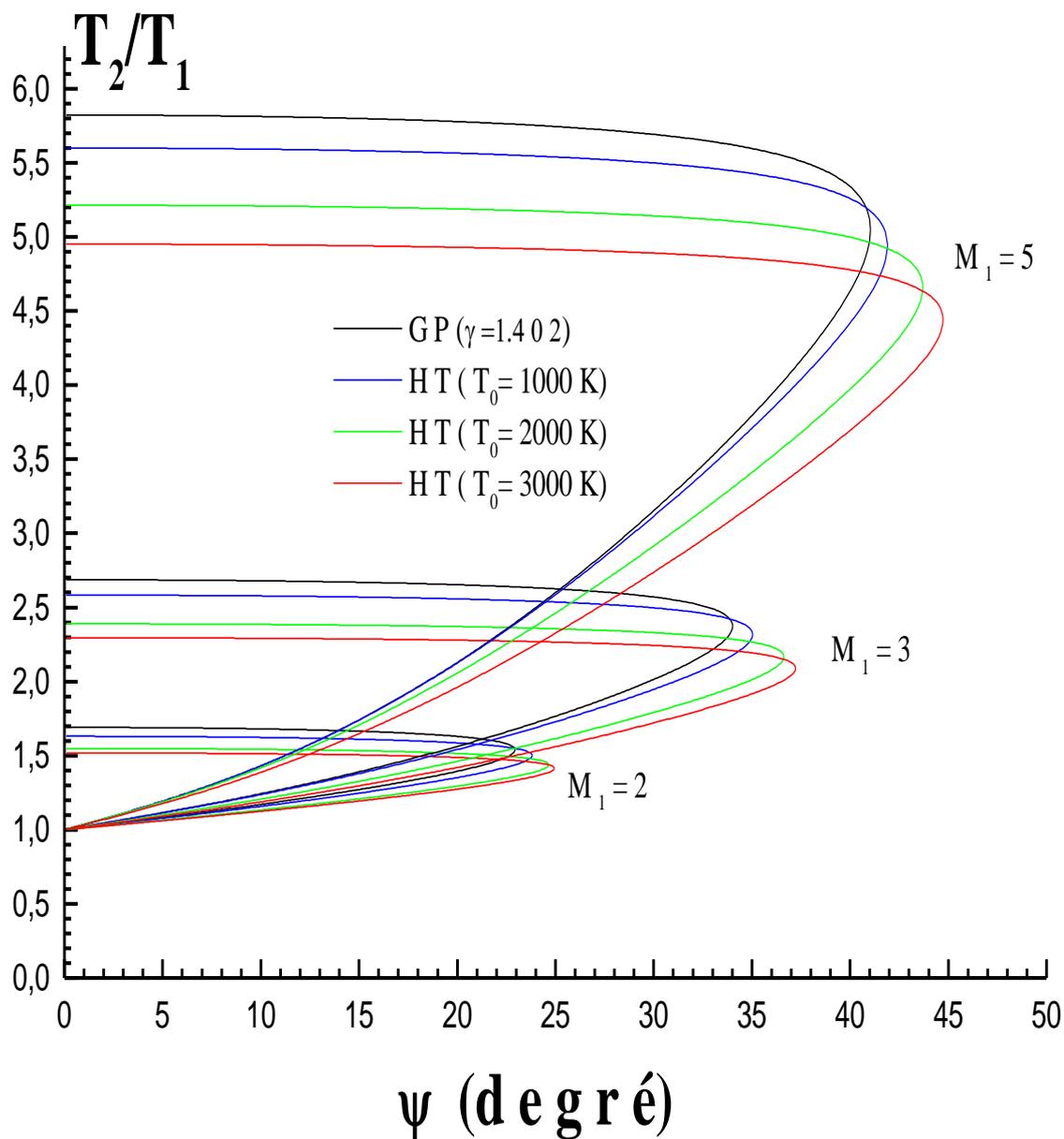


Figure 4.7 : Comparaison de la variation du rapport  $T_2/T_1$  en fonction de  $\psi$  entre le modèle d'un gaz parfait et le modèle d'un gaz à haute température (pour une température totale  $T_0=1000$  K,  $T_0=2000$  K et  $T_0=3000$  K) pour différents  $M_1$ .

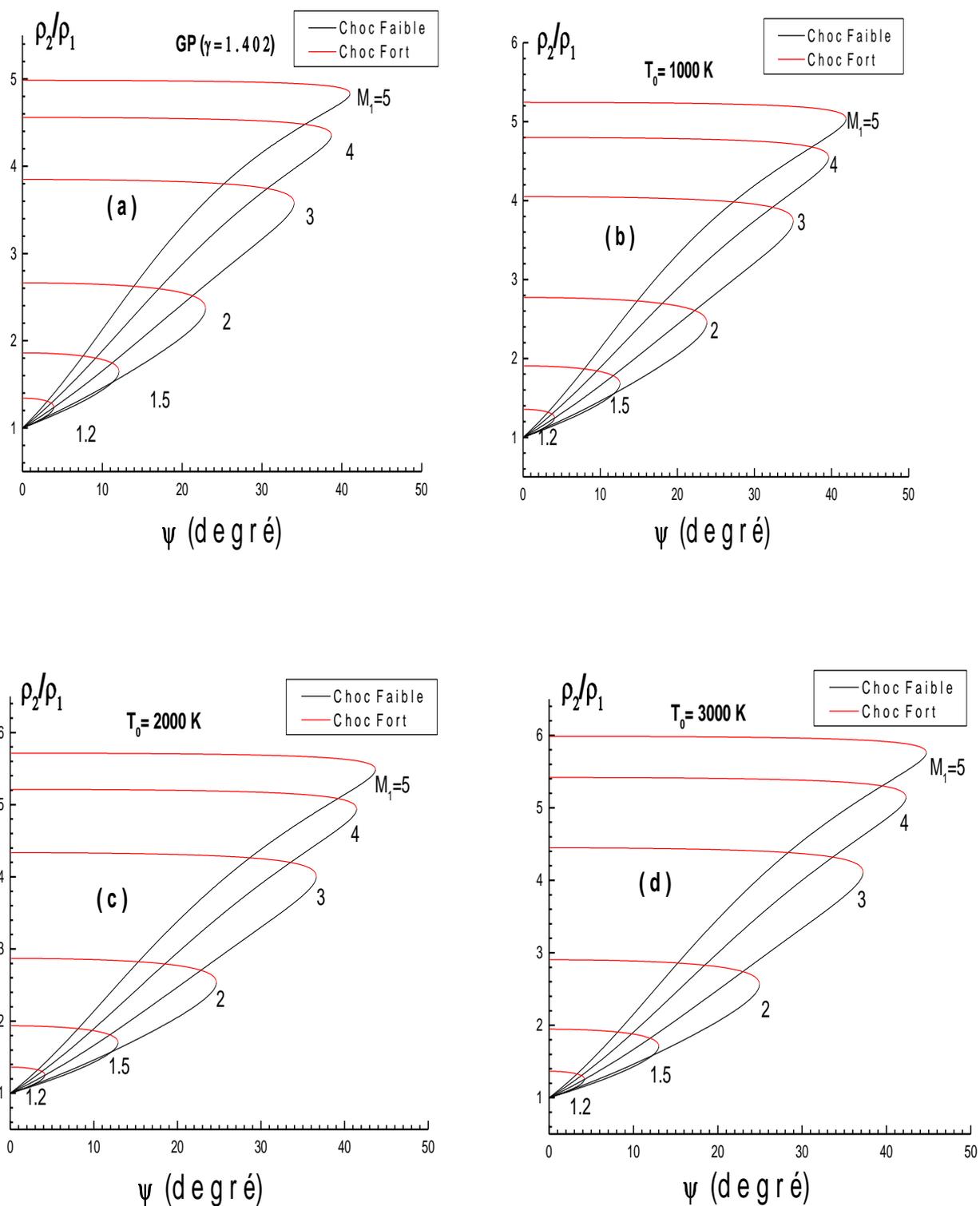


Figure 4.8 : L'évolution du rapport des masses volumiques  $\rho_2/\rho_1$  en fonction de l'angle de déviation de dièdre  $\psi$  pour différents nombre de Mach  $M_1$ . (a) gaz parfait  $\gamma=1.402$ . (b) gaz à haute température pour  $T_0=1000\text{ K}$ . (c) gaz à haute température pour  $T_0=2000\text{ K}$ . (d) gaz à haute température pour  $T_0=3000\text{ K}$ .

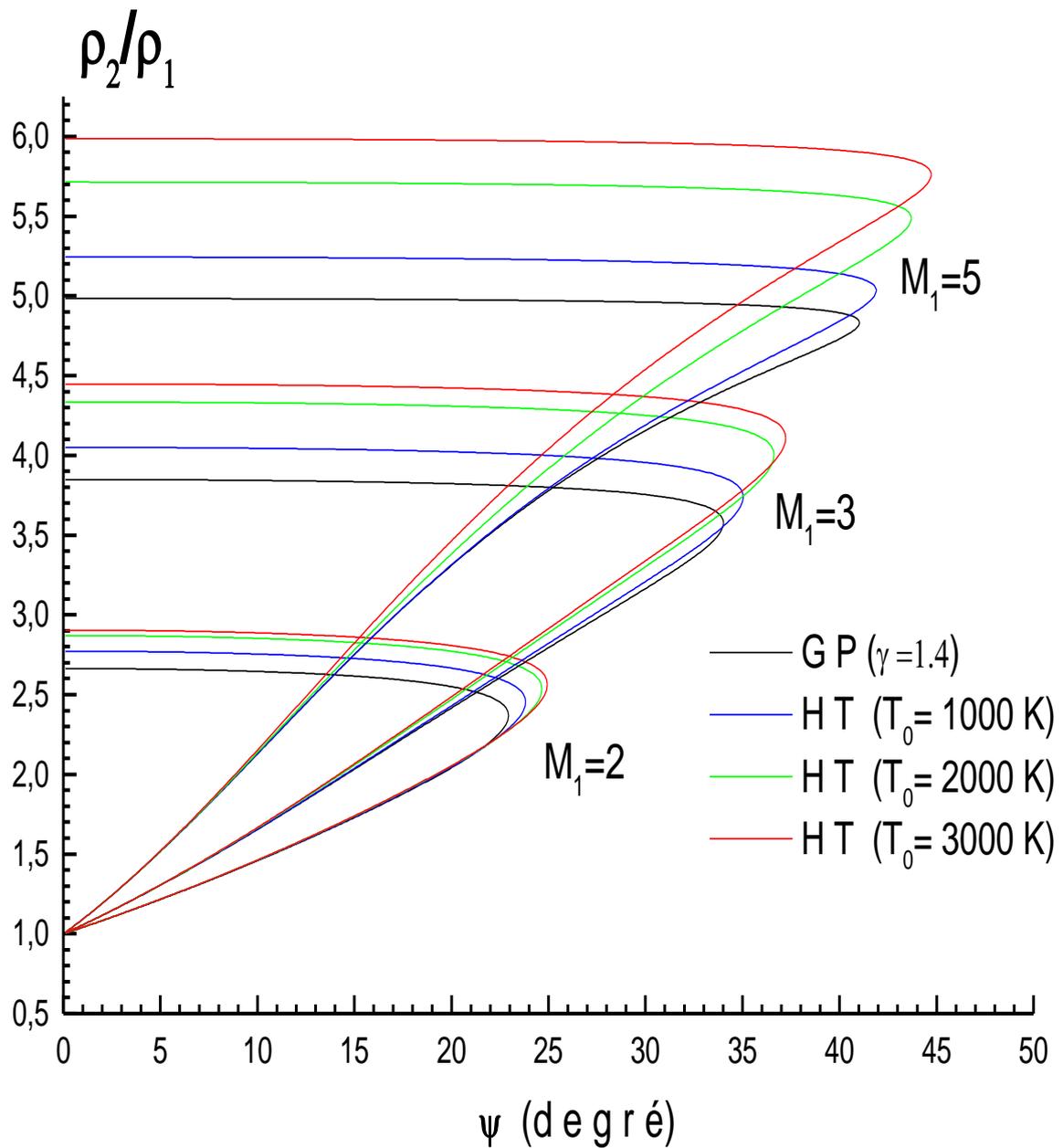


Figure 4.9 : Comparaison de la variation de rapport  $\rho_2/\rho_1$  en fonction de  $\psi$  entre le modèle d'un gaz parfait et le modèle d'un gaz à haute température (pour une température totale  $T_0=1000$  K,  $T_0=2000$  K et  $T_0=3000$  K) pour différents  $M_1$ .

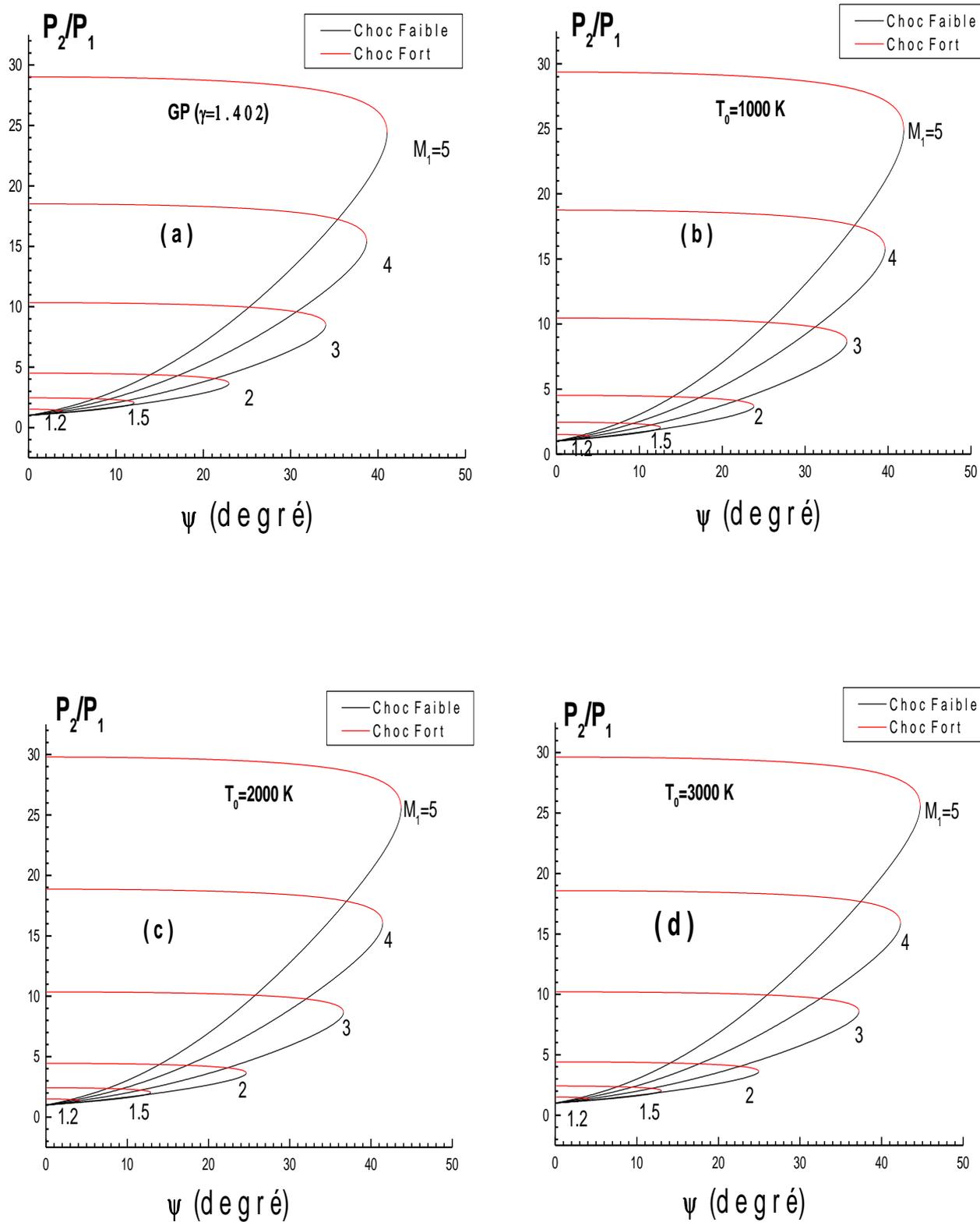


Figure 4.10 : L'évolution du rapport des pressions  $P_2/P_1$  en fonction de l'angle de déviation de dièdre  $\psi$  pour différents nombre de Mach  $M_1$ . (a) gaz parfait  $\gamma=1.402$ . (b) gaz à haute température pour  $T_0=1000\text{ K}$ . (c) gaz à haute température pour  $T_0=2000\text{ K}$ . (d) gaz à haute température pour  $T_0=3000\text{ K}$ .

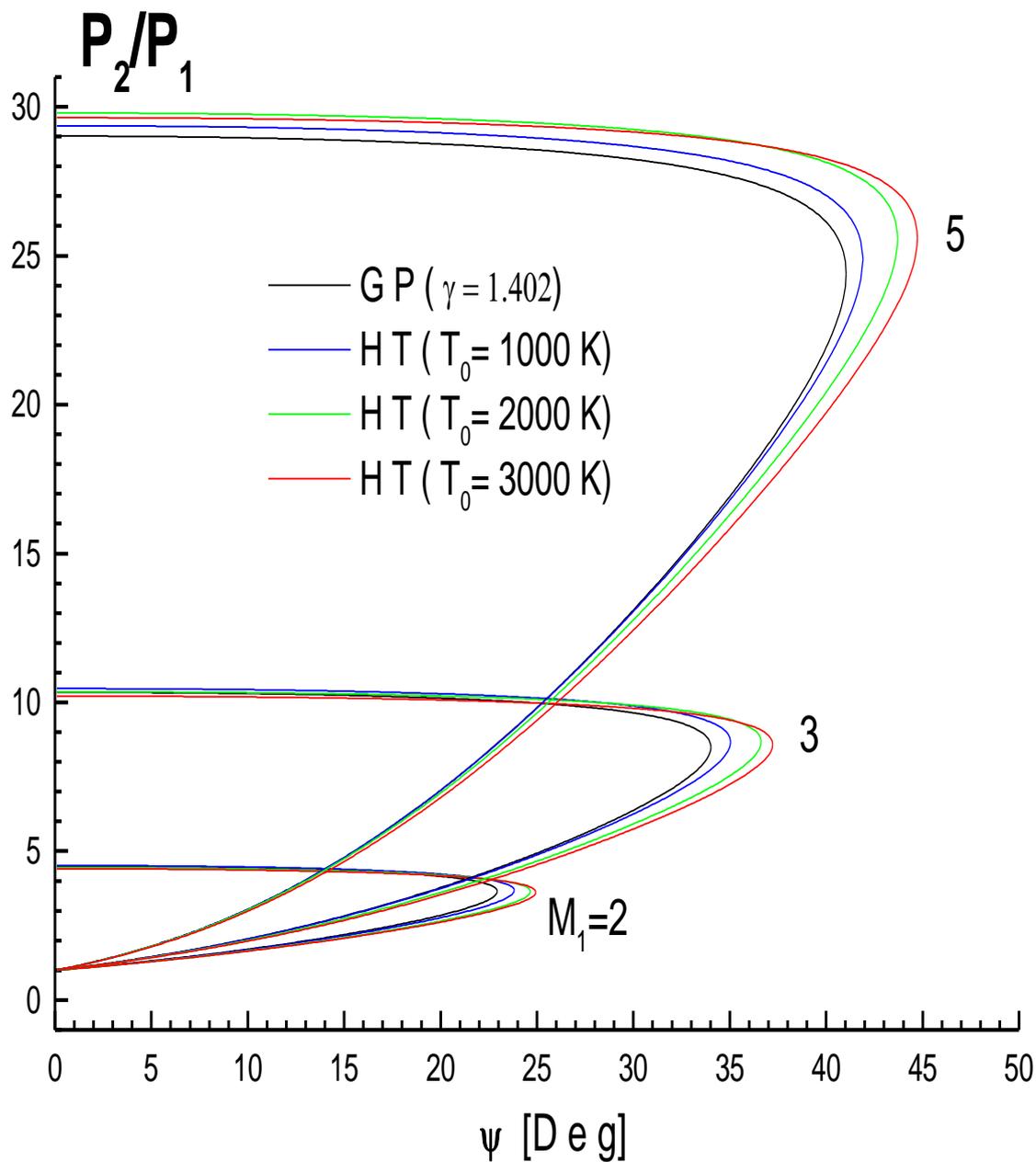


Figure 4.11 : Comparaison de la variation de rapport  $P_2/P_1$  en fonction de  $\psi$  entre le modèle d'un gaz parfait et le modèle d'un gaz à haute température (pour une température totale  $T_0=1000$  K,  $T_0=2000$  K et  $T_0=3000$  K) pour différents  $M_1$ .

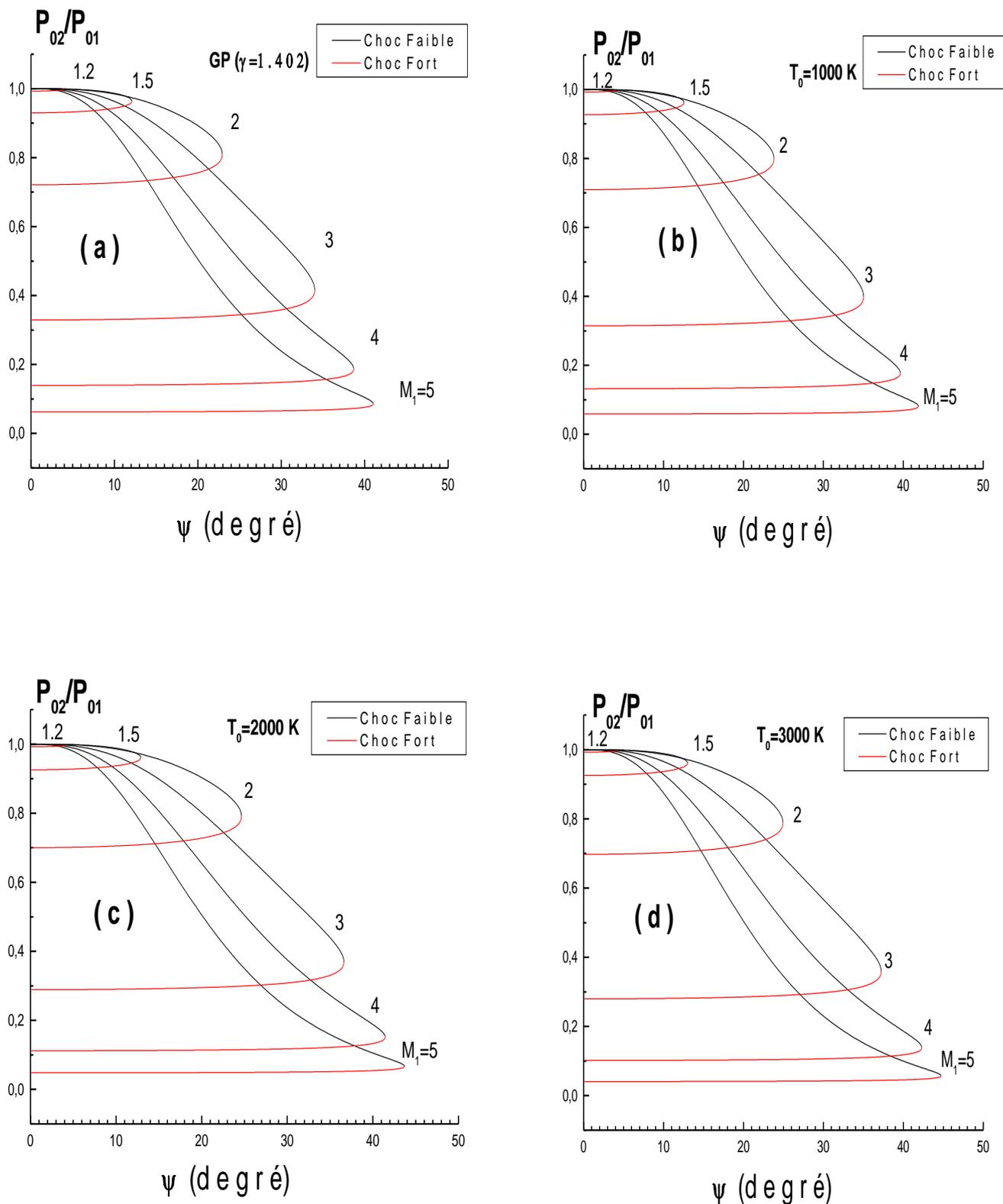


Figure 4.12 : L'évolution du rapport des pressions totale  $P_{02}/P_{01}$  en fonction de l'angle de déviation de dièdre  $\psi$  pour différents nombre de Mach  $M_1$ . (a) gaz parfait  $\gamma=1.402$ . (b) gaz à haute température pour  $T_0=1000\text{ K}$ . (c) gaz à haute température pour  $T_0=2000\text{ K}$ . (d) gaz à haute température pour  $T_0=3000\text{ K}$ .

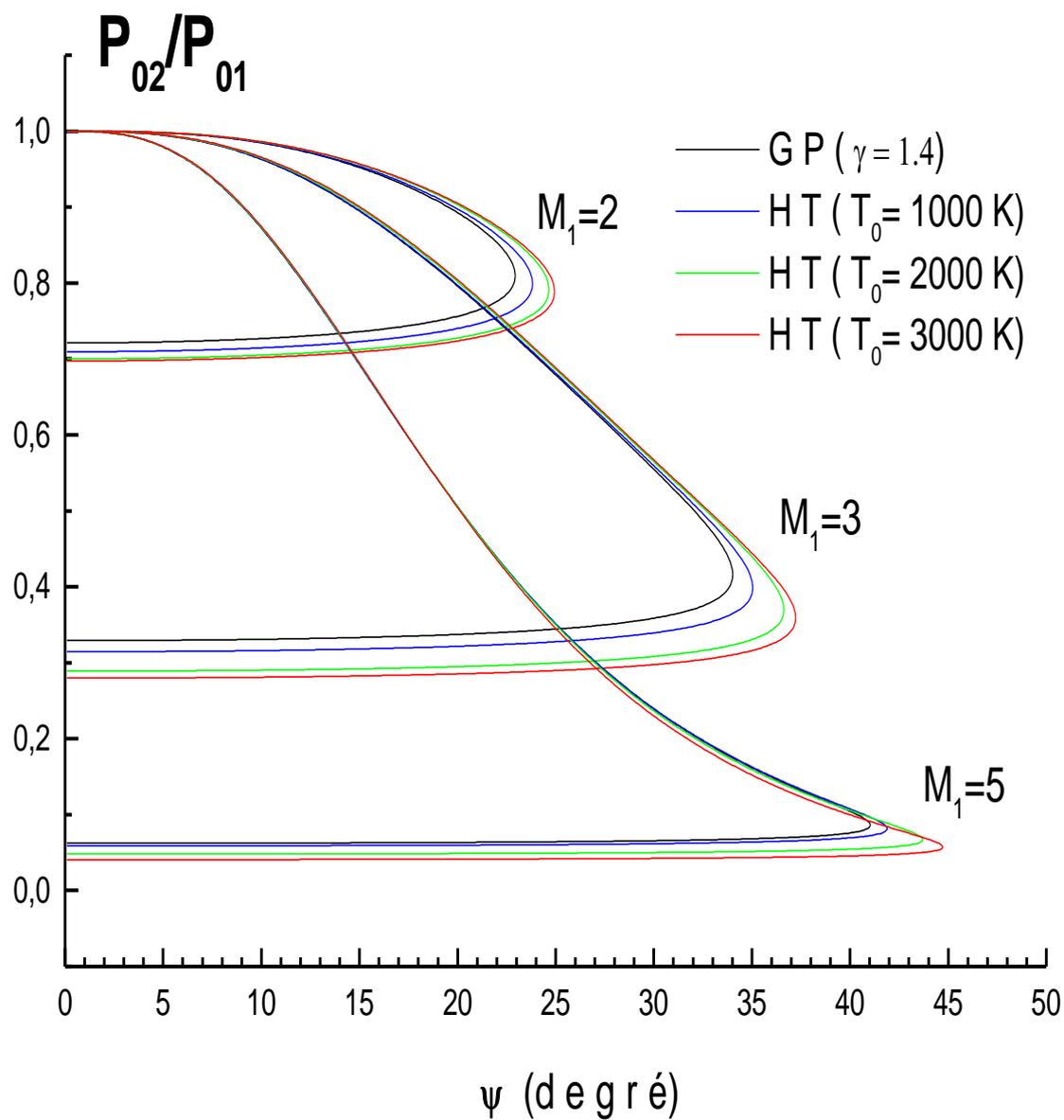


Figure 4.13 : Comparaison de la variation de rapport  $P_{02}/P_{01}$  en fonction de  $\psi$  entre le modèle d'un gaz parfait et le modèle d'un gaz à haute température (pour une température totale  $T_0=1000$  K,  $T_0=2000$  K et  $T_0=3000$  K) pour différents  $M_1$ .

