République algérienne démocratique et populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Saad Dahleb Blida 1

Faculté des sciences
Département de physique

Mémoire de fin d'étude
Pour l'obtention du diplôme de Master en Physique

Option : **Physique Théorique**

Thème :

Étude du problème de la mécanique quantique dans l'espace choisi

Présenté par :

Berkani Ikram

Soutenu le 02/09/ 2020 devant le jury composé de :

Bellil Wafa	MAA	USDB 1	Présidente
Hadj Moussa M'hamed	MCB	USDB 1	Encadreur
Imadalou Mourad	MCB	USDB 1	Examinateur

Blida 1-2019/2020-

Remeriements

Ce travail est l'aboutissement d'un dur labour et de beaucoup de sacrifices , nos remerciements vont d'abord au Créateur de l 'univers qui nous a dotés d'intelligences, et nous a maintennus en santé pour mener à bien cette année d'études.

Je tiens aussi à adresser mes remerciements à ma Mère et mon père pour l éducation qu'ils m'ont prodiguée ,avec tous les moyens et au prix de tous les sacrifices qu'ils ont consentis à mon égard ,pour le sens de devoir depuis mon enfance .

Cette thèse a été réalisé sous la direction de Monsieur Hadj Moussa M'hamed professeur à la Faculté de physique à l'université Saad Dahleb Blida 1

Je le remercie trés sincèrement pour le temps qu'il a consacré a m'apporter les outils méthodologiques indispensables a la conduite de cette recherche . Son exigence m'a grandement stimulé .

Je lui suis reconnaissante de l'accueil qu'il m'a fait au Faculté de physique et de mon intégration dans cette spécialité et tous mes professeurs .Je salue leurs amabilités , leurs patiences ,leurs disponibilités, leurs souplesses d'esprit et leurs savoirs .

C'est certes avec joie et fierté que je dépose aujourd'hui ce mémoire, mais aussi avec brin de nostalgie que je termine ce programme d'études et je conclus ce premier travail de recherche .

Je remercie également Madame BELLIL WAFa professeur à l 'universsité de Blida 01 qui a accepté de présider le jury , Monsieur IMADALOU Mourad professeur a l'université de Blida 01 de m 'avoir honoré d éxaminer mon travail.

Enfin,je ne peu passer outre a ma reconnaissance envers ma chère soeur, mes frères et ma famille et tous mes amis pour leurs confiance en moi et leur soutien constant m'assurent des bases solides me permettant de persévérer et de me surpasser .

Merci infiniment

Berkani Ikram.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction générale :

Au cours des quatre derniers siècles, la science a connu une manifestation d'un génie scientifique créatif dans tous les domaines surtout les sciences mathématiques et physiques. Rien pareil n'avait pas été rencontré dans la science depuis l'année 1666 (l'année miracle).

Au niveau de la science classique, Isaac Newtona introduit les bases d'une physique qui ont perduré pendant les deux siècles et demi-suivants.

La mécanique classique, connue sous le nom de la « mécanique newtonienne », est relative au scientifique Newton. Cette dernière a développé une série d'études autour d'elles, qui ont contribué à la formulation des autres lois physiques sur le mouvement des matériaux et leur transition de l'immobilité au mouvement.

Ce domaine de physique étudié par Newton a présenté un ensemble de principes scientifiques sur une gamme de sciences physiques : science du mouvement et l'animation.

En 1905, Albert Einstein a formulé la théorie de la relativité restreinte, et en 1907, on a découvert les travaux d'Henri Poincaréqui a utilisé le temps comme un imaginaire quatrième dimension [1]. Par ailleurs, en 1908, Hermann Minkowski a réalisé des travaux qui ont engendré une nouvelle formulation de la relativité restreinte.

Les scientifiques ont pensé qu'ils avaient découvert et expliqué toutes les lois et les phénomènes environnants aux niveaux macroscopiques, donc ils avaient comme idée que le monde agisse comme un mécanisme mécanisé à une seule règle [2] .

Au cours des 27 premières années duXXe siècle, le changement révolutionnaire dans notre compréhension des phénomènes microscopiques est marqué comme le premier dans l'histoire des sciences naturelles. Nous avons assisté à de graves limitations validité de la physique classique certes, mais nous avons trouvé que la théorie alternative a remplacé les théories de la physique classique, car elle est beaucoup plus large dans la portée et beaucoup plus riche dans son éventail d'applicabilité(la physique moderne)[3]. Il a admis que la théorie de la relativité générale découverte par Albert et la mécanique quantique sont les deux supports essentiels de la physique moderne.

Le rôle de la théorie de la relativité générale est d'expliquer le monde dans la macro-dimension tel que : les planètes, les étoiles, les galaxies, et même l'extra-univers dans le but de montrer la force exercée par le champ d'un objet massif sur n'importe quel corps à proximité de sa surface (elle utilise particulièrement la géométrie riemannienne comme formalisme mathématique.). Et le but de la mécanique quantique est de décrire les micros dimensions, telles que : les molécules, les atomes, et même les plus petites composantes de ce dernier comme les électrons et les quarks ce qui signale les trois principales forces du micromonde (force faible, force électromagnétique et forte force). Elle utilise la théorie de l'opérateur agissant sur une algèbre de l'espace d'Hilbert [4] .

La mécanique quantique est l'une des plus grandes réussites de toute l'histoire des sciences. Ses prédictions ont été vérifiées dans un très grand nombre de cas, avec parfois une précision fantastique de 10^{-23} [5, 6].

La physique quantique date d'un siècle. Cette dernière se fonde sur la description des phénomènes physiques aux niveaux microscopiques, ce qui a transformé la Vision du Monde envers cette science. La MQ n'est pas encore remise en cause, ce qui est exceptionnel pour une théorie scientifique, ses prédictions ont été toujours vérifiées par l'expérimentation avec une précision impressionnante. La mécanique quantique("MQ") remédié à la croyance que toutes les longueurs d'onde ont la même couleur que le spectre, aussi elle a confirmé que chaque longueur a une couleur [2].

La façon la plus traditionnelle de commencer une étude de la mécanique quantique est de suivre les développements historiques de la loi sur les radiations de Planck, la théorie d'Einstein-Debye : chaleurs spécifiques, l'atome Bohr, les ondes de matière de Broglie, et ainsi de suite ensemble avec des analyses minutieuses de certaines expériences clés telles que l'effet Compton, l'expérience Franck-Hertz et l'expérience Davisson-Germer-Thompson.

De cette façon, nous pouvons accepter la façon dont les physiciens durant le premier trimestre du XXe siècle ont été forcés d'abandonner, peu à peu, les concepts chéris de la physique classique et comment, malgré les faux départs antérieurs et les mauvais virages, les grands-maîtres : Heisenberg, Schrödinger, et Dirac, entre autres finalement réussi [3] .

Sherley et Schrödinger ont réalisé des études afin de confirmer qu'il y avait une équation d'ondes pour changer la raison de la stabilité de certains diurétiques, sachant que l'électronique était connue, car ils étaient des molécules, mais l'idée de Schrödinger dit qu'ils étaient des paquets d'ondes. Cela paraissait séduisant, mais en réalité, il a engendré des difficultés très compliquées :

1- L'onde de Schrödinger ne se propage pas dans l'espace ordinaire comme une onde électromagnétique ou sonore par exemple, mais elle se propage dans l'espace des configurations lequel est bien plus grand ($3\times6\times10^{23}$ dimensions pour une mole de gaz).

2-Contrairement aux espoirs de Schrödinger (1926), les paquets d'ondes s'étalent, les particules se diluent dans l'espace. Par exemple, dans une collision sur un potentiel central, la particule diffusée part dans toutes les directions à la fois, alors qu'en pratique, on observe toujours une trajectoire après collision [5] .

Cependant, l'année d'après, Werner Heisenberg a opérationnalisé la mécanique dite mécanique matricielle. Dans cette théorie, il n'existe ni onde ni particule.

Ensuite, pour Broglie et Albert Einstein, la physique était en train de s'engager dans une mauvaise voie, car son objectif de base n'est plus de décrire la réalité, mais il est juste de prévoir les évènements [5] .

Par la suite, ces deux savants ont reçu le premier soutien de la part de Max Born qui a proposé une explication statistique et potentielle populaire de la fonction d'onde pour la 1re fois. Après cela, c'était le tour de Niles Bor avec l'explication dite « Copenhague ». Et enfin, Dirac et Von Newman qui se sont référés à la formalité moderne de la mécanique quantique, donc Frank détermine les contributions de l'autre :

1-M. Born : interprétation probabiliste de la fonction d'onde (règle de Born).

2-N. Bohr : rôle essentiel de l'appareil de mesure.

3-Von Neumann : formalisme mathématique (espace vectoriel, opérateurs.. etc), notion de vecteur d'état, généralisant celle de fonction d'onde.

4-Dirac : présentation synthétique, écriture en termes de bras et de kets, notion de spin... etc [5] .

La mécanique matricielle a été développée par Werner Heisenberg, Max

Born et Pascual Jordan en 1925. Le but de la mécanique quantique est d'introduire et de décrire tous les phénomènes aux niveaux microscopiques, comme le phénomène de confinement, la divergence des rayonnements UV/IR, ainsi que les phénomènes qui se classent à l'échelle macroscopique comme la supraconductivité et la supersymétrie[7, 8].

Dans le même contexte, les innovations physiciennes fonctionnaient en insérant une nouvelle théorie en physique sur les applications. Cette étude est la géométrie non-commutative (NC). Elle est mise en exergue afin d'unifier les quatre forces fondamentales. Les racines de cette dernière sont le résultat de l'incapacité de la physique classique à expliquer certains macroscopiques.

La mécanique quantique déformée est une version modifiée de l'algèbre d'Heisenberg en ajoutant quelques corrections sur les commutateurs.

Nous allons étudier au cours de ce travail une conséquence de cette proposition dans la mécanique quantique et des modifications spécifiques des relations de commutation canonique habituelles entre la position et l'impulsion [9] .

Dans ce travail, on va traiter un problème de la mécanique quantique relativiste dans l'espace déformé avec un paramètre réel de déformation $\beta \rangle 0$ [9], cet espace est consacré à résoudre des équations relativistes, on a l'équation de Klein Gordon, Dirac, l'oscillateur harmonique, équation de Schrödinger.... etc. L'espace déformé est créé par des paramètres de déformation, ces paramètres dans certains cas sont liés avec des paramètres de cosmologies.

l'objectif essentiel de cette thèse est de traiter la dynamique des systèmes quantiques qui est représentée dans un'oscillateur harmonique avec un champ électrique dans le cadre du principe d'incertitude généralisé (PIG) dans

l'espace déformé, et comment une telle déformation peut affecter les propriétés principales par exemple : spectre d'énergie d'un système physique simple comme un'oscillateur harmonique, en utilisant méthodes mathématiques "fonctions spéciales "les polynômes d'Hermite et polynômes de Gegenbauer pour trouver la fonction d'onde et l'énergie de l'oscillateur harmonique dans cet espace.

Notre thèse se compose essentiellement de quatre chapitres. Le premier a consacré une introduction générale qui nous donne un bref historique sur le développement de la mécanique quantique et énoncé sur l'espace déformé, et dans le deuxième chapitre, on a fait un rappel sur l'espace ordinaire et déformé, formalisme de la mécanique classique et quelques propriétés, formalisme de la mécanique quantique et nous avons exposé le principe d'incertitude, formalisme de Dirac, orthogonalité ….. Formalisme dans l'algèbre utilisée et nous avons exposé le principe d'incertitude dans cet espace…

Le troisième chapitre, nous avons établi l'équation de l'oscillateur harmonique (OH), et pour cela nous aboutissons de résoudre les problèmes d'OH de la mécanique quantique des systèmes microscopiques. Et dans ce contexte, on a abordé ce problème dans deux cas : espace régulier (un potentiel est nul, c'est-à-dire la particule est libre ensuite le potentiel est quadratique.) et le deuxième cas " l'espace déformé" dans cette section, on a choisi l'espace déformé avec la langueur minimale et un paramètre réel de déformation $\beta \rangle 0$ (PIG) [9]. dans le quatrième chapitre, est consacrée la conclusion générale.

Chapitre 2

Rappels mathématiques :

2.1 L'espace ordinaire et l'espace déformé :

La mécanique classique doit être invariante sous les transformations de Galilée, cette invariance est valable pour les systèmes physiques fermés[10], en pratique les effets des corps éloignés sont souvent négligeables et on fait l'approximation que le système est fermé.

Pour faire correspondre les structures algébriques de la mécanique classique et quantique, il faut que [11].

$$\lim_{\hbar \to 0} \frac{i}{\hbar} [f \ , g]_{-}^{\hbar} = \{f \ , g\} \tag{2.1}$$

et

$$\frac{1}{2} \lim_{\hbar \to 0} [f \ , g]_{+}^{\hbar} = f \ .g \tag{2.2}$$

La mécanique quantique algébrique est une abstraction et une généralisation de la formulation spatiale d'Hilbert de la mécanique quantique due à von Neumann [12]. Tout d'abord avec Jordan and Wigner a été l'une des premières tentatives d'aller au-delà de l'espace d'Hilbert. Deuxièmement, il a fondé la théorie mathématique des algèbres d'opérateurs, ces algèbres d'opérateurs qu'il a introduites et qui sont maintenant appelées à juste titre les algèbres de von Neumann jouent toujours un rôle central dans l'approche algébrique de la théorie quantique [13].

