

11A-510-53-1

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
REPUBLIQUE ALGERINNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MENISTERE DE L'ENSEIGNEMEN SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

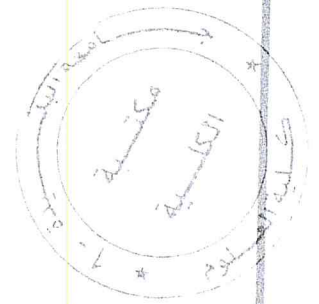
جامعة سعد دحلب البليدة
UNIVERSITE SAAD DAHLAB DE BLIDA



FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Mémoire de fin d'étude

Pour l'obtention du diplôme de master en
Modélisation stochastique et statistique



**THEME : EVALUATION DE LA PROBABILITE DE RUINE A
L'HORIZON INFINI APPLICATION AUX DONNES
ASSURANTIELLES**

Réalisé par :

Djelfi Nesrine
Khida Amina

Dirigé par : Dr Frihi Redhouane

Devant le jury

PRESIDENT : Mr. Tami Omar

Examineur : Mr. Rassoul Abdelaziz

Année universitaire : 2016-2017

MA-510-53-1

Dédicace

Ce travail modeste est dédié :

A mes parents, aucun hommage ne pourrait être à la hauteur de l'amour dont ils ne cessent de me combler. Que dieu leur procure

Bonne santé et longue vie.

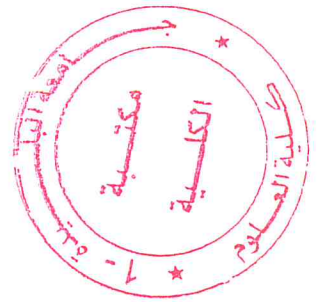
Mes adorables sœurs : Soumia, Maria et Zahra

Mon très cher frère : Mohamed

A mon binôme Nesrine et tous la famille Djelfi

A tous mes chers amis et mes collègues de l'Université de Blida

Et à tous ceux qui m'ont enseigné tout le long de mon cursus universitaire.



AMINA

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

*A mon père qui a souhaité vivre pour longtemps juste pour nous voir
Qu'est-ce que nous allons devenir. A celle qui m'a transmis la vie,
l'amour, le courage, à toi chère maman toutes mes joies.*

*Mes sœurs que j'aime beaucoup : Nazîha, Siham et son marié « rida »
et leur petit ange « Anes »*

Mon très cher frère : Khalil

Et à toute la famille Djelfi

*Mes amies qui m'ont toujours soutenue tout au long de ce projet
Et je remercie « Adel » qui m'a aidé et m'a encouragé dans tous mes
jours*

A mon binôme Amîna et toute la famille khîda

*Et à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin pour que ce projet
soit possible, je vous dis merci*

Nesrine

REMERCIEMENT

En préambule à ce mémoire nous remerciant **ALLAH** qui nous a aide et nous donné la patience et le courage durant ces longues années d'étude.

Nous souhaitons adresser nos remerciements les plus sincères aux personnes qui nous ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu'à la réussite de cette formidable année universitaire.

Ces remerciements vont tout d'abord au corps professoral et administratif de la Faculté des Sciences, pour la richesse et la qualité de leur enseignement et qui déploient de grands efforts pour assurer à leurs étudiants une formation actualisée.

Nous tenant à remercier sincèrement Monsieur **REDHOUANE FRIHI**, qui en tant que Directeur de mémoire, se sont toujours montrés à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'ils ont bien voulu nous consacrer et sans qui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour.

Nous remercions les membres de jury pour avoir accepté d'évaluer notre travail.

Nous n'oublions pas nos parents pour leur contribution, leur soutien et leur patience.

Enfin, nous adressons nos plus sincères remerciements à tous nos proches et amis, qui nous ont toujours encouragées au cours de la réalisation de ce mémoire.

Merci à tous et à toutes.