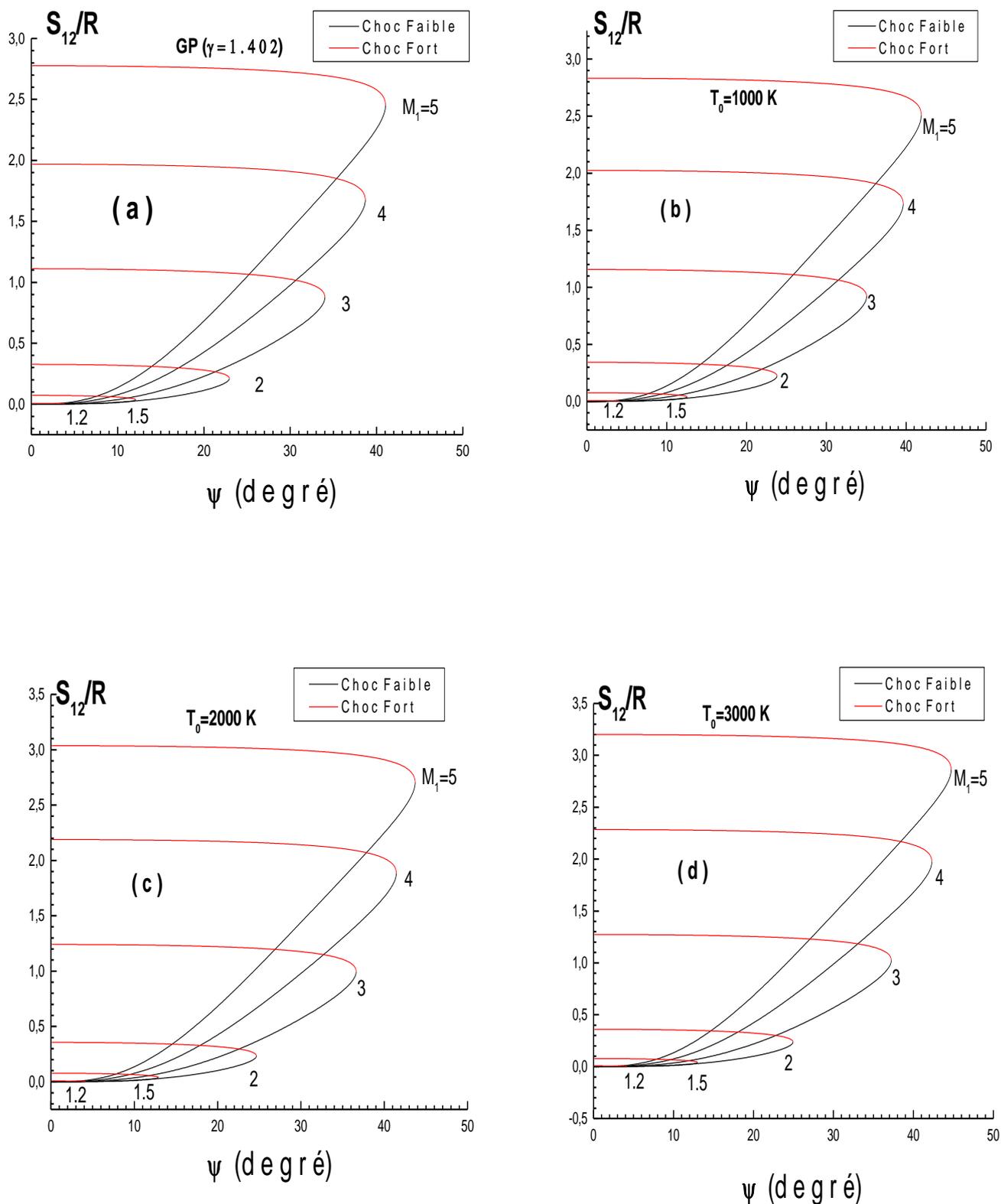


Figure 4.14 : L'évolution de l'entropie  $S_{12}/R$  en fonction de l'angle de déviation de dièdre  $\psi$  pour différents nombre de Mach  $M_1$ . **(a)** gaz parfait  $\gamma=1.402$ . **(b)** gaz à haute température pour  $T_0=1000$  K. **(c)** gaz à haute température pour  $T_0=2000$  K. **(d)** gaz à haute température pour  $T_0=3000$  K.

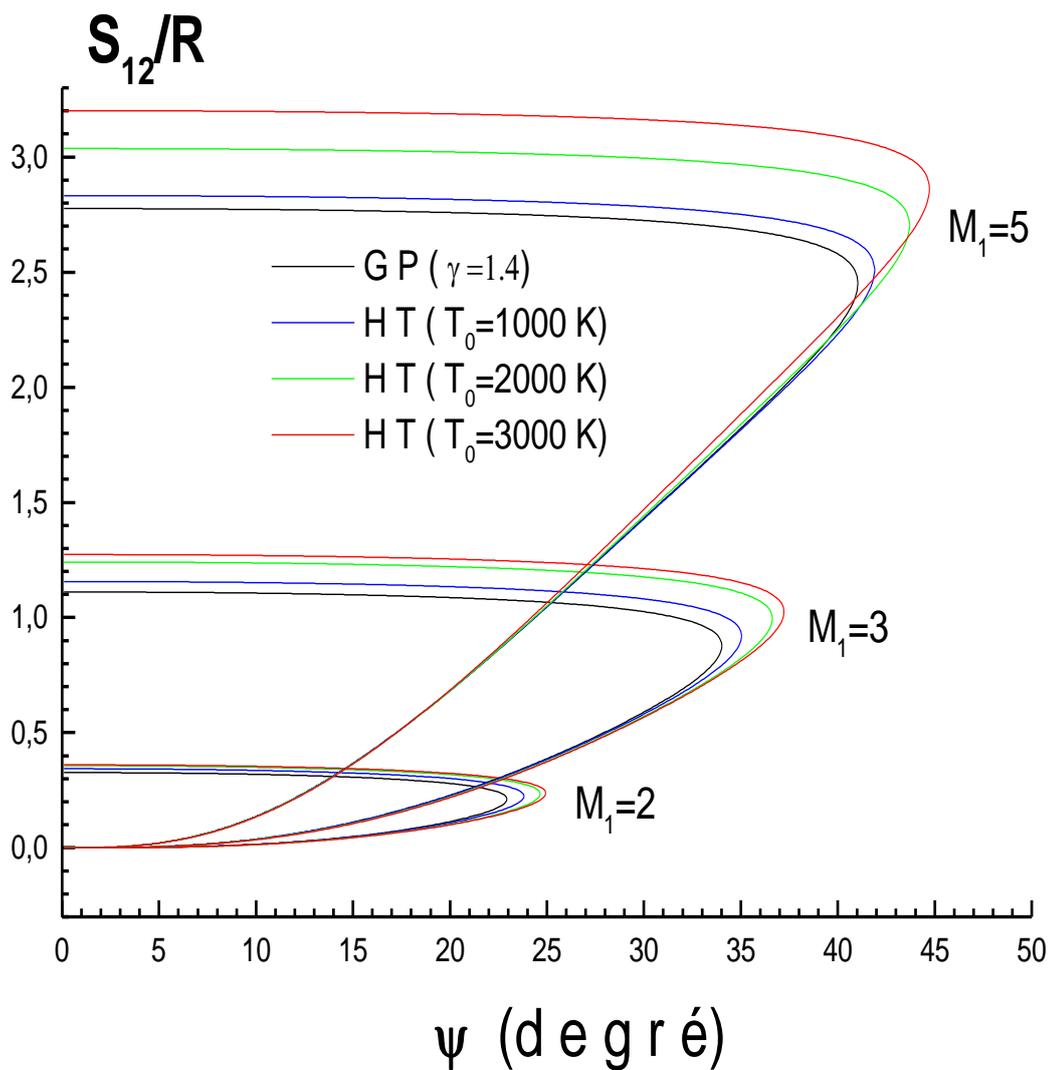


Figure 4.15 : Comparaison de la variation d'entropie  $S_{12}/R$  en fonction de  $\psi$  entre le modèle d'un gaz parfait et le modèle d'un gaz à haute température (pour une température totale  $T_0=1000$  K,  $T_0=2000$  K et  $T_0=3000$  K) pour différents  $M_1$ .

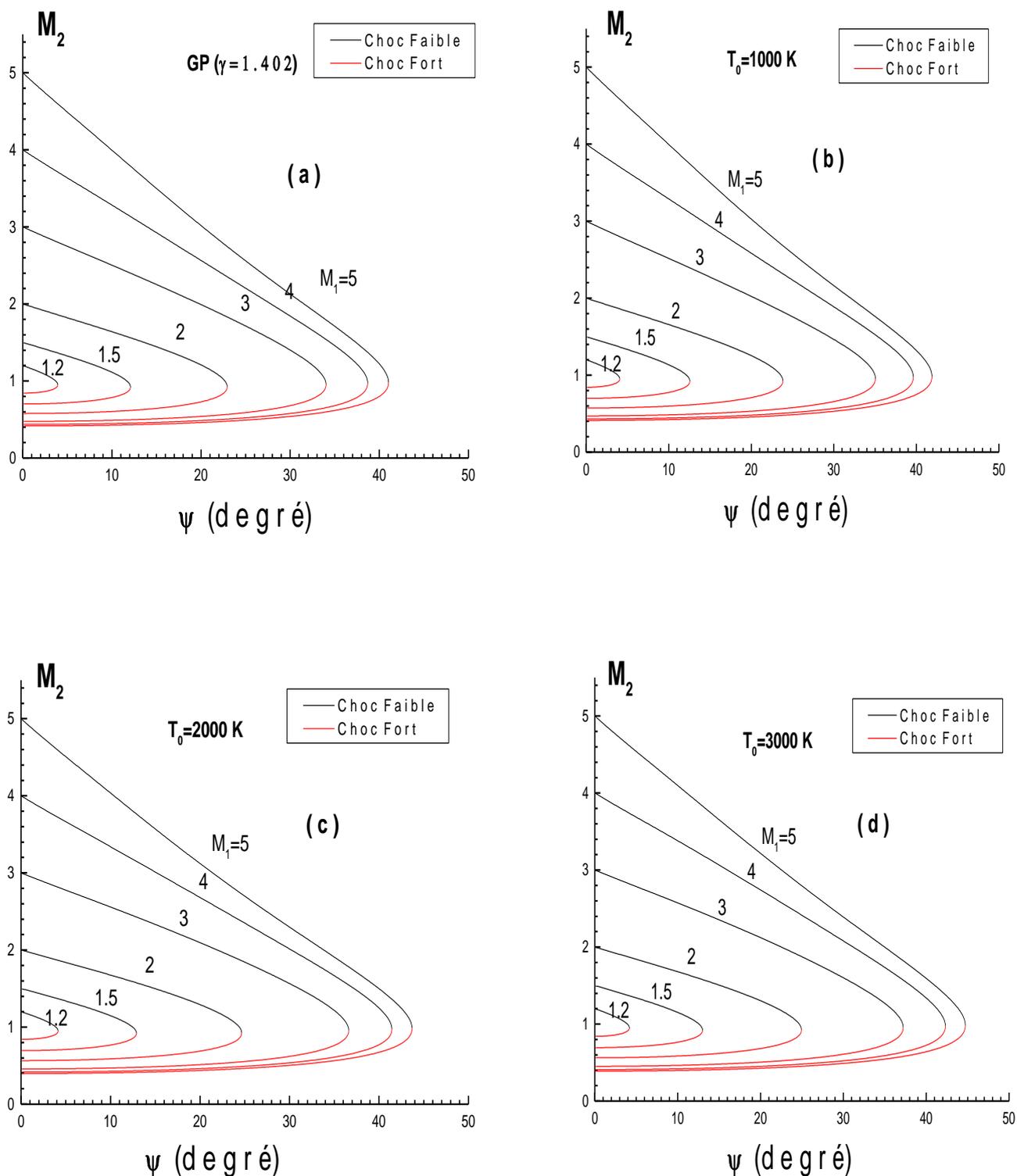


Figure 4.16 : L'évolution de nombre de Mach  $M_2$  en fonction de l'angle de déviation de dièdre  $\psi$  pour différents nombre de Mach  $M_1$ . (a) gaz parfait  $\gamma=1.402$ . (b) gaz à haute température pour  $T_0=1000$  K. (c) gaz à haute température pour  $T_0=2000$  K. (d) gaz à haute température pour  $T_0=3000$  K.

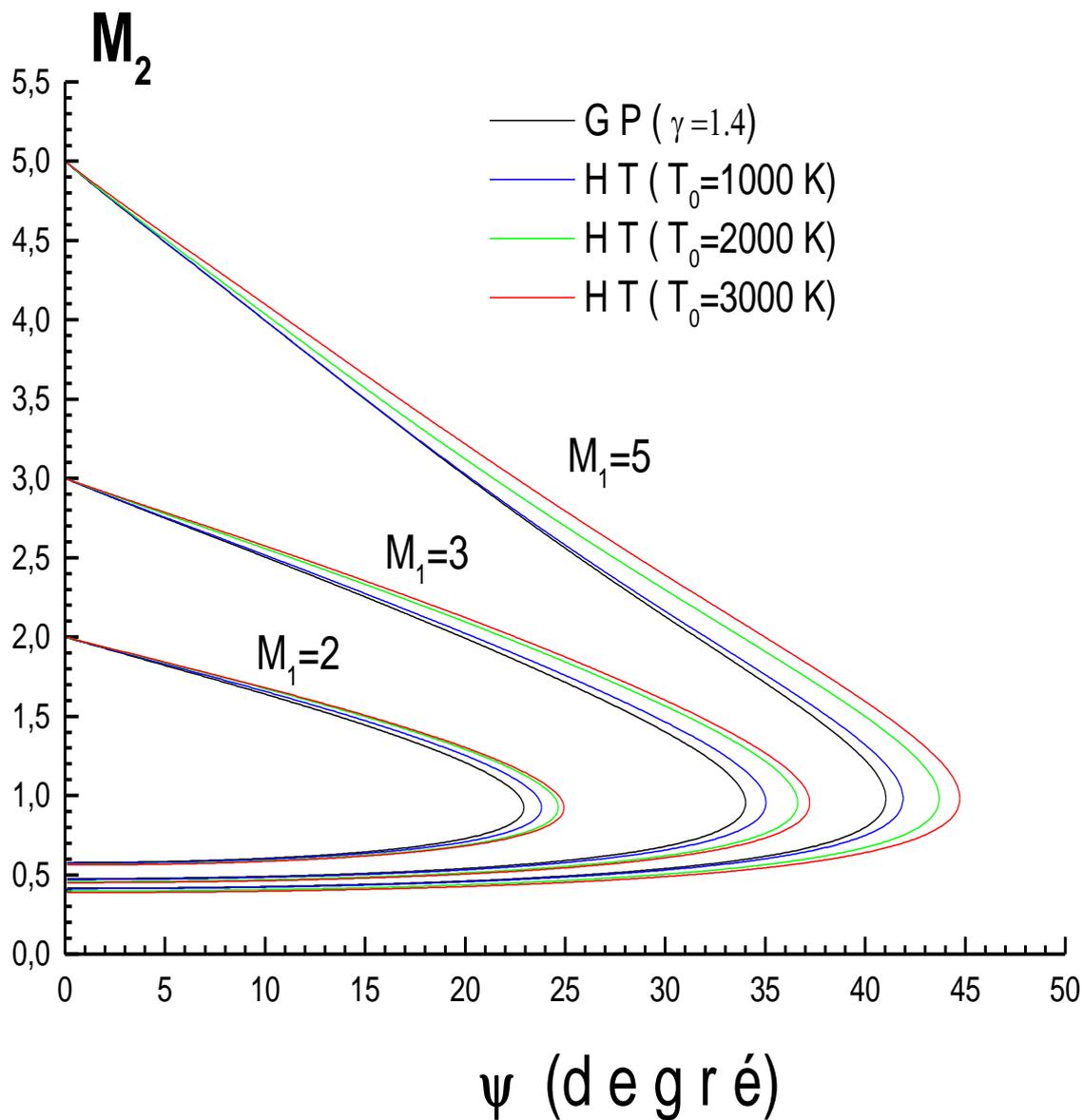


Figure 4.17 : Comparaison de la variation de  $M_2$  en fonction de  $\psi$  entre le modèle d'un gaz parfait et le modèle d'un gaz à haute température (pour une température totale  $T_0=1000$  K,  $T_0=2000$  K et  $T_0=3000$  K) pour différents  $M_1$ .

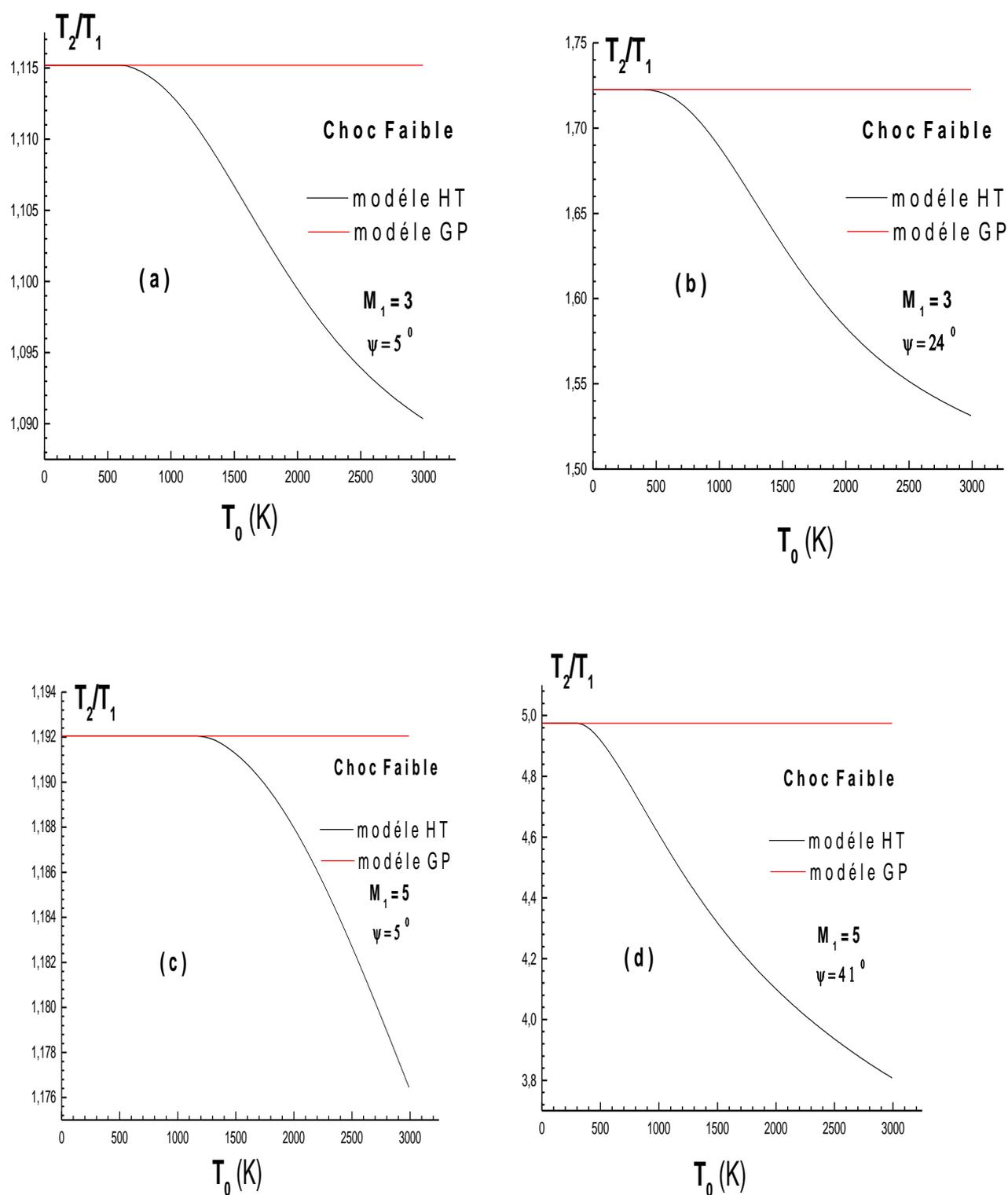


Figure 4.18 : L'évolution du rapport des températures  $T_2/T_1$  du choc faible en fonction de la température totale  $T_0$  pour  $M_1$  et  $\psi$  donnés. (a)  $M_1=3$  et  $\psi=5^\circ$ . (b)  $M_1=3$  et  $\psi=24^\circ$ . (c)  $M_1=5$  et  $\psi=5^\circ$ . (d)  $M_1=5$  et  $\psi=41^\circ$ .

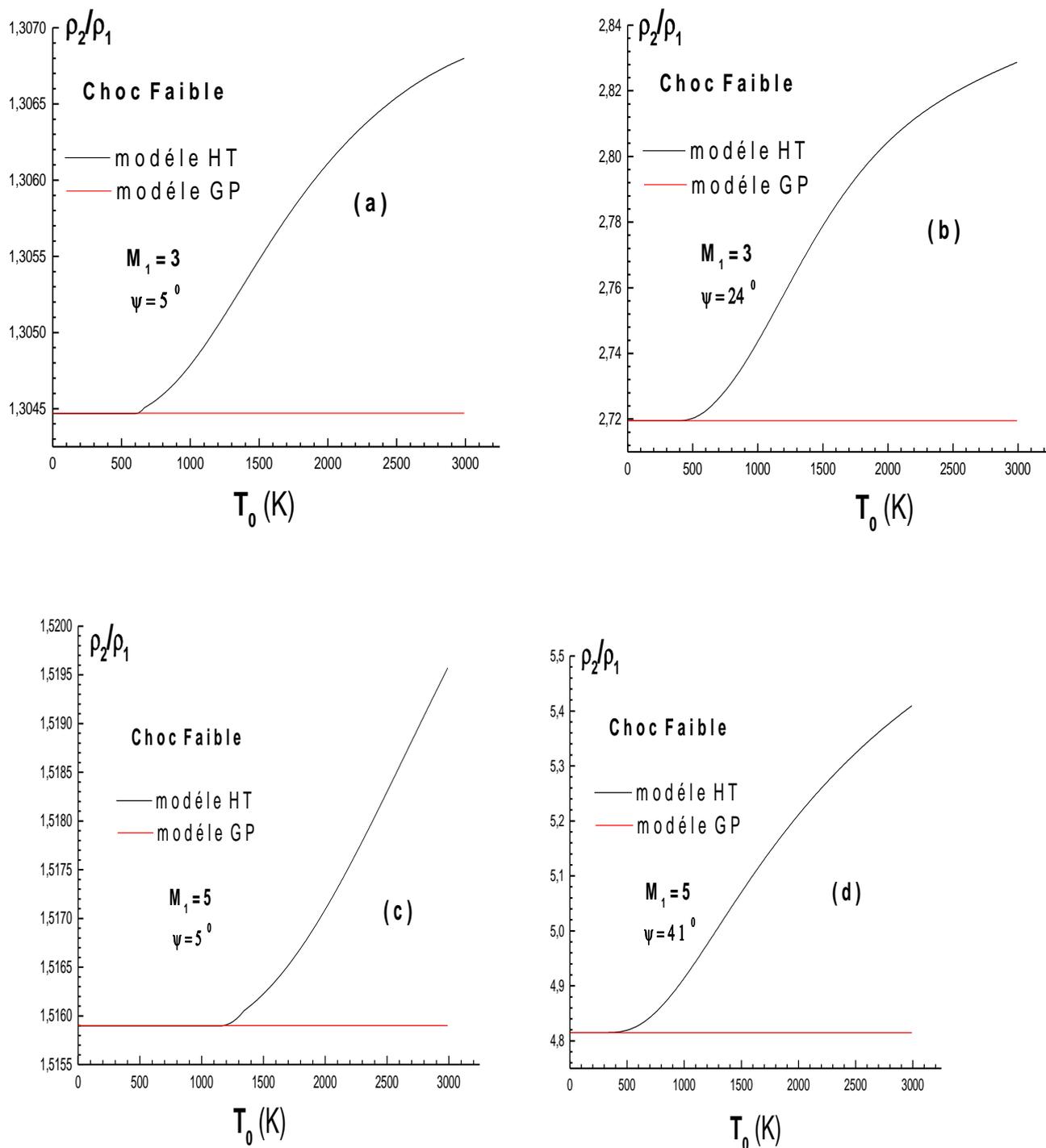


Figure 4.19 : L'évolution du rapport des masses volumique  $\rho_2/\rho_1$  du choc faible en fonction de la température totale  $T_0$  pour  $M_1$  et  $\psi$  donnés. (a)  $M_1=3$  et  $\psi=5^\circ$ . (b)  $M_1=3$  et  $\psi=24^\circ$ . (c)  $M_1=5$  et  $\psi=5^\circ$ . (d)  $M_1=5$  et  $\psi=41^\circ$ .

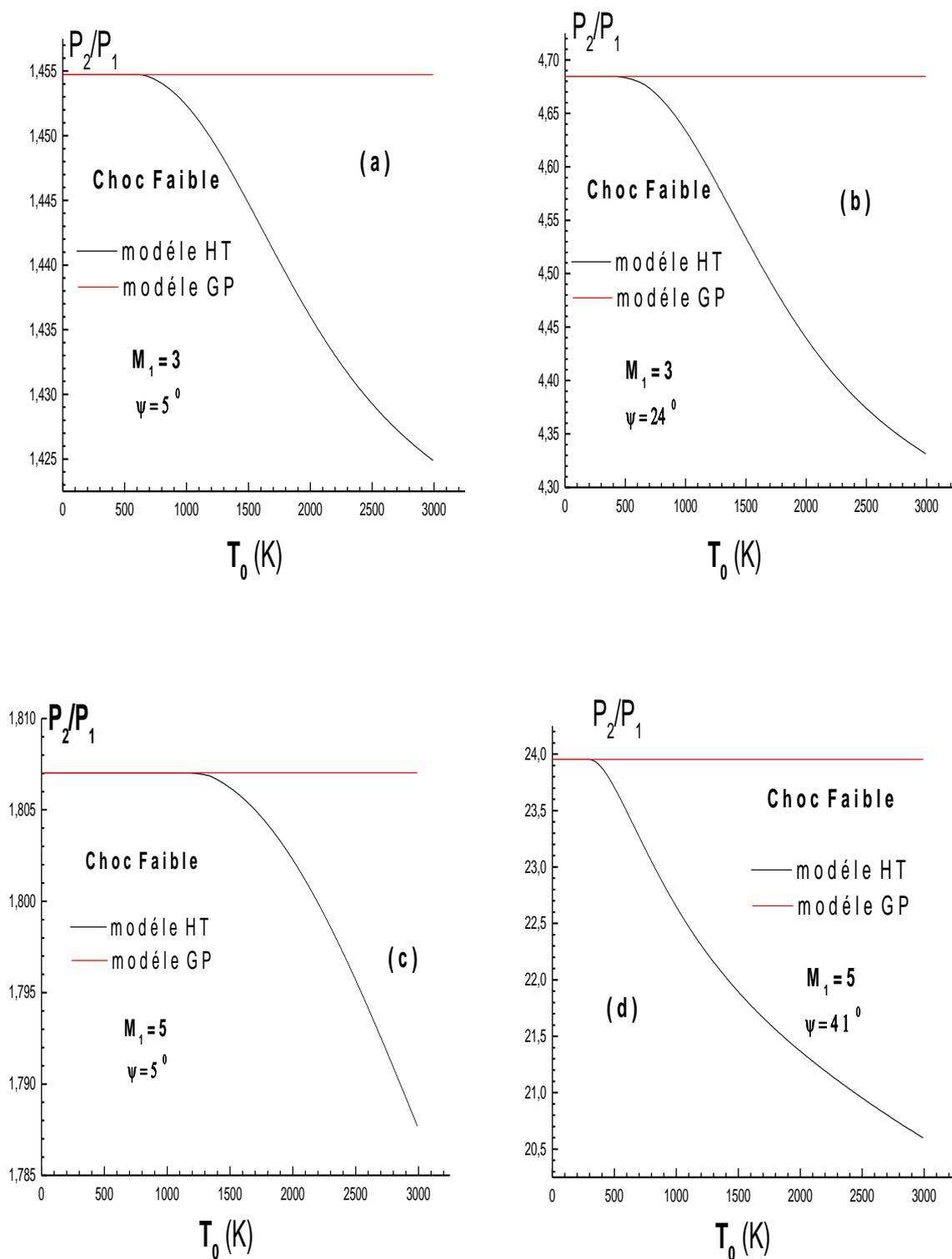


Figure 4.20 : L'évolution du rapport des pressions  $P_2/P_1$  du choc faible en fonction de la température totale  $T_0$  pour  $M_1$  et  $\psi$  donnés. **(a)**  $M_1=3$  et  $\psi=5^\circ$ . **(b)**  $M_1=3$  et  $\psi=24^\circ$ . **(c)**  $M_1=5$  et  $\psi=5^\circ$ . **(d)**  $M_1=5$  et  $\psi=41^\circ$ .