2.2 Formalisme de la mécanique classique

2.2.1 Théorème d'Ehrenfest

Dans la mécanique classique, à une fonction $F(q,p,t)$ de l'espace des phases, on peut associer une équation du mouvement qui s'écrit :

$$\frac{dF(q,p,t)}{dt} = \{F,H\} + \frac{\partial F(q,p,t)}{\partial t} \tag{2.3}$$

Où H est l'Hamiltonien associé au système considéré. Ces équations sont

l'équivalent classique des équations d'Heisenberg en mécanique quantique. Notons que, pour une fonction F qui ne dépend pas explicitement du temps, l'équation peut s'écrire :

$$\frac{dF(q,p,t)}{dt} = \{F,H\} \tag{2.4}$$

(F ne dépend pas explicitement du temps) .

2.2.2 Crochets de Poisson

on a défini le crochet de Poisson pour trois composants f , g , h par la formule suivante [14] :

$$\{f\ ,g\ h\} = \{f\ ,g\ \}\,h + g\,\{f\ ,h\} \tag{2.5}$$

Ou bien : on utilise la relation $(uv)' = u'v + v'u$.

Alors, par rapport à les coordonnées p et q, on a la relation suivante [14] :

$$\{f\ ,g\ h\} = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial f}{\partial q_i}\left(\frac{\partial g}{\partial p_i}h + g\frac{\partial h}{\partial p_i}\right) - \frac{\partial f}{\partial p_i}\left(\frac{\partial g}{\partial q_i}h + g\frac{\partial h}{\partial q_i}\right)\right] \tag{2.6}$$

Crochet de Poisson pour deux fonctions$\{f,g\}$ c'est-à-dire, on fixe la fonction $h = 1$, on obtient sur la formule connue comme suit [15] :

$$\{f\ ,g\ \}\,(p,q) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right) \tag{2.7}$$

Le crochet de Poisson est antisymétrique et vérifie l'identité de Leibniz et qu'il satisfait à l'identité de Jacobi selon les formules suivantes [15] :

·Antisymétrie :

$$\{f, g\} = -\{g, f\} \tag{2.8}$$

·La règle de Leibniz :

$$\{f, gh\} = \{f, g\}\, h + g\, \{f, h\} \tag{2.9}$$

Où, f, g , $h \in C^{\infty}(M)$

·Identité de Jacobi :

$$\{\{f, g\}\ ,\ h\} + \{\{g, h\}\ ,\ f\ \} + \{\{h, f\}\ ,\ g\} = 0 \tag{2.10}$$

Le développement temporel du système est donné par les équations d'Hamilton, qui s'expriment facilement en termes de crochets de Poisson suivante :

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} = \{q_i, H\} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \{p_i, H\} \end{aligned} \tag{2.11}$$

2.3 Formalisme de la mécanique quantique :

-Les opérateurs :

Un opérateur est un objet mathématique qui agit sur une fonction et la transforme en une autre fonction. On note conventionnellement les opérateurs par un symbole alphabétique surmonté d'un accent circonflexe.

L'opérateur a transformé une fonction portée à sa droite :

$$\hat{A}\psi = \grave{\psi} \tag{2.12}$$

On distingue plusieurs types d'opérateurs :

· :Les opérateurs différentiels. Ex :$\hat{A} = \frac{\partial}{\partial x} \Rightarrow \hat{A}\psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x}$.

· Les opérateurs multiplicatifs. Ex :$\hat{A} = \frac{1}{2}kx^2. \Rightarrow \hat{A}\psi = \frac{1}{2}kx^2.\psi$.

· Les opérateurs vectoriels : qui transforment une fonction scalaire en fonction vectorielle.

Ex : $\hat{A} = \frac{\partial}{\partial x}\ i^{\rightarrow} + \frac{\partial}{\partial y}\ j^{\rightarrow} + \frac{\partial}{\partial z}$ $k^{\rightarrow} \Rightarrow \hat{A}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}\ i^{\rightarrow} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\ j^{\rightarrow} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\ k^{\rightarrow}$.

-Propriétés des opérateurs :

1-Produit de deux opérateurs :

l'action du produit $A.B$ de deux opérateurs $\hat{A}$ et $\hat{B}$ sur une fonction ψ s'obtient en faisant agir $\hat{A}$ puis $\hat{B}$:

$$\hat{A}.\hat{B}\psi = \hat{A}(\hat{B}\psi) \tag{2.13}$$

2-Somme de deux opérateurs :

l'action de la somme $A + B$ de deux opérateurs $\hat{A}$et $\hat{B}$ sur une fonction ψ s'obtient comme suie :

$$(\hat{A} + \hat{B})\psi = \hat{A}\psi + \hat{B}\psi \tag{2.14}$$

3-Linéarité : soit la combinaison linéaire $\psi = a\psi_1 + b\psi_2$de deux fonctions $\psi_1$et ψ_2 . L'opérateur $\hat{A}$ est linéaire si :

$$\hat{A}\psi = a\hat{A}\psi_1 + b\hat{A}\psi_2 \tag{2.15}$$

L'opérateur $A = \frac{\partial}{\partial x}$est linéaire. L'opérateur $\hat{A} = \sqrt{}$n'est pas linéaire.

4-Hermiticité : L'opérateur Â est hermitien si :

$$\int_{espace} \psi_1^* \hat{A}\psi_2 dv = (\int_{espace} \psi_2^* \hat{A}\psi_1 dv)^* \forall\psi_1\ \psi_2 \tag{2.16}$$

En pratique, on ne manipule que des opérateurs linéaires et hermitiens.

Considérez l'opérateur $\hat{A}$ tel que $\hat{A}\ |\alpha_i\rangle$est également en H et $|\ \langle\beta|\ \hat{A}\ |\alpha\rangle$

S'il y a un autre opérateur désigné par $\hat{A}^+$ de telle sorte que :

$$\langle \hat{A}^+ | \beta a\rangle = |\phi\rangle \tag{2.17}$$

Ensuite, nous disons que $\hat{A}^\dagger$est l'adjoint hermite de $\hat{A}$ (Cela ne signifie pas que Â est hermitique).

Opérateur le plus simple possible $\hat{A} = a$ (où a est un certain nombre) :

$$\langle a|\beta a\rangle = \langle\beta|a\alpha\rangle = \alpha\langle\beta|\alpha\rangle = \langle a^*\beta|\alpha\rangle \tag{2.18}$$

D'où $a^{\dagger} \ = a^{*}$ c'est-à-dire que l'adjoint hermite d'un nombre complexe est son conjugué complexe.

Considérez l'opérateur :

$$\hat{D} = \langle\beta| \left|\hat{D}\alpha\right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \psi_{\beta}^{*}(x) \frac{\partial}{\partial x} \psi_{\alpha}(x) \tag{2.19}$$

Par intégration par parties :

$$\psi_{\beta}^{*}(x)\psi_{\alpha}(x) \nearrow 0 \ |_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} dx (\frac{\partial}{\partial x} \psi_{\beta}^{*}(x)) \psi_{\alpha}(x) \tag{2.20}$$

Les termes de surface s'annulent en raison de l'état de normalisation, donc :

$$\hat{D}^{+} \ = \hat{D} \tag{2.21}$$

Dans le cas particulier où [16] :

$$\hat{A}^{+} \ = \ \hat{A} \tag{2.22}$$

2.3.1 Opérateurs dans l'espace régulier et leurs propriétés :

Les premiers opérateurs de position et d'impulsion introduits par Schrödinger [17] , ces opérateurs sont illimités sur l'espace d'Hilbert L^2 (R^3) et sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} \hat{q}^{j} &= x^{j} \\ \hat{p}^{j} &= -i\hbar\partial_{x} \end{aligned} \tag{2.23}$$

Ces opérateurs satisfont la relation de commutation canonique suivante :

$$\left[\hat{p}_j, \hat{q}^k\right] = -i\hbar\delta_j^k \tag{2.24}$$

Les approches de quantification basées sur les relations de commutations canoniques sont généralement appelées quantifications canoniques et dans ce cadre Dirac [18, 19] a fait l'observation importante que les relations de commutations canoniques ressemblent aux crochets de Poisson en mécanique classique.. Il a suggéré qu'une carte de quantification $f \to Q(f)$ (dans laquelle une fonction f sur l'espace des phases, considérée comme un observable classique, est remplacée par un opérateur sur un espace d'Hilbert interprété comme l'observable quantique correspondant) devrait satisfaire la condition suivante. [20] :

$$Q(\{f, g\}) = \frac{i}{\hbar}\left[Q(f), Q(g)\right] \tag{2.25}$$

Cette dernière relation est bien expliquée le passage entre la mécanique classique et mécanique quantique.

Le théorème d'Ehrenfest dans la mécanique quantique est donné selon la formule suivante :

$$\frac{d\left\langle \hat{A} \right\rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left\langle \left[\hat{A}, \hat{H}\right] \right\rangle + \frac{\partial \left\langle \hat{A} \right\rangle}{\partial t} \tag{2.26}$$

où $\hat{A}$ est un opérateur quantique quelconque et $\left\langle \hat{A} \right\rangle$ sa valeur moyenne, et $\hat{H}$ est opérateur hamiltonien.

2.3.2 Opérateurs unitaires :

Un opérateur unitaire U vérifie :

$$UU^{\dagger} = U^{\dagger}U = 1 \tag{2.27}$$

2.3.3 Orthonormalité :

Si la dimension de l'espace vectoriel est finie, on peut trouver un ensemble complet de vecteurs $u^{\rightarrow}$ dans le cas de notre base est u tel que :

$$u_i^{\rightarrow} \cdot u_j^{\rightarrow} = \delta_{ij} \tag{2.28}$$

δ_{ij} est le symbole de Kronecker est défini comme suit :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{pour } i = j \\ 0, & \text{pour } i \neq j \end{cases} \tag{2.29}$$

Pour une base orthonormée$\{|\phi_n\rangle\}$ de l'espace d'Hilbert dans le cas notre espace est de position (x) ,le produit scalaire est donné suit :
:

$$\langle\phi_n|\phi_{n'}\rangle = \int \phi_n^* \phi_{n'} dx = \delta_{nn'} \tag{2.30}$$

2.3.4 Relation de complétude (fermeture) :

Soit $\{|\phi_{ni}\}$ une base orthonormée dénombrable de l'espace $l^{(2)}$, alors
$\sum \mid \phi_n\rangle\langle\phi_n \mid= I_d$
et :

$$\sum_n^\infty \mid x\rangle\langle x \mid= I_d \tag{2.31}$$

De même, soit $\{|P_i\}$l'ensemble des vecteurs propres de l'opérateur impulsion $\hat{P}$,alors :

$$\int \mid p\rangle\langle p \mid dp = Id \tag{2.32}$$

2.3.5 L'équation de Schrödinger dépendante du temps :

Erwin Schrödinger expose les idées deLouis de Broglie les ondes de matière en posant des questions : qu'est-ce que c'est que cette onde qui n'a pas d'équation ? En effet, en général, les physiciens, normalement posant d'abord des équations, puis ils cherchent à résoudre, mais dans ce cas, au contraire de Broglie avait d'abord postulé l'existence d'une onde sans en avoir posé d'équation.

Alors à la suite de sa réflexion, Schrödinger entame sa recherche et trouve en 1925 une équation valable pour les ondes de Louis de Broglie, justifiant bien ainsi les fondamentales bases de la mécanique ondulatoire reposant sur le principe d'équivalence entre la mécanique ondulatoire et la nouvelle mécanique dite aussi mécanique quantique et déduisant avec l'utilisation des quatre équations essentielles de Maxwell sa nouvelle équation nommée sur son nom.

Le passage de la mécanique quantique relativiste s'est effectué à partir d'une généralisation de l'équation de Schrödinger à un système relativiste. L'étude d'un système microscopique est passée sur la résolution de cette équation. L'équation de Schrödinger est l'équation fondamentale de la mécanique quantique non-relativiste. Elle joue en mécanique quantique le même rôle que l'équation de Newton, de Lagrange ou d'Hamilton en mécanique classique ou les équations de Maxwell en électromagnétisme. Elle décrit l'évolution temporelle de l'état d'un objet quantique en cherchant ce qu'on appelle la fonction d'onde ainsi le spectre d'énergie des différents états possibles.

La résolution de l'équation de Schrödinger indépendante du temps ($H\psi = E\psi$) donne les états propres (énergie et fonction d'onde) d'un système quantique. Toutefois, un système quantique peut évoluer au cours du temps, et au lieu de s'intéresser à ses états stationnaires, on peut vouloir à écrire cette évolution temporelle. Ainsi, l'équation de Schrödinger dépendante du temps s'écrit :

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi \tag{2.33}$$

Maintenant, la fonction d'onde $\psi(\{r^{\rightarrow}, t\})$ dépend du temps en plus des autres variables du problème coordonnées spatiales, spins, etc. On se limite ici pour un problème unidimensionnel $(1+1)$avec une particule de masse"m" soumis à un potentiel $V(x)$,, donc l'équation (2.33) devient :

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x,t) \tag{2.34}$$

Tel que $V(x)$ est le potentiel .

2.3.6 Formalisme de Dirac et la probabilité quantique :

Dans le chapitre précédent, on a vu qu'origine de la mécanique quantique à partir des travaux de physique théorique comme la découverte de la mécanique ondulatoire(L. Broglie et Schrödinger)la mécanique des matrices(M. Borne.H.K Heisenberg P Jordan) et puis dans leurs prolongement et le renforcement à partir de l'analyse d'expériences réalisées pour déterminer l'état d'un système physique capable de se représenter en plusieurs états différents(interférence entre les états quantiques par exemple) ainsi est apparue une sorte de triptyque dans l'ensemble de formulation : (la mécanique ondulatoire, la mécanique matricielle, le formalisme invariant)[21] .

Les deux premières utilisent des espaces d'éleveurs concrets et la troisième un espace d'Hilbert abstrait. En général, la dernière formulation est présentée moyennant la notation des bras et kets de Dirac, certains états quantiques ne peuvent être décrits par une fonction d'onde telle que nous les avons vus..