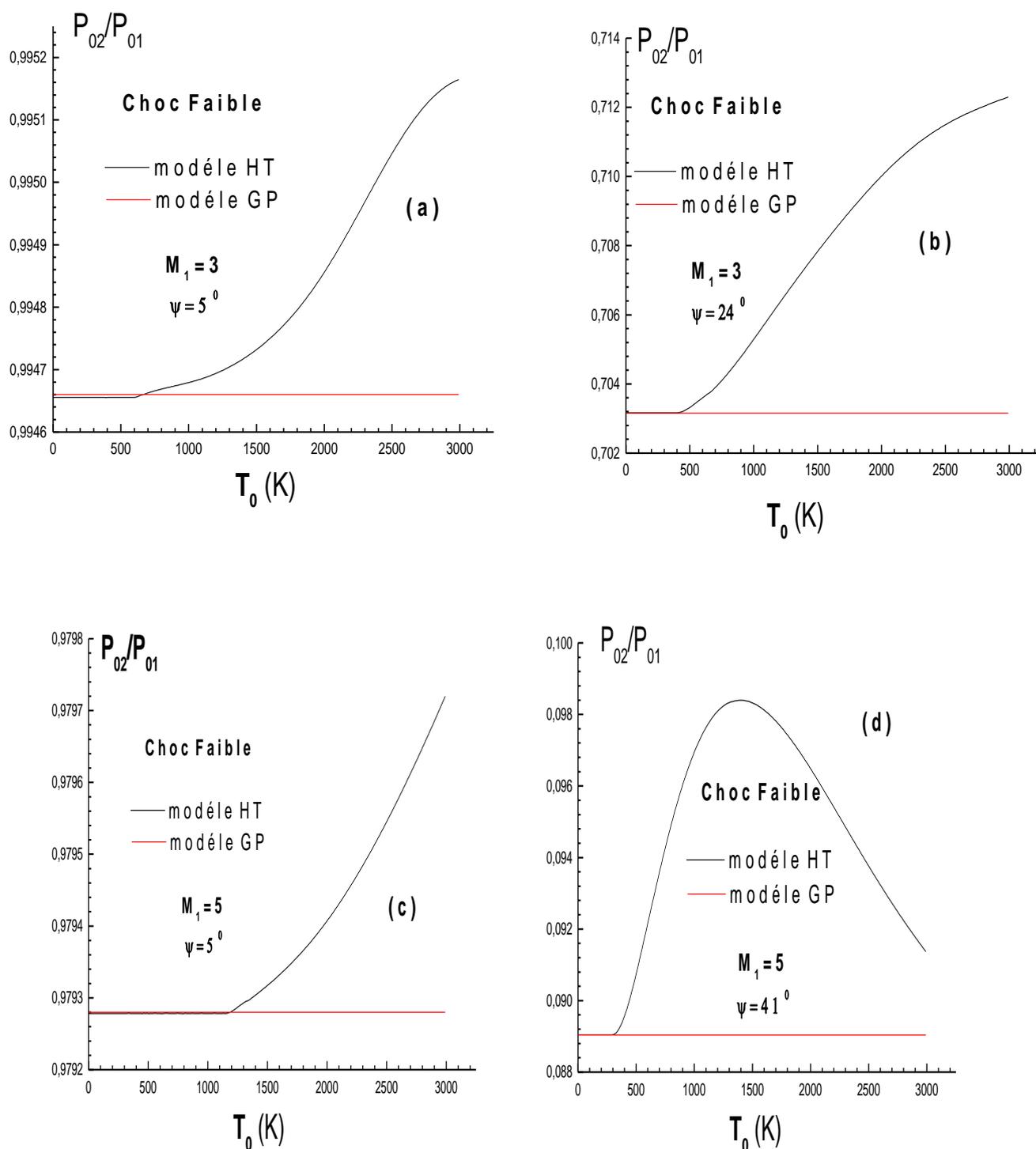


Figure 4.21 : L'évolution du rapport des pressions totale  $P_{02}/P_{01}$  du choc faible en fonction de la température totale  $T_0$  pour  $M_1$  et  $\psi$  donnés. **(a)**  $M_1=3$  et  $\psi=5^\circ$ . **(b)**  $M_1=3$  et  $\psi=24^\circ$ . **(c)**  $M_1=5$  et  $\psi=5^\circ$ . **(d)**  $M_1=5$  et  $\psi=41^\circ$ .

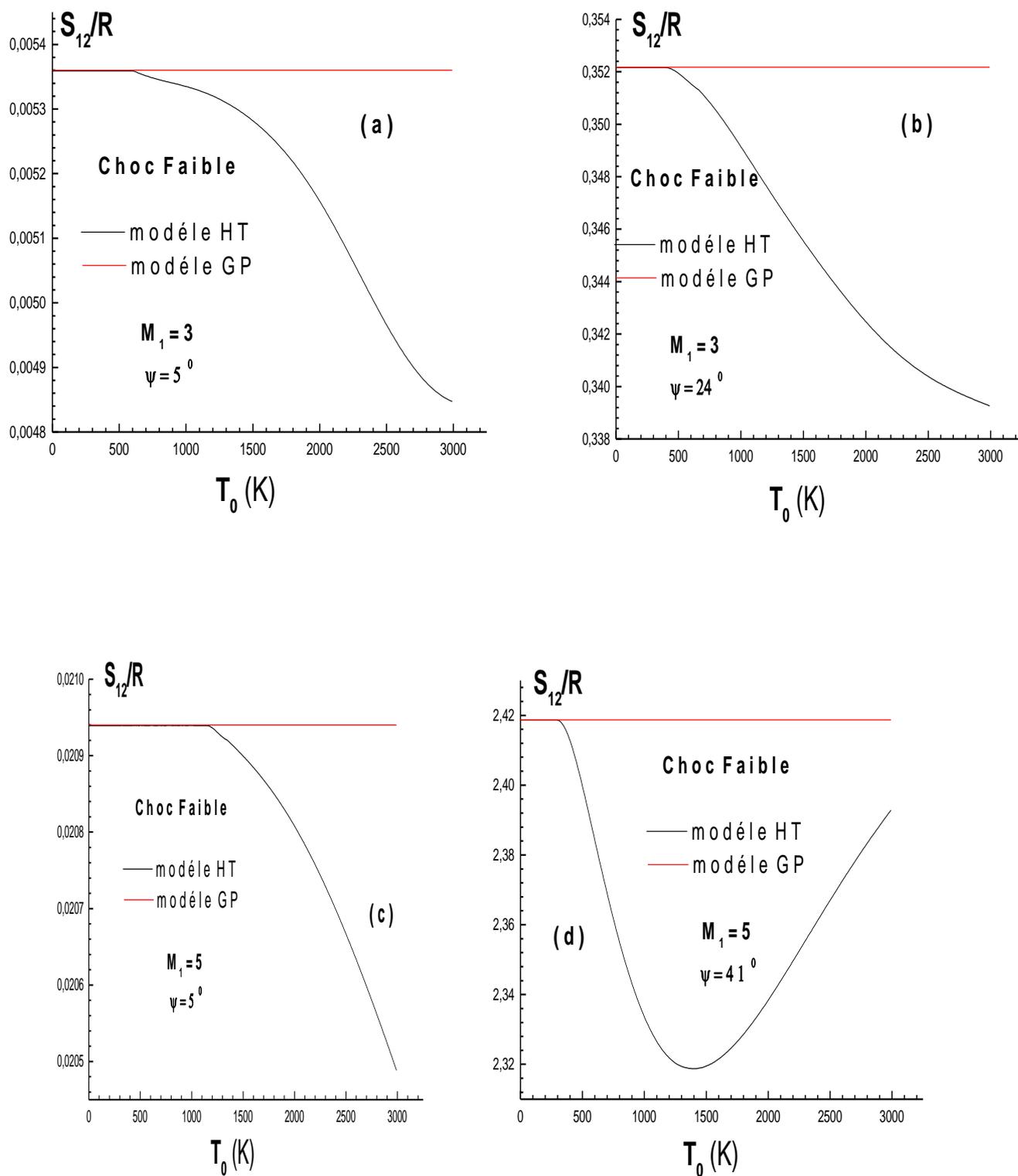


Figure 4.22 : L'évolution de l'entropie  $S_{12}/R$  du choc faible en fonction de la température totale  $T_0$  pour  $M_1$  et  $\psi$  donnés. (a)  $M_1=3$  et  $\psi=5^\circ$ . (b)  $M_1=3$  et  $\psi=24^\circ$ . (c)  $M_1=5$  et  $\psi=5^\circ$ . (d)  $M_1=5$  et  $\psi=41^\circ$ .

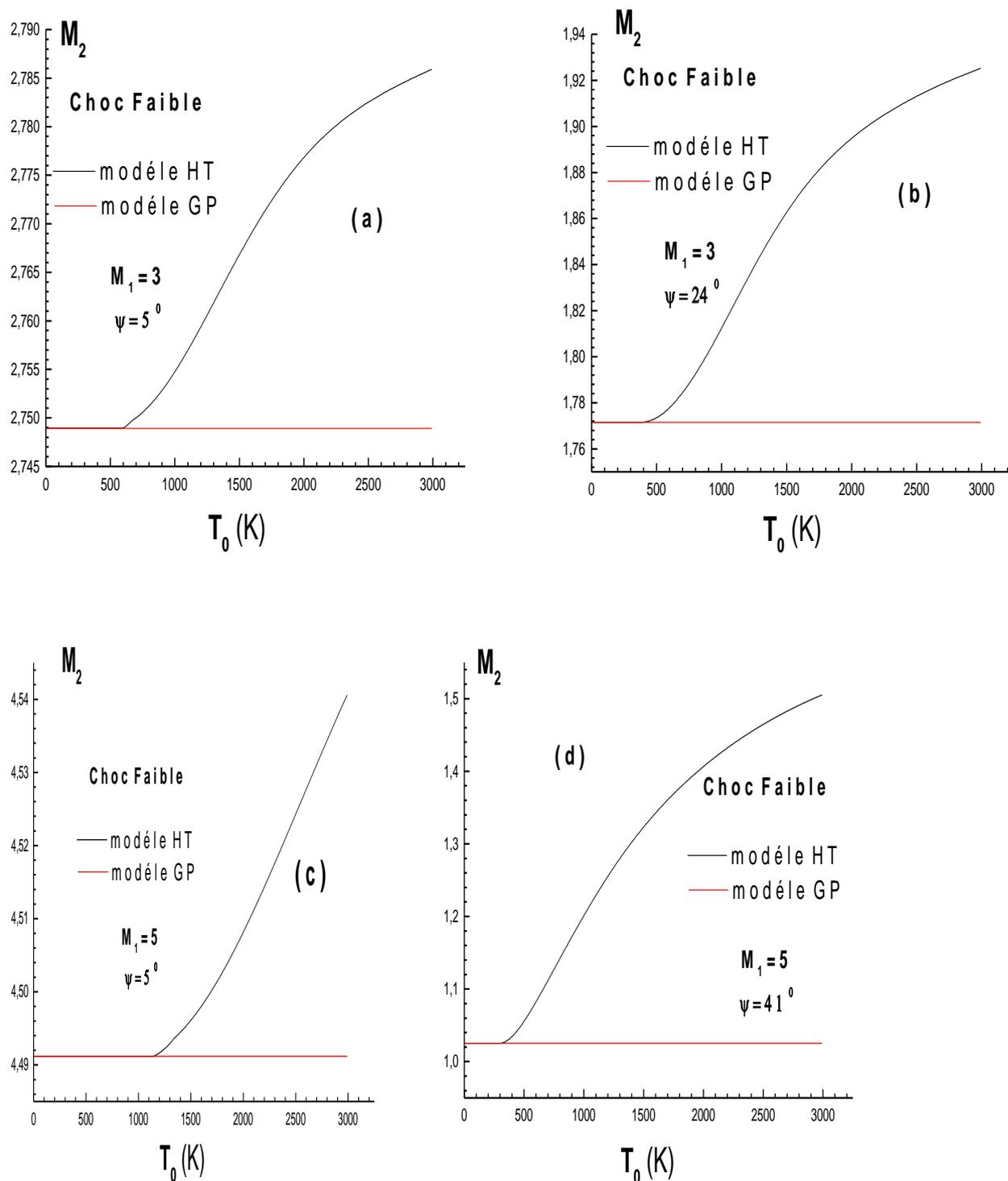


Figure 4.23 : L'évolution de nombre de Mach  $M_2$  du choc faible en fonction de la température totale  $T_0$  pour  $M_1$  et  $\psi$  donnés. **(a)**  $M_1=3$  et  $\psi=5^\circ$ . **(b)**  $M_1=3$  et  $\psi=24^\circ$ . **(c)**  $M_1=5$  et  $\psi=5^\circ$ . **(d)**  $M_1=5$  et  $\psi=41^\circ$ .

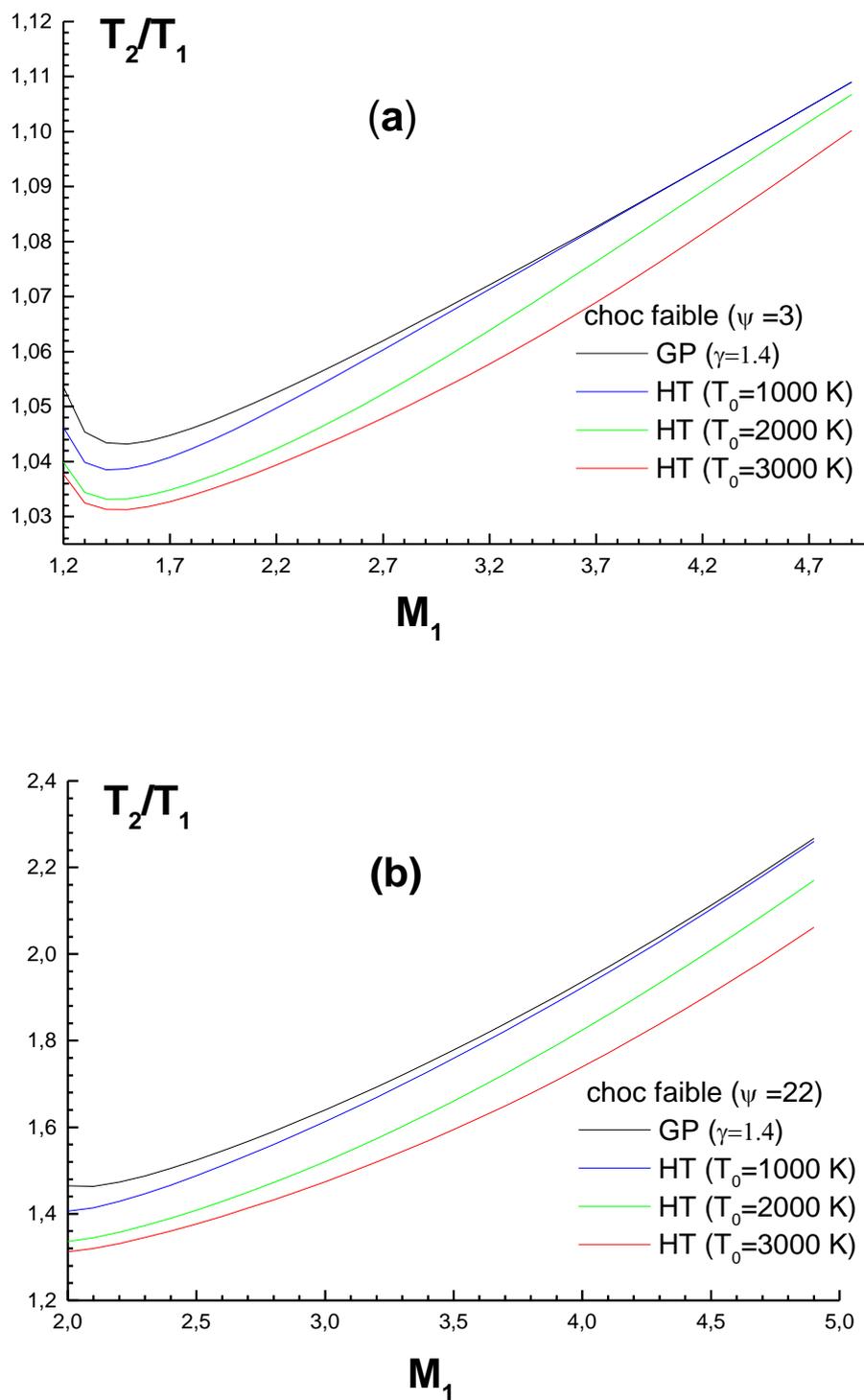


Figure 4.24 : L'évolution du rapport des températures  $T_2/T_1$  de choc faible en fonction de nombre de Mach  $M_1$  pour un angle de déviation de dièdre  $\psi$  donné. **(a)** cas de  $\psi=3^\circ$ . **(b)** cas de  $\psi=22^\circ$ .

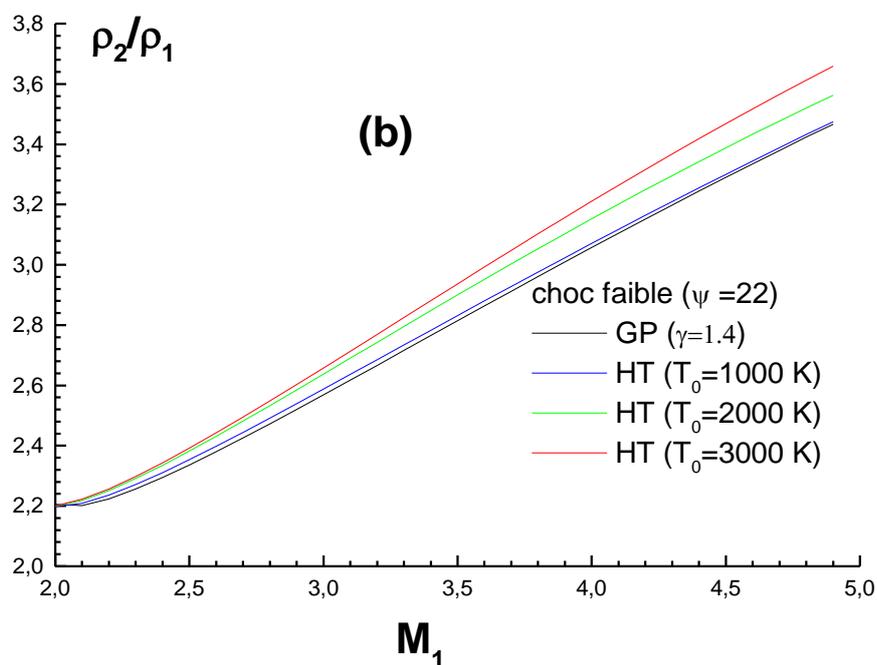
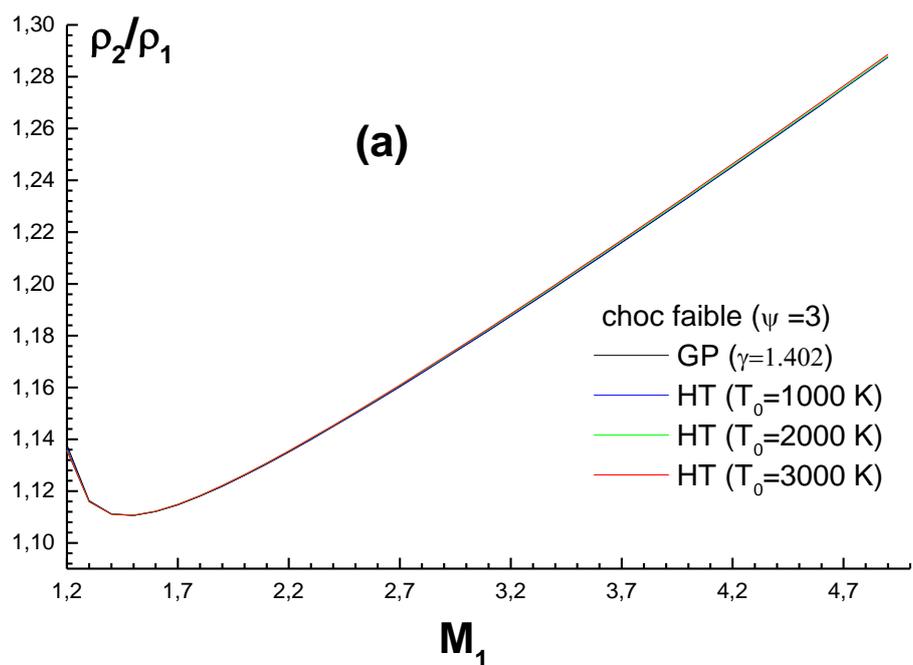


Figure 4.25 : L'évolution du rapport des masses volumiques  $\rho_2/\rho_1$  de choc faible en fonction de nombre de Mach  $M_1$  pour un angle de déviation de dièdre  $\psi$  donné. (a) cas de  $\psi = 3^\circ$ . (b) cas de  $\psi = 22^\circ$ .

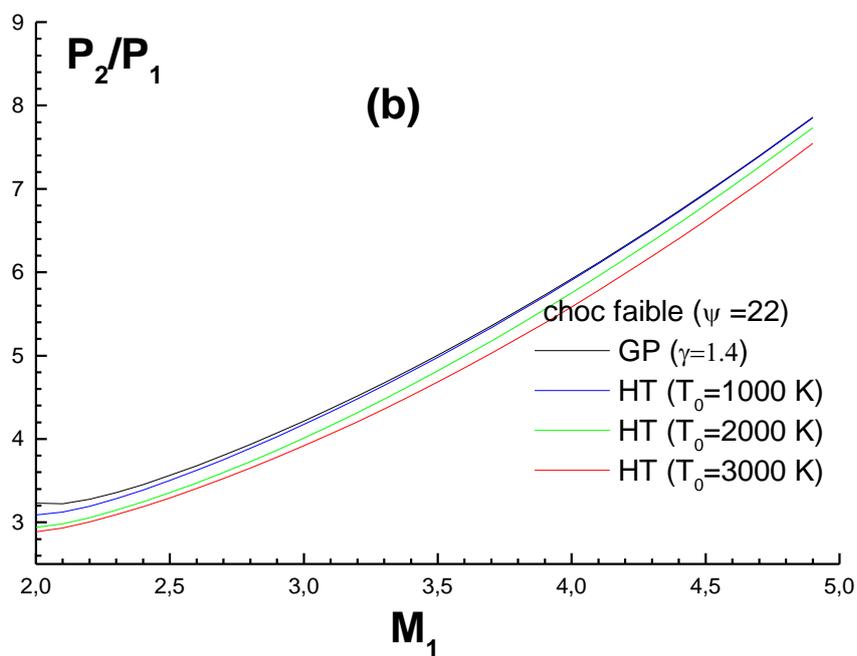
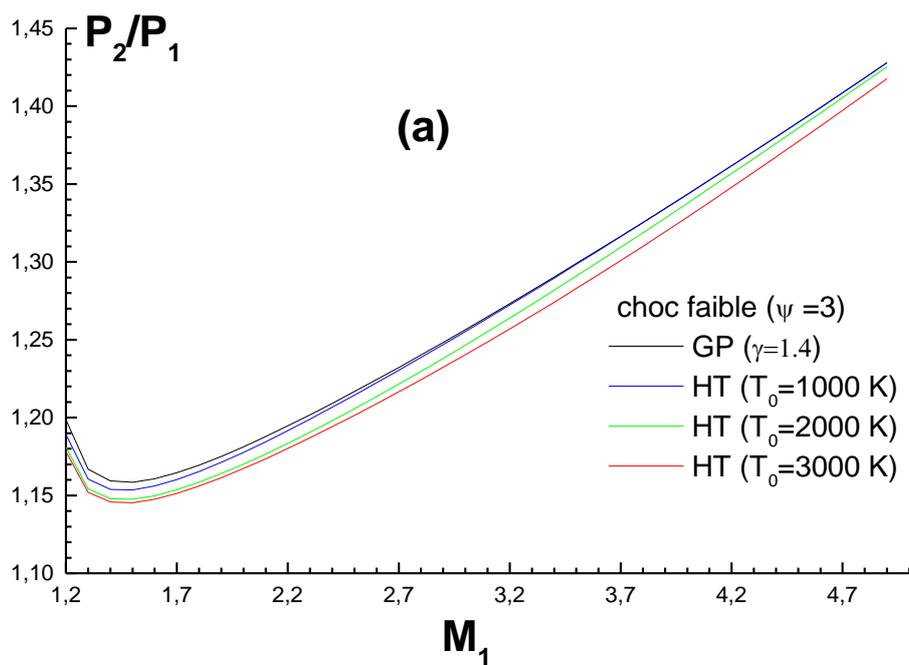


Figure 4.26 : L'évolution du rapport des pressions  $P_2/P_1$  de choc faible en fonction de nombre de Mach  $M_1$  pour un angle de déviation de dièdre  $\psi$  donné. **(a)** cas de  $\psi = 3^\circ$ . **(b)** cas de  $\psi = 22^\circ$ .

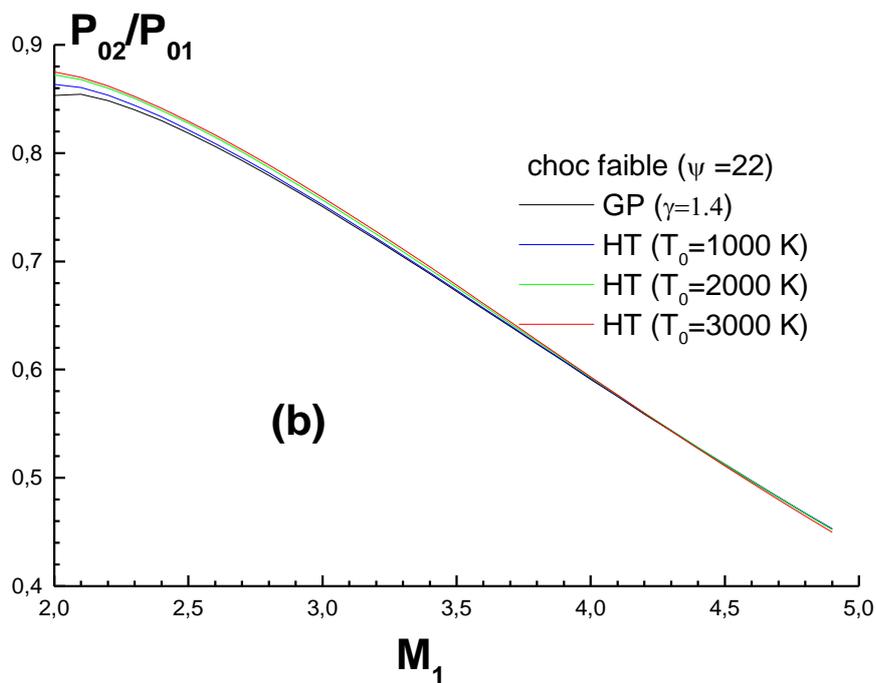
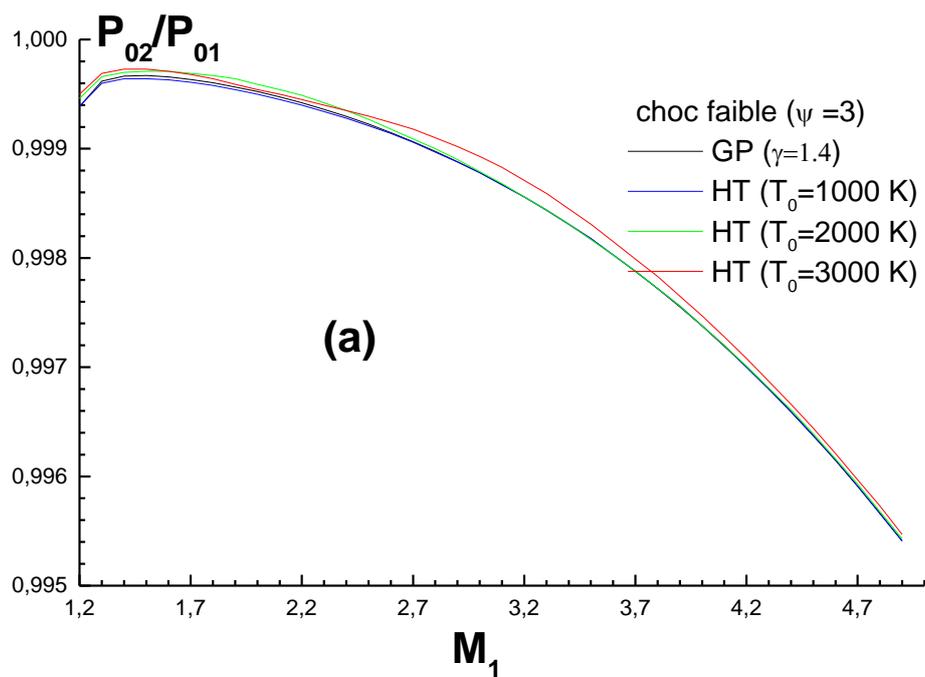


Figure 4.27 : L'évolution du rapport des pressions totales  $P_{02}/P_{01}$  de choc faible en fonction de nombre de Mach  $M_1$  pour un angle de déviation de dièdre  $\psi$  donné. **(a)** cas de  $\psi=3^\circ$ . **(b)** cas de  $\psi=22^\circ$ .

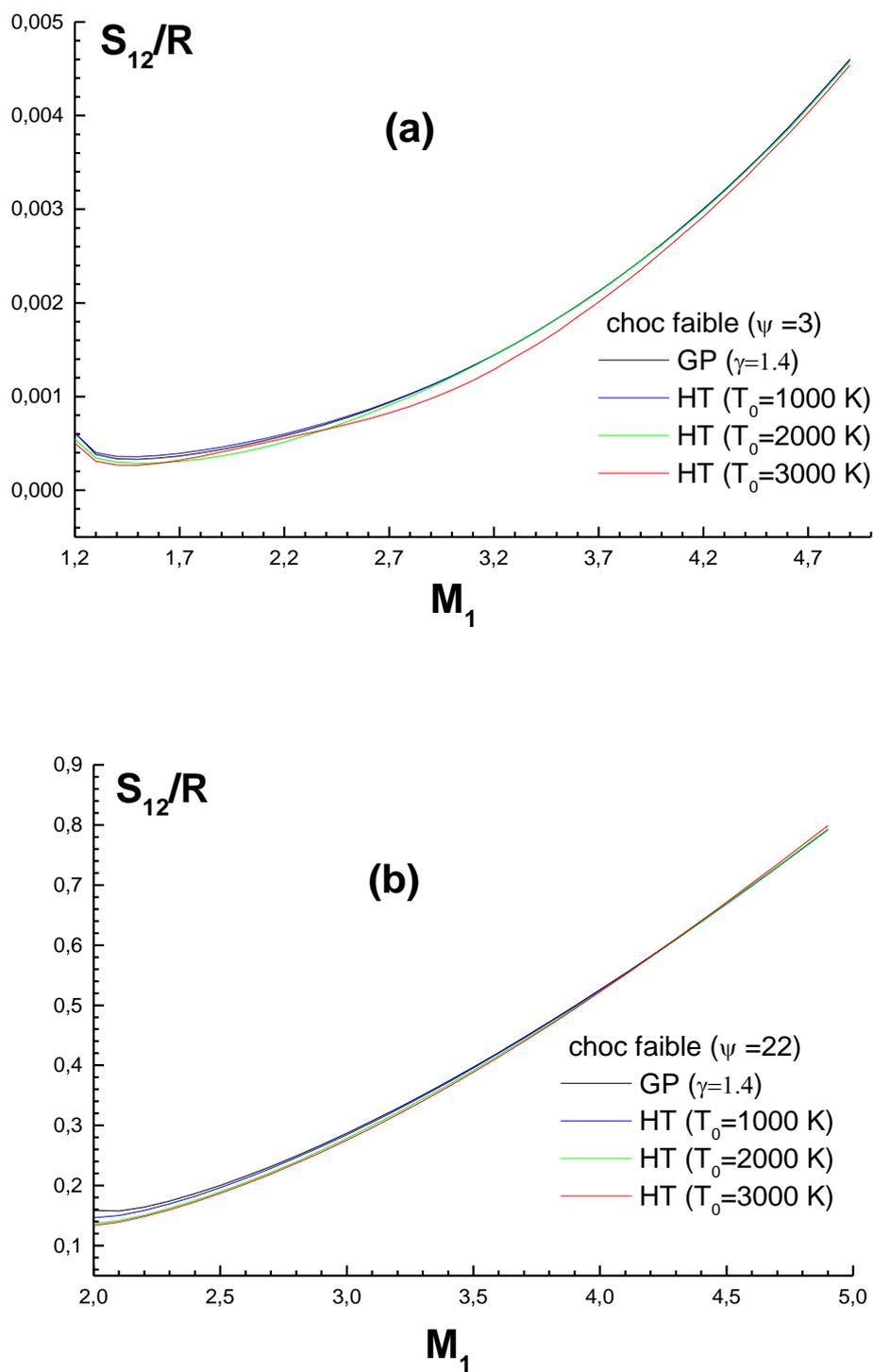


Figure 4.28 : L'évolution de saut d'entropie  $S_{12}/R$  de choc faible en fonction de nombre de Mach  $M_1$  pour un angle de déviation de dièdre  $\psi$  donné. **(a)** cas de  $\psi=3^\circ$ . **(b)** cas de  $\psi=22^\circ$ .

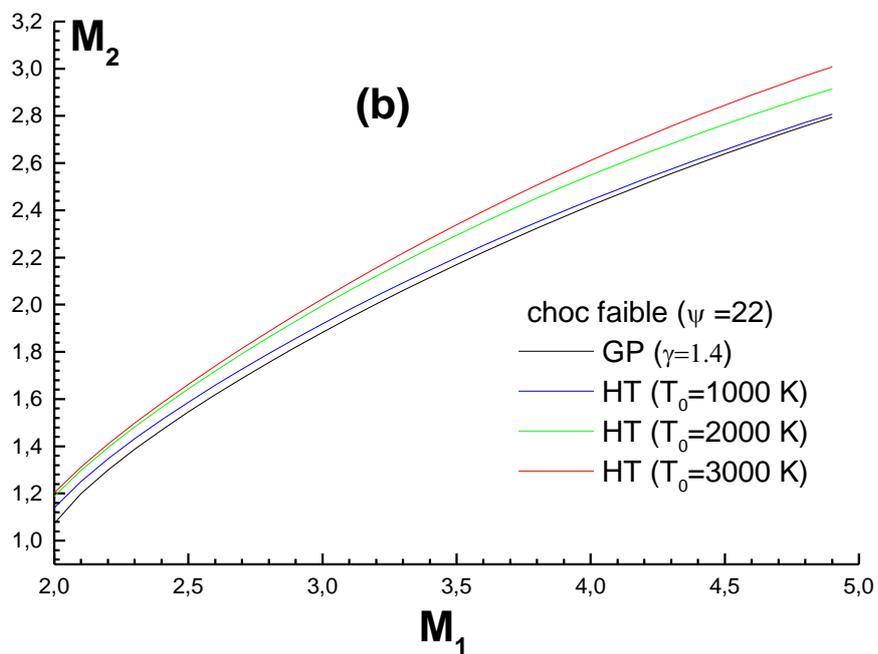
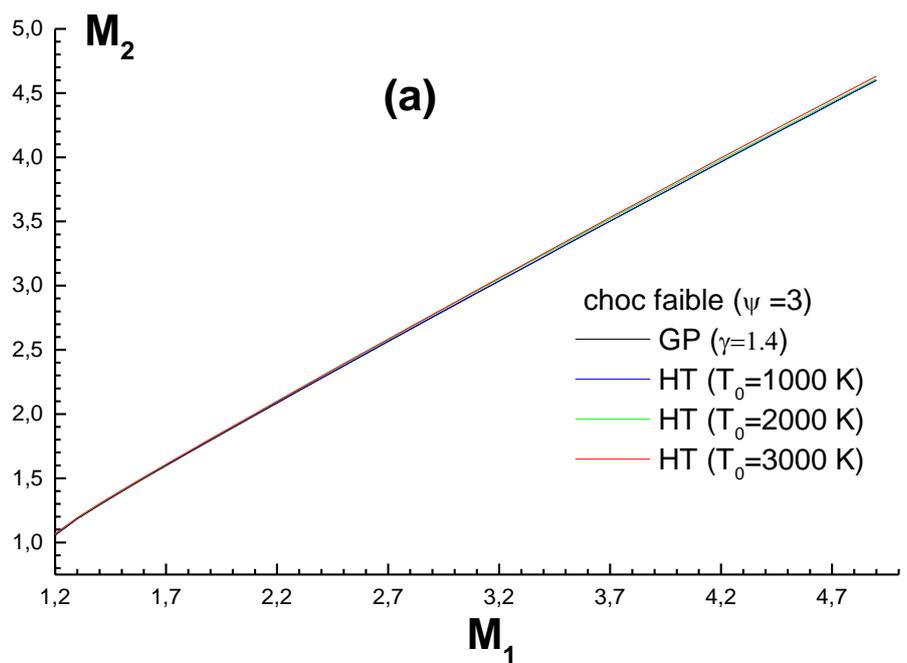


Figure 4.29 : L'évolution de nombre de Mach  $M_2$  de choc faible en fonction de nombre de Mach  $M_1$  pour un angle de déviation de dièdre  $\psi$  donné. **(a)** cas de  $\psi=3^\circ$ . **(b)** cas de  $\psi=22^\circ$ .

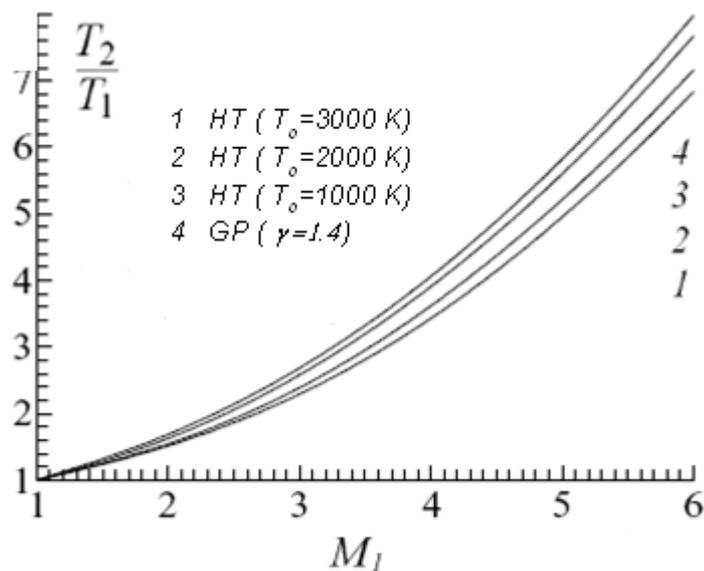


Figure 4.30 : L'évolution du rapport de température  $T_2/T_1$  en fonction du nombre de Mach  $M_1$  pour le cas du choc normal.

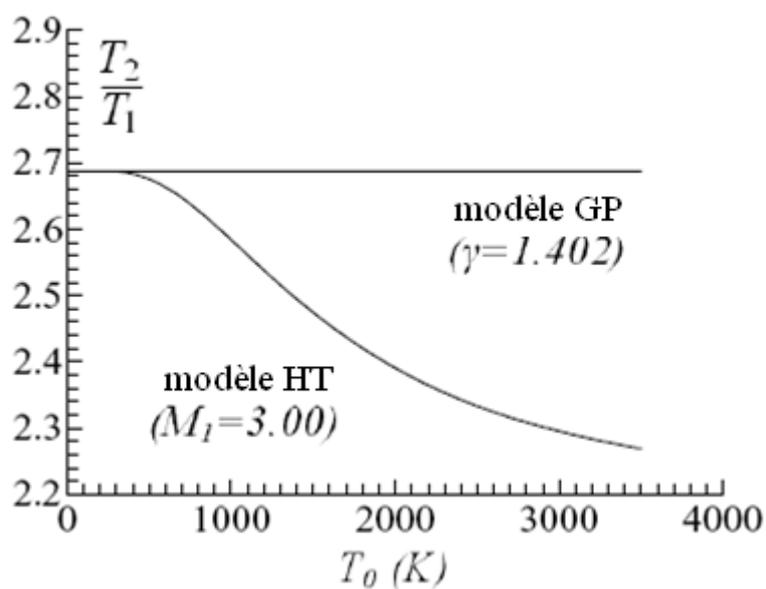


Figure 4.31 : L'évolution du rapport de température  $T_2/T_1$  en fonction de la température totale  $T_0$  pour  $M_1$  donné pour le cas du choc normal .

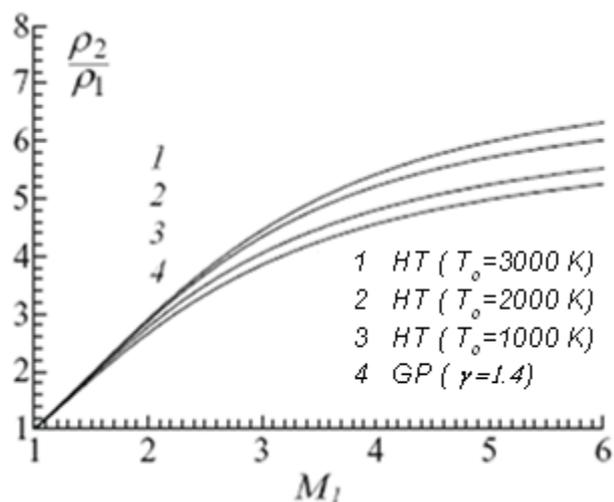


Figure 4.32 : L'évolution du rapport de la masse volumique  $\rho_2/\rho_1$  en fonction du nombre de Mach  $M_1$  pour le cas du choc normal.

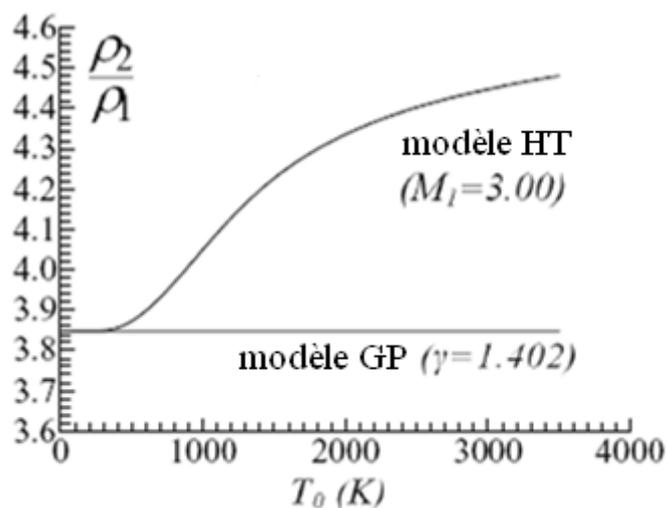


Figure 4.33 : L'évolution du rapport de masse volumique  $\rho_2/\rho_1$  en fonction de la température totale  $T_0$  pour  $M_1$  donné pour le cas du choc normal.

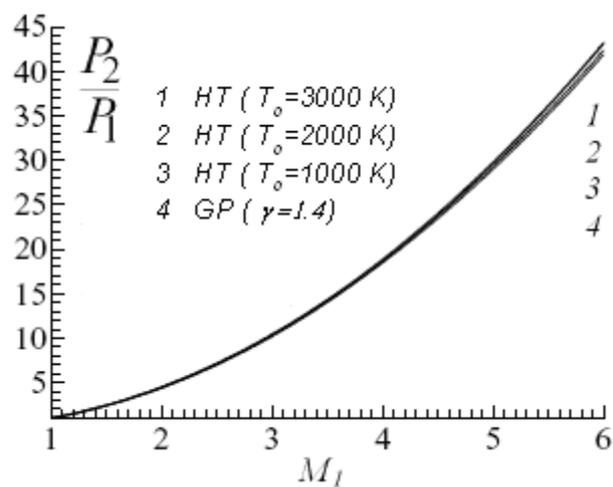


Figure 4.34 : L'évolution du rapport de pression  $P_2/P_1$  en fonction du nombre de Mach  $M_1$  pour le cas du choc normal.

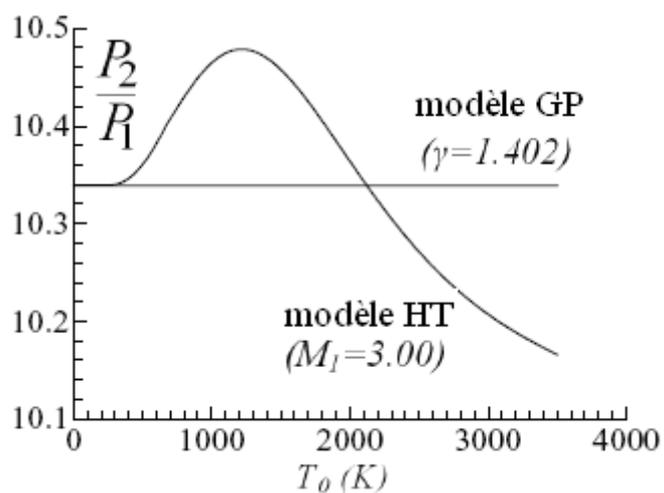


Figure 4.35 : L'évolution du rapport de pression  $P_2/P_1$  en fonction de la température totale  $T_0$  pour  $M_1$  donné pour le cas du choc normal.

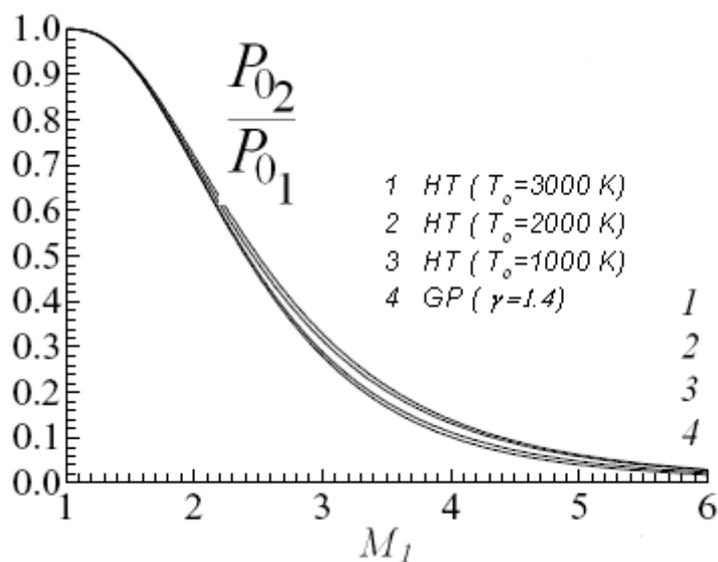


Figure 4.36 : L'évolution du rapport de pression totale  $P_{02}/P_{01}$  en fonction du nombre de Mach  $M_1$  pour le cas du choc normal.

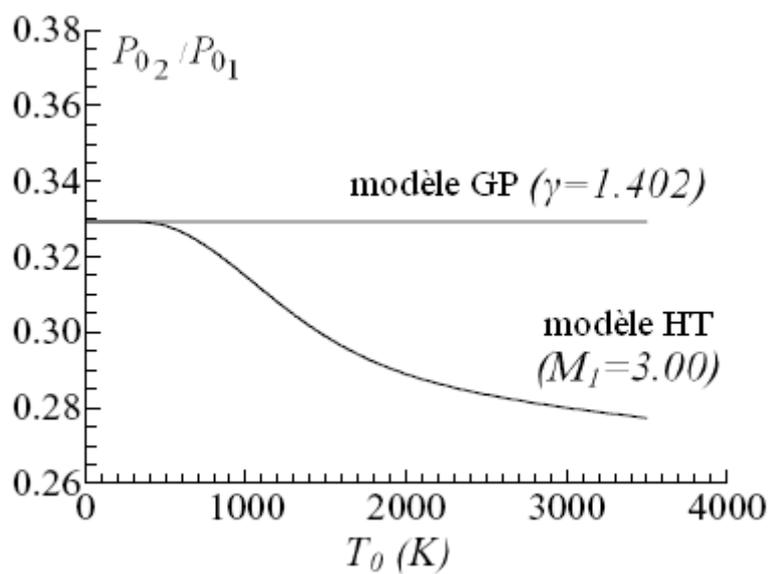


Figure 4.37 : L'évolution du rapport de masse volumique  $P_{02}/P_{01}$  en fonction de la température totale  $T_0$  pour  $M_1$  donné pour le cas du choc normal.

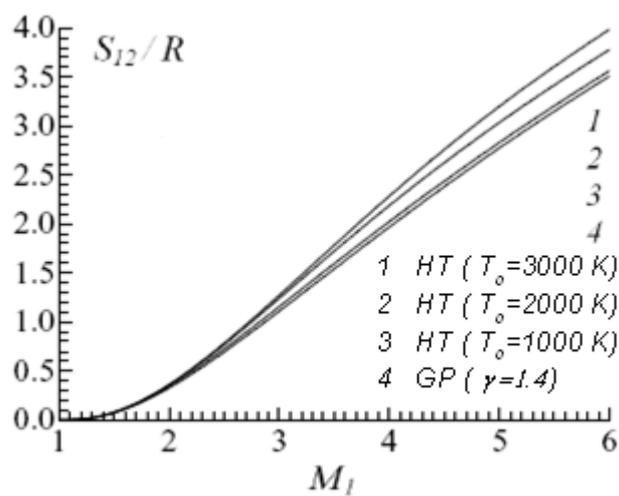


Figure 4.38 : L'évolution de l'entropie  $S_{12}/R$  en fonction du nombre de Mach  $M_1$  pour le cas du choc normal.

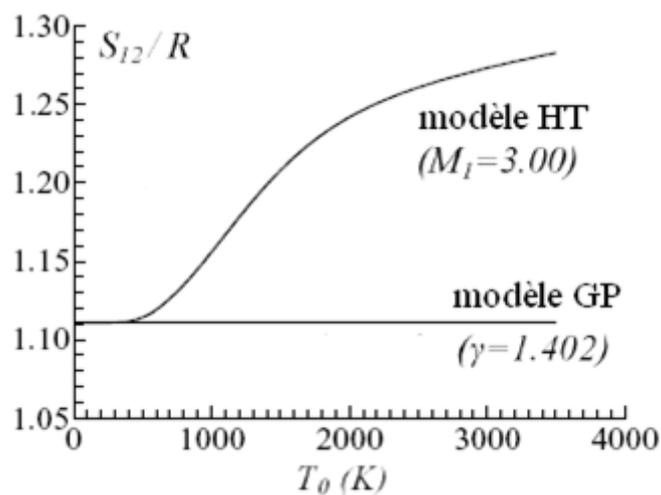


Figure 4.39 : L'évolution de l'entropie  $S_{12}/R$  en fonction de la température totale  $T_0$  pour  $M_1$  donné pour le cas du choc normal.

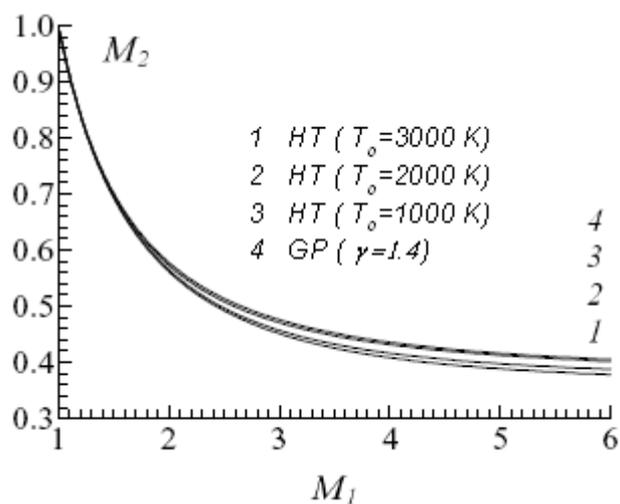


Figure 4.40 : L'évolution du nombre de Mach  $M_2$  en fonction du nombre de Mach  $M_1$  pour le cas du choc normal.

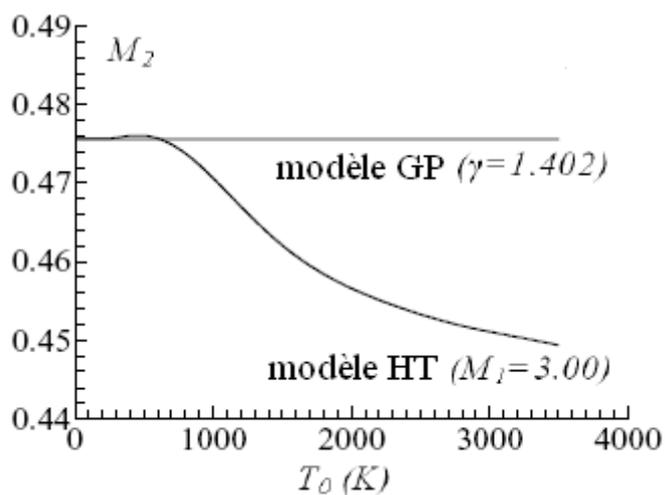


Figure 4.41 : L'évolution du nombre de Mach  $M_2$  en fonction de la température totale  $T_0$  pour  $M_1$  donné pour le cas du choc normal.

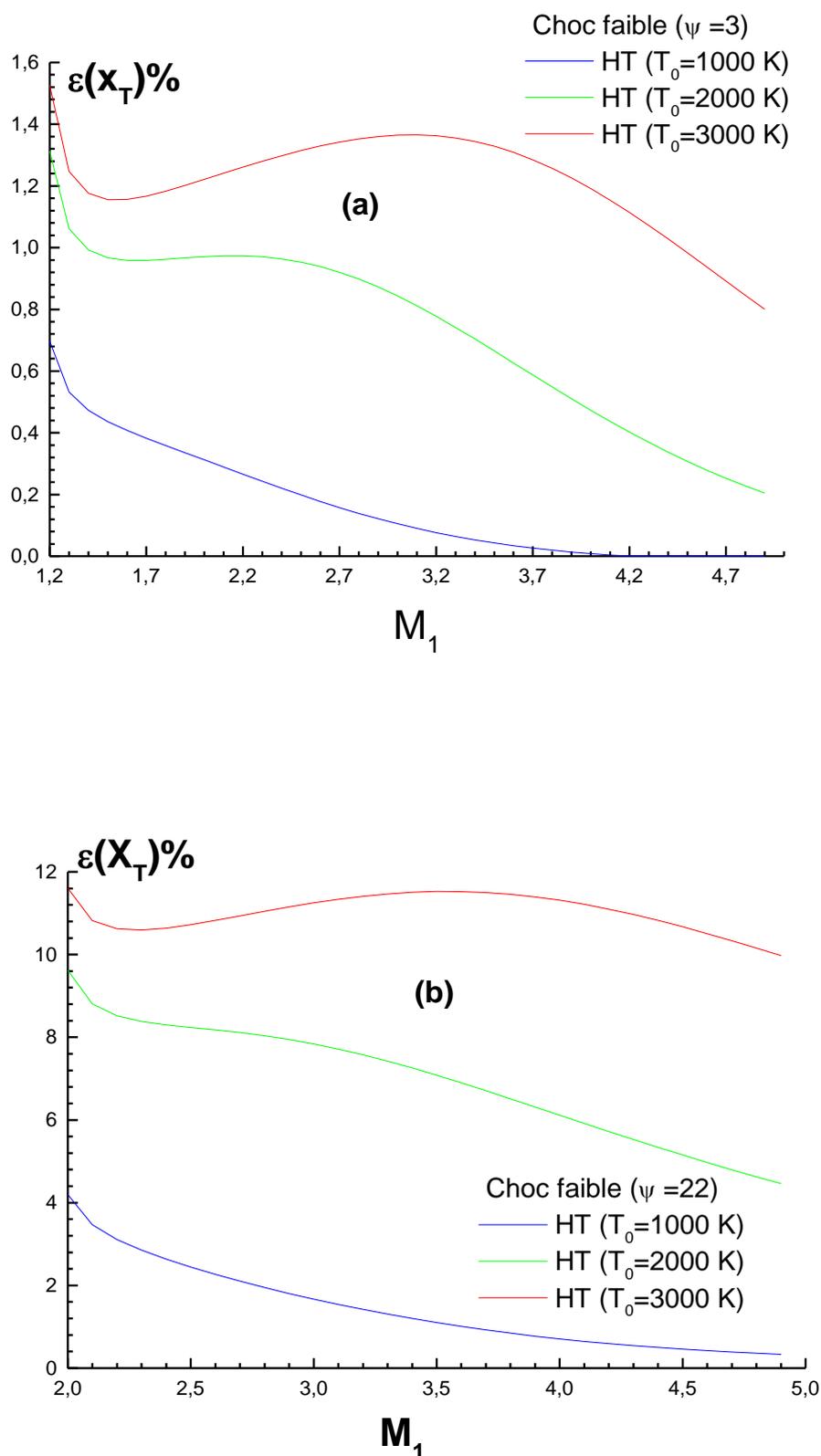


Figure 4.42 : L'évolution de l'erreur relative de rapport des températures  $T_2/T_1$  du choc faible en fonction de nombre de Mach  $M_1$  pour un angle de déviation de dièdre  $\psi$  donné. (a) cas de  $\psi=3^\circ$ . (b) cas de  $\psi=22^\circ$ .