Le formalisme doit être généralisé de manière à pouvoir décrire tous les systèmes en mécanique ondulatoire l'état d'un système est décrit par une fonction d'onde.Dans le formalisme général naissance d'un système est décrit par vecteur d'état faisant partie dans l'espace des états du système des vecteurs d'état peut-être associés à une fonction d'onde, mais n'est pas obligatoire[21] .

Dans cette partie, nous présentons le cadre général de la théorie quantique en utilisant la puissance et élégante algèbre de Dirac. Est consacrée à la découverte de l'étrange monde quantique à travers quelques expériences d'interférences à une particule. Ces expériences montrent que l'intuition et le bon sens hérités de la physique classique sont inadaptés dans le monde quantique du fait de la nature fondamentalement probabiliste ou indéterministe des phénomènes quantiques. Cette nature impose l'introduction des concepts nouveaux et essentiels d'état quantique, d'amplitude de probabilité ou amplitude de transition, de superposition d'état et de l'espace d'Hilbert. Ces concepts ont été auparavant présentés de façon mathématique.

-Représentation des états physiques :

L'apparition de formalisme invariant trouve sa source dans les travaux de mathématiques David Hilbert les idés générales de la théorie des espaces d'Hilbert a été introduit les concepts géométriques tout à fait classique produit scalaire norme projection.[3, 21] .

Rappelons la définition de l'espace d Hilbert :

-H est un espace vectoriel :$\forall\ \psi, \phi\ \epsilon$ H ,$\forall \alpha, \beta \epsilon C$:$\langle\psi|\alpha\phi + \beta\chi\rangle = \alpha\langle\psi|\phi\rangle + \beta\langle\psi|\chi\rangle$ et $\langle\alpha\psi + \beta\phi|\chi\rangle = \alpha\langle\psi|\chi\rangle + \beta\langle\phi|\chi\rangle$.

-Hest muni un produit hermétique ou produit bilinéaire définition une norme définie positive : :$\forall\ \psi, \phi\ \epsilon$ H : $\quad \langle\psi|\phi\rangle = \overline{\langle\phi|\psi\rangle} \quad \|\psi\|^2 = \langle\psi|\psi\rangle \geq 0$

-H est complet c'est-à-dire chaque suite de Cauchy Converge vers une limite appartenant à H, il y a quelques propriétés vérifiées dans l'espace H équipable d'une base orthonormée :

$*$ Inégalité triangulaire : $\quad \forall\ \psi, \phi\ \epsilon$ H : $\quad \|\psi + \phi\| \leq \|\psi\| + \|\phi\|$.

$*$ Inégalité du parallélogramme : $\forall\ \psi, \phi\ \epsilon\ \mathrm{H}\ \ : \|\psi + \phi\|^2 + \|\psi - \phi\|^2 = 2\,\|\psi\|^2 + 2\,\|\phi\|^2$.

$*$ Inégalité de Cauchy-Schwarz : $\forall\ \psi, \phi\ \epsilon\ \mathrm{H}\ \ : |\langle\psi|\phi\rangle|^2 \leq \langle\psi|\psi\rangle\langle\phi|\phi\rangle$.

Après Dirac, On note un vecteur d'état $|\psi\rangle$un ket. Cela correspond à un vecteur colon, ce ket d'état est postulé pour contenir des informations complètes sur l'état physique. Le transposé vecteur ligne où vecteur dual, est appelé bra et note$\langle\psi|$.

En fait, on appelle généralement plusieurs bras un élément de l'espace dual $\hat{E}^{\ \{*\}}$de E qui est l'espace regroupant l'ensemble des fonctionnelle linéeaires sur E. Une fonctionnelle linéaire est une application linéaire qui associe un nombre complexe à un ket.Mathématiquement, la fonctionnelle ϕ se résume par la définition formelle $\phi : \left|\psi_{\{i\}}\right\rangle \rightarrow \phi\left(\left|\psi_{\{i\}}\right\rangle\right)\,\epsilon\, C$. A tout ket $\left|\psi_{\{i\}}\right\rangle$ il existe un bra correspondant à l'application prendre le produit scalaire avec$|\psi_i\rangle$ mais la réciproque est fausse$[3, 22-23]$.

2.3.7 Propriétés :

on note que les paramètres α, β deux nombres complexes :

∘ linéarité : $|\alpha\phi + \beta\psi\rangle = \alpha\,|\phi\rangle + \beta\,|\psi\rangle$.

∘ anti-linéarité : $\langle\alpha\phi + \beta\psi| = \alpha^*\,\langle\phi| + \beta^*\,\langle\psi|$.

2.3.8 Produit scalaire :

On vient du «même coup» de définir le produit scalaire.Celui-ci est défini par le produit d'un bra par un ket (un braket en anglais,en français un crochet).Les règles de constitution de ce produit scalaire doivent être comprises :

-Le produit scalaire du ket$|\psi\rangle$ar le ket $|\phi\rangle$est donné par le produit du bra$\langle\phi|$ par le ket $|\psi\rangle$ que l'on note $\phi \cdot \psi = \langle\ \phi|\psi\rangle$. On voit la force de la notation de Dirac qui traduit par une fusion des barres du bra et du ket le produit scalaire elles découlent des définitions :

$\langle\ \phi|\psi\rangle^* = \langle\ \psi|\phi\rangle$.

$\||\psi\rangle\|^2 = \langle\ \psi|\psi\rangle = \int_R |\psi(x)|^2\, dx\ \rangle 0$ (norme au carré).

2.3.9 Base orthonormée :

une base orthonormée $\{|\phi_n\rangle\}$de l'espace d'Hilbert est une base telle que

$$\langle\phi_n|\phi_{n'}\rangle = \delta_{nn'} \tag{2.35}$$

où $\delta_{nn'}$ est symbole de Kronecker.

$$\delta_{nn'} = \begin{cases} 1 \text{ pour } n = n' \\ 0 \text{ pour } n \neq n' \end{cases} \tag{2.36}$$

2.3.10 Représentation et écriture dans une base :

Muni du produit scalaire, on retrouve la notion naturelle de base de l'espace d'Hilbert et de décomposition d'un vecteur dans la base . Ainsi, si l'on note $\{| \, |\psi_n\rangle\}$ une base orthonormée de l'espace vectoriel, et que l'on décompose un ket $|\psi\rangle$dans cette base, les coefficients étant les produits scalaires$\psi_n = \langle\phi_n|\psi\rangle \in C$, on peut l'écrire sous la forme :

$$|\psi\rangle = \sum \psi_n \, |\phi_n\rangle = \sum_n \langle\phi_n|\psi_n\rangle \, |\phi_n\rangle \tag{2.37}$$

On dit que les $\langle\phi_n|\psi_{i'}\rangle$sont la représentation de $|\psi_i\rangle$dans la base des$\{|\phi_n\rangle\}$.Il n'y a rien de fondamentalement nouveau par rapport à notre notions de la mécanique : le vecteur de position r ou vitesse v sont des concepts abstraits que nous pouvons manipuler pour trouver des relations. Nous pouvons aussi choisir de travailler directement avec leurs composantes dans une base choisie correspondant à un j de coordonnées, comme $(x \, , y \, , z)$ (coordonnées ou représentation cartésienne(s), base $\{e_{\vec{x}}, e_{\vec{y}}, e_{\vec{z}}\}$) ou (r, θ, ϕ)(coordonnées ou représentation sphérique(s), base$\{e_{\vec{r}}, e_{\vec{\theta}}, e_{\vec{\phi}}\}$) .

2.3.11 L'opérateurs dans le formalisme de Dirac :

L'opérateur est une application linéaire qui agit sur les éléments de l'espace d'Hilbert. Il transforme un ket en un autre ket et ce de manière linéaire. On lui met un chapeau pour le distinguer des nombres complexes.

on note par exemple $\hat{A}$ l opérateur de A.

Formellement comme suit : $\hat{A} : |\psi\rangle \to |A\psi\rangle \equiv \hat{A} \, |\psi\rangle \in E$.

La linéarité se traduit par la définition [3] :

$$\hat{A} \, |\alpha\phi + \beta\psi\rangle = \alpha\hat{A}|\phi\rangle + \beta\hat{A}|\psi\rangle \tag{2.38}$$

Avec le temps, il est habituel de ne plus mettre les chapeaux sur les opérateurs si l'on comprend bien ce quel'on manipule.

2.3.12 Représentation d'éléments de matrice d'un opérateur :

De même qu'un ket, un opérateur est un objet qui contient toute l information sur la transformation linéaire. On peut manipuler les sommes, produits, inverses...

d'opérateurs de façon abstraite en appliquant les régles de l'algèbre linéaire. Si l'on souhaite travailler avec une représentation de l'opérateur : c'est-à-dire des nombres, on choisit une base$\{\phi_n\}$. La représentation de l'opérateur est alors un matrice. Comme les $\{\hat{A}|\phi_n\rangle\}$ représentent un ensemble de vecteurs colonnes, on peut les représenter en les projetant sur la base. Il est donc naturel dans les notations de Dirac, d'écrire sous la forme suivante les éléments de matrice A_{nm} associé a $\hat{A}$ dans la base$\{|\phi_n\rangle\}$:

$$A_{nm} = \langle\phi_n|\hat{A}|\phi_m\rangle \in C \tag{2.39}$$

L'encore, on retrouve des choses connues : une rotation dans l'espace à trois dimensions, qui est une opération linéaire, est représentée par une matrice de rotation dont la forme dépend de la base choisie.

2.3.13 Produit d'opérateurs :

comme ce que vous connaissez de l'algébre linéaire, composer les applications revient à les multiplier

$$\left|(\hat{A}\cdot\hat{B})\psi\right\rangle = \hat{A}\left|\hat{B}\psi\right\rangle = \hat{A}\left(\left|\hat{B}\psi\right\rangle\right) = \hat{A}\hat{B}\left|\psi\right\rangle \tag{2.40}$$

Le symbole du produit est souvent écrit de façon implicite, on note juste les opérateurs a la suite. Attention, comme pour les matrices, ce produit est en géenéral non-commutatif, c'est-à-dire que l'ordre des opérateurs compte, on verra des conséquences importantes pour la physique.

$$\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A} \tag{2.41}$$

Nous notons que les trois opérateurs $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ sont vérifiés les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
(\alpha\hat{A} + \beta\hat{B})\hat{C} &= \alpha\hat{A}\hat{C} + \beta\hat{B}\hat{C} \\
(\alpha\hat{A})(\beta\hat{B}) &= \alpha\beta A(\alpha\hat{A} + \beta\hat{B})\hat{C} = \alpha\hat{A}\hat{C} + \beta\hat{B}\hat{C} \\
[\hat{A}, \hat{B}] &= \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}
\end{aligned} \tag{2.42}$$

où $\alpha, \beta \in C$
La formule de Glauber est donnée sous la forme suivante :

$$e^{A}e^{B} = e^{A+B}e^{\frac{1}{2}[A,B]} \tag{2.43}$$

2.3.14 Opérateurs nul et identité :

Ils sont notés souvent 0 et 1 respectivement , tels que

$$\begin{aligned} \hat{A} + 0 = \hat{A} \\ \hat{A}0 = 0\hat{A} = 0 \\ \hat{A}^{*} = \hat{A} \end{aligned} \tag{2.44}$$

Avec le temps, l'opérateur identité est noté 1 ou mème omis lorsqu'il est multiplié par des constantes, comme dans l'expression :

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \rightarrow [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar. \tag{2.45}$$

2.3.15 Opérateur adjoint :

L'opérateur adjoint de $\hat{A}$ est celui qui va agir dans l'espace des bras (espace dual) pour transformer le bra correspondant a un ket en le bra correspondant au ket transformé. Il est noté $\hat{A}^{\dagger}$ donc formellement défini par :

$$\hat{A}^{\dagger} \ : \langle\psi| \rightarrow \left\langle \hat{A}\psi \right| = \langle\psi| \, \hat{A}^{\dagger} \ \in E^{*}. \tag{2.46}$$

On obtient alors facilement la représentation de cet opérateur en fonction de celle de $\hat{A}$. La matrice associée a $\hat{A}^{\dagger}$est l'hermitienne conjuguée de celle de $\hat{A}$, c'est-'a-dire qu'on prend la transposée de$[A_{nm}]$ puis le complexe conjugué de chaque élément. Ainsi, on a la relation :

$$\hat{A}^{\dagger}_{nm} = \langle\phi_n|\hat{A}^{\dagger}|\phi_m\rangle = \langle\phi_m|\hat{A}^{\dagger}|\phi_n\rangle^{*} = A^{*}_{mn}. \tag{2.47}$$

Cela est transparent lorsqu'on l´ecrit avec les notations de Dirac :

$$\langle \phi_n | \hat{A}^{\dagger} | \phi_m \rangle = \langle A\phi_n | \phi_m \rangle = \langle \phi_m | A\phi_n \rangle^* = \langle \phi_m | \hat{A} | \phi_n \rangle^* \tag{2.48}$$

2.3.16 Propriétés :

elles sont similaires à ce que vous connaissez de la transposée des matrices, en faisant attentiona la conjugaison complexe :$\alpha, \beta \in \hat{C}$.

On a $\hat{A}, \hat{B}$ deux opéerateurs :

$(\alpha \hat{A} + \beta \hat{B})\dagger = \alpha * \hat{A}^{\dagger} + \beta * \hat{B}^{\dagger}$.

$(\hat{A}^{\dagger})^{\dagger} = \hat{A}$.

$(\hat{A}\hat{B})^{\dagger} = \hat{B}^{\dagger}\hat{A}^{\dagger}$.

Opérateur hermitique :

Un opérateur Â est hermitique si dans toute base orthonormée, sa reéprésentation matricielle est donc une matrice complexe hermitique.

$$\hat{A}_{nm} = \hat{A}^*_{mn}. \tag{2.49}$$

En particulier, les éléments diagonaux sont nécessairement réels, $A_{nn} \in R$.