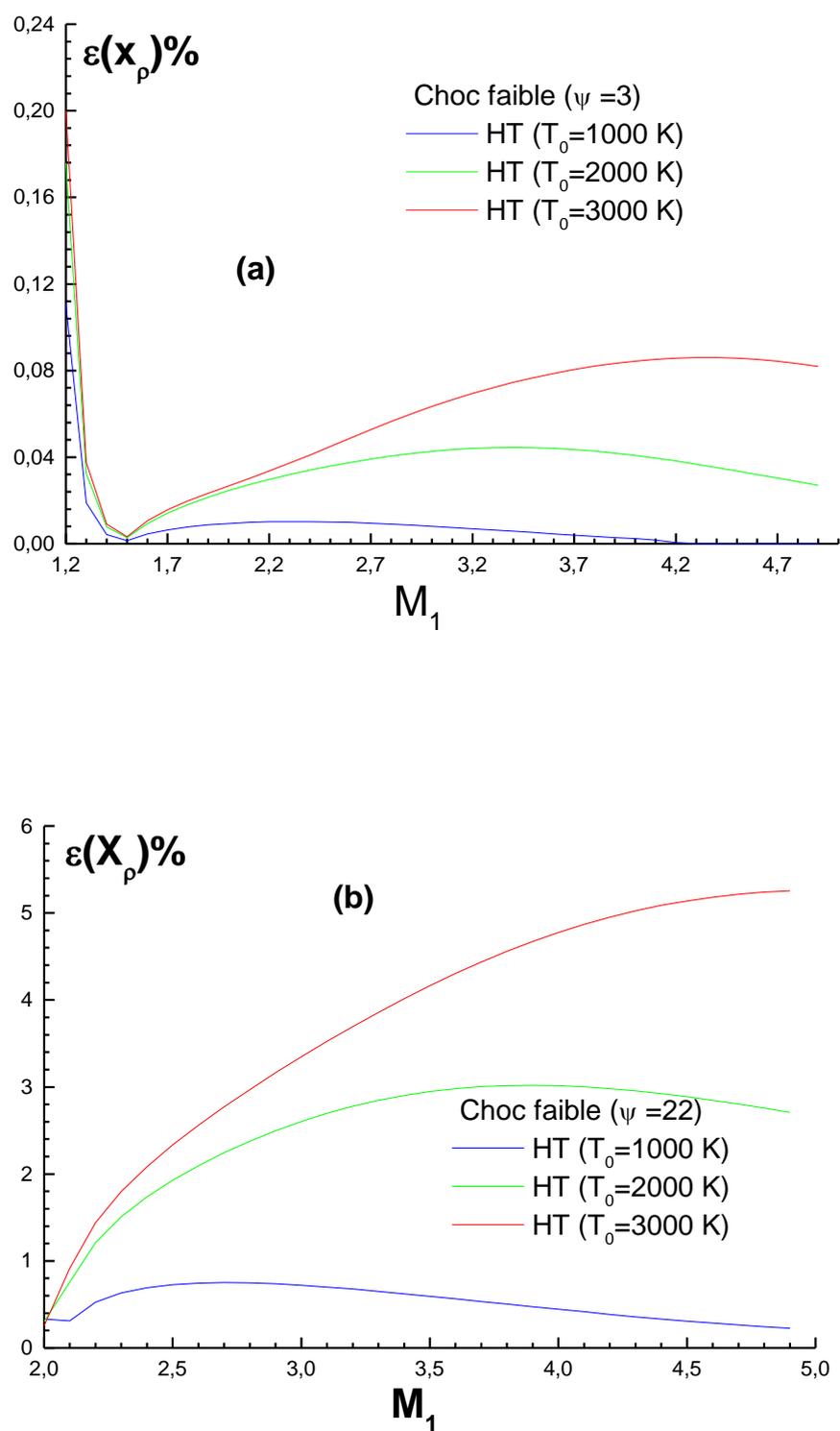


Figure 4.43 : L'évolution de l'erreur relative de rapport des masses volumiques  $\rho_2/\rho_1$  du choc faible en fonction de nombre de Mach  $M_1$  pour un angle de déviation de dièdre  $\psi$  donné. **(a)** cas de  $\psi=3^\circ$ . **(b)** cas de  $\psi=22^\circ$ .

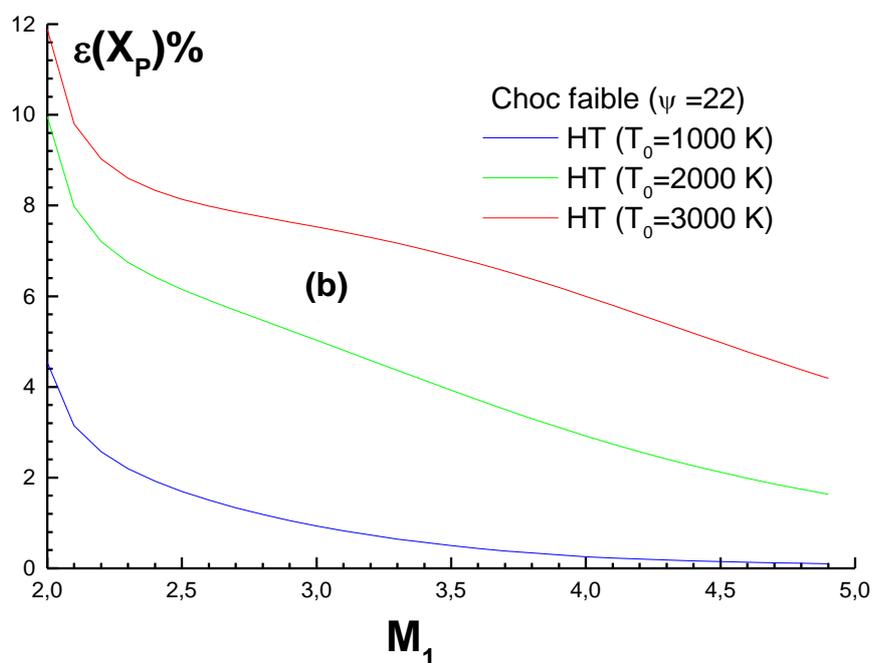
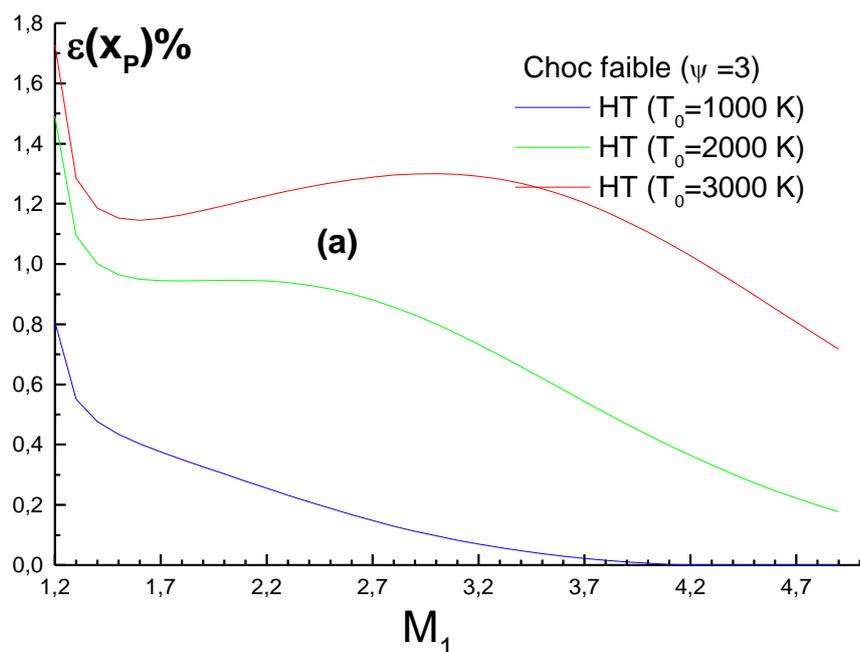


Figure 4.44 : L'évolution de l'erreur relative de rapport des pressions  $P_2/P_1$  du choc faible en fonction de nombre de Mach  $M_1$  pour un angle de déviation de dièdre  $\psi$  donné. (a) cas de  $\psi=3^\circ$ . (b) cas de  $\psi=22^\circ$ .

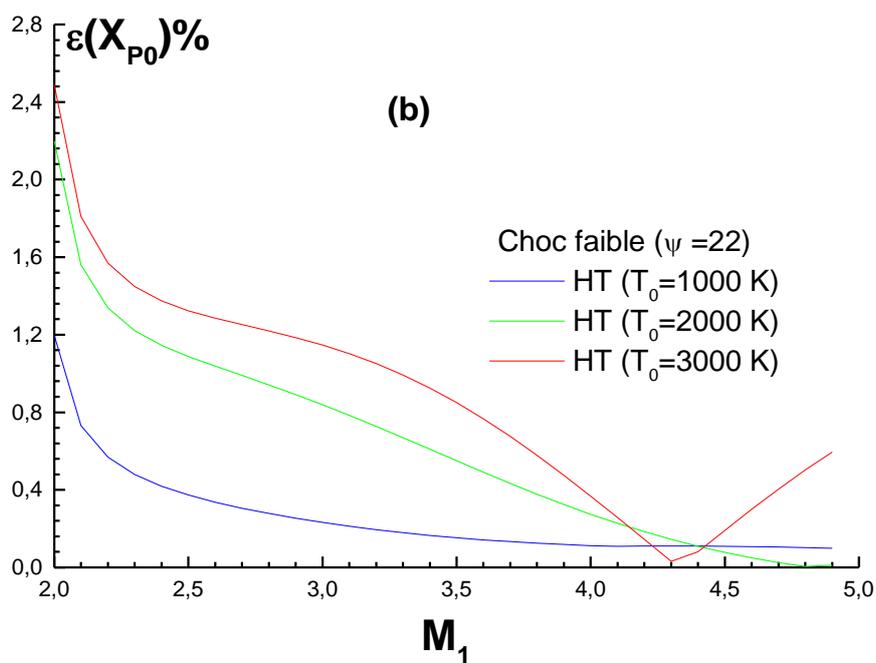
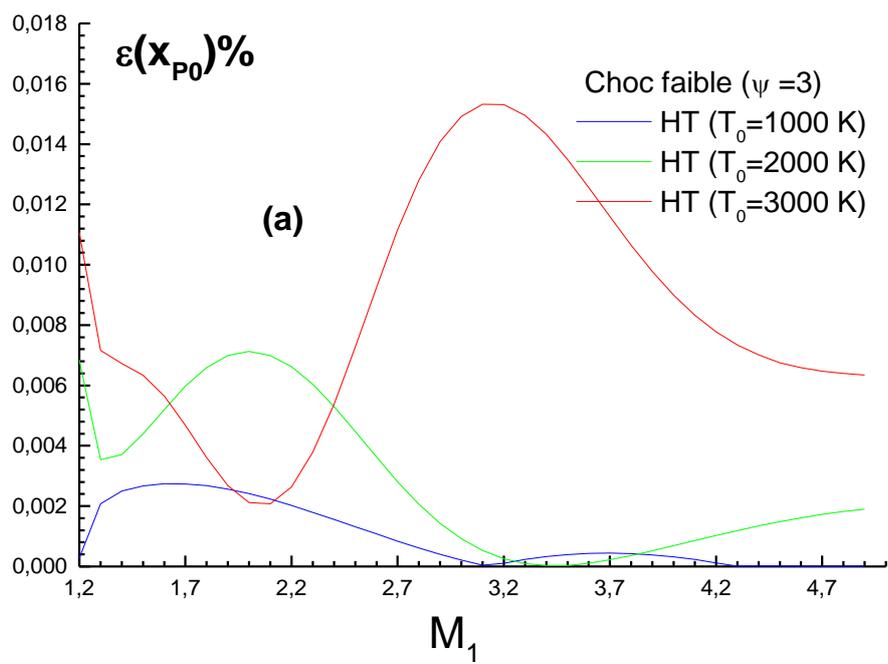


Figure 4.45 : L'évolution de l'erreur relative de rapport des pressions totales  $P_{02}/P_{01}$  du choc faible en fonction de nombre de Mach  $M_1$  pour un angle de déviation de dièdre  $\psi$  donné. (a) cas de  $\psi=3^\circ$ . (b) cas de  $\psi=22^\circ$ .

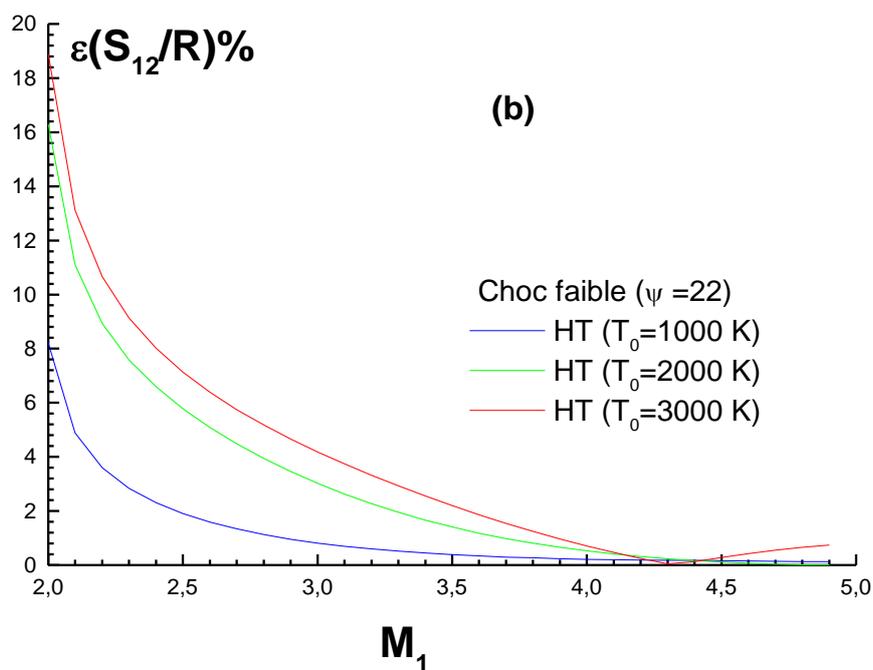
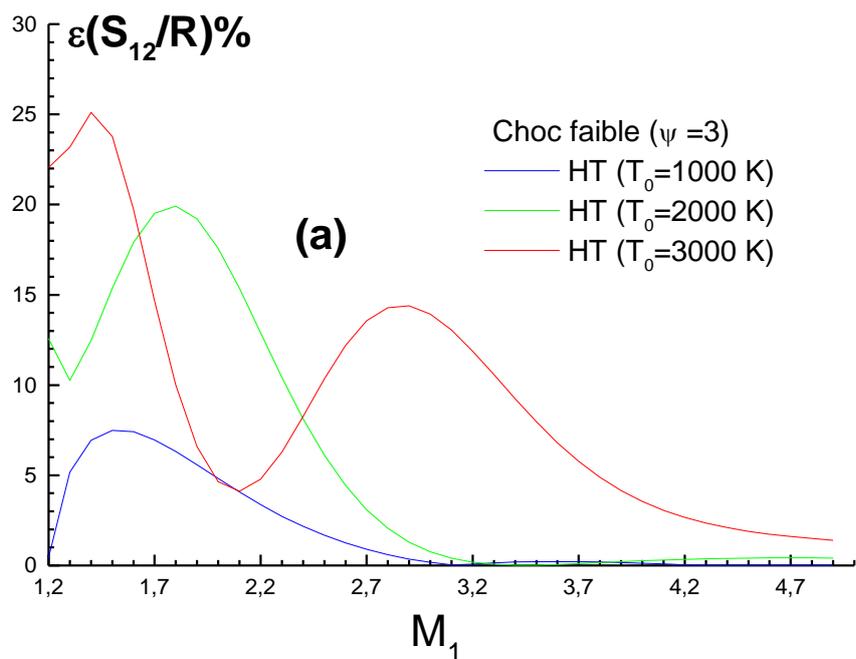


Figure 4.46 : L'évolution de l'erreur relative de l'entropie  $S_{12}/R$  du choc faible en fonction de nombre de Mach  $M_1$  pour un angle de déviation de dièdre  $\psi$  donné. (a) cas de  $\psi = 3^\circ$ . (b) cas de  $\psi = 22^\circ$ .

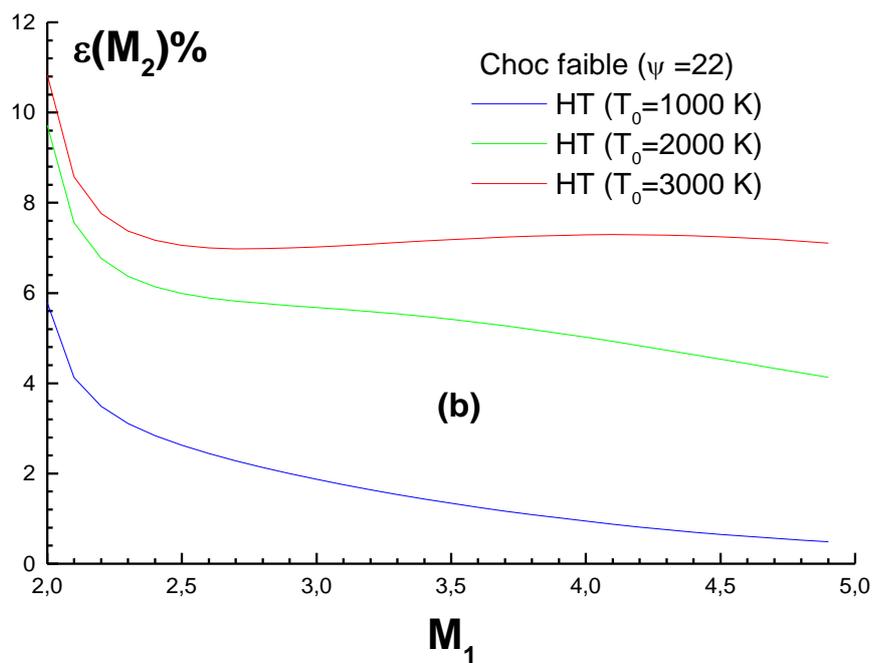
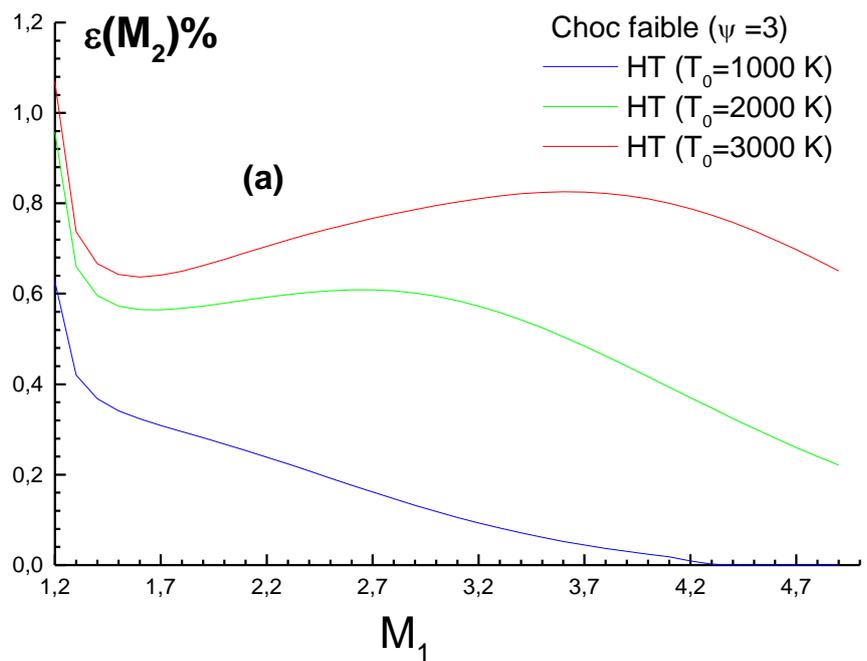


Figure 4.47 : L'évolution de l'erreur relative de nombre de Mach  $M_2$  du choc faible en fonction de nombre de Mach  $M_1$  pour un angle de déviation de dièdre  $\psi$  donné. **(a)** cas de  $\psi = 3^\circ$ . **(b)** cas de  $\psi = 22^\circ$ .

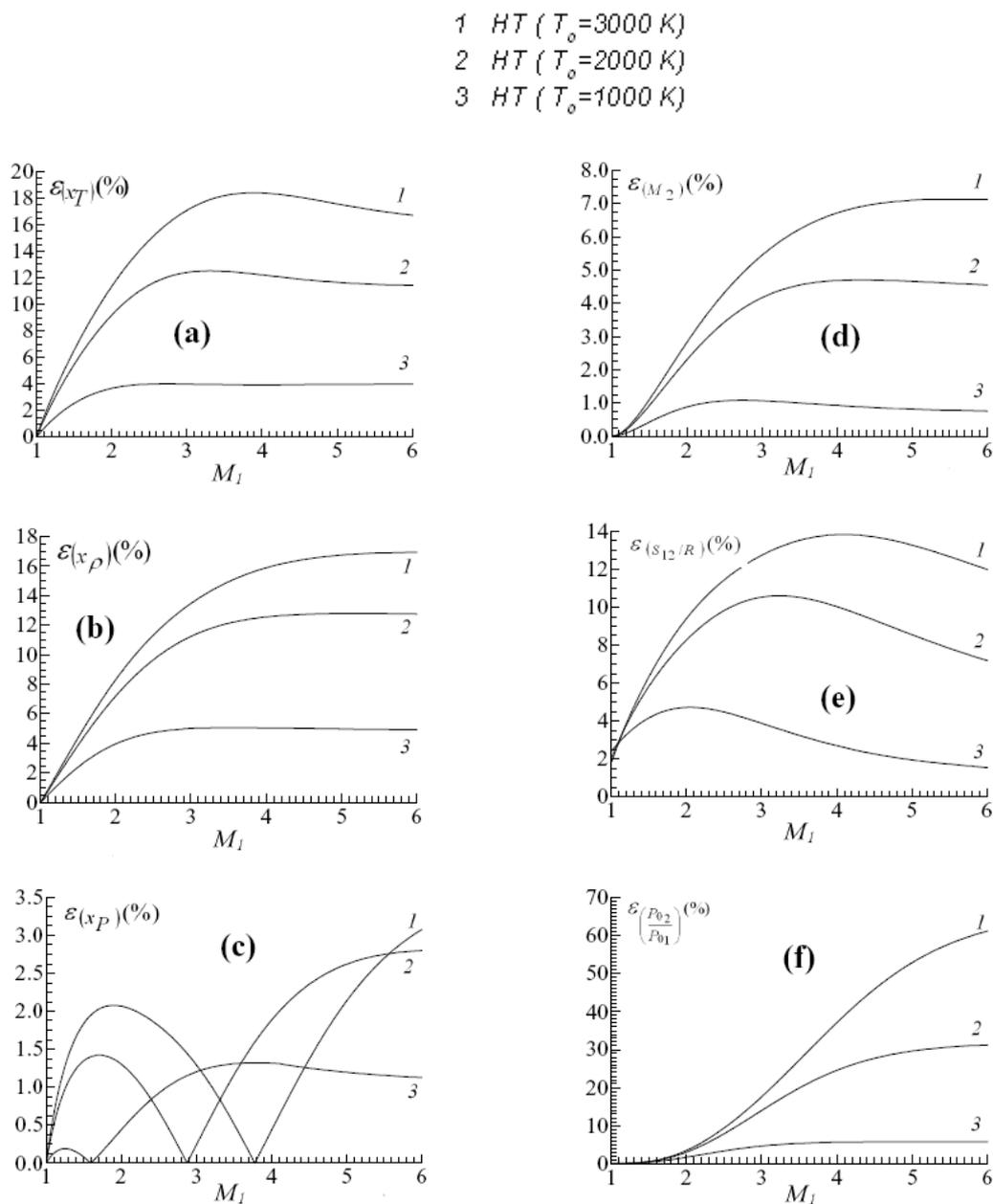


Figure 4.48 : L'évolution de l'erreur relative des paramètres thermodynamiques en fonction du nombre de Mach  $M_1$  pur le cas du choc normal.

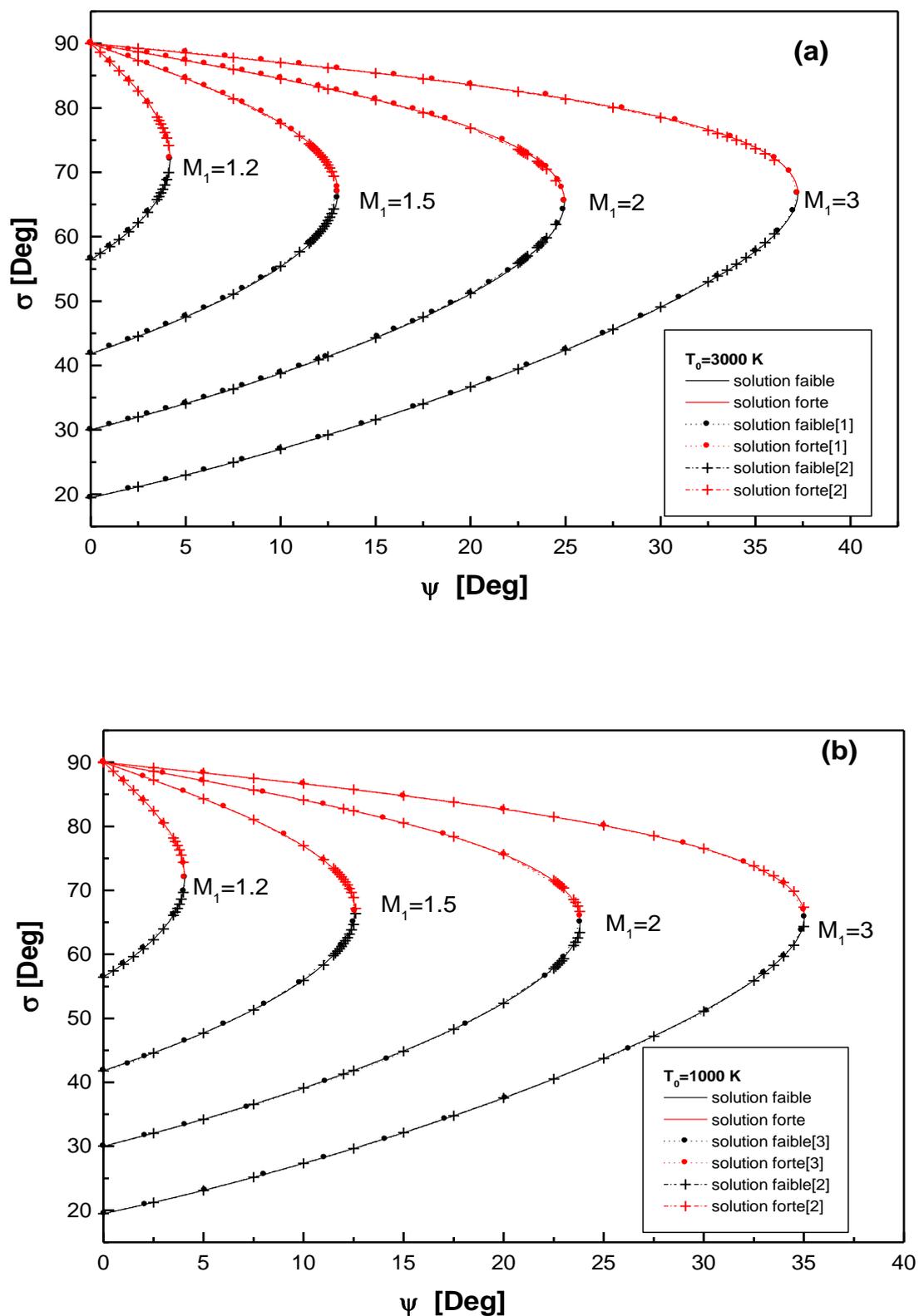


Figure 4.49 : Validation de diagramme  $\psi$ - $\sigma$ - $M$  pour un gaz à haute température.  
 (a)  $T_0=3000$  (b)  $T_0=1000$  K.

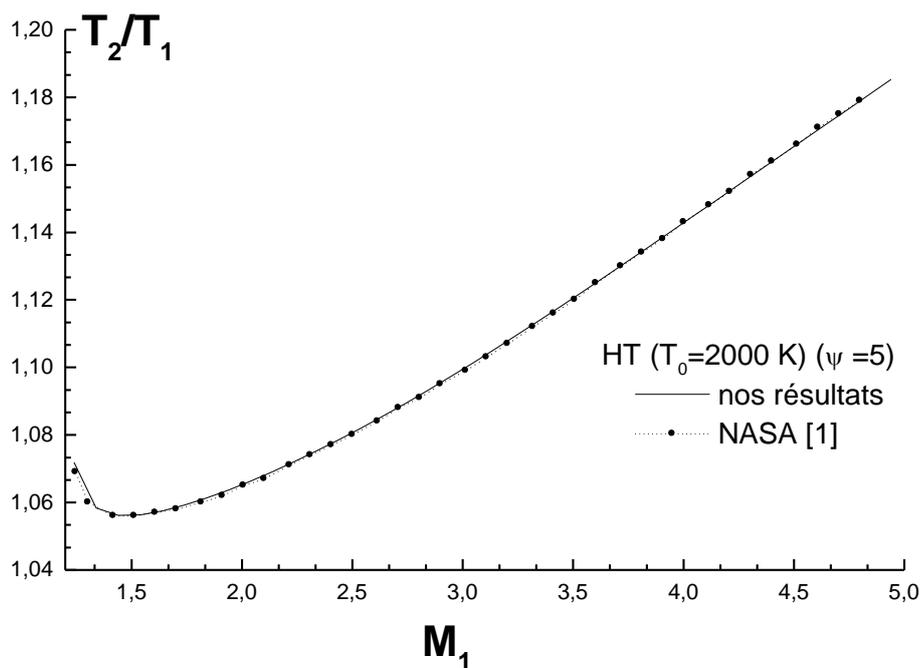


Figure 4.50 : Validation de l'évolution du rapport de température  $T_2/T_1$  du choc faible en fonction du nombre de Mach  $M_1$  pour un gaz à haute température lorsque  $T_0=2000$  K et  $\psi=5^0$ .