Règles pour prendre le conjugué hermitique d'une expression :

• prendre le complexe conjugué des constantes $\alpha \longleftrightarrow \alpha^*$.

• remplacer les kets par les bras correspondant $|\psi\rangle \longleftrightarrow \langle\psi|$.

•inverser l'ordre des facteurs.

• la position des nombres complexes dans les expressions ne jouent pas de role car ils commutent avec les opérateurs et les autres nombres. Il est d'usage des les factoriser agauche et de laisser à droite les opérateurs, bras et kets.[23] .

2.3.17 Projecteurs :

Un projecteur est un opérateur qui a un ket associe sa projection sur un état $|\psi_i\rangle$ donné et qu'on prendra normalisé $\langle \psi_i | \psi_i \rangle$. Notons-le Π_ψ

Dans les notations de Dirac, il s'écrit alors simplementsous la forme

$$.\Pi_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|. \tag{2.50}$$

En effet,

$\forall | \hat{\Pi}_\psi | \phi \rangle = (|\psi\rangle\langle\psi|)|\phi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle|\psi\rangle$ *et* $\hat{\Pi}^2_\psi = (|\psi\rangle\langle\psi|)(|\psi\rangle\langle\psi|) = |\psi\rangle\langle\psi|\psi\rangle\langle\psi| = |\psi\rangle\langle\psi| = \Pi_\psi$.

On voit l'utilité des notations pour fusionner les bras et les kets pour obtenir des nombres. Cela se genéralise aisément a un sous-espace S défini par M vecteurs orthonormés

$$\{|\phi_{ni}\}_{n=1;M} = \Pi_{\psi}\delta = 1. \tag{2.51}$$

2.3.18 Relations de fermeture :

si l'on étend le sous-espace précédent a toute une base orthonormée de l'espace d'Hilbert, on obtient que le projecteur est l'identité. Cela s'écrit sous la forme suivante

$$\sum |\phi_n\rangle \langle\phi_n| = 1 \tag{2.52}$$

2.3.19 Les Représentations :

Selon la nature du système quantique, l'espace d'Hilbert associé peut avoir une dimension finie, comme dans le cas du spin $\frac{1}{2}$, ou infinie, comme pou rune particule dans un potentiel $V(x)$.

L'opérateur du spin $\frac{1}{2}$ agit sur un espace d'Hilbert de dimension 2, correspondant aux deux états de spin orthogonaux : les kets $|+i\rangle$ (spin up $\uparrow$) et $|-i\rangle$ (spin down $\downarrow$) forment une base

orthonormale, complète, de l'espace d'Hilbert de spin :

$$S_z |s\rangle = s\frac{\hbar}{2} |s\rangle \langle\, s|s'\rangle = \delta_{ss'} \quad \sum_s |s\rangle \langle s| = 1 \quad s = \{+, -\} \tag{2.53}$$

Dans le cas de l'opérateur de position $\hat{X}$, le spectre est continu :

$$\hat{X} |x\rangle = x |x\rangle, x \in R \tag{2.54}$$

que chaque point x correspond à un état quantique de position $|x\rangle$ différent. Les conditions d'orthonormalitéet de complétude de la base s'écrivent alors :

$$\langle\, x|x'\rangle = \delta(x - x') \qquad \int dx\, |x\rangle \langle x| = 1 \tag{2.55}$$

où la somme a été remplacée par une intégrale est ce delta de Kronecker par celle de Dirac.

- Un état $|\psi_i\rangle$ dans l'espace d'Hilbertd'une particule dans un potentiel, peut donc s'écrire comme superposition des états $|x\rangle$, de la base position :

$$|\psi\rangle = \int dx\, |x\rangle \langle\, x|\psi\rangle \qquad \langle\, x|\psi\rangle = \psi(x)\epsilon C \tag{2.56}$$

où les « coordonnées » $\psi(x)$ sont les amplitudes de probabilité ou simplement, la fonction d'onde de la particule dont la valeur absolue au carré donne la densité de probabilité de la position .

L'espace d'Hilbert est représenté par la base $|x_i\rangle$de position.

L'équation précédente établie une correspondance entre l'état quantique$|\psi_i\rangle$, vecteur de l'espace d'Hilbert ,et l'ensemble de coordonnées complexe $\psi(x)$: toute opération entre états pourra être traduite en opération entre les coordonnées, d'où le nom de représentation.

D'une façon équivalente on peut définir la base p_i d'impulsion, comme celle dans laquelle l'opérateur impulsion $\hat{P}$ est diagonal :

$$\hat{P}\,|p\rangle = p\,|p\rangle\,, p \in R \tag{2.57}$$

avec les propriétés :

$$\langle\, x|x'\rangle = \delta(x - x') \qquad \int dx\, |x\rangle\,\langle x| = 1 \tag{2.58}$$

Dans la représentation d'impulsion l'espace d'Hilbert d'une particule quantique, est déployé par la base des états $|p_i\rangle$, d'impulsion définie. Dans cet espace les coordonnées d'un état $|\psi_i\rangle$ sont données par la fonction $\psi_p = \langle p|\psi\rangle$

Le lien entre la représentation position et la représentation impulsion est donnée par la relation :

$$\langle\psi|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{ipx}{\hbar}} \tag{2.59}$$

2.3.20 La fonction Delta de Dirac :

$\delta(x)$ est une disrebution centrée $\delta(x)$ selon la relation :

$$\delta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} \text{ pour } -\frac{\varepsilon}{2} \leq x \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 \text{ dans les autres cas} \end{cases} \tag{2.60}$$

$\delta(x)$ est vérifié les propriétés suivantes :

$$\int \delta(x - x_0)dx = 1$$
$$\int f(x)\delta(x - x_0)dx = f(x_0)$$
$$TF\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tag{2.61}$$

2.4 La probabilité quantique :

Lorsqu'on mesure la grandeur physique A sur un système dans l'état normé $|\psi\rangle$, la probabilité $P(a_n)$ d'obtenir comme le résultat de la valeur propre a_n de l'observable A

correspondante vaut :

$$P(a_n) = \sum_i^{gn} \left|\left\langle|u_n^i|\psi\right\rangle\right|^2 = \sum_i^{gn} |C_n^i|^2 \tag{2.62}$$

car $|\psi\rangle = \sum_n \sum_i^{gn} C_n^i |u_n^i\rangle$

$g_n$est le degré de dégénérescence de a_n.

$\{|u_n^i\rangle\}(i = 1, 2, \ldots\ldots, g_n)$ est un système orthonormé de vecteurs propres associé à a_n sous-tendant le sous-espace ξ_n.

Si $g_n = 1$ (le spectre discret est non dégénéré), alors :

$$P_n(a_n) = |\langle u_n|\psi\rangle|^2 = |C_n|^2 \tag{2.63}$$

où $|u_n\rangle$ est le vecteur propre normé de A associé à a_n.

Si le spectre est continu et non dégénéré : La probabilité $P(\alpha)$ d'obtenir un résultat compris entre α et $\alpha + d\alpha$ vaut :

$dP(a) = |\langle v_\alpha|\psi\rangle|^2$ où $|v_\alpha\rangle$ est le vecteur propre correspondant à la valeur propre α de l'observable A associée à la grandeur physique A.

Autre écriture de $P(a_n)$:

$$P(a_n) = \langle\psi|P_n|\psi\rangle \tag{2.64}$$

où P_n est le projecteur sur le sous-espace ξ_n.

$$P_n = \sum_i^{gn} \left|u_n^i\right\rangle \left\langle u_n^i\right| \tag{2.65}$$

2.5 Relation d'incertitude en forme générale :

La relation inégalité qui liée entre Δx et Δp elle a établi par Heisenbeg-pour déterminer relation, nous utilisons la fonction suivante :

on a :

$$\phi(x) = (x + ikp)\psi(x) \tag{2.66}$$

oũ k est un paramètre réel donc :

$$\langle \phi|\phi \rangle = \int \phi^*(x)\phi(x)dx \tag{2.67}$$

maintenant on remplace la dernière relation on obteint :

$$\langle \phi|\phi \rangle = \int \phi^*(x)(x - ikp)(x + ikp)\phi(x)dx \tag{2.68}$$

$$= \int \phi^*(x)\left[x^2 + ikxp - ikxp + k^2p^2\right]\psi(x)dx \tag{2.69}$$

$$= \int \psi^* x^2 \psi(x)dx + k^2 \int \psi^*(x)p^2\psi(x)dx + ik \int^* \psi\left[x, p\right]\psi(x)dx \tag{2.70}$$

$$\langle \phi|\phi \rangle = k^2 \left\langle p^2 \right\rangle + i\left\langle [x, p]\right\rangle k + \left\langle x^2 \right\rangle \tag{2.71}$$

$$\langle \phi|\phi \rangle = \left\langle p^2 \right\rangle k^2 + i\left\langle [x, p]\right\rangle k + \left\langle x^2 \right\rangle \ \geq 0 \tag{2.72}$$

parce que le produit scalaire $\langle \phi|\phi \rangle$ est positif ou nul .

cette dernière relation est une équation de deuxième degré, quand on la résoudre, ont obteint comme suit :

$$\left\langle p^2 \right\rangle k^2 + i\left\langle [x, p]\right\rangle k + \left\langle x^2 \right\rangle = 0 \tag{2.73}$$

Dans ce cas, selon le signe de déterminan Δ nous avons trois cas :

-1$^{\text{er}}$cas $\Delta = 0$:on a une solution doublée réelle.

-2$^{\text{eme}}$cas $\Delta \rangle\ 0$: on a deux racines complexes conjuguées.

-3$^{\text{eme}}$cas $\Delta \langle\ 0$: on'a pas de solution réelle.

L'incertitude de relation d'Heisenberg est réalisé pour le troisième cas où $\Delta \langle\ 0$ on a :

$$\Delta = -\left\langle [x, p]\right\rangle^2 - 4\left\langle p^2 \right\rangle \left\langle x^2 \right\rangle \langle 0. \tag{2.74}$$

$$\Rightarrow -\langle [x,p]\rangle^2 - 4\left\langle p^2\right\rangle \left\langle x^2\right\rangle \langle 0.$$

$$\Longrightarrow -4\left\langle p^2\right\rangle \left\langle x^2\right\rangle \ \langle\langle [x,p]\rangle \tag{2.75}$$

$$\Longrightarrow -\left|4\left\langle p^2\right\rangle \left\langle x^2\right\rangle\right| \ \geq |\langle [x,p]\rangle|^2 \tag{2.76}$$

$$\Longrightarrow \left|\left\langle p^2\right\rangle \left\langle x^2\right\rangle\right| \ \geq \frac{1}{4}\,|\langle [x,p]\rangle|^2 \tag{2.77}$$

On a : $\Delta x = \sqrt{(x-\langle x\rangle)^2} = \langle x'^2\rangle \qquad \Longrightarrow (\Delta x^2) = \langle x'^2\rangle$.
$\Delta p = \sqrt{(p-\langle p\rangle)^2} = \sqrt{\langle p''^2\rangle} \qquad \Longrightarrow (\Delta p^2) = \langle p'^2\rangle$.
donc :

$$\Longrightarrow \left|\left\langle p'^2\right\rangle \left\langle x'^2\right\rangle\right| \ \geq \frac{1}{4}\,|\langle [x,p]\rangle|^2 \tag{2.78}$$

Et ainsi que nous avons :

$$\langle \Delta A\rangle = A - \langle A\rangle \Longrightarrow \langle \Delta A\rangle = 0 \Longrightarrow \langle \Delta A\rangle^2 = 0$$

$$\left\langle (\Delta A)^2\right\rangle = \left\langle A^2 - 2\langle \Delta A\rangle + \left\langle A^2\right\rangle\right\rangle = \left\langle A^2\right\rangle - \langle A\rangle^2 = \left\langle A^2\right\rangle$$

donc

$$\langle \Delta x\rangle^2 = \left\langle x'^2\right\rangle \ = \left\langle x^2\right\rangle \ \text{et} \ \ \langle \Delta p\rangle^2 = \left\langle p'^2\right\rangle = \left\langle p^2\right\rangle \tag{2.79}$$

on remplace la dernière relation (2.79) dans l'équation (2.78) on trouve la relation d'incertitude comme suit :

$$\langle \Delta x\rangle \ \langle \Delta p\rangle \geq \frac{1}{2}\,|\langle [x,p]\rangle| \tag{2.80}$$

Cas particulier : dans l'espace ordinaire :
On a dans l'espace régulier : $[x, p_x] = i\hbar$.

$$\Longrightarrow < p^2 >< x^2 \geq \frac{1}{4}\left|(i\hbar)^2\right|$$

$$< p^2 >< x^2 \geq \frac{\hbar^2}{4} \tag{2.81}$$

Si on pose : $p'_x = p_x - \langle p_x \rangle$ et $x' = x - \langle x \rangle = \Delta x$.
dans même espace régulier on a $[x', p']$ $=i\hbar$, alors :

$$\left\langle p_x'^2 \right\rangle \left\langle x'^2 \right\rangle \geq \frac{\hbar^2}{4} \tag{2.82}$$

donc :

$$(\Delta x)(\Delta p) \geq \frac{\hbar}{2} \tag{2.83}$$

cette dernière relation $\left(\Delta x.\Delta p \geq \frac{\hbar}{2}\right)$ est appellé inégalité d'Heisenberg dans l'éspace régulier[6].

Si on pose $\hbar = c = 1$ alors :

$$\Delta x.\Delta p \geq \frac{1}{2} \tag{2.84}$$

2.6 Opérateurs de créations $\hat{a}^+$ et d'annulations $\hat{a}$ dans l'espace régulier :

États cohérents de l'oscillateur harmonique :

Dans cette partie, le concept d'états cohérents sera introduit. Tout d'abord, nous allons étudier l'oscillateur harmonique en MQ. Il s'avérera que les états cohérents représentent les équations du mouvement de l'oscillateur harmonique classique. Les quantités suivantes sont appelées opérateurs d'échelles :

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega}}\,(ip + m\omega x) \tag{2.85}$$

$$\hat{a}^+ = \sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega}}\,(-ip + m\omega x) \tag{2.86}$$

Ici l'opérateur $\hat{a}^+$ est appelé opérateurs de créations et $\hat{a}$ d'annihilation sont des opérateurs mathématiques qui ont des applications répandues dans la mécanique quantique, notamment dans l'étude des oscillateurs harmoniques quantiques et des : systèmes à particules nombreuses.

Le commutateur d'un â et $\hat{a}^+$ peut être calculé directement à partir de leur définition :

$$\left[\hat{a},\hat{a}^{+}\right]=\frac{i}{\hbar}\left[p,x\right]=1 \tag{2.87}$$

on rappelle que dans l'espace ordinaire, les opérateurs de position $\hat{x}$ et d'impulsion $\hat{p}$ dans le cas de l'isolateur harmonique sont donnés en fonction des opérateurs de créations $\hat{a}^{+}$ et d'annulations $\hat{a}$ par la formule suivante :

$$\hat{x}=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a}^{+}+\hat{a}\right) \tag{2.88}$$

$$\hat{p}=i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\left(\hat{a}^{+}-\hat{a}\right) \tag{2.89}$$

m est la masse de particules [24] .

$\hat{a}^{+}$ est l'opérateur création, il fait passer le système d'un état $|\psi\rangle$ d'énergie E_n à un état $|\psi_{n+1}\rangle$ d'énergie $E_n+\hbar\omega$.

a est l'opérateur annihilation, il fait passer le système d'un état $|\psi\rangle$ d'énergie E_n à un état $|\psi_{n-1}\rangle$ d'énergie $E_n-\hbar\omega$.

Les mathématiques pour les opérateurs de création et d'annihilation pour bosons sont les mêmes que pour les opérateurs d'échelles de l'oscillateur harmonique quantique d'un système de bosons identiques en nombre indéterminé. On introduisit deux opérateurs $\hat{a}_i$ et $\hat{a}_i^{+}$ associé à l'état $|u_i\rangle$ de la base de H. Leur action sur un état de la base nombre d'occupation de $H\infty$ est définie par :

$$\hat{a}_i^{+}\left|n_1,n_2....n_i...\right\rangle=\sqrt{n_{i+1}}\left|n_{1,}n_2,.....n_{i+1}\right\rangle \tag{2.90}$$

$$\hat{a}_i\left|n_1,n_2....n_i...\right\rangle=\sqrt{n_i}\left|n_{1,}n_2,.....n_{i-1}\right\rangle \tag{2.91}$$

Ainsi, l'opérateur compte le nombre des particules dans l'état $|u_i\rangle$

$$N_i=\hat{a}_i^{+}\hat{a}_i \tag{2.92}$$

L'opérateur de nombre total des particules est donné par :

$$N=\sum_i N_i=\sum_i \hat{a}_i^{+}\hat{a}_i \tag{2.93}$$

On peut également établir les relations de commutation :

Dans la dernière de ces équations, on a sous-entendu dans le membre de droite l'opérateur identité de l'espace de Fock $H_\lambda\infty$. Ces relations de commutation sont caractéristiques d'une assemblée d'oscillateurs harmoniques.

Pour calculer les relations de commutation de l'opérateur nombre de particules avec les créateurs et annihilateurs, on utilise l'identité suivante, ou $\hat{A}$,$\hat{B}$ et $\hat{C}$ sont trois opérateurs :

$$[AB, C] = A\,[B, C] + [A, C]\,B \tag{2.94}$$

On déduit les relations :

$$\left[N, \hat{a}_i^+\right] = \sum_j \left[\hat{a}_i^+ \hat{a}_i, \hat{a}_i^+\right] = \sum_j \left(\hat{a}^+ j \left[\hat{a}_i, \hat{a}_i^+\right] + \left[\hat{a}_j^+, \hat{a}_i^+\right] \hat{a}_j\right) = \hat{a}_i^+ \tag{2.95}$$

Cette relation de commutation avec l'opérateur nombre de particules N est caractéristique d'un opérateur qui augmente le nombre de particules d'une unité Pour l'opérateur a_i, qui diminue le nombre de particules d'une unité,on obtient :

$$[N, \hat{a}_i] = -\hat{a}_i \quad \text{et} \qquad \left[N, \hat{a}_i^+\right] = \hat{a}_i^+ \tag{2.96}$$

2.7 Formalisme de l'algèbre utilisée :

La mécanique quantique dans l'espace déformé correspondante a l'étude d'Hamiltonien dépondant des opérateurs de position et l'impulsion qui satisfont une algèbre de commutateurs non canoniques. L'étude des modèles exactement solubles en mécanique quantique peut nous permettre d'avoir une meilleure compréhension de certains phénomènes survenant en théorie quantique des champs non commutative.

2.7.1 Opérateurs dans l'espace déformé et leurs propriétés :

L'algèbre q-déformé de Heisenberg est [25] :

$$\hat{a}\hat{a}^{+} - q\hat{a}^{+}\hat{a} = 1 \tag{2.97}$$

L'opérateur de nombre $\hat{N}$ peut être écrit comme suit :$\langle\psi|\phi\rangle$

$$\hat{N} = \hat{a}^{+}X\hat{a} \tag{2.98}$$

où l'opérateur de position X dans l'espace q-déformé est défini par la formule suivante :

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-q)^n}{(1-q^n)} \left(a^{+}\right)^{n-1} (a)^{n-1} \tag{2.99}$$

les opérateurs de création du moment cinétique J_+ et d'annulation de moment cinétique J_- dans l'espace q-déformé sont définis par les formules suivantes [25] :

$$\begin{aligned} J_+ &= a^{+}\sqrt{X}\sqrt{(2\alpha - N)} \\ J_- &= \sqrt{(2\alpha - N)}\sqrt{X}a \end{aligned} \tag{2.100}$$

2.7.2 L'oscillateur déformé généralisé et algèbres non linéaires

Nous partons d'une déformation arbitraire de l'oscillateur et nous construisons tous les algèbres oscillateurs déformés généraux qui étudient ses propriétés. Ces résultats sont généraux et ils peuvent être appliqués pour n'importe quel cas déformé, y compris le $q-$déformé. Une déformation générale de l'oscillateur harmonique peut être donnée par la relation de base [26] :

$$aa^{+} = g(aa^{+}) \tag{2.101}$$

où $\hat{a}$ et $\hat{a}^{+}$ sont des opérateurs conjugués hermites. Dans l'algèbre d'oscillateur ordinaire, la fonction $g\left(x\right)$ est définie par :

$$g(x) = 1 + x \tag{2.102}$$

ce qui conduit à la relation de commutation :

$$\left[\hat{a}, \hat{a}^{+}\right] = 1$$

L'opérateur de nembre N, par définition, satisfait aux relations de commutation :

$$[a, N] = a \ et \ \left[a^+, N\right] = -a^+ \tag{2.103}$$

Nous supposons que cet opérateur est donné par une relation comme suit :

$$N = f(a^+ a) \tag{2.104}$$

Si l'équation (2.103) est vraie, les relations suivantes peuvent être prouvées par induction :

$$[a, (a^+ a)^n] = ((g(a^+ a))^n - (a^+ a)^n)a \tag{2.105}$$

et

$$[a^+, (a^+ a)^n] = -a^+((g(a^+ a))^n - (a^+ a)^n). \tag{2.106}$$

Pour une fonction $f(x)$ holomorphique proche de zéro, l'équations (2.106)et (2.107) impliquent que :

$$\left[a, f(a^+ a)\right] = (f(g(a^+ a)) - f(a^+ a))a \tag{2.107}$$

et

$$\left[a^+, f(a^+ a)\right] = -a^+(f(g(a^+ a)) - f(a^+ a)). \tag{2.108}$$

Si la fonction $f(x)$ est choisie de telle sorte que :

$$f(g(x)) = 1 + f(x) \tag{2.109}$$

alors les relations de commutation (2.104) sont satisfaites. Dans les exemples travaillés, nous pouvons voir que, à partir de l'équation (2.110) et de la fonction $g(x)$, la fonction $f(x)$ peut être déterminée.

Habituellement, le problème inverse est posé ; la fonction $F(x)$ est donnée :

$$F = f^{-1} ou \ \ F(f(x)) = x \tag{2.110}$$

Fin de la fonction $g(x)$ est déterminé comme suit. :

$$g(x) = F(1 + f(x)) \tag{2.111}$$

Dans ce cas, les équations (2.101), (2.104) et (2.105) sont valides.

Dans l'équation (2.110) si x est remplacé $\hat{a}$ par $\hat{a}^+$, en raison de la définition (2.101). les éléments suivants :

$$f(aa^+) - f(a^+a) = 1 \tag{2.112}$$

Il s'agit d'une déformation générale de la relation de commutation (2.104), équation (2.113) montre également que les fonctions $f(x)$ $(ou\ F(x))$sont les fonctions de base de la théorie de la déformation et $g(x)$ est une fonction auxiliaire. Nous avons donc prouvé la proposition générale suivante.

Que soit une fonction réelle et $\hat{a}$,a^+ deux opérateurs conjugués hermites satisfaire la relation de commutation :$f(aa^+) - f(a^+a) = 1$

Ensuite, l'opérateur :

$N = f(a^+a)$

satisfait les relations

$$[a, N] = a\ et\ \left[a^+, N\right] - a^+ \tag{2.113}$$

le ket$|\alpha\rangle$ une base de vecteur propre de l'opérateur de nombre N est :

$$N\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle \tag{2.114}$$

Équations (2.104) impliquent que l'opérateur $\hat{a}$ $(ou\ a^+)$ est un opérateur de destruction (ou de création) de telle sorte que :

$$a\,|\alpha\rangle = \sqrt[2]{[\alpha]}\,|\alpha - 1\rangle \qquad a^+\,|\alpha\rangle = \sqrt{[\alpha + 1]}\,|\alpha + 1\rangle \tag{2.115}$$

où $[\alpha]$ est fonction de α ; de l'équation (2.101) nous constatons que :

$$[\alpha + 1] = g([\alpha])\ \ ou\ f([\alpha + 1]) = 1 + f([\alpha]) \tag{2.116}$$

À partir de ces équations et de la propriété (2.110) de la fonction $g(x)$, nous concluons que :

$$[\alpha] = F(\alpha) \tag{2.117}$$

2.7.3 Notre algèbre Déformée et sa propriété :

Dans cet espace, il y a deux cas selon notre choix de choisir, on a l'espace de position et l'espace d'impulsion.

a-Dans l'espace de position

on va définir pour l'espace de la position dans le cadre du principe d'incertitude généralisée nous avons :

$$\hat{X} = \hat{x}$$
$$\hat{P} = f\ (\hat{p}) \tag{2.118}$$

où $\hat{x}$ est $\hat{p}$ sont les opérateurs habituels de la mécanique quantique vérifiant la relation de commutation suivante :

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i \tag{2.119}$$

et $f\ (\hat{p})$ est une fonction injective prend la forme expansion :

$$f\ (\hat{p}) = \hat{p}\left(1 + \frac{\beta}{3}\hat{p}^2 + ...\right) \tag{2.120}$$

et aussi les opérateurs $\hat{X}$ et $\hat{P}$ vérifiant la relation de commutation suivante :

$$\left[\hat{X}, \hat{P}\right] = if\ '(\hat{p}) \tag{2.121}$$

En tenant compte du fait que :

$$\left[\hat{X}, \hat{P}\right] = i\left(1 + \beta\hat{p}^2\right) \tag{2.122}$$

Ce choix actuel convient à une longueur minimale. Et selon les relations (2.120) et (2.121) on choisit les deux opérateurs $\hat{X}$ et $\hat{P}$ selon la forme suivante :

$$\hat{X} = \hat{x}$$
$$\hat{P} = \hat{p}\left(1 + \frac{1}{3}\beta\hat{p}^2\right) \tag{2.123}$$

où $\beta \rangle 0$.

b-Dans l'espace d'impulsion :

À partir de la relation de commutation déformée $\left[\hat{X},\hat{P}\right]=i\left(1+\beta\hat{p}^{2}\right)$ et dans l'espace d'impulsion, les opérateurs $\hat{X}$ et $\hat{P}$ sont donnés comme suit [9] :

$$\begin{aligned}\hat{P}&=\hat{p}\\ \hat{X}&=i\left[\left(1+\beta\hat{p}^{2}\right)\frac{d}{dp}\right]\end{aligned}\tag{2.124}$$

Considérons l'algèbre d'Heisenberg associative générée par les opérateurs $\hat{X}$ et $\hat{P}$, satisfaisant à la relation de commutation :

$$\left[\hat{X},\hat{P}\right]=i\left(1+\beta\hat{p}^{2}\right)\qquad\qquad \beta\ \rangle\ 0\tag{2.125}$$

2.7.4 Relation d'incertitude dans notre espace déformé

L'incertitude d'Heisenberg $\Delta x\Delta p$ dans notre espace déformé est calculé selon la manière suivante :

à partir de la relation d'incertitude d'Heisenberg généralisée suivante :

$$\langle\Delta x\rangle\ \ \langle\Delta p\rangle\geq\frac{1}{2}\left|\langle[x,p]\rangle\right|\tag{2.126}$$

et dans notre espace déformé on a :

$$\left[\hat{X},\hat{P}\right]=i\left(1+\beta\hat{p}^{2}\right)\tag{2.127}$$

on remplace cette dernière relation (2.126) dans la relation (2.125), on obtient comme suit :

$$\Delta x\Delta p\geqslant\frac{1}{2}\left[1+\beta\left(\Delta p\right)^{2}\right]\tag{2.128}$$

où $\Delta p=p-\langle p\rangle$.