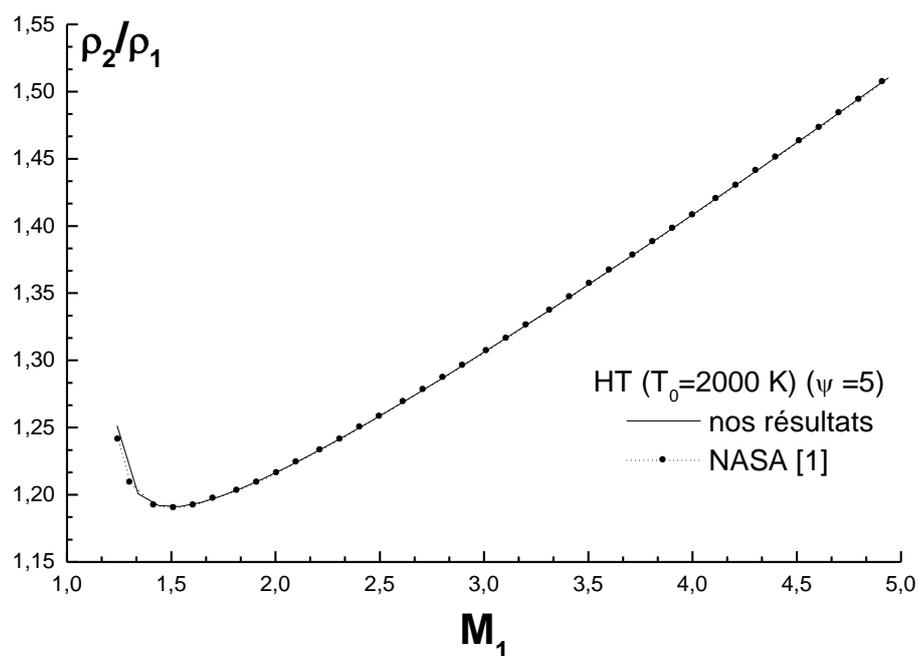


Figure 4.51 : Validation de l'évolution du rapport de la masse volumique  $\rho_2/\rho_1$  du choc faible en fonction du nombre de Mach  $M_1$  pour un gaz à haute température lorsque  $T_0=2000$  K et  $\psi=5^0$ .

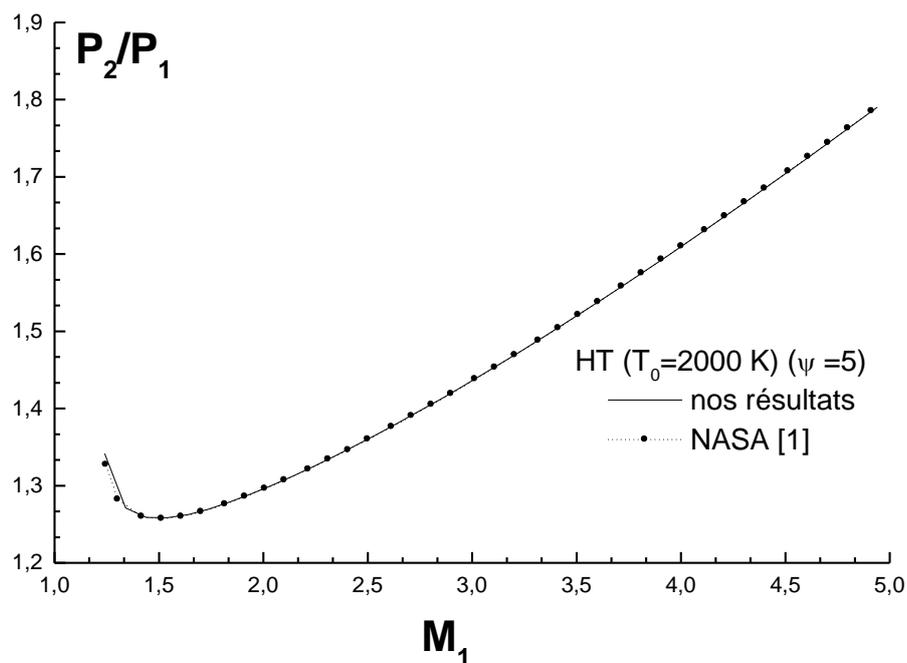


Figure 4.52 : Validation de l'évolution du rapport de pression  $P_2/P_1$  du choc faible en fonction du nombre de Mach  $M_1$  pour un gaz à haute température lorsque  $T_0=2000$  K et  $\psi=5^0$ .

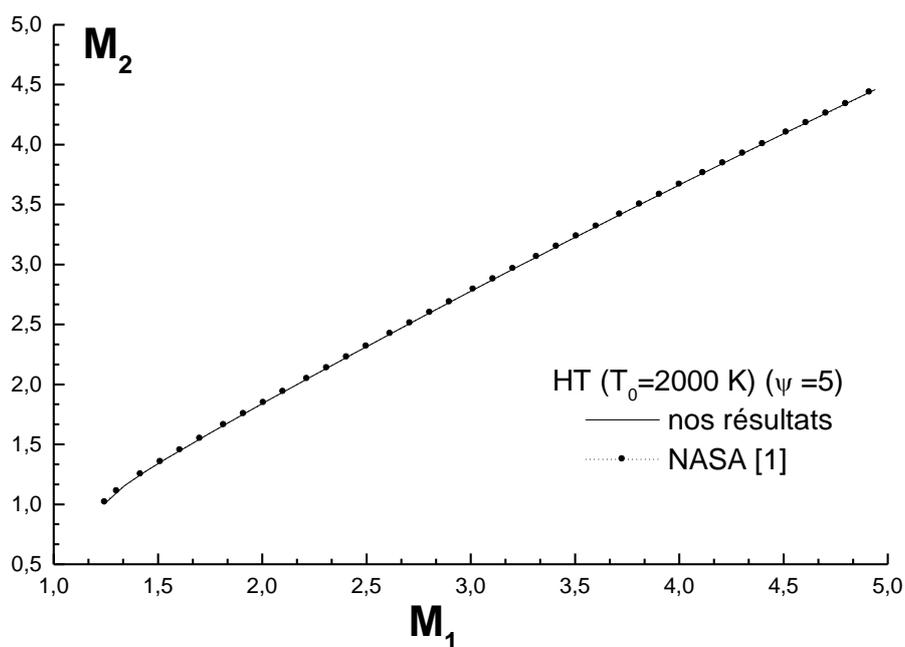


Figure 4.53 : Validation de l'évolution du nombre de Mach  $M_2$  du choc faible en fonction du nombre de Mach  $M_1$  pour un gaz à haute température lorsque  $T_0=2000$  K et  $\psi=5^0$ .

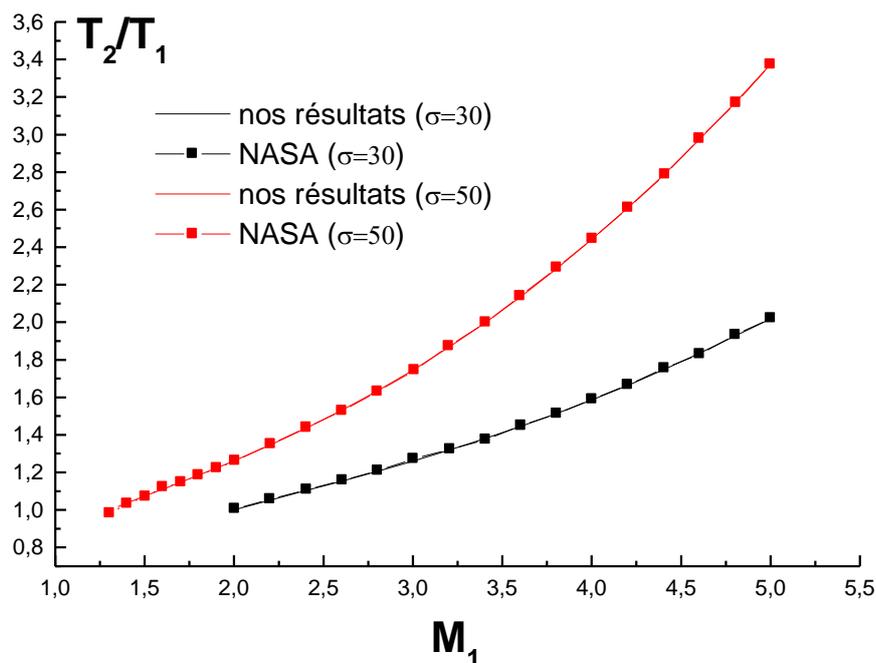


Figure 4.54 : Validation de l'évolution du rapport de température  $T_2/T_1$  du choc faible en fonction du nombre de Mach  $M_1$  pour un gaz à haute température lorsque  $T_0=3000$  K pour  $\sigma=30^\circ$  et  $\sigma=50^\circ$ .

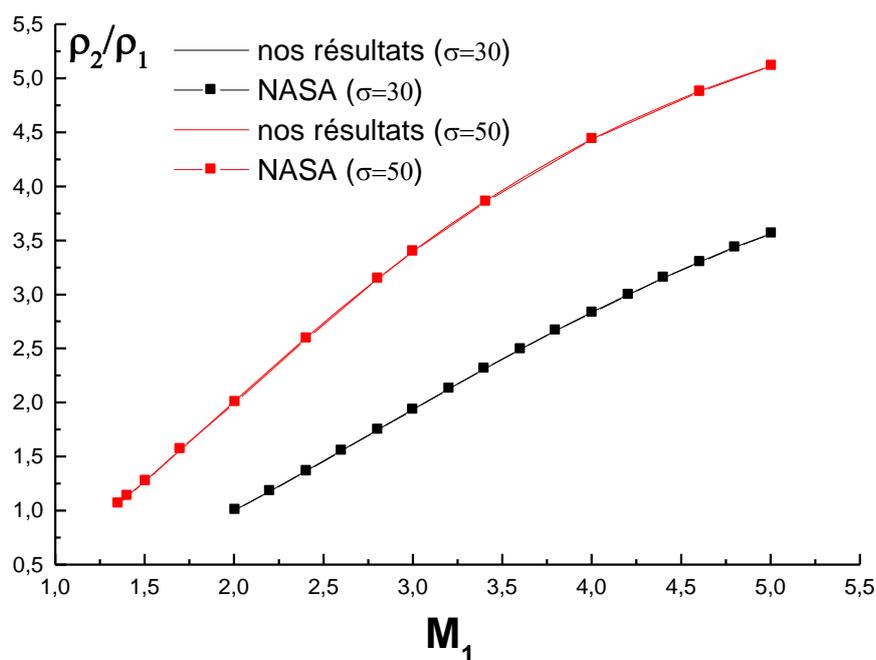


Figure 4.55 : Validation de l'évolution du rapport de la masse volumique  $\rho_2/\rho_1$  du choc faible en fonction du nombre de Mach  $M_1$  pour un gaz à haute température lorsque  $T_0=3000$  K pour  $\sigma=30^\circ$  et  $\sigma=50^\circ$ .

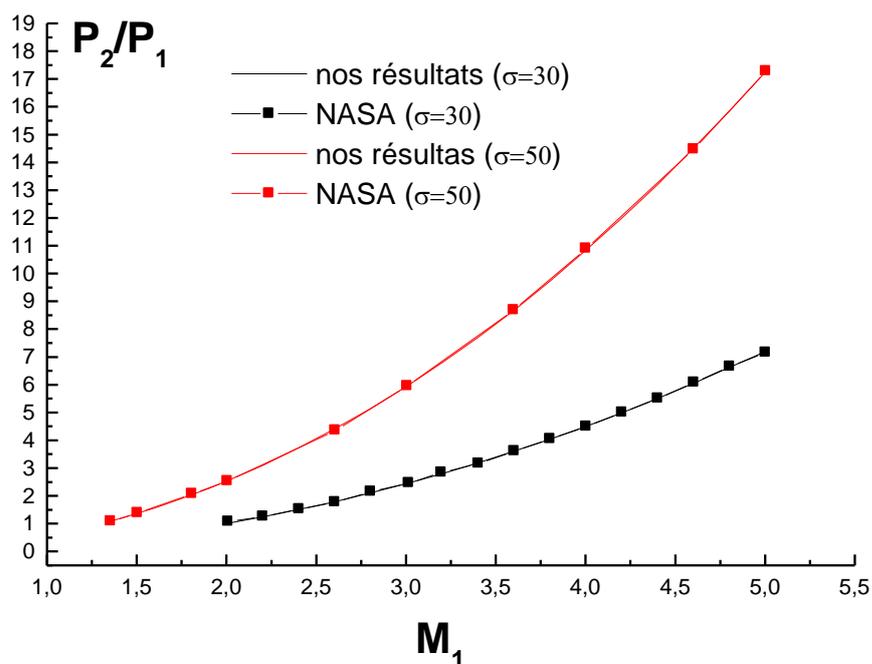


Figure 4.56 : Validation de l'évolution du rapport de pression  $P_2/P_1$  du choc faible en fonction du nombre de Mach  $M_1$  pour un gaz à haute température lorsque  $T_0=3000$  K pour  $\sigma=30^0$  et  $\sigma=50^0$ .

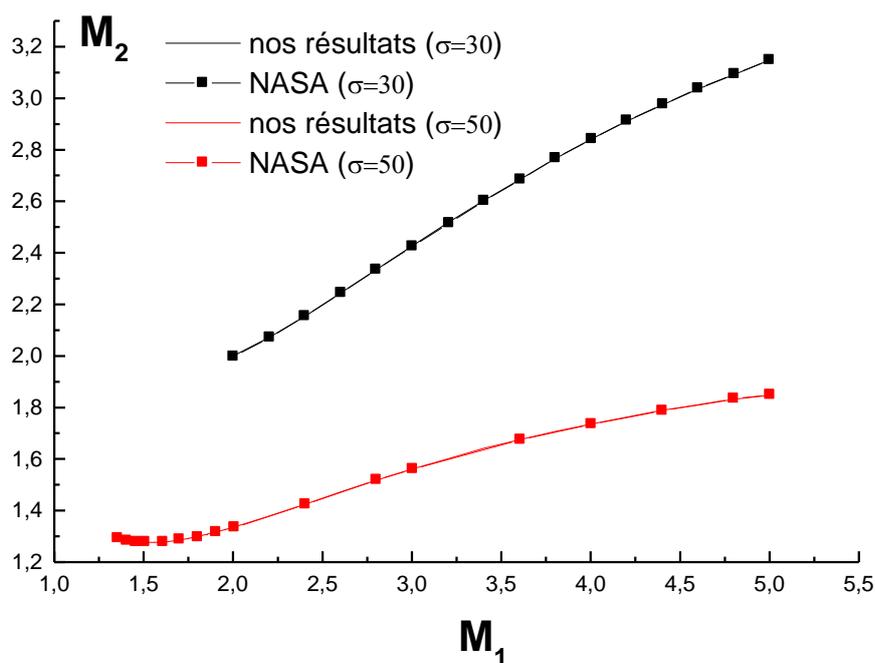


Figure 4.57 : Validation de l'évolution du nombre de Mach  $M_2$  du choc faible en fonction du nombre de Mach  $M_1$  pour un gaz à haute température lorsque  $T_0=3000$  K pour  $\sigma=30^0$  et  $\sigma=50^0$ .

### 4.3. Discussion des résultats du choc oblique

#### 4.3.1. Résultats en fonction de l'angle de déviation de dièdre $\psi$

##### ➤ Diagrammes $\psi$ - $\sigma$ -M

Les figures de 4.1 à 4.4 présentent respectivement les diagrammes de  $\psi$ - $\sigma$ -M pour 4 cas (cas du gaz parfait GP, cas du gaz à haute température HT pour  $T_0=1000$  K, HT pour  $T_0=2000$  K et HT pour  $T_0=3000$  K) pour un nombre de Mach  $M_1=1.2, 1.50, 2.00, 3.00, 4.00$  et  $5.00$  et pour chaque diagramme, on cite les remarques suivantes :

Pour chaque nombre de Mach  $M_1$ , il existe un angle de déviation de dièdre maximal (nommé par  $\psi_{\max}$ ) et une fois que l'inclinaison de dièdre  $\psi$  dépasse cette limite ( $\psi > \psi_{\max}$ ) le choc oblique n'est plus attaché et il devient détaché au dièdre. Par ailleurs plus  $M_1$  augmente, plus la possibilité de détachement du choc diminue, sachant que le gaz possède un grand angle  $\psi_{\max}$  lorsque le nombre de Mach  $M_1$  est élevé (voir le tableau 4.1 pour quelques valeurs numériques).[8]

Pour un angle de dièdre donné dans un écoulement supersonique, plus le nombre de Mach  $M_1$  diminue, plus l'inclinaison du choc augmente ; d'autre terme, pour certain faibles valeurs de  $M_1$  le choc se détache et commence à s'éloigner du dièdre. Sachant qu'on ne s'intéresse pas à cette dernière configuration (choc détaché).

D'après le diagramme  $\psi$ - $\sigma$ -M pour chaque angle de dièdre  $\psi < \psi_{\max}$  il existe 2 valeurs de  $\sigma$  (voir figure 2.6), la grande valeur est nommée solution du choc fort et la petite est nommée solution du choc faible, lequel est le plus favori parce que en réalité c'est uniquement lui seul qui se manifeste et de ce fait l'angle de choc est donné par la solution faible  $\sigma = \sigma_{\text{faible}}$  [8].

Quelque soit le modèle du gaz utilisé et le nombre de Mach  $M_1$  choisi, pour  $\psi = 0$  correspondant à l'intersection de diagramme  $\psi$ - $\sigma$ -M avec l'axe des ordonnées  $\sigma$ , on a d'une part  $\sigma = \frac{\Pi}{2}$  (l'extrémité supérieure) correspondant au choc normal et d'autre part on a  $\sigma = \mu$  (l'extrémité inférieure) correspondant à l'onde de Mach. [8]

En superposant les 4 cas de figures (4.1, 4.2, 4.3, 4.4) dans la figure 4.5 pour un nombre de Mach  $M_1 = 1.20, 2.00, 3.00$  et  $5.00$ , là on peut mieux constater la différence existant entre le gaz parfait et le gaz à haute température :

Les courbes du gaz à haute température ont des angles de déviation maximaux  $\psi_{\max}$  plus grands que ceux du gaz parfait. En d'autres termes, pour un angle de choc  $\sigma$  donné, l'angle de déviation  $\psi$  d'un gaz à haute température est plus grand que celui du gaz parfait et cette différence devient assez importante avec l'augmentation du nombre de Mach  $M_1$  et l'augmentation de la température totale  $T_0$  de façon à ce que :

- Plus le nombre de Mach  $M_1$  augmente, plus l'angle de déviation maximal ( $\psi_{\max}$ ) du gaz à haute température augmente encore, par rapport à celui du gaz parfait, ce qui démontre que l'intervalle d'existence d'une onde de choc attachée dans le gaz à haute température est plus grande.
- Plus le gaz est caloriquement imparfait (la température totale augmente et l'effet de vibration devient plus important), plus son angle de déviation maximal ( $\psi_{\max}$ ) augmente par rapport au gaz parfait. Autrement dit pour la limite extrême du supersonique  $M_1=5.00$  [8] ;  $\psi_{\max}$  pour le gaz à haute température HT ( $T_0=3000$  K) est de  $44,719^\circ$  sachant qu'à cet angle, l'onde de choc attaché n'existe plus dans le cas du gaz parfait.

(Pour plus de détails voir le tableau 4.1).

On conclut alors : l'angle de déviation maximal  $\psi_{\max}$  dépend non seulement du nombre de Mach  $M_1$  mais aussi de la température totale  $T_0$ .

Tableau 4.1: Présentation de la limite de déviation de dièdre  $\Psi_{\max}$  et l'angle de choc  $\sigma_{\max}$  correspond à  $\Psi_{\max}$ .

	$M_1=1.20$	$M_1=2.00$	$M_1=3.00$	$M_1=5.00$
GP ( $\gamma=1.402$ )	$\Psi_{\max}= 3,9401^0$ $\sigma_{\max}=71,9788^0$	$\Psi_{\max}= 22,9395^0$ $\sigma_{\max}=64,6592^0$	$\Psi_{\max}= 34,0166^0$ $\sigma_{\max}=65,2183^0$	$\Psi_{\max}= 41,0438^0$ $\sigma_{\max}=66,5508^0$
HT ( $T_0=1000K$ )	$\Psi_{\max}= 4,0768^0$ $\sigma_{\max}=72,0343^0$	$\Psi_{\max}= 23,8236^0$ $\sigma_{\max}=65,0738^0$	$\Psi_{\max}= 35,0371^0$ $\sigma_{\max}=65,8534^0$	$\Psi_{\max}= 41,9038^0$ $\sigma_{\max}=67,2341^0$
HT ( $T_0=2000K$ )	$\Psi_{\max}= 4,1598^0$ $\sigma_{\max}=72,0529^0$	$\Psi_{\max}= 24,6651^0$ $\sigma_{\max}=65,3506^0$	$\Psi_{\max}= 36,6269^0$ $\sigma_{\max}=66,4713^0$	$\Psi_{\max}= 43,7111^0$ $\sigma_{\max}=68,0749^0$
HT ( $T_0=3000K$ )	$\Psi_{\max}= 4,1898^0$ $\sigma_{\max}=72,0557^0$	$\Psi_{\max}= 24,9477^0$ $\sigma_{\max}=65,4467^0$	$\Psi_{\max}= 37,2299^0$ $\sigma_{\max}=66,6973^0$	$\Psi_{\max}= 44,7190^0$ $\sigma_{\max}=68,4754^0$

Pour de faibles nombres de Mach  $M_1$  (environ  $M_1=1.20$  par exemple), on constate que les trois courbes de modèle HT avec celle du modèle GP sont presque confondues. Ce qui démontre qu'à faible nombre de Mach supersonique, on peut considérer le gaz comme parfait malgré que la température totale soit élevée jusqu'à 3000 K. autrement dit, on peut étudier l'écoulement en utilisant les relations thermodynamiques d'un gaz parfait malgré que  $T_0$  soit élevé.

On remarque aussi, que pour de faibles angles de  $\Psi$  la différence de l'angle de choc  $\sigma$  entre un gaz parfait et un gaz à haute température est négligeable, et va persister jusqu'à des angles de déviation importants pour de grands nombres de Mach  $M_1$ . Comme le démontre le tableau 4.2.

Tableau 4.2 : l'influence de  $M_1$  et de  $\psi$  sur la différence de  $\sigma$  entre le modèle GP et le modèle HT.

		$\Psi = 0,1^0$	$\Psi = 1^0$	$\Psi = 2^0$	$\Psi = 3^0$
$M_1 = 1.20$	GP ( $\gamma = 1.402$ )	$\sigma = 56.6^0$	$\sigma = 58.5^0$	$\sigma = 61^0$	$\sigma = 64.3^0$
	HT ( $T_0 = 3000\text{K}$ )	$\sigma = 56.6^0$	$\sigma = 58.4^0$	$\sigma = 60.7^0$	$\sigma = 63.7^0$

		$\Psi = 3^0$	$\Psi = 6^0$	$\Psi = 10^0$	$\Psi = 13^0$
$M_1 = 5.00$	GP ( $\gamma = 1.402$ )	$\sigma = 13.5^0$	$\sigma = 15.8^0$	$\sigma = 19.3^0$	$\sigma = 22.2^0$
	HT ( $T_0 = 3000\text{K}$ )	$\sigma = 13.5^0$	$\sigma = 15.7^0$	$\sigma = 19.1^0$	$\sigma = 21.9^0$

Pour un angle de déviation  $\psi$  et un nombre de Mach  $M_1$  donnés dans le cas de la solution faible, l'angle de choc  $\sigma$  d'un gaz à haute température est plus petit par rapport au gaz parfait, ce qui nous amène à dire que le choc produit dans un gaz parfait est plus fort que dans un gaz à haute température.[2]

#### ➤ Température

La figure 4.6 présente l'évolution du rapport des températures  $T_2/T_1$  (la température  $T_2$  après le choc) en fonction de l'angle de déviation de dièdre  $\psi$  pour un gaz parfait GP et un gaz à haute température HT lorsque  $T_0 = 1000\text{ K}$ ,  $T_0 = 2000\text{ K}$  et pour  $T_0 = 3000\text{ K}$ .

La température s'élève de plus en plus avec la croissance de l'angle de dièdre  $\psi$  ainsi que celui de  $M_1$  de telle manière que :

- Pour  $\psi$  donné et  $M_1$  croissant, la température augmente par ce que l'intensité du choc augmente.

- Pour  $M_1$  donné et  $\psi$  croissant, la température dans le cas du choc faible s'élève car l'angle de choc  $\sigma$  lui aussi croît en raison de l'augmentation de l'intensité du choc.

Pour  $\psi = 0$  on a  $\frac{T_2}{T_1} = 1$  (le choc n'existe pas et ce cas correspond à l'onde de Mach) Et

$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)_{\max}$  (correspond au choc normal), notant que cette dernière dépend surtout de

nombre de Mach  $M_1$  et de la température totale  $T_0$  comme le démontre l'exemple suivant :

Lorsque  $M_1=2.00$  ; pour un gaz parfait on a  $\left(\frac{T_2}{T_1}\right)_{\max} = 1,69054$  Et pour un gaz à haute

température ( $T_0=3000$  K) on a  $\left(\frac{T_2}{T_1}\right)_{\max} = 1,51834$

Maintenant lorsque  $M_1=5.00$  ; pour un gaz parfait on a  $\left(\frac{T_2}{T_1}\right)_{\max} = 5,82228$  Et pour un gaz à

haute température ( $T_0=3000$  K) on a  $\left(\frac{T_2}{T_1}\right)_{\max} = 4,95153$

La figure 4.7 regroupe le gaz parfait et le gaz à haute température pour un nombre de Mach  $M_1= 2.00, 3.00$  et  $5.00$ , et démontre que pour  $\psi$  et  $M_1$  donnés ; le rapport de température  $T_2/T_1$  du gaz parfait est plus grand que celui du gaz à haute température, et plus  $T_0$  augmente, plus il y'a correction du modèle GP sur la température  $T_2$  après le choc.

La diminution de la température  $T_2$  après le choc dans le gaz HT par rapport au gaz GP à pour explication suivante :

La température se transforme en énergie de vibration dans le cas du gaz à haute température. Et plus la température totale augmente plus l'énergie de vibration s'excite, et ces effets deviennent plus significatif avec l'augmentation de  $M_1$  ce qui veut dire aussi que l'énergie de vibration est très importante lorsque  $M_1$  augmente.

Le tableau 4.3 montre l'effet de la température totale  $T_0$  et le nombre de Mach  $M_1$  sur le rapport de température  $T_2/T_1$  correspond à la limite du choc attaché  $\psi_{\max}$ .

Tableau 4.3 : Présentation du rapport  $T_2/T_1$  correspond à  $\psi_{\max}$  pour le modèle GP et le modèle HT.

	GP ( $\gamma=1.402$ )	HT ( $T_0=1000\text{K}$ )	HT ( $T_0=2000\text{K}$ )	HT ( $T_0=3000\text{K}$ )
$M_1=1.20$	1,0913	1,0819	1,0724	1,0691
$M_1=2.00$	1,5396	1,5009	1,4377	1,4137
$M_1=3.00$	2,3747	2,3171	2,1663	2,0886
$M_1=5.00$	5,0486	4,9425	4,6591	4,4419

➤ Masse volumique

La figure 4.8 présente l'évolution du rapport des masses volumiques  $\rho_2/\rho_1$  en fonction de l'angle de déviation  $\psi$  pour le gaz parfait GP et le gaz à haute température HT lorsque  $T_0=1000\text{ K}$ ,  $T_0=2000\text{ K}$  et pour  $T_0=3000\text{ K}$ .

La masse volumique augmente de plus en plus avec la croissance de l'angle de dièdre  $\psi$  ainsi que celui de  $M_1$  de façon à ce que :

- Pour  $\psi$  donné et  $M_1$  croissant, la masse volumique augmente car le choc devient fort.
- Pour  $M_1$  donné et  $\psi$  croissant, la masse volumique dans le cas de choc faible s'élève, car l'angle de choc  $\sigma$  lui aussi croît en raison de l'augmentation de l'intensité du choc.

Cette figure démontre aussi que l'écoulement est compressible vu la variation de  $\rho_2/\rho_1$  en fonction de  $M_1$ ,  $T_0$  et  $\psi$ .