Chapitre 3

Dynamique du système quantique :

3.1 La particule libre $(V(x) = 0$ et $\varepsilon = 0)$

On pose dans cette section $(\hbar = c = 1)$

Dans le cas de la particule libre, , l'Hamiltonien $\hat{H}$ est défini par la relation suivante :

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} \tag{3.1}$$

où

$$\hat{p} = -i\frac{d}{dx} \tag{3.2}$$

On a l'équation deSchrödinger comme suit :

$$\hat{H}\psi\left(x,t\right) = E\psi\left(x,t\right) \tag{3.3}$$

On introduit le formalisme précédent réel.(3.1), (3.2) , on obtient comme suit :

$$\frac{\hat{p}^2}{2m}\psi\left(x,t\right) = E\psi\left(x,t\right) \tag{3.4}$$

Pour simplifier les calcules, on choisit $\hat{p}^2 = \hat{p}_x^2$ et ainsi qu'on introduit le cas stationnaire suivant : en posant :

$$\psi(x,t) = \phi(x)\exp(-iEt) \tag{3.5}$$

Dans ce cas, on obtient sur l'équation différentielle selon la formule suivante :

$$\frac{d^2}{dx^2}\phi(x) + 2mE\phi(x) = 0 \tag{3.6}$$

Cette équation différentielle est deuxième d'ordre et linéaire, la solution générale est donnée par la formule exceptionnelle suivante :

$$\phi(x) = C_1\exp(i\sqrt{2mE}x) \tag{3.7}$$

où C_1 est la constante de normalisation.

Pour calculer le spectre d'énergie on choisit la condition suivante :

$\phi(\pi) = 0$, maintenant on remplace cette condition dans la solution précédente, on trouve :

$$A\cos(\sqrt{2mE}\pi) + iA\sin(\sqrt{2mE}\pi) = A\cos(n+\frac{1}{2})\pi \tag{3.8}$$

On déduit le spectre d'énergie E_n dans ce cas comme suit :

$$E_n = \frac{1}{2m}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \tag{3.9}$$

3.2 L'oscillateur harmonique avec un potentiel $V(y)$ et un champ électrique ε dans l'espace régulier :

on va étudier l'oscillateur harmonique à une dimension (1+1) est constitué par une particule de masse et d'énergie potentielle :

$$V(y) = \frac{1}{2}m\omega^2y^2 \tag{3.10}$$

On suppose que cette particule porte une charge q et qu'elle est plongée dans un champ électrique uniforme ε , parallèle à Oy .

L'énergie potentielle classique d'une particule placée dans un champ uniforme ε vaut :

$$W(y) = -q\varepsilon y \tag{3.11}$$

Pour obtenir en mécanique quantique l'opérateur hamiltonien $\hat{H}$ en présence du champ, il faut donc ajouter à l'énergie potentielle électrique $W(y)$ de l'oscillateur harmonique éq.(3.10) où :

$$W(y) = -q\varepsilon y \tag{3.12}$$

Ce qui donne :

$$\hat{H} = \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 y^2 - q\varepsilon y \tag{3.13}$$

Le problème est donc de trouver les étas stationnaires et l'énergie totale de cet opérateur .Dans ce but nous allons résoudre l'équation d'oscillateur harmonique suivante :

$$\left[\frac{-\hbar^2 d^2}{2mdy^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 y^2 - q\varepsilon y\right]\psi_1(y,t) = E(y)\psi_1(y,t) \tag{3.14}$$

Pour résoudre cette dernière équation (3.14), on introduit le changement du variable suivant :

$$x = y - \frac{q\varepsilon}{m\omega^2} \tag{3.15}$$

On obteint :

$$\frac{-\hbar^2 d^2\psi_1(x,t)}{2mdx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 y^2\psi_1(x,t) = \left[E(x) - \frac{1}{2}\frac{q\varepsilon}{m\omega^2}\right]\psi_1(x,t) \tag{3.16}$$

Pour résoudre cette dernière équation (3.14), on introduit le changement du variable suivant :

$$\psi_1(x,t) = \psi\,(x)\exp\left(-iEt\right) \tag{3.17}$$

et on note :

$$\zeta = E(x) - \frac{1}{2}\frac{q\varepsilon}{m\omega^2} \tag{3.18}$$

Et on multiplie l'équation (3.16) par $\frac{2m}{\hbar}$on aura :

$$\frac{d^2\psi\left(x\right)}{dx^2}+\frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}x^2\psi\left(x\right)=-\frac{2m\zeta}{\hbar^2}\psi\left(x\right) \tag{3.19}$$

$$\frac{d^2\psi\left(x\right)}{dx^2}+(\frac{2m\zeta}{\hbar^2}-\frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}x^2)\psi\left(x\right)=0 \tag{3.20}$$

C'est une équation de Schrödinger pour un'oscillateur harmonique à 1 dimension .On va utiliser un changement de variable.

$$z=\sqrt[2]{\frac{m\omega}{\hbar}x}\Longrightarrow\frac{d^2\varphi(x)}{dz^2}=\frac{m\omega}{\hbar}\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} \tag{3.21}$$

On remplace la dernière relation (3.21) dans l'eq. (3.20) et la multiplier par $\frac{\hbar}{m\varpi}$on aura :

$$\frac{d\psi^2(z)}{dz^2}+(\frac{2\zeta}{\hbar\omega}-\frac{m\omega}{\hbar})\psi(z)=0 \tag{3.22}$$

On remarque que $\frac{m\omega}{\hbar}$ c'est z^2 on va noter :

$$\beta=\frac{2\zeta}{\hbar\omega} \tag{3.23}$$

Donc l'équation différentielle (3.22) deveint :

$$\frac{d\psi^2(z)}{dz^2}+(\beta-z^2)\psi(z)=0 \tag{3.24}$$

eq.(3.24) est une équation differenteille d'ordre 2 avec variable constant , pour résoudre Cette équation premierement

$$\psi(z)=e^{\frac{-z^2}{2}}\phi\left(z\right) \tag{3.25}$$

C'ést la solution de l'équation suivante :

$$\phi^{''}\left(z\right)-z^2\phi\left(z\right)=-\phi\left(z\right) \tag{3.26}$$

La solution de cette équation différentielle est les polynômes d'Hermite $H_n(z)$ qui se donne selon la formule suivante :

$$\psi(z)\sim\left[e^{\frac{-z^2}{2}}\right]H_n(z) \tag{3.27}$$

La solution proposée a vérifié les dérivatives suivantes :
Pour la première dérivée est :

$$\frac{d\psi(z)}{dz} = e^{\frac{-z^2}{2}} \left\{ \frac{dH_n(z)}{dz} - zH_n(z) \right\} \tag{3.28}$$

Pour la deuxième dérivée est :

$$\frac{d^2\psi(z)}{dz^2} = e^{\frac{-z^2}{2}} \left\{ \frac{d^2H_n(z)}{dz^2} - 2\ z\ \frac{dH_n(z)}{dz} + (z^2-1)H_n(z) \right\} \tag{3.29}$$

On remplace éq.(3.27) et éq. (3.29) dans éq.(3.24), on trouve :

$$e^{\frac{-z^2}{2}} \left\{ \frac{d^2H_n(z)}{dz^2} - 2(z)\frac{dH_n(z)}{dz} + (\beta-1)\,H_n(z) \right\} = 0 \tag{3.30}$$

Nous avons le terme $e^{\frac{-z^2}{2}}$est non nul $\forall\ z \in I_D$, et pour cela , l'équation (3.29) obtient :

$$\frac{d^2H_n(z)}{dz^2} - 2(z)\frac{dH_n(z)}{dz} + (\beta-1)H_n(z) = 0 \tag{3.31}$$

Selon la définition de polynôme d'Hermite $H_n(z)$, la solution de cette équation c'ést :

$$H_n(z) = \sum_{n}^{\infty} c_n z^n \tag{3.32}$$

$$\frac{dH_n(z)}{dz} = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n z^{n-1} \tag{3.33}$$

et

$$\frac{d^2H_n}{dz}(z) = \sum_{\substack{d' \\ n=0}}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}z^n \tag{3.34}$$

Les polynômes d'Hermite $H_n(z)$ sont les solutions quand on remplace (3.20)et (3.21) dans (3.16), et pour cela pour calculer le spectre d'´énergie E_n on utilise les propriétés de l'équation différentielle de polynôme d'Hermiteon a $\beta = 2n+1$ on a déja noté $\beta = \frac{2\zeta}{\hbar\omega} = 2n+1 \Rightarrow \zeta = \frac{\hbar\omega}{2}(2n+1)$.
alors :

$$\zeta = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) \tag{3.35}$$

d 'apres l'équation (3.16).

$$\frac{-\hbar^2}{2m} + \frac{d^2\psi\left(x\right)}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\psi\left(x\right) = (E + \frac{1}{2}\frac{q^2\varepsilon^2}{m\omega^2})\psi\left(x\right) \tag{3.36}$$

et on a noté aussi $\zeta = E + \frac{1}{2}\frac{q^2\epsilon^2}{m\varpi^2} \Longrightarrow E = \zeta - \frac{1}{2}\frac{q^2\epsilon^2}{m\varpi^2}$.

$$E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}\frac{q^2\varepsilon^2}{m\omega^2} \tag{3.37}$$

Pour confirmer notre résultat obtenu, on calcule la limite du spectre d'énergie quand $\varepsilon = 0$, on trouve :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) \tag{3.38}$$

Ce résultat est lui même dans [27] .

Pour déterminer la fonction d'onde $\psi\left(x\right)$ on utilise les relations (3.21) et (3.27) on trouve la fonction d'onde comme suit :

$$\psi\left(x\right) = K_1 \left[e^{\frac{-m\omega}{2\hbar}x^2}\right] H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right) \tag{3.39}$$

où K_1 est la constante de normalisation.

Pour calcul la constante de normalisation K_1, on utilise la relation d'orthogonalité suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*\left(x\right)\psi\left(x\right)dx = 1 \tag{3.40}$$

On utilise le changement du variable

$$u = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x \tag{3.41}$$

et la propriété de polynôme orthogonal d'Hermite $H_n(x)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_m(x)H_n(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad m \neq n \\ 2^n n!\sqrt{\pi} & \text{pour} \quad m = n \end{cases} \tag{3.42}$$

Après du calcul, on obtient :

$$K_1 = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi} \frac{\hbar}{m\omega}}} \tag{3.43}$$

Donc la fonction d'onde est donnée sous forme suivante

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi} \frac{\hbar}{m\omega}}} \left[e^{\frac{-m\omega}{2\hbar} x^2} \right] H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right) \tag{3.44}$$

3.3 L'oscillateur harmonique avec un potentiel $V(y)$ et un champ électrique ε dans l'espace déformé

On va traiter notre problème d'oscillateur harmonique (OH) dans le choix, le potentiel vectoriel $V(x)$ est quadratique avec la présence du champ électrique ε .on considère une particule soumise un champ électrique ε dirigé suivant l'axe y. L'hamiltonien correspondant est donné par, "dans cette section on pose $(\hbar = c = 1)$:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + \hat{V}(y) - q\varepsilon\hat{y} \tag{3.45}$$

où

$$\hat{V}(y) = \frac{1}{2} m\omega^2 y^2$$

et

$$\hat{p}^2 = \hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2 \tag{3.46}$$

On utilise un changement du variable suit :
on pose :

$$x = y - \frac{q\varepsilon}{m\omega^2} \tag{3.47}$$

Pour simplifier les calcules, on va choisir dans notre travail une dimension $(1+1)$ où $\hat{p}^2 = \hat{p}_x^2$, alors dans ce cas l'équation de Schrodinger est donnée comme suit :

$$\left[\frac{1}{2m}\hat{p}_x^2+\frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2-\frac{q^2\varepsilon^2}{2m\omega^2}\right]\psi(p)=E\psi(p) \tag{3.48}$$

On remplace les opérateurs de position $\hat{x}$ et d'impulsion $\hat{p}$ dans l'équation eq.(3.48), on obtient sur l'équation différentielle deuxième d'ordre et linéaire comme suivante :($\hat{p}_x=\hat{p}$)

$$\left[\frac{1}{2m}\hat{p}^2-\frac{1}{2}m\omega^2\left(1+\beta\hat{p}^2\right)^2\frac{d^2}{dp^2}-m\omega^2\beta\hat{p}\left(1+\beta\hat{p}^2\right)\frac{d}{dp}-\frac{q^2\varepsilon^2}{2m\omega^2}\right]\psi(p)=E\psi(p) \tag{3.49}$$

Dans le cas stationaire

$$\psi(p)=\phi(p)\exp\left(-iEt\right) \tag{3.50}$$

On introduit ce réel.(3.50), dans l'eq.(3.49) on obtient comme suit :

$$\left[\frac{1}{2m}\hat{p}^2-\frac{1}{2}m\omega^2\left(1+\beta\hat{p}^2\right)^2\frac{d^2}{dp^2}-m\omega^2\beta\hat{p}\left(1+\beta\hat{p}^2\right)\frac{d}{dp}-\left(E+\frac{q^2\varepsilon^2}{2m\omega^2}\right)\right]\phi(p)=0 \tag{3.51}$$

Pour résoudre cette éq. (3.51) différentielle on utilise le changement du variable suivant :
on pose

$$u=\frac{1}{\sqrt{\beta}}\arctan\left(\sqrt{\beta}p\right) \tag{3.52}$$

Quand introduit ce changement du variable éq.(3.52), on obtient sur l'équation différentielle suivante :

$$\left[\frac{1}{2}m\omega^2\frac{d^2}{du^2}-\frac{1}{2m\beta}tg^2\left(\sqrt{\beta}u\right)+\left(E+\frac{q^2\varepsilon^2}{2m\omega^2}\right)\right]\phi(u)=0 \tag{3.53}$$

Maintenant, on introduit le changement du variable suivant :

$$z=\sin\left(\sqrt{\beta}u\right) \tag{3.54}$$

l'éq.(3.53) se transforme à l'une nouvelle forme :

$$\left[\frac{1}{2}m\omega^2\beta(1-z^2)\frac{d^2}{dz^2}-\frac{1}{2}m\omega^2 z\beta\frac{d}{dz}-\frac{1}{2m\beta}\frac{z^2}{1-z^2}+\left(E+\frac{q^2\varepsilon^2}{2m\omega^2}\right)\right]\phi(z)=0 \tag{3.55}$$

On peut simplifier cette équation (3.55) d'une forme suivante :

$$\left\{\left(1-z^2\right)\frac{d^2}{dz^2}-z\frac{d}{dz}-\frac{1}{m^2\omega^2\beta^2}\frac{1}{1-z^2}+\frac{1}{m^2\omega^2\beta^2}+\right.$$
$$\left.\frac{2}{m\omega^2\beta}\left(E+\frac{q^2\varepsilon^2}{2m\omega^2}\right)\right\}\phi(z)=0 \tag{3.56}$$

Pour résoudre cette équation éq.(3.56) ,nous utilisons l'éxprésion suivante :

$$\phi(z)=\left(1-z^2\right)^{\frac{\Omega}{2}}f\quad(z) \tag{3.57}$$

Où Ω est un paramètre réel.