Pour  $\psi = 0$  on a  $\frac{\rho_2}{\rho_1} = 1$  (le choc n'existe pas) et  $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)_{\max}$  (correspond au choc

normal). Cette dernière dépend du nombre de Mach  $M_1$  et  $T_0$  comme présente l'exemple suivant :

Lorsque  $M_1=2.00$  ; pour un gaz parfait on a  $\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)_{\max} = 2,3684$  Et pour un gaz à haute

température ( $T_0=3000$  K) on a  $\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)_{\max} = 2,56297$

Maintenant lorsque  $M_1=5.00$  ; pour un gaz parfait on a  $\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)_{\max} = 4,83192$  Et pour un gaz à

haute température ( $T_0=3000$  K) on a  $\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)_{\max} = 5,76053$

La figure 4.9 regroupe le gaz parfait et le gaz à haute température pour un nombre de Mach  $M_1= 2.00$  ,  $3.00$  et  $5.00$ , et démontre que pour  $\psi$  et  $M_1$  donnés ; le rapport  $\rho_2/\rho_1$  du gaz à haute température est plus grand que celui du gaz parfait et cet effet devient plus significatif avec l'augmentation de la température totale  $T_0$  et le nombre de Mach  $M_1$  parce qu'on remarque qu'à faible nombre de Mach  $M_1$ , la différence entre les résultats de GP et HT est négligeable pour le choc faible.

#### ➤ Pression

La figure 4.10 illustre l'évolution du rapport de pression  $P_2/P_1$  en fonction de l'angle de déviation  $\psi$  pour les modèles GP et HT.

La pression augmente de plus en plus avec la croissance de  $\psi$  et de  $M_1$  ainsi l'intensité du choc oblique faible devient élevée.

On remarque pour le choc fort que son rapport de compression est plus grand par rapport au choc faible ce qui confirme la nature de la différence entre les deux chocs.

Ainsi que le rapport de pression  $P_2/P_1$  du choc fort dépend effectivement du nombre de Mach  $M_1$  et non de l'angle de dièdre. [23]

Pour  $\psi = 0$  on a  $\frac{P_2}{P_1} = 1$  (le choc n'existe pas) Et  $\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)_{\max}$  (correspond au

choc normal). Cette dernière dépend toujours de  $M_1$  et  $T_0$  comme le démontre l'exemple suivant :

Lorsque  $M_1=2.00$  ; pour un gaz parfait on a  $\left(\frac{P_2}{P_1}\right)_{\max} = 3,6466$  Et pour un gaz à haute

température ( $T_0=3000$  K) on a  $\left(\frac{P_2}{P_1}\right)_{\max} = 3,62351$

Maintenant lorsque  $M_1=5.00$  ; pour un gaz parfait on a  $\left(\frac{P_2}{P_1}\right)_{\max} = 24,39446$  Et pour un gaz à

haute température ( $T_0=3000$  K) on a  $\left(\frac{P_2}{P_1}\right)_{\max} = 25,5881$

La figure 4.11 regroupe le gaz parfait et le gaz à haute température (pour  $M_1=2.00$ , 3.00 et 5.00) et nous montre que pour un angle de déviation  $\psi$  donné et  $M_1$  donné ; le rapport  $P_2/P_1$  (en d'autres termes la pression  $P_2$ ) du gaz parfait est plus grand que celui du gaz à haute température ainsi, le choc produit dans un gaz parfait est plus fort que celui produit dans un gaz à haute température, et ce phénomène devient plus significatif avec l'augmentation de la température totale et le nombre de Mach  $M_1$ .

Le tableau 4.4 montre l'effet de la température totale  $T_0$  et le nombre de Mach  $M_1$  sur le rapport de pression  $P_2/P_1$  correspond à la limite de choc attaché  $\psi_{\max}$ .

Tableau 4.4 : présentation du rapport  $P_2/P_1$  correspond à  $\psi_{\max}$  pour le modèle du gaz parfait et le modèle du gaz à haute température.

	GP ( $\gamma=1.402$ )	HT ( $T_0=1000K$ )	HT ( $T_0=2000K$ )	HT ( $T_0=3000K$ )
$M_1=1.20$	1,3527	1,3510	1,3449	1,3428
$M_1=2.00$	3,6466	3,6827	3,6444	3,6235
$M_1=3.00$	8,4926	8,6649	8,6719	8,5822
$M_1=5.00$	24,3944	24,8815	25,5608	25,5881

➤ Pression total

La figure 4.12 présente l'évolution du rapport des pressions totales  $P_{02}/P_{01}$  en fonction de l'angle de déviation  $\psi$  pour les modèles GP et HT.

La pression totale à travers le choc diminue de plus en plus avec l'augmentation de l'angle de dièdre  $\psi$  et de  $M_1$ .

Pour  $\psi = 0$  on a  $\frac{P_{02}}{P_{01}} = 1$  (n'existe pas le choc) Et  $\frac{P_{02}}{P_{01}} = \left( \frac{P_{02}}{P_{01}} \right)_{\min}$  (correspond au

choc normal) et qui dépend de  $M_1$  et  $T_0$  comme nous démontré l'exemple suivant :

Lorsque  $M_1=2.00$  ; pour un gaz parfait on a  $\left( \frac{P_{02}}{P_{01}} \right)_{\min} = 0,80954$  Et pour un gaz à haute

température ( $T_0=3000 K$ ) on a  $\left( \frac{P_{02}}{P_{01}} \right)_{\min} = 0,78879$

Maintenant lorsque  $M_1=5.00$  ; pour un gaz parfait on a  $\left(\frac{P_{02}}{P_{01}}\right)_{\min} = 0,08613$  Et pour un gaz à

haute température ( $T_0=3000$  K) on a  $\left(\frac{P_{02}}{P_{01}}\right)_{\min} = 0,0572$

La figure 4.13 regroupe les résultats des deux modèles : le gaz parfait et le gaz à haute température (Pour  $M_1=2.00$ ,  $3.00$  et  $5.00$ ) et démontre que pour un  $\psi$  et  $M_1$  donnés ; généralement le rapport  $P_{02}/P_{01}$  du gaz parfait est inférieur par rapport à celui du gaz à haute température pour le cas du choc faible néanmoins, plus le nombre de Mach  $M_1$  augmente, plus cette différence n'est plus conservé entre les deux modèles. Par exemple pour  $M_1=5$ , pour des faibles angles de déviation le gaz parfait possède des résultats inférieur à ceux du gaz à haute température mais à partir de  $\psi=20^\circ$ , plus la température totale augmente plus le gaz à haute température possède des résultats inférieur qu'à ceux du gaz parfait, mais lorsque l'angle de déviation  $\psi$  se rapproche de l'angle limite  $\psi_{\max}$  (par exemple  $\psi=41^\circ$ ) on trouve que le rapport de pression totale du gaz parfait est plus grand que celui du gaz à haute température, ce qui permet de dire ; que la variation du rapport de pression totale de modèle HT par rapport au modèle GP n'est plus conservée et non linéaire.[Appendice B]

### ➤ L'entropie

La figure 4.14 présente l'évolution de l'entropie en fonction de l'angle de déviation  $\psi$  pour les modèles GP et HT.

L'entropie à travers le choc augmente de plus en plus avec l'augmentation de l'angle de dièdre  $\psi$  et de  $M_1$ . On peut démontre que le saut d'entropie est relié avec les pertes de pression totale  $P_{02}/P_{01}$ .

Pour  $\psi = 0$  on a  $\frac{S_{12}}{R} = 0$  (n'existe pas le choc) Et  $\frac{S_{12}}{R} = \left(\frac{S_{12}}{R}\right)_{\max}$  (correspond au

choc normal). L'exemple suivant présente l'influence de  $M_1$  et de  $T_0$  sur le saut d'entropie :

Lorsque  $M_1=2.00$  ; pour un gaz parfait on a  $\left(\frac{S_{12}}{R}\right)_{\max} = 0,21128$  Et pour un gaz à haute

température ( $T_0=3000$  K) on a  $\left(\frac{S_{12}}{R}\right)_{\max} = 0,23726$

Maintenant lorsque  $M_1=5.00$  ; pour un gaz parfait on a  $\left(\frac{S_{12}}{R}\right)_{\max} = 2,45192$  Et pour un gaz à

haute température ( $T_0=3000$  K) on a  $\left(\frac{S_{12}}{R}\right)_{\max} = 2,86127$

La figure 4.15 regroupe les résultats du gaz parfait et du gaz à haute température (pour  $M_1=2.00, 3.00$  et  $5.00$ ) et démontre que pour  $\psi$  et  $M_1$  donnés ; le saut d'entropie du gaz à haute température est moins faible par rapport à celui du gaz parfait, mais ceci s'inverse à grand nombre de Mach supersonique et à partir d'un certain angle de déviation.

➤ Le nombre de Mach  $M_2$

La figure 4.16 présente l'évolution du nombre de Mach  $M_2$  après le choc en fonction de l'angle de déviation  $\psi$  pour les modèles GP et HT.

Le nombre de Mach  $M_2$  à travers le choc oblique faible diminue de plus en plus avec l'augmentation de l'angle de dièdre  $\psi$ , par conséquent l'intensité du choc devient plus forte.

On remarque que le nombre de Mach  $M_2$  après le choc est inférieur au nombre  $M_1$  avant le choc où pour le choc faible, la valeur de  $M_2$  reste toujours supersonique  $1.0 < M_2 < M_1$  tandis que pour le choc fort, devient subsonique  $M_2 < 1.00$

Pour  $\psi = 0$  on a d'une part  $M_2 \approx M_1$  (correspond à l'onde de Mach) et d'une autre part  $M_2 = (M_2)_{\min} < 1$  (correspond au choc normal). Cette dernière dépend de  $M_1$  et de  $T_0$  comme nous le démontré :

Lorsque  $M_1=2.00$  ; pour un gaz parfait on a  $(M_2)_{\min} = 0,92433$  et pour un gaz à haute température ( $T_0=3000$  K) on a  $(M_2)_{\min} = 0,92336$

Maintenant lorsque  $M_1=5.00$  ; pour un gaz parfait on a  $(M_2)_{\min} = 0,98122$  et pour un gaz à haute température ( $T_0=3000$  K) on a  $(M_2)_{\min} = 0,98242$

La figure 4.17 regroupe les résultats du gaz parfait et du gaz à haute température (Pour  $M_1=2.00, 3.00$  et  $5.00$ ) et démontre que pour un angle de déviation  $\psi$  donné et  $M_1$  donné ; le nombre de Mach  $M_2$  du gaz parfait est moins faible que celui du gaz à haute température, ce qui confirme que le choc produit dans un gaz parfait est plus fort que celui produit dans un gaz à haute température, sachant que  $M_2$  reste toujours supersonique parce que là on est dans le cas du choc faible.

On remarque aussi que pour  $\psi$  donné, le nombre de Mach  $M_2$  augmente avec l'augmentation de  $M_1$  comme le démontre le tableau 4.5.

Tableau 4.5 : Présentation du nombre de Mach  $M_2$  correspond à  $\psi_{\max}$  pour les modèles GP et HT.

	GP ( $\gamma=1.402$ )	HT ( $T_0=1000$ K)	HT ( $T_0=2000$ K)	HT ( $T_0=3000$ K)
$M_1=1.20$	0,9503	0,9503	0,9499	0,9498
$M_1=2.00$	0,9243	0,9254	0,9240	0,9233
$M_1=3.00$	0,9540	0,9558	0,9553	0,9546
$M_1=5.00$	0,9812	0,9822	0,9826	0,9824

#### 4.3.2. Résultats en fonction de la température totale $T_0$

On rappelle que les calculs de la haute température sont basés sur l'utilisation de la fonction polynomiale de la chaleur spécifique  $C_p(T)$  interpolée à partir des tables de la référence [6]. Notons que lorsque la température totale  $T_0$  est inférieure à 240 K (là, où le gaz est considéré comme caloriquement parfait et thermiquement parfait), le  $C_p$  du gaz à haute température est constant et confondu avec celui du gaz parfait, et ce n'est qu'une fois que  $T_0$  dépasse cette limite le  $C_p$  sera dépendant de la température, et plus la température totale augmente plus le  $C_p$  du gaz à haute température se sépare de celui du gaz parfait, et cette variation va influencer sur l'évolution des paramètres thermodynamiques du gaz à haute température par rapport au gaz parfait.

Pour mieux voir l'effet de la croissance de la température totale sur l'évolution des paramètres thermodynamiques, les figures de 4.18 à 4.23 présentent la variation de ces paramètres thermodynamiques (la température, la masse volumique, la pression, la pression totale, l'entropie et le nombre de Mach  $M_2$ ) en fonction de la température totale  $T_0$  qui varie jusqu'à 3000 K, pour le cas du gaz à haute température HT (en précisant que le gaz parfait ne dépend pas de la variation de la température totale), pour un nombre de Mach  $M_1$  et un angle de déviation  $\psi$  donnés, de la manière suivante :

On a présenté chaque paramètre thermodynamique pour un nombre de Mach  $M_1=3.00$  avec angle de déviation  $\psi=5^\circ$  et  $\psi=24^\circ$ , et pour un nombre de Mach  $M_1=5.00$  avec angle de déviation  $\psi=10^\circ$  et  $\psi=41^\circ$  afin de voir l'influence du choix de l'angle de dièdre et le régime d'écoulement.

Les figures de 4.18 à 4.23 (pour le modèle HT) montrent d'une part que la masse volumique  $\rho_2$ , la pression totale  $P_{02}$  et le nombre de Mach  $M_2$  augmentent avec la croissance de la température totale  $T_0$ , par contre la température  $T_2$ , la pression  $P_2$  et le saut d'entropie  $S_{12}$  diminuent. D'une autre part, les valeurs de modèle HT pour la masse volumique, la pression totale et le nombre de Mach  $M_2$  sont plus grands par rapport aux valeurs de modèle GP, par contre ils sont moins faibles par rapport aux valeurs de modèle GP pour le cas de la température, la pression et l'entropie. Ce qui est conforme avec ce qu'on a trouvé dans les figures 4.7, 4.9, 4.11, 4.13, 4.15, 4.17.

Les figures ; 4.20 pour la pression et 4.23 pour le nombre de Mach  $M_1$ , nous montrent d'une part que le choc produit dans le gaz parfait est plus fort par rapport à celui qui est

produit dans le gaz à haute température, et d'autre part plus la température totale augmente plus l'intensité de choc oblique produit dans le gaz à haute température devient moins faible.

La figure 4.18 pour la température, permet de mieux voir l'influence de la température totale sur la régression du rapport de température statique à travers le choc dans le gaz à haute température, en raison de la transformation de l'énergie thermique en énergie de vibration qui va s'exciter de plus en plus avec l'augmentation de la température totale.

Le choix de l'angle de déviation  $\psi$  et du nombre de Mach  $M_1$  influe sur la variation des paramètres thermodynamiques du modèle HT par rapport au modèle GP, tel que pour la pression totale pour  $M_1=5.00$  et  $\psi=20^\circ$ , les valeurs du modèle HT sont inférieures à celles du modèle GP, mais lorsque  $\psi$  approche de sa valeur maximale ( $\psi=41^\circ$ ), les valeurs du modèle HT reviennent plus grandes à celles du modèle GP [Appendice B]. En conséquent, l'entropie subit les mêmes influences du choix de  $M_1$  et de  $\psi$ .

Le choix de l'angle de déviation  $\psi$  et du nombre de Mach  $M_1$  influe aussi sur les valeurs initiales des paramètres thermodynamiques correspond à  $T_0=0$  K, tel qu'ils sont présentés dans le tableau 4.6.

Tableau 4.6 : L'influence de  $M_1$  et de  $\psi$  sur les paramètres thermodynamiques correspond à  $T_0=0$  K.

	$M_1=3.00$ $\Psi=5^\circ$	$M_1=3.00$ $\Psi=24^\circ$	$M_1=5.00$ $\Psi=5^\circ$	$M_1=5.00$ $\Psi=41^\circ$
$T_2/T_1$	1,1151	1,7225	1,1920	4,9746
$\rho_2/\rho_1$	1,3044	2,7194	1,5159	4,8150
$P_2/P_1$	1,4547	4,6845	1,8070	23,9532
$P_{02}/P_{01}$	0,9946	0,7031	0,9792	0,0890
$S_{12}/R$	0,0053	0,3521	0,0209	2,4187
$M_2$	2,7489	1,7714	4,4911	1,0251

On remarque qu'à basse température totale, l'allure des graphes des deux modèles GP et HT ont les mêmes valeurs, là le modèle HT peut être considéré comme GP (c.à.d. le gaz thermiquement parfait caloriquement imparfait peut être considéré comme un gaz thermiquement parfait caloriquement parfait). Mais à partir d'une certaine valeur de  $T_0$  le modèle HT commence à se séparer du modèle GP, bien que ce point de séparation dépend du

choix de  $M_1$  et de  $\psi$  d'une manière à ce que la valeur de ce point  $T_0$  diminue lorsque  $\psi$  augmente pour la même valeur de  $M_1$ , et elle croit lorsque  $M_1$  augmente pour la même valeur de  $\psi$ .

#### 4.3. 3.Résultats en fonction de nombre de Mach amont $M_1$

Les figures de 4.24 à 4.29 présentent la variation des paramètres thermodynamiques (la température, la masse volumique, la pression, la pression totale, l'entropie et le nombre de Mach  $M_2$ ) en fonction de nombre de Mach  $M_1$  pour le cas du gaz parfait et le cas du gaz à haute température lorsque ( $T_0=1000$  K,  $T_0=2000$  K,  $T_0=3000$  K), pour des angles de déviation  $\psi$  donnés (cas de  $\psi = 3^\circ$  et cas de  $\psi = 22^\circ$ ) afin de mieux mettre l'accent sur l'influence du choix de l'angle de déviation de dièdre.

D'après ces figures on remarque que :

- Tous les paramètres croissent avec l'augmentation de  $M_1$  sauf la pression totale qui diminue.
- Les valeurs du modèle HT, pour la masse volumique, la pression totale et le nombre de Mach  $M_2$  sont plus grands par rapport aux valeurs du modèle GP, par contre ils sont moins faible par rapport aux valeurs du modèle GP pour la température, la pression et l'entropie. Chose qui est conforme avec ce qu'on a trouvé dans les figures 4.7, 4.9, 4.11, 4.13, 4.15, 4.17 qui sont en fonction de  $\psi$  et les figures 4.18, 4.19, 4.20, 4.21, 4.22, 4.23 qui sont en fonction de  $T_0$ .
- la figure 4.25 pour la masse volumique démontre la compressibilité de l'écoulement, vue la variation de la masse volumique avec le nombre de Mach  $M_1$ .
- Les figures 4.26 (a) et 4.26 (b) pour la pression, montrent explicitement que pour un angle de déviation  $\psi$  donné, plus le nombre de Mach  $M_1$  augmente, plus l'intensité du choc oblique faible augmente aussi.
- Les figures ; 4.26 pour la pression et 4.29 pour le nombre de Mach  $M_2$  nous montrent que le choc produit dans le gaz parfait et plus fort par rapport à celui produit dans le gaz à haute température.
- Le point le plus important dans cette présentation est le choix de l'angle de déviation  $\psi$  qui influe sur la variation des paramètres thermodynamiques, surtout sur la masse volumique

(figure 4.25) et le nombre de Mach  $M_2$  (figure 4.29) de façon que à faible valeur de  $\psi$  (cas de  $\psi = 3^0$ ), la différence entre le gaz parfait et le gaz à haute température est négligeable (même à nombre de Mach  $M_1$  élevé), alors que pour une grande valeur de  $\psi$  (cas de  $\psi = 22^0$ ), il existe une différence entre les modèles GP et HT et cette différence sera remarquée de plus en plus avec l'augmentation du nombre de Mach  $M_1$ . Bien que l'influence de  $\psi$  sur la pression totale (figure 4.27) a un effet contraire au deux derniers cas, de manière que lorsque  $\psi$  augmente (cas de  $\psi = 22^0$ ) la différence entre les deux modèles est négligeable de plus en plus avec l'augmentation de  $M_1$ .

Les tableaux 4.7 et 4.8 montrent l'effet de  $\psi$  sur les paramètres thermodynamiques pour le cas du gaz parfait et le cas du gaz à haute température ( $T_0=3000$  K) pour un nombre de Mach  $M_1= 3.00$ .

Tableau 4.7 : Présentation des paramètres thermodynamiques pour le cas de  $\psi = 3^0$  et

$M_1= 3.00$ .

	$T_2/T_1$	$\rho_2/\rho_1$	$P_2/P_1$	$P_{02}/P_{01}$	$S_{12}/R$	$M_2$
GP ( $\gamma=1.402$ )	1,0680	1,1764	1,2565	0,9987	0,0012	2,8477
HT ( $T_0=3000$ K)	1,0536	1,1772	1,2403	0,9989	0,0010	2,8705

Tableau 4.8 : Présentation des paramètres thermodynamiques pour le cas de  $\psi = 22^0$  et

$M_1= 3.00$ .

	$T_2/T_1$	$\rho_2/\rho_1$	$P_2/P_1$	$P_{02}/P_{01}$	$S_{12}/R$	$M_2$
GP ( $\gamma=1.402$ )	1,6401	2,5689	4,2134	0,7504	0,2870	1,8830
HT ( $T_0=3000$ K)	1,4742	2,6579	3,9184	0,7591	0,2755	2,0252

#### 4.4. Discussions des résultats de l'onde de choc normale

Dans cette deuxième partie, on présente les résultats de l'onde de choc normale qui n'est qu'un cas spécial de l'onde de choc oblique.

Les figures de 4.30 à 4.41 présentent successivement l'évolution des paramètres thermodynamiques en fonction du nombre de Mach  $M_1$  et de la température totale  $T_0$ .

Les figures 4.30 et 4.31 présentent successivement l'évolution du rapport de température  $T_2/T_1$  en fonction du nombre de Mach  $M_1$ , et de la température totale  $T_0$  où on remarque :

- La température  $T_2$  après le choc croît avec l'augmentation du nombre de Mach  $M_1$ .
- Les deux modèles (GP et HT) gardent les mêmes valeurs jusqu'à une température totale de 240 K où ils commencent à se séparer l'un de l'autre.
- Pour un nombre de Mach  $M_1$  donné, le gaz à haute température possède une température  $T_2$  après le choc moins faible de celle du gaz parfait, et plus la température totale augmente plus la température  $T_2$  diminue, ce qui explique par la transformation de l'énergie thermique en énergie de vibration dans le gaz à haute température.

Les figures 4.32 et 4.33 présentent successivement l'évolution du rapport de la masse volumique  $\rho_2/\rho_1$  en fonction du nombre de Mach  $M_1$ , et de la température totale  $T_0$  où on peut constater que :

- La masse volumique après le choc s'élève avec l'augmentation du nombre de Mach  $M_1$ .
- Le gaz à haute température possède de grands valeurs de masse volumique par rapport au gaz parfait de manière à ce que la masse volumique s'élève de plus en plus avec l'augmentation de la température totale.

L'entropie dans les figures 4.38 et 4.39 suit la même progression.

Les figures 4.34 et 4.35 présentent successivement l'évolution du rapport de pression  $P_2/P_1$  en fonction du nombre de Mach  $M_1$ , et de la température totale  $T_0$  où on peut voir que :

- La pression après le choc croît avec l'augmentation du nombre de Mach  $M_1$  ainsi le choc normal devient de plus en plus fort.

- Le rapport de pression à travers le choc normal atteint de grandes valeurs par rapport à ce qu'on a vu précédemment dans le choc oblique, ce qui est traduit par la grande intensité du choc normal.

Le tableau 4.9 présente les rapports de pressions pour le choc oblique faible et fort et le choc normal produit dans le gaz à haute température lorsque  $T_0=2000$  K.

Tableau 4.9 : Présentation des rapports de pressions  $P_2/P_1$  pour le choc oblique et le choc normal.

	Choc Oblique $\psi=3^\circ$		Choc Oblique $\psi=22^\circ$		Choc Normal
	Faible	Fort	Faible	Fort	
$M_1= 2.00$	1,1701	4.4413	2,9386	4.0981	4.648
$M_1= 3.00$	1,2465	10.3562	4,0116	10.1788	10.446
$M_1= 4.00$	1,3376	18.8558	5,7518	18.6627	18.913
$M_1= 5.00$	1.4353	29.7894	7.9772	29.54966	30.141

-Le rapport de pression croît avec l'augmentation de la température totale qui atteint

$T_0 = 1300$  K puis il commence à diminuer de plus en plus. Là, on peut dire que le choc normal produit dans le gaz à haute température est devenu de plus en plus fort jusqu'à  $T_0 = 1300$  K et à partir de là, il commence à devenir moins fort, et une fois que la température totale atteint 2100 K, il devient moins fort par rapport au choc produit dans le gaz parfait.

Les figures 4.40 et 4.41 présentent successivement l'évolution du nombre de Mach aval  $M_2$  en fonction du nombre de Mach  $M_1$ , et de la température totale  $T_0$ , ici on voit que :

-Le nombre de Mach  $M_2$  après le choc normal diminue de plus en plus avec l'augmentation du nombre de Mach  $M_1$ .

-Le choc normal possède toujours un nombre de Mach  $M_2$  subsonique ( $M_2 < 1$ ) contrairement au choc oblique faible.

Le tableau 4.10 présente le nombre de Mach  $M_2$  pour le choc oblique faible et le choc normal produit dans le gaz à haute température lorsque  $T_0=2000$  K.

Tableau 4.10 : Présentation du nombre de Mach  $M_2$  pour le choc oblique et le choc normal.

	Choc Oblique $\psi=3^\circ$		Choc Oblique $\psi=22^\circ$		Choc Normal
	Faible	Fort	Faible	Fort	
$M_1= 2.00$	1,9031	0.5666	1,1886	0.7347	0.5644
$M_1= 3.00$	2,8647	0.4577	1,9964	0.5266	0.4563
$M_1= 4.00$	3,7950	0.4169	2,5484	0.4711	0.4156
$M_1= 5.00$	4.6998	0.3981	2.9495	0.4469	0.3970

-Le gaz à haute température possède de faibles valeurs du nombre de Mach  $M_2$  par rapport au gaz parfait, ce qui implique que le choc normal produit dans le gaz à haute température entraîne une décélération de l'écoulement plus importante que celle produite dans le gaz parfait.

La pression totale dans les figures 4.36 et 4.37 suit la même progression.

Il est à noter ici, que pour un nombre de Mach amont donné, on constate que le rapport de pression totale est plus grand dans le cas du choc oblique que dans le cas du choc droit.  
[23]

Le rapport de pressions totale est directement relié au rendement d'un moteur, plus ce rapport est élevé, plus le rendement est fort.

Cette constatation est à l'origine des structures des entrées d'air des moteurs d'avions.

#### 4.5. Calculs d'erreurs relatives du modèle GP en fonction du nombre de Mach $M_1$

Dans cette partie, on s'intéresse au calcul de l'erreur relative donné par le modèle du gaz parfait par rapport au modèle du gaz à haute température, pour le cas du choc oblique faible et le choc normal, dont le but de comparer les deux modèles et constater la différence entre eux.

L'erreur relative est présentée pour chaque paramètre thermodynamique (la température, la masse volumique, la pression, la pression totale, l'entropie et le nombre de Mach  $M_2$ ) en fonction du nombre de Mach  $M_1$ , pour différents valeurs de température totale ( $T_0=1000$  K,  $T_0=2000$  K,  $T_0=3000$  K), et pour un angle de déviation  $\psi$  donné pour le cas du choc oblique (cas de  $\psi = 3^\circ$  et cas de  $\psi = 22^\circ$ ) afin de mieux voir l'influence du choix de l'angle de déviation de dièdre.

##### 4.5.1. Cas de choc oblique faible

Les figures de 4.42 à 4.47 sont pour l'erreur de choc oblique faible où on remarque que l'erreur relative dépend de  $T_0$ ,  $M_1$  et de  $\psi$ , de manière que:

-Plus la température totale augmente, plus l'erreur entre le gaz parfait et le gaz à haute température augmente (le cas de  $T_0 = 3000$  K possède l'erreur la plus grande pour tout les paramètres).

La croissance de l'erreur avec l'augmentation de la température totale a pour explication : Le gaz n'est plus parfait (calloriquement parfait) et plus  $T_0$  augmente plus il devient calloriquement imparfait.

-Pour le cas du gaz à température totale  $T_0=1000$  K, à grands nombres de Mach  $M_1$  et à faible angle de déviation, l'erreur relative atteint le zéro, ce qui implique que ce gaz dans ces conditions est considéré comme un gaz parfait.

-à faible nombres de Mach  $M_1 < 1.50$  et à température totale donnée, l'erreur diminue.

-Plus l'angle de dièdre  $\psi$  augmente plus l'ordre de l'erreur augmente pour le même paramètre tel pour la température, pour le cas de  $\psi=3^\circ$  l'erreur maximale est 1.7% tandis que pour le

cas de  $\psi=22^0$  l'erreur atteint 11.5 %, que pour le nombre de Mach  $M_2$  lorsque  $\psi=3^0$  l'erreur maximale est 1.05% et lorsque  $\psi =22^0$  elle atteint 11%.

-Vue la variation du modèle HT par rapport au modèle GP pour le cas de la pression totale (Appendice B), l'erreur relative possède une allure instable et par conséquent l'entropie suit la même progression.

Les tableaux 4.11 et 4.12 montrent l'effet de l'angle  $\psi$  sur l'erreur pour le cas de  $T_0=1000$  K,  $T_0=2000$  K et  $T_0=3000$  K pour un nombre de Mach  $M_1= 3.00$ .

Tableau 4.11: Présentation de l'erreur des paramètres thermodynamiques pour le cas de  $\psi = 3^0$  et  $M_1= 3.00$ .

	$\zeta (T_2/T_1)\%$	$\zeta (\rho_2/\rho_1)\%$	$\zeta (P_2/P_1)\%$	$\zeta(P_{02}/P_{01})\%$	$\zeta (S_{12}/R)\%$	$\zeta (M_2)\%$
HT ( $T_0=1000$ K)	0,1050	0,0080	0,0969	2,0753E-4	0,1698	0,1185
HT ( $T_0=2000$ K)	0,8436	0,0426	0,8006	9,1685E-4	0,7571	0,5946
HT ( $T_0=3000$ K)	1,3644	0,0634	1,3002	0,0149	13,9341	0,7951

Tableau 4.12: Présentation de l'erreur des paramètres thermodynamiques pour le cas de  $\psi = 22^0$  et  $M_1= 3.00$ .

	$\zeta (T_2/T_1)\%$	$\zeta (\rho_2/\rho_1)\%$	$\zeta (P_2/P_1)\%$	$\zeta(P_{02}/P_{01})\%$	$\zeta (S_{12}/R)\%$	$\zeta (M_2)\%$
HT ( $T_0=1000$ K)	1,6674	0,7210	0,9343	0,2317	0,8149	1,8735
HT ( $T_0=2000$ K)	7,8377	2,6043	5,0292	0,8391	3,0240	5,6782
HT ( $T_0=3000$ K)	11,2501	3,3467	7,5268	1,1464	4,1844	7,0221

En résumer, l'erreur entre les deux modèles s'élève non seulement avec l'augmentation de la température totale  $T_0$  mais aussi avec l'augmentation de l'angle de dièdre  $\psi$ .

#### 4.5.2. Cas de choc normal

La figure 4.48 résume l'erreur relative de choc normal, et démontre que l'erreur relative dépend de  $T_0$  et de  $M_1$  de façon à ce que :

-Plus la température totale augmente, plus l'erreur augmente.

-à faibles nombres de Mach  $M_1$  et à faible température totale l'erreur est petite.

- Vue la variation du modèle HT par rapport au modèle GP, pour le cas de la pression statique (voir figure 4.6), l'erreur relative possède une allure instable.

Le tableau 4.13 montre l'effet de la température totale  $T_0$  sur l'erreur pour le cas de  $T_0=1000$  K,  $T_0=2000$  K et  $T_0=3000$  K pour un nombre de Mach  $M_1= 3.00$ .

Tableau 4.13 : Présentation de l'erreur des paramètres thermodynamiques pour le cas  $M_1= 3.00$ .

	$\zeta(T_2/T_1)\%$	$\zeta(\rho_2/\rho_1)\%$	$\zeta(P_2/P_1)\%$	$\zeta(P_{02}/P_{01})\%$	$\zeta(S_{12}/R)\%$	$\zeta(M_2)\%$
HT ( $T_0=1000K$ )	4	5.04	1.18	4.68	3.82	1.07
HT ( $T_0=2000K$ )	12.39	11.24	2.44	13.95	10.51	4.16
HT ( $T_0=3000K$ )	17.06	13.48	1.28	17.96	12.74	5.47

#### 4.6. Validation des résultats

Dans cette dernière partie on a mis l'accent sur la validation de nos résultats avec celles de la référence [1], [2] et [3] de façon à les comparer pour chaque paramètre, en les superposant dans la même figure comme suit :

- Pour le diagramme  $\psi$ - $\sigma$ - $M$  du gaz à haute température lorsque  $T_0=3000$  K

La figure 4.49 présente la validation de diagramme  $\psi$ - $\sigma$ - $M$  avec la référence [1], [2] pour le gaz à haute température lorsque  $T_0=3000$  K, ainsi que  $T_0=1000$  K, pour un nombre de Mach  $M_1=1.2, 1.50, 2.00, 3.00$  et  $5.00$ .

- Pour les paramètres thermodynamique de choc faible en fonction de  $M_1$  pour  $T_0=3000$  K

- Lorsque l'angle de déviation de dièdre est une donnée ( $\psi=5^\circ$ )

Les figures de 4.50 à 4.53 présentent successivement la validation des paramètres thermodynamiques (la température, la masse volumique, la pression et le nombre de Mach  $M_2$ ) avec la référence [1] en fonction de nombre de Mach  $M_1$  du gaz à haute température pour  $T_0=3000$  K et  $\psi=5^\circ$

- Lorsque l'angle de choc est une donnée ( $\sigma=30^\circ$  et  $\sigma=50^\circ$ )

Les figures de 4.54 à 4.57 présentent la validation des paramètres thermodynamiques (la température, la masse volumique, la pression, la pression totale et le nombre de Mach  $M_2$ ) avec la référence [4] en fonction du nombre de Mach  $M_1$  du gaz à haute température pour  $T_0=3000$  K, cas de  $\sigma=30^\circ$  et  $\sigma=50^\circ$ .

D'après ces figures, on remarque que nos résultats sont conformes à celles de la référence [1], [2] et [3].

## CONCLUSION

L'utilisation du modèle GP dans les écoulements compressibles est limitée dans une marge étroite de la température et de nombre de Mach amont, où il doit être  $T_0 < 1000$  K pour quelque soit le nombre  $M_1$  ou bien  $M_1 < 2$  pour une marge étendue de la température totale jusqu'à 3000 K. Au dessus de ces hypothèses, l'erreur du modèle GP sera plus de 5% et augmente de plus en plus avec l'augmentation de  $T_0$  et de  $M_1$ . Dans ce cas, on doit prendre en considération le gaz thermiquement parfait (gaz à haute température) et utiliser le modèle HT présenté dans ce travail.

Le modèle HT sert à calculer les paramètres thermodynamiques à travers l'onde de choc oblique dans le gaz à haute température pour un angle de dièdre donné qui a une grande influence sur :

- La nature de variation des paramètres thermodynamiques en fonction de  $T_0$ .
- L'ordre de ces paramètres pour le cas du modèle HT et pour le cas du modèle GP.
- L'ordre de l'erreur du modèle GP par rapport au modèle HT pour le choc faible.

Les résultats obtenus ont un grand intérêt scientifique tel que les diagrammes  $\psi$ - $\sigma$ - $M$  à haute température où on a démontré que pour  $M_1$  donné l'intervalle d'existence d'une onde de choc oblique attaché est plus grand par rapport au gaz parfait.

Cette étude nous a permis d'éclaircir la différence entre le choc produit dans un gaz parfait et celui qui produit dans un gaz à haute température de façon à ce que :

- La température à travers le choc dans le gaz HT est moins faible que celle dans le gaz GP.
- L'onde de choc oblique dans le gaz parfait entraîne une décélération de l'écoulement plus importante que dans un gaz à haute température. Par contre L'onde de choc normale dans le gaz à haute température entraîne une décélération de l'écoulement plus importante que dans un gaz parfait.
- Le choc oblique produit dans le gaz parfait est plus fort que celui produit dans le gaz à haute température.
- Le choc droit produit dans le gaz à haute température est plus fort que celui produit dans le gaz parfait juste pour une marge aléatoire de la température totale, dépendante du nombre de Mach  $M_1$  choisi.

La validation de nos résultats avec les références [1], [2] et [3] donne des bons résultats, ce qui démontre sans aucune équivoque et concrètement la fiabilité de notre modèle mathématique HT et nos recherches.

En fin, on suggère :

- L'étude de la nature de variation de la pression statique et la pression génératrice sur l'onde de choc oblique à haute température.
- L'effet de la pression totale sur l'onde de choc oblique à haute température.
- L'application de modèle HT sur des autres substances (le cas traité ici est l'air).
- Vérification des résultats avec la CFD.
- Vérification des résultats avec l'expérimentale.
- Calculs de l'écoulement supersonique à haute température autour d'un cône (3D).

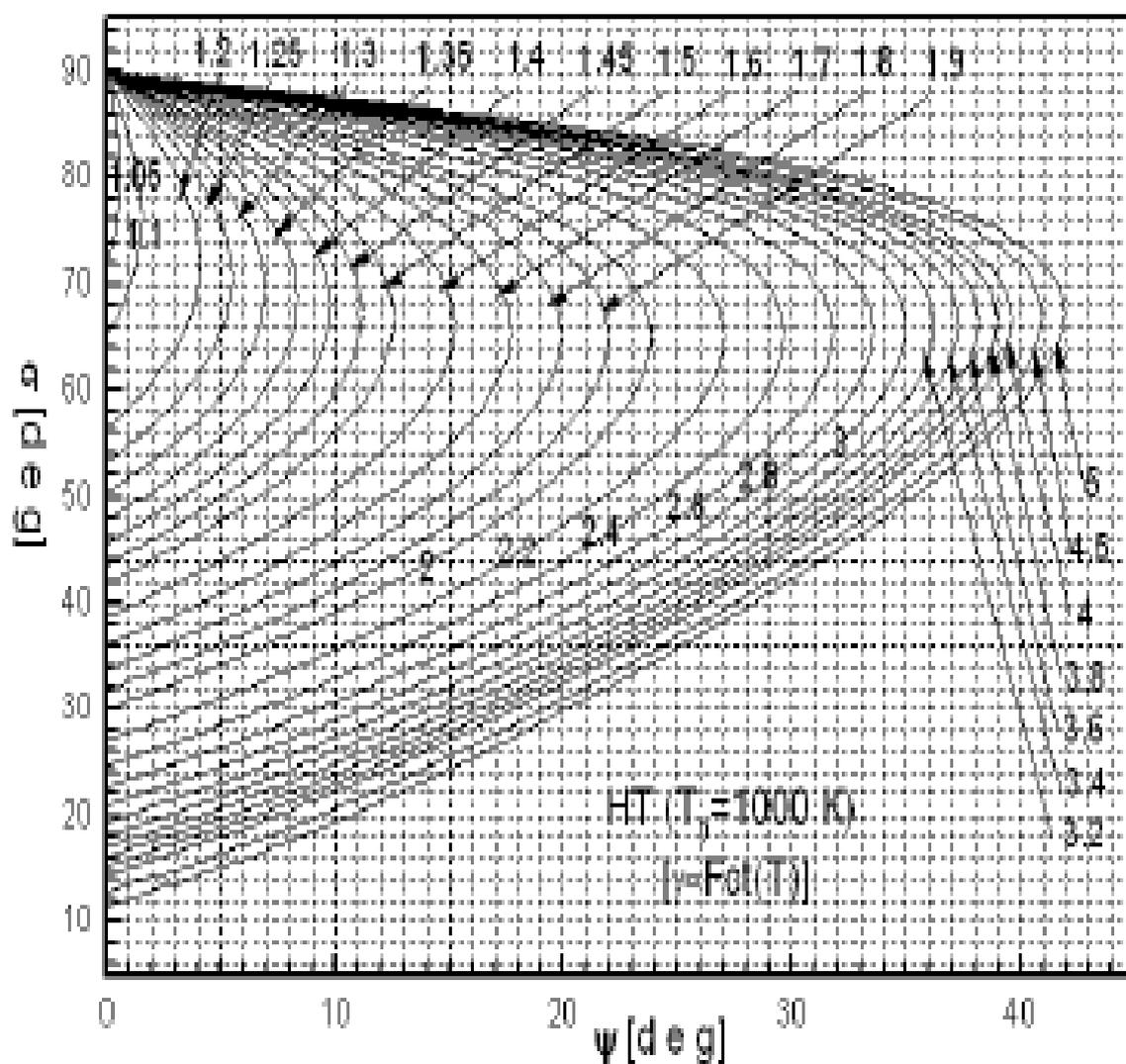
**APPENDICE A**  
**LISTE DES SYMBOLES ET ABREVIATIONS**

$a$	La vitesse de son, la constante de l'équation de Vander Waals
$a_i$	Les coefficients de la fonction polynomiale de la chaleur spécifique $C_p$
$A_i$	Les coefficients de la fonction polynomiale de la chaleur spécifique $C_p$ de [1]
$b$	La 2 <sup>ème</sup> constante de l'équation de Vander Waals
$c_i$	Les coefficients de la fonction de l'enthalpie
$C_p$	La chaleur spécifique à pression constante
$C_v$	La chaleur spécifique à volume constant
$E$	L'énergie de molécule
$F$	La fonction de la température
$F_\rho$	La fonction de rapport de masse volumique
$H$	L'enthalpie
$h$	La constante de Planck
$K$	La constante de Boltzmann
$M$	Le nombre de Mach
$n$	Le nombre d'itérations

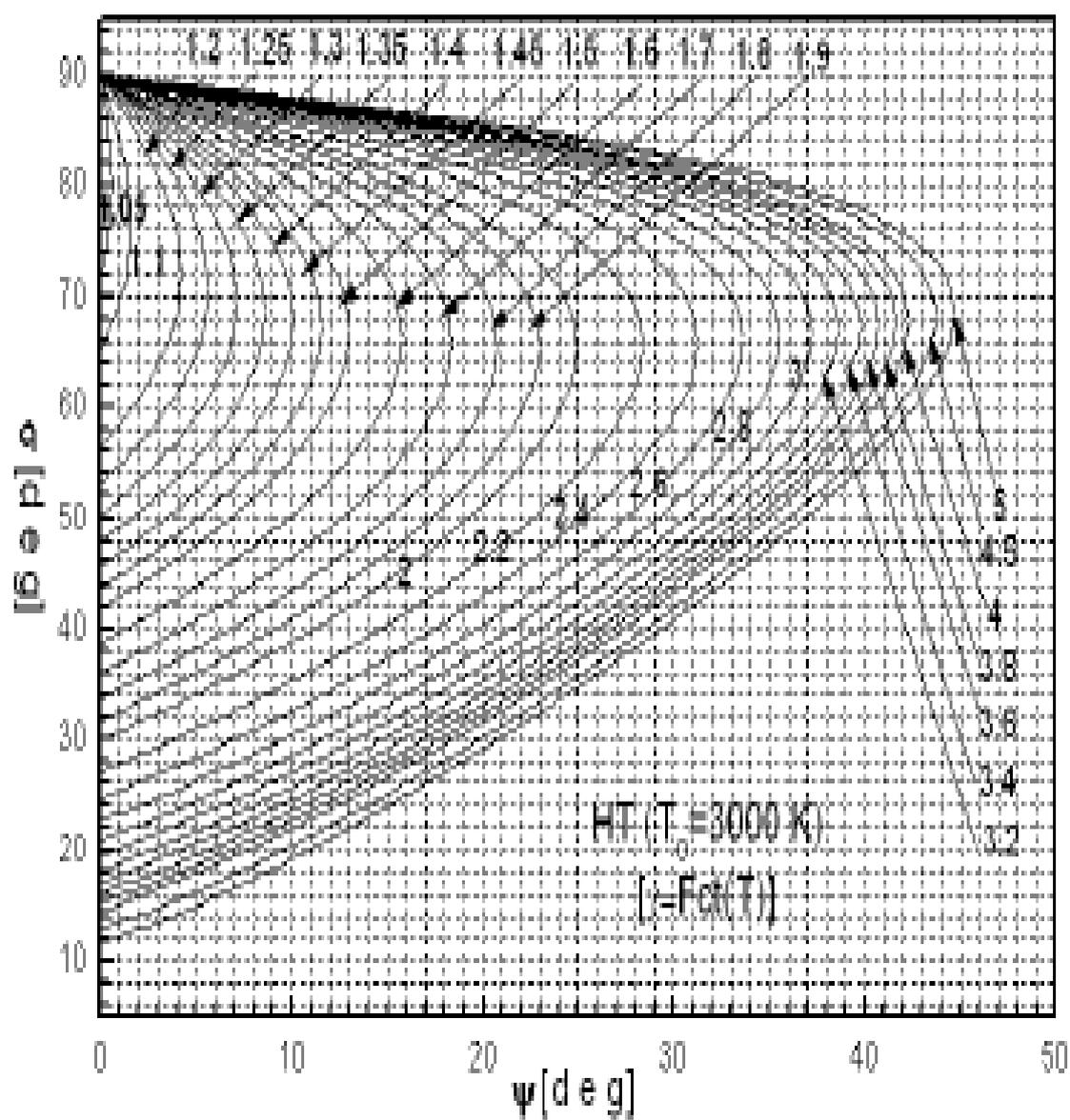
$N$	Le nombre d'AVOGADRO
$m$	Le degré de liberté
$P$	La pression
$R$	La constante des gaz
$S$	L'entropie
$T$	La température
$\bar{T}$	La température limite
$u$	La composante normale de la vitesse
$V$	La vitesse
$v$	Le volume
$w$	La composante tangentielle de la vitesse
$x$	Le rapport d'un paramètre thermodynamique à travers le choc
$X, Y, Z$	Les axes de repère galiléen
$\gamma$	Le rapport des chaleurs spécifique $\frac{C_p}{C_v}$
$\varepsilon_x$	L'erreur relative
$\mu$	L'angle de Mach
$\nu$	La fréquence caractéristique de la vibration
$\rho$	La masse volumique
$\sigma$	L'angle de choc
$\psi$	L'angle de déviation de dièdre
$\Delta$	Le discriminateur

$\Theta$	La température caractéristique
0	Les conditions totales (point d'arrêt)
1	Le point de référence de l'écoulement amont (avant le choc)
2	Le point de référence de l'écoulement aval (après le choc)
i	Un point de référence
*	Les conditions critiques
n	Direction normale
c	Cône
Max	Maximum
M	Moyenne
trans	translation
rot	rotation
vib	vibration
1-D	Unidirectionnelle
2-D	Bidimensionnelle
HT	Gaz à haute température
GP	Gaz parfait
NASA	National Aeronautics and Space Administration
TPG	Thermally perfect gas
cte	Constant
Fct	Fonction
Deg	Degré

## APPENDICE B

Diagramme  $\psi$ - $\sigma$ - $M$  pour un gaz à haute température

## APPENDICE C

Diagramme  $\psi$  -  $\sigma$  -  $M$  pour un gaz à haute température

## RÉFÉRENCES

1. Kenneth E. Tatum, «Computation of Thermally Perfect Properties of Oblique Shock Waves», NASA Contractor Report 4749, (August 1996).
2. Dietrich Rudolf Lampe, «Thermally Perfect Calorically Imperfect Taylor- Maccoll Flow», A thesis for the Master of Science, University of Oklahoma, (1994).
3. George Emanuel, «Analytical Fluid Dynamics», 2nd ed, by CRC Press LLC Boca Raton, (2000), 257 p.
4. Toufik Zebbiche, «Effect of the stagnation temperature on the normal shock wave», Journal of Computational Methods in Sciences and Engineering 9 (2009).
5. T. Zebbiche and Z. Youbi, «Effect of stagnation temperature on supersonic flow parameters Application for air in nozzles», The Aeronautical Journal, (January 2007).
6. P.G. Hill and C.R. Peterson, «Mechanics and Thermodynamics of Propulsion», Addition-Wesley Publishing Company Inc., New York, (1965).
7. John David. Anderson, Jr., «Hypersonic and High Temperature Gas Dynamics», McGraw-Hill Book Company New York, (1989).
8. John D. Anderson, Jr., «Modern Compressible Flow with Historical Perspective», second edition, McGraw-Hill Book Company New York, (1990).
9. Maurice J. Zucrow and Joe D. Hoffman, « Gas Dynamics» volume 1, by John Wiley & Sons, Inc. New York, (1976), 57p.
10. H.W. Liepmann and A. Roshko «Elements of Gas Dynamics», John Wiley & Sons, Inc. New York, (1957), 89p.
11. Robert D. Zucker and Oscar Biblarz, «Fundamentals of Gas Dynamics», Second Edition, by John Wiley & Sons, Inc. Hoboken, New Jersey (NJ), (2002), 319p.

12. Michel A.Saad, «Compressible Fluid Flow», by Prentice-Hall, Inc.Englewood Cliffs, New Jersey (NJ), (1985), 314p.
13. Patrick H.Oosthuizen and William E.Carscallen, «Compressible Fluid Flow», by McGraw-Hill Companies. New York, (1985), 440-443.
14. Genick Bar–Meir, «Fundamentals of Compressible Fluid Mechanics», Free Software Foundation, Inc.Boston, (November 2002), 337p.
15. Ya.B.Zeldovich and Yu.P.Raizer, « Physics of Shock Waves and High Temperature Hydrodynamic Phenomena», volume 1, by Academic Press INC. New York, (1966), 178p.
16. M. Havermann, J. Haertig, C. Rey, and A. George, «Application of Particle Image Velocimetry to High-Speed Supersonic Flows in a Shock Tunnel».
17. Ascher H.Shapiro, « The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow», Volume1,The Ronald Press Company New York, (1953), 545p.
18. André L.Jaumotte, «Chocs et ondes de choc», (1973).
19. G.A.Bird, «Molecular Gas Dynamics and The Direct Simulation of Gaz Flows»,Clarendon Press Oxford,(1994),25p.
20. B. Démidovitch and I. Maron, «Eléments de Calcul Numérique», Editions Mir, Moscow, 1987.
21. R. Comolet, «Mécanique Expérimentale des Fluides, Statique et Dynamique des Fluides Non Visqueux», Tome 1, 3éme Edition, Masson, (1979).
22. Frank M. White, «Chapter 9 Compressible Flow», (November 2000), 623-625.  
<http://www.nd.edu/~pdunn/www.ame538/Chapt09.pdf>.
23. Klaus. Oswatitsch, « Gas Dynamics», by Academic Press Inc , New York, (1956), 366-368.
24. John D. Anderson, «Fundamentals of Aerodynamics», Third Edition, McGraw-Hill New York, (2001).
25. Giovanni. Sanna and Guiseppe. Tomassetti, « Introduction to Molecular Beams Gas Dynamics», by Imperial College Press, (2005).
26. Wolfgang Dembroder, «Molecular Physics Theoretical Principles and Experimental Methods», Germany, (2005).
27. E. Bright Wilson, J. C. Decius and Paul C. Cross, «Molecular Vibrations The Theory Of Infrared And Raman Vibrational Spectra», (1955).

28. Benoit Bottin, «Thermodynamic properties of arbitrary perfect gas mixtures at low pressures and high temperatures», Elsevier Science Ltd Aerospace Sciences 36, (2000), 4-5.
29. Dean Baird, «PhyzGuide: Specific Heat», (2007)
30. Alex, «Molar Specific Heats of Other Materials», (2008).
31. D. G. Fletcher, «Fundamentals of Hypersonic Flow-Aerothermodynamics», *Rto-En-Avt-116*, (May 2004).
32. Bernard Grossman, «Fundamental Concepts of Real Gasdynamics», Lecture Notes No. 3 (January 2000), 10-13.
33. Pietro Rini, «Analysis of differential diffusion phenomena in high enthalpy flows, with application to thermal protection material testing in ICP facilities », Thèse de Doctorat, University Libre de Bruxelles, (January 2006), 74-78.
34. Mabrouk Benchikh, «Choix d'un Facteur de Couplage Vibration-Dissociation dans un Ecoulement à Haute Température derrière une Onde de Choc Normale», Mémoire de Magister, Université de Blida, (Avril 2006), 2p.
35. «High Temperature Effects», ae6020\_14, (2007).
36. Richard Fitzpatrick, «Thermodynamics & Statistical Mechanics: An intermediate level course», University of Texas at Austin, (2006), 135-136.
37. Kip Thorne, «Compressible and Supersonic Flow», Pasadena CA, (February 2005), 3-5.
38. «Compressible Fluid Flow», Queen's University, (2007), 3p.
39. Mauro Valorani, Francesco Nasuti, Marcello Onofri and Carlo Buongiorno, «Optimal Supersonic Intake Design for Air Collection Engines (Ace) », Elsevier Science, Acta Astronautica Vol. 45, No. 12, (August 1999).
40. George Turrell, «Gas Dynamics: Theory and Applications», By John Wiley & Sons, Ltd. UK, (April 1997), 29p.
41. Thomas.B Gatski and Jean-Paul Bonnet, «Compressibility, Turbulence and High Speed Flow», Elsevier Ltd, (2009), 214-215.
42. B.W.Imerie, «Compressible Fluid Flow», By Butterworth and Co Publishers Ltd, (1973).
43. Hilary Ockendon and John R. Ockendon, «Waves and Compressible Flow», Springer-Verlag New York, Inc, Texts in applied mathematics vol. 47, (2004).
44. Adriana Nastase, «Computation of Supersonic Flow over Flying Configurations», Elsevier Ltd, (2008), 20-26.

45. G. Ben-Dor, «Shock Wave Reflection Phenomena», Second Edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2007), 15-17.
46. R. Courant, «Supersonic Flow and Shock Waves», Confidential, National Defense Research Committee.
47. R. Courant and K. O. Friedrichs, «Supersonic Flow and Shock Waves», Interscience Publishers, Inc, New York, (1948).
48. Vladimir Lunev, «Real Gas Flows with High Velocities », Taylor & Francis Group, (2009).
49. Narayanan Komerath, «Compressible Flow», Georgia Institute of Technology Atlanta, (2008).
50. Doe Fundamentals Handbook, «Thermodynamics, Heat Transfer and Fluid Flow», U.S. Department Of Energy Washington, (June 1992).
51. Iain D. Boyd and Graham V. Candler, «Introduction to Hypersonic Aerothermodynamics», University of Michigan and Minnesota, (2007).
52. Ascher H. Shapiro, « The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow», Volume 2, The Ronald Press Company New York, (1954).
53. S. M. Yahya, «Gas Tables for Compressible Flow Calculations», Fifth Edition, New Age International Publishers New Delhi, (2006).
54. Milton Van Dyke, «Album of Fluid Motion», The Parabolic Press California, (1982), 138p.
55. K. Srihari, « Molecular Vibrations», Department of Chemistry IIT Kanpur, (March 2007).
56. Van-Oanh NGUYEN-THI, «Visualisation des Vibrations de Molécules», Université Paris-Sud XI, (2006).
57. Robert Tosello, «Ondes de Choc – Ondes de Détonation», (2006).
58. E. Bilgen, «Ecoulement Compressible», Chapitre 9, (2005).
59. Jean Délerly, « Méthodes de Mesure en Aérodynamique», Document Onera, (2004).
60. L. M. Milne Thomson, «Theoretical Aerodynamics», Fourth Edition, Dover Publications New York, (1966).
61. P. Agati and N. Mattera, «Mécanique des Fluides, Thermodynamique», Dunod Paris, (1996).
62. Jean Délerly, « Moyens D'essai et Souffleries Aérodynamiques », Document Onera, (2004).

63. T. Zebbiche and Z. Youbi, «Supersonic Flow Parameters at High Temperature, Application for Air in Nozzles», DGLR-2005-256, Germany.
64. T. Zebbiche and Z. Youbi, «Supersonic Two-Dimensional Minimum Length Nozzle Design at High Temperature. Application for Air», AIAA Joint Propulsion Conference & Exhibit, California, (July 2006).
65. T. Zebbiche, «Supersonic Axisymmetric Minimum Length Nozzle Conception at High Temperature», AIAA Thermophysics Conference, Washington, (June 2008).
66. Ryhming Inge, L. «Dynamique des Fluides, Presses Polytechniques Romandes», Lausanne, Suisse, (1984).
67. Fletcher, C.A.J. «Computational Techniques for Fluid Dynamics: Specific Techniques For Different Flow Categories», Springer, Germany, (1988).
68. Ralston and P. Rabinowitz, «A First Course in Numerical Analysis», McGraw-Hill Book Company, 1985.
69. D.H. McLain, «Drawing contours from arbitrary data points», The Computer Journal **17** (1974), 318–324.
70. M.J.D. Powell, «On the Maximum Error of Polynomial Approximation Defined by Interpolation and by Least Squares Criteria», Comput J **9** (1978), 404–407.
71. Theodore Von Karman, Aerodynamics, McGraw-Hill Publishing Company New York, (1963), 103-141.
72. Ernst Heinrich Hirschel, « Basics of Aerothermodynamics», Springer, Germany, (2005).
73. NACA Report 1135, «Equations, Tables, and Charts for Compressible Flow», By Ames Research Staff, (1953).
74. David W. Witte and Kenneth E. Tatum, «Computer Code for Determination of Thermally Perfect Gas Properties», NASA Technical Paper 3447, (September 1994)
75. David W. Witte, Kenneth E. Tatum and S. Blake Williams, «Computation of Thermally Perfect Compressible Flow Properties», AIAA-96-0681, (January 1996).
76. Kenneth E. Tatum, «Computation of Thermally Perfect Oblique Shock Wave Properties», AIAA-97-0868, (January 1997).
77. Government Industry Academia NPARC, «Fluid Models», ACS GS Inc, (2003).
78. <http://www.ensta.fr/~ortiz/DFR/Voies/chapVmf201.pdf>.
79. [http://ufrmecca.univ-lyon1.fr/~buffat/COURS/AERO\\_HTML/node47.html](http://ufrmecca.univ-lyon1.fr/~buffat/COURS/AERO_HTML/node47.html).