Nous passons beaucoup des étapes des calculs, on obtient sur l'équation différentielle suivante :

$$\left\{\left(1-z^2\right)\frac{d^2}{dz^2}-(1+2\Omega)\,z\frac{d}{dz}+\frac{\left[\Omega\left(\Omega-2\right)+\Omega-\frac{1}{m^2\omega^2\beta^2}\right]}{1-z^2}\right.$$
$$\left.-\Omega^2+\frac{1}{m^2\omega^2\beta^2}+\frac{2}{m\omega^2\beta}\left(E+\frac{q^2\varepsilon^2}{2m\omega}\right)\right\}f\ (z)=0 \tag{3.58}$$

Pour éliminer le terme proportionnel de $\frac{1}{1-z^2}$, nous fixons le paramètre Ω, donc on va solutionner l'équation suivante :

$$\Omega\left(\Omega-2\right)+\Omega-\frac{1}{m^2\omega^2\beta^2}=0 \tag{3.59}$$

Quand on a résolu l'éq(3.59), nous avons trouvé les valeurs de Ω suivantes

$$\Omega_+=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+4\frac{1}{m^2\omega^2\beta^2}} \tag{3.60}$$

$$\Omega_{-} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4\frac{1}{m^2\omega^2\beta^2}} \tag{3.61}$$

Physiquement, on choisit Ω_+ , alors le paramètre Ω prend la valeur suivante :

$$\Omega = \Omega_+ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4\frac{1}{m^2\omega^2\beta^2}} \tag{3.62}$$

on a fixé Ω alors ,l'équation(3.58) prend la forme suivante :

$$\left\{\left(1 - z^2\right)\frac{d^2}{dz^2} - (1 + 2\Omega)\, z\frac{d}{dz} - \Omega^2 + \frac{1}{m^2\omega^2\beta^2} + \frac{2}{m\omega^2\beta}\left(E + \frac{q^2\varepsilon^2}{2m\omega}\right)\right\} f(z) = 0 \tag{3.63}$$

Cette équation différentelle éq(3.63) a la même forme que l'équation différentelle de polynôme de Gegenbauer suivante :

$$\left\{\left(1 - z^2\right)\frac{d^2}{dz^2} - (1 + 2\Omega)\, z\frac{d}{dz} + n\,(n + 2\Omega)\right\} f(z) = 0 \tag{3.64}$$

où

$$f(z) = K_2 C_n^{\Omega}(z) \tag{3.65}$$

K_2 est la constante de normalisation

Par identification entre les deux équations éq.(3.63) et éq.(3.64) , on obtient sur la relation du spectre d'énergie du système dans notre espace déformé comme suit :

$$E_n = \frac{m\omega^2\beta}{2}n^2 + m\omega^2\beta\Omega\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{q^2\varepsilon^2}{2m\omega^2} \tag{3.66}$$

D'après le remplacement du paramètre Ω , la relation du spectre énergie devient :

$$E_n = \frac{m\omega^2\beta}{2}n^2 + \frac{m\omega^2\beta}{2}\left(1 + \sqrt{1 + 4\frac{1}{m^2\omega^2\beta^2}}\right)\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{q^2\varepsilon^2}{2m\omega^2} \tag{3.67}$$

Le chima du spectre d'énergie dans le cas de présence du champ électrique ε, on choisit les paramètres suivants $\hbar = m = \omega = q = 1$ et $n = 0, 1, 2, 3...$

Cas n°1 :

$\beta = 0$ (absence de la déformation).

$\beta = 0,01$,alors $\Omega \simeq 100,50125$.

$\beta = 0,05$,alors $\Omega \simeq 20,506249$.

Cas n°2 :

$\beta = 0$ (absence de la déformation).

$\beta = 0.1$, alors $\Omega \simeq 10,51249$.

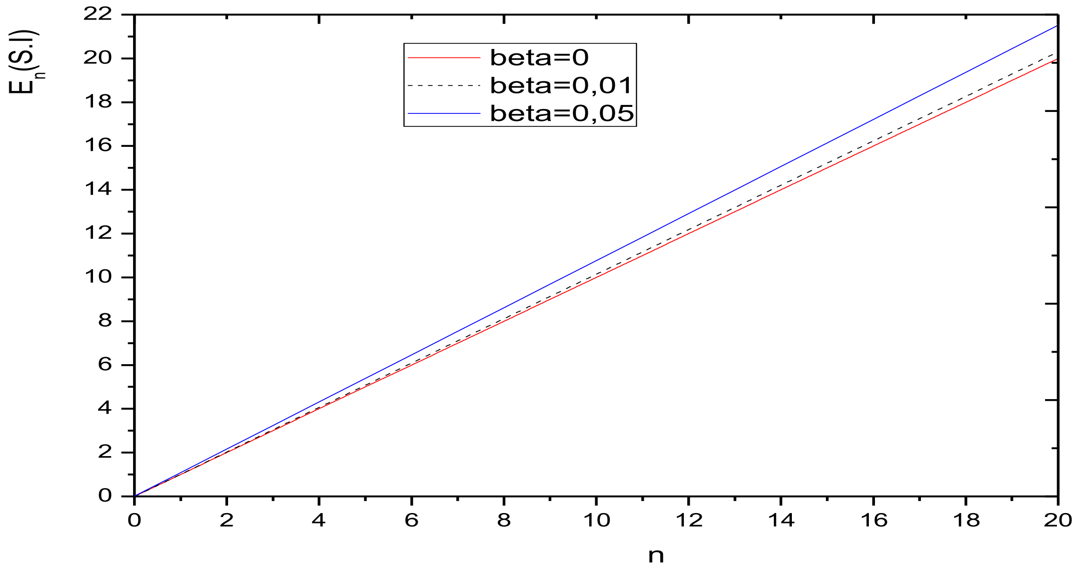

Fig 1 : Spectre d'énergie En en fonction de n

dans le cas des valeurs de beta sont petites:

On peut voir que les petites valeurs de beta sont données des résultats plus proches dans l'espace déformé que l'espace régulier, donc ces valeurs de beta sont valides.

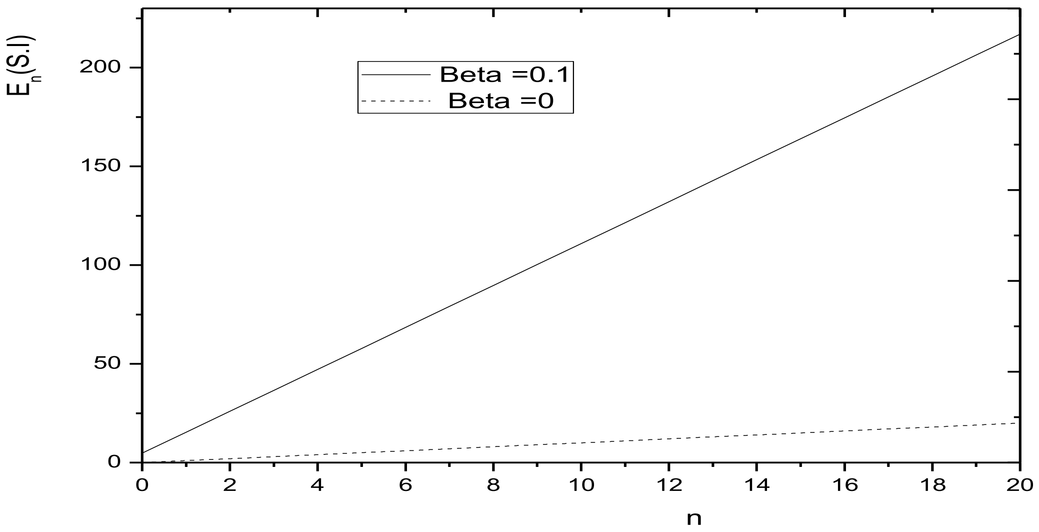

Fig.2 : Spectre d'énergie E_n en fonction de n

dans le cas de valeur de beta est grande

On peut voir que la grande valeur de beta est donnée des résultats

plus loin dans l'espace déformé que l'espace régulier,

donc cette valeur de beta n'est pas valide.

Pour confirmer notre résultat obtenu, on calcule les limites suivants :

Cas n°1 : absence de la déformation ($\beta = 0$) :

nous avons :

$$\lim_{\beta \to 0} (\beta \Omega) = \frac{1}{m\omega} \tag{3.68}$$

Donc :

$$\lim_{\beta \to 0} E_n = \omega \left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{q^2 \varepsilon^2}{2m\omega} \tag{3.69}$$

Ce dernier résultat est le même résultat qui nous avons déjà calculé dans l'espace régulier (l'espace ordinaire $\beta = 0$).

Cas n°2 : absence du champ électrique($\varepsilon = 0$) :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} E_n = \frac{m\omega^2 \beta}{2} n^2 + m\omega^2 \beta \Omega \left(n + \frac{1}{2}\right) \tag{3.70}$$

Cas n°3 : absence de la déformation($\beta = 0$) et le champ électrique ($\varepsilon = 0$) :

dans le cas d'absence de : la déformation ($\beta = 0$) et le champ électrique($\varepsilon = 0$), on obtient sur le spectre d'énergie dans l'espace ordinaire comme suit :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\lim_{\beta \to 0} E_n\right) = \omega \left(n + \frac{1}{2}\right) \tag{3.71}$$

Pour voir la valeur de décalage des niveaux d'énegie on calcule $|\Delta E|$ soit l'espace régulier ou espace déformé : :

$$|\Delta E| = |E_n(\varepsilon \neq 0) - E_n(\varepsilon = 0)| = \frac{q^2 \varepsilon^2}{2m\omega} \tag{3.72}$$

Cette valeur qui explique l'influence du champ électrique ε sur le spectre d'énergie E_n " l'effet Stark ".

Pour déterminer la formule de la fonction d'onde, on utilise les relations (3.57) et (3.65) on trouve la formule comme suit :

$$\phi(p) = K_2 \left[\cos\left(\arctan\left(\sqrt{\beta} P\right)\right)\right]^{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4\frac{1}{m^2\omega^2\beta^2}}\right)} \times$$

$$C_n^{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4\frac{1}{m^2\omega^2\beta^2}}\right)} \left(\sin\left(\arctan\left(\sqrt{\beta} P\right)\right)\right) \tag{3.73}$$

Chapitre 4

Conclusion

Dans ce projet de mémoire de master 2 physique théorique, nous avons traité le problème d'oscillateur harmonique (OH) dans deux cas essentiels : espace régulier (ordinaire) et espace déformé. Pour cas n°1 (espace régulier) : le spectre d'énergie E_n est déterminé en fonction du n du champ électrique " l'effet Stark ", où la forme de spectre d'énergie E_n est linéaire, et la fonction d'onde $\psi(x)$ est déterminé en fonction du polynôme d'Hermite $H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right)$. Pour cas n°2 (espace déformé) : le spectre d'énergie E_n est proportionnel de puissance de n qui s'explique le phénomène de confinement et ainsi que du champ électrique ε qui explique par l'effet Stark et est déterminé en fonction de polynôme Gegenbouer $C_n^{\Omega}\left(\sin\left(\arctan\left(\sqrt{\beta}P\right)\right)\right)$. Pour tester notre calcul du spectre d'énergie E_n dans l'espace déformé, on a calculé les cas limites du spectre d'énergie dans cet espace déformé, les résultats obtenus concordent exactement avec les résultats dans l'espace régulier que nous avons déjà calculé dans la section précédente et ainsi qu'avec ceux de la littérature.

Chapitre 5

Références :

[1]–Michel Paty. : Poincaré et le principe de relativité. Congrès International Henri Poincaré, Nancy, France, 22 (1994).

[2]–RA.Serway.R.J.Beichner :physics and engineers with modern physics 5ème edition lanaissance.

[3]–J.J. Sakurai - Jim Napolitano : modern quantum méchanics.Second Edition(2012).

[4]-Paul A. Tipler-Ralph A. Llewellyn :MODERN PHYSICS.Fifth Edition(2008).

[5]–Michel Gondran, Jean Pierre Treuil. :Bricmont J.Contre la philosophie de la mécanique quantique, infranckR.(éd.). AEIS, (2015).

[6]–Michel Le Bellac. :Physique quantique. CNRS Éditions. **2**^{e} édition, 27(2007).

[7]– Alain Connes Géométrie non commutative EspaceII.Algèbres d'opérateur set, (1980).

[8]–Alain Connes. : Médaille d'or mathématicien, CNRS, (2004).

[9]–T.V. Fityo , I.O. Vakarchuk, V.M. Tkachuk. : One-dimensional Coulomb-like problem in deformed space with minimal length. J. Phys. A : Math. Gen. **39,** 2143–2149 (2006).

[10]-P.Amiot et L.Marleau. : Mécanique Classique II.Université Laval , Québec , Canada, 4(1997).

[11]–N.P.Landsman. : Deformations of Algebras of observables and the classical limit of quantum mechanics. Rev.math.phys.**05**, 775-806 (1993).

[12]−J. von Neumann. : Mathematical Foundations of Quantum Mechanics . Princeton University Press, Berlin, (1955).

[13]−F.J. Murray , J. von Neumann : On rings of operators I, II, IV. Ann. Math. 37, 116–229 (1936).

[14]-Claude Aslangul. : Mécanique quantique 3, Corrigés détaillés et commentés des exercices et problèmes. Groupe De Boeck s.a., Rue des Minimes 39, B-1000 Bruxelles. **1**, 119 (2009).

[15]−Allen C. Hirshfeld, Peter Henselder. :Deformation quantization in the teaching of quantum mechanics.Am. J. Phys. **70**, 538 (2002).DOI : 10.1119/1.1450573.

[16]-François Gieres :Formalisme de Dirac et surprises mathématiques en mécanique quantique.LYCEN 9960b.Juillet (1999)s.

[17]−9.E. Schrödinger : Über das Verhältnis der Heisenberg-Born-Jordanschen Quantenmechanik zu der meinen. Ann. Phys. **79**, 734–756.(1926).

[18]−3.P.A.M.Dirac : The fundamental equations of quantum mechanics. Proc. R. Soc. Lond. A109, 642–653 (1926).

[19]−P.A.M. Dirac : The Principles of Quantum Mechanics (The Clarendon Press, Oxford (1930).

[20]-Daniel Greenberger, Klaus Hentschel, Friedel Weinert. : Compendium of Quantum Physics, Concepts, Experiments, History and Philosophy. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 511 (2009).

[21]-François Gieres :Formalisme de Dirac et surprises mathématiques en mécanique quantique1,Dédié a la mémoire de Tanguy Altherr2 (1963 - 1994) .

[22]-Equipe Peadagogique :introduction mécanique quantique.PHY305 - UE Fondamentale .Crédits : 6 - CM : 30h - TD : 20h - TPE : 10h. See discussions, stats, and author profiles for this publication at : https ://www.researchgate.net/publication/327681741.

[23]-Michael Stone,Paul Goldbart. : Mathematics for Physics, A Guided Tour fur Graduate Students. Cambridge university press. 729 (2009).

[24]-Moniek Verschuren.Coherent states in quantum méchanics.Bachelor thesis Radboud University Nijmegen Supervisor : Dr. W.D. van Suijlekom.8juillet 2011.

[25]S.Chaturvedi , V.Srinivasan. : Aspects of q-oscillator quantum mechanics. Phys.Rev.A. **44**, 8020 (1991)..

[26]C Daskaloyannis. : Generalized deformed oscillator and nonlinear al-

gebras.J. Phys. A : Math. Gen. **24**, L789 (1991).

[27]Hubert Krivine. : Exercices de mathématiques pour physiciens corrigés et commentés. Cassini-Paris, 179 (2003).

Chapitre 6

Résumé-Abstract

6.1 Résumé :

Dans ce mémoire nous présentons les outils fondamentaux de formalisme de la mécanique quantique relativiste basé sur le principe d'incertitude d'Heisenberg généralisé, Nous intéressons à l'espace déformé. C'est l'espace déformé qui est Consacré de résoudre les équations relativistes par exemple l'équation de Klein Gordon, Dirac, Oscillateur harmonique, équation de Schrödinger...

On a introduit un paramètre de déformation $\beta\rangle 0$ Nous appliquons au potentiel d'un oscillateur harmonique à une dimension $(1+1)$ dans un champ électrique ε, nous illustrons comment on peut résoudre l'équation de Schrödinger dans l'espace des impulsions et extraire le spectre d'énergie, analytiquement, dans ce formalisme utilisant les polynômes de Gegenbauer.

Grâce à cette étude, nous sommes arrivés à confirmer que tous les résultats que nous avons obtenus en utilisant l'algèbre déformée supposent que l'absence du paramètre de déformation $(\beta = 0)$ correspond aux résultats de ce système de la mécanique quantique dans l'espace ordinaire.

Mots-clés :

Mécanique Quantique, Oscillateur harmonique, espace ordinaire et déformé..

6.2 Abstract

In this thesis we present the fundamental tools of formalism of relativistic quantum mechanics based on the generalized Heisenberg uncertainty principle. We are interested in the deformed space. It is the deformed space which is devoted to solving relativistic equations for example the equation of Klein Gordon, Dirac, Harmonic Oscillator, Schrödinger equation...

We have introduced a deformation parameter $\beta\rangle 0$. We apply to the potential of a one-dimensional harmonic oscillator $(1 + 1)$ in an electric field ε. We illustrate how we can solve the Schrödinger equation in the pulse space and extract the energy spectrum, analytically, in this formalism using Gegenbauer polynomials.

Thanks to this study, we were able to confirm that all the results we obtained using the deformed algebra assume that the absence of the deformation parameter $(\beta = 0)$ corresponds to the results of this system of quantum mechanics in l ordinary space.

Key-words :

Quantum mechanics, Harmonic oscillator, ordinary and deformed space.

Chapitre 7

Annexes

7.1 Polynômes d'Hermite :

Les polynômes couverts dans ce chapitre sont des solutions à une équation différentielle ordinaire (ODE), l'équation hypergéométrique.

En général, l'équation hypergéométrique peut être écrite comme :

$$s(x)F"(x) + t(x)F'(x) + \lambda F(x) = 0 \tag{7.1}$$

où $F(x)$ est une fonction réelle d'une variable réelle $F : U \to R$, où $U \subset R$ est un sous-ensemble ouvert de la ligne réelle, et $\lambda \epsilon R$,une valeur propre correspondante, et les fonctions $s(x)$et $t(x)$sont des polynômes réels de la plupart du deuxième ordre et du premier ordre, respectivement.

Il y a différents cas obtenus, selon le type de fonction $s(x)$ dans Eq. (1). Lorsque s(x) est une constante, Eq. (7.1) prend la forme

$$F"(x) + 2\alpha x F'(x) + \lambda F(x) = 0 \tag{7.2}$$

et si $\alpha = 1$ on obtient les polynomiaux hermites. Lorsque $s(x)$ est un polynôme du premier degré, Eq. (7.1) prend la forme :

$$xF"(x) + (-\alpha x + \beta + 1)F'(x) + \lambda F(x) = 0 \tag{7.3}$$

et quand $\alpha = 1$et $\beta = 0$, on obtient les polynômes de Laguerre. Il y a trois cas différents quand $s(x)$ est un polynôme du deuxième degré. Lorsque le polynôme du deuxième degré a deux racines réelles différentes, Eq. (7.1) prend la forme :

$$(1-x^2)F"(x)+(\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)xF'(x)+\lambda F(x)=0 \tag{7.4}$$

il s'agit de l'équation de jacobi, et pour différentes valeurs de αet β, on obtient des cas particuliers de polynômes : polynômes de Gegenbauer si $\alpha=\beta$, Tchebycheff I et si : $\alpha=\beta=\pm\frac{1}{2}$,et polynômes de Legendre si $\alpha=\beta=0$. Lorsque le polynomial du deuxième degré a une double racine, Eq. (7.1)prend la forme :

$$x^2F"(x)+\left[(\alpha+2)\,x+\beta\right]F'(x)+\lambda F(x)=0 \tag{7.5}$$

et quand $\alpha=-1$ et $\beta=0$, on obtient les polynômes de Bessel.

La façon la plus courante de résoudre les polynômes spéciaux est de résoudre l'équation différentielle associée par la série de puissance et la méthode Frobenius y= $\sum_n a_n x^n$

Les polynomiaux correspondants satisfont aux équations différentielles suivantes :

7.1.1 équation différentielle d'Hermite :

Dans le problème des valeurs aux limites de Sturm-Liouville, il existe un cas particulier appelé l'équation différentielle d'Hermite qui se pose dans le traitement de l'oscillateur harmonique en mécanique quantique. L'équation différentielle d'Hermite est définie comme : équation différentielle d'Hermite :

$$y"-2xy'+2ny=0 \tag{7.6}$$

où est un nombre réel. Car est un entier non négatif, c'est-à-dire que les solutions de l'équation différentielle d'Hermite sont souvent appelées polynômes d'Hermite .$H_n(x)$.

7.1.2 Propriétés importantes :

Formule de Rodrigues : polynômes hermites peuvent s'exprimer par la formule de Rodrigues.

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}):n=1,2,3....... \tag{7.7}$$

Fonction génératrice : la fonction génératrice de les polynômes d'Hermite est :

$$e^{2tx-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)x^n}{n!} \tag{7.8}$$

Orthogonalité de polynôme d'Hermite $H_n(x)$: $n = 1, 2, 3....$, forment un ensemble orthogonal complet sur l'intervalle-$\infty \prec x \prec +\infty$ en ce qui concerne la fonction de pondération e^{x^2} . Il est possible de

montrer que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad m \neq n \\ 2^n n! \sqrt{\pi} & \text{pour} \quad m = n \end{cases} \tag{7.9}$$

En utilisant cette orthogonalité, une fonction continue $f(x)$ de pièce peut être exprimée en termes de polynôme d'Hermite :

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n H_n(x) = \{f(x) \quad \text{si } f(x) \text{ est contiune}$$

Si non on a

$$\frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} \tag{7.10}$$

Ou :

$$C_n = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x) H_n(x) dx \tag{7.11}$$

Cette expansion de série orthogonale est également connue sous le nom d'expansion de série de Fourier-Hermite ou d'expansion de série de Fourier généralisée.

Fonctions paires / impaires : Le fait qu'un polynôme d'Hermite soit une fonction paire ou impaire dépend de son degré n.

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x) \tag{7.12}$$

$H_n(x)$ est une fonction paire, quand n est pair.

$H_n(x)$est une fonction impaire, quand n est impair.

Relation de récurrence : Un polynôme d'hermite à un moment donné peut être exprimé par les polynomiaux voisins d'Hermite au même point.

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \tag{7.13}$$

$$H^{'}(x) = 2nH_{n-1}(x) \tag{7.14}$$

7.2 polynômes de Gegenbauer :

En mathématiques, les polynômes de Gegenbauer ou polynômes ultrasphériques sont une classe de polynômes orthogonaux. Ils sont nommés ainsi en l'honneur de Leopold Gegenbauer (1849-1903). Ils sont obtenus à partir des séries hypergéométriques dans les cas où la série est en fait finie :

$$C_n^{(\alpha)}(z) = \frac{(2\alpha)^n}{n!} 2F_1(-n, 2\alpha + n, \alpha + \frac{1}{2} + \frac{1+z}{2}) \tag{7.15}$$

7.2.1 Propriétés :

Les polynômes de Gegenbauer sont orthogonaux sur $[-1; 1]$ pour le poids $w(x) = (1 - x^2)^{\alpha - 1/2}$:

$$\int_{-1}^{1} C_n^{(\alpha)}(x) C_m^{(\alpha)}(x)(1 - x^2)^{\alpha - 1/2} dx = \delta_{n,m} \frac{\pi 2^{1-2\alpha}\tau(n + 2\alpha)}{n!(n + \alpha)\tau(\alpha)^2} \tag{7.16}$$

Relation de récurrence :

Les polynômes de Gegenbauer peuvent être construits par la relation de récurrence :

$$C_0^{(\alpha)}(x) = 1, C_1^{(\alpha)}(x) = 2\alpha x, C_n^{(\alpha)} = \frac{1}{n}(2x(n+\alpha-1)C_{n-1}^{(\alpha)} - (n+2\alpha-2)C_{n-2}^{(\alpha)}) \tag{7.17}$$

7.2.2 Liens avec d'autres suites de polynômes orthogonaux :

Les polynômes de Gegenbauer sont solutions de l'équation différentielle :

$$(1 - x^2)y" - (2\alpha + 1)xy' + n(n + 2\alpha)y = 0 \tag{7.18}$$

On peut remarquer que pour $\alpha = \frac{1}{2}$, l'équation se ramène à celle satisfaite par les polynômes de Legendre, et pour $\alpha = 1$, on retrouve celle des polynômes de Tchebychev de seconde espèce.

$|\rangle$: ket.
$\langle|$: bras.
$\underline{\langle\ .|.\rangle}$: produit scalaire .
$\langle\ .|.\rangle$: produit scalaire hermitique .
$[]$: commutateur .
$\|\|$: une norme .
$\{|.\rangle\}$: une base .
$|\uparrow\rangle$: spin up .
$|\downarrow\rangle$: spin down .
Id : opérateur identité .
P : probabilité.
p : implussion .(quantité de mouvement).
m : masse .
ε :champ éléctrique.
S : spin .
$\hat{H}$: hamilotien.
$V(x)$: potentiel.
$\hbar$: constante de Plank réduite ($\hbar = \frac{h}{2\pi}$).
δ : delta de kronecker .
E : energie .
$\psi(x)$: fonction d'onde .
$\hat{A}$: opérateur .
$\hat{\Pi}$: projecteur.
MQ : mécanique quantique.
NC : non commutatif/ive.
OH : oscillateur harmonique.
(PIG) : principe dincertitude généralisé.
H : éspace de Hilbert .

mecanique matricielle : est une formulation de la mécanique quantique construite par Werner Heisenberg, Max Born et Pascual Jordan en 1925.

mécanique ondulatoire : est la forme initiale de la mécanique quantique avant que celle-ci ne soit formalisée au début des années 1920 par Niels Bohr, Erwin Schrödinger et Wolfgang Pauli. .