Table des matières

Dédicace	i
Remerciement	ii
Table des matières	iii
Liste des figures	v
Liste des tableaux	vi
Introduction	1
I Définitions préliminaire et notions de probabilités	
1 Définitions préliminaire	3
1.1 Définition de risque	3
1.2 Définition d'assurance	3
1.3 Définition de la prime d'assurance	4
1.4 Définition de la théorie de risque	5
2 Notion de probabilité	5
2.1 Lois usuelles	5
2.1.1 Lois discrètes	6
2.1.1 Lois continues	7
2.2 Fonction caractéristique des moments	10
2.3 Fonction caractéristique et transformé de Laplace	11
2.4 Produit de convolution	12
2.5 Processus stochastique	13
2.5.1 Processus à accroissement indépendant et stationnaire	13
2.5.2 Processus de renouvellement	13
2.5.3 Processus de poisson	13
2.5.4 Processus de poisson composé	14
2.6 Queue de distribution	14

2.7 Les tests statistiques	15
2.7.1 Test de Kolmogorov-Smirnov	15
2.7.1.1 Fonction de répartition empirique	16
2.7.1.2 Distance de Kolmogorov-Smirnov	16

II La théorie de risque

1 Modèle de risque	17
2 Modélisation de montant total de sinistres	17
2.1 Modélisation de montant total des sinistres	17
2.1.1 Modèle individuel	17
2.1.2 Modèle collectif	18
3 Modèle classique de ruine	19
3.1 Hypothèses du modèle Cramer-Lundberg	20
3.2 Modèle de Lundberg	20
4 Coefficient de chargement de sécurité	21
5 Modèle de Sparre-Anderson	21
5.1 Distribution de nombre de sinistres	22
5.1.1 La famille Panjer	22
5.2 Distribution des montants de sinistres	22
5.2.1 Distribution à queue fine	23
5.2.1.1 Coefficient d'ajustement	24
5.2.1.1.1 Majoration de coefficient d'ajustement	24
5.2.2 Distribution à queue lourde	25
5.3 Fonction de répartition et fonction génératrice de montants de sinistres	26
5.3.1 Fonction de répartition de Z_N	26
5.3.2 Fonction génératrice de Z_N	26
5.3.3 Moments de Z_N	27
5.4 Cas particuliers	27

III Estimation de la probabilité de ruine

1 Définition de la probabilité de ruine	28
2 Probabilité de ruine exacte à temps infini	29
2.1 La formule de Pollaczeck–Khinchine	29
2.2 Méthode du calcul exacte de la probabilité de ruine	30
2.2.1 Cas des montants de réclamations exponentielles.....	30
2.2.2 Montants de réclamation distribuée selon la loi gamma	31
2.2.3 Montant de réclamation suit loi mélange de deux exponentiel	31
2.3 Calcul de la probabilité de ruine exacte pour le modèle classique de ruine	32
2.3.1 Application au modèle de Lundberg	32
3 Approximations de la probabilité de ruine en temps infini	35
3.1 Approximation de Cramer-Lundberg	35
3.2 Approximation exponentielle	36
3.3 Approximation de Lundberg	36
3.4 Approximation de Beekman-Bowers	36
3.5 Approximation de Renyi	37
3.6 Approximation de De-Vylder	37
3.7 Approximation de 4-moment Gamma De Vylder	38
3.8 Approximations au cas des montants à queue fine.....	39
3.9 Approximations au cas des montants à queue lourde	39

IV Application :

1 Etude de la probabilité de ruine par simulation	41
1.1 Simulation de surplus	48
2 Calcul de la probabilité de ruine pour une compagnie d'assurance des salaires (CNAS)	50
2.1 Représentation des données	50

2.2 Ajustement des données	52
2.2.1 Ajustement de nombre de sinistres	52
2.2.2 Ajustement des montants de réclamation.....	53
2.2.3 Estimation de la probabilité de ruine	54
Conclusion	55
Référence	56
Annexe	57

Table des Figures

Graphe du densité de loi Gamma	7
Graphe du densité de loi Exponentielle.....	8
Graphe du densité de loi Normal	9
Graphe du densité de loi Weibull	10
Graphe représentant la probabilité de ruine de Lundberg	44
Graphe représente la probabilité de ruine pour loi 2 exponentiels	45
Graphe représente la probabilité de ruine de De-Vylder	47
Graphe représente la probabilité de ruine de queue lourde en fonction de capital initial	48
Graphe de la Comparaison de valeur de probabilité de ruine	49
Graphe trajectoire d'un surplus d'une compagnie d'assurance	50
Graphe represente des montants de remboursements pendant 48 mois	51
Graphe représente du nombre des sinistres pendant 48 mois	52

Liste des tableaux :

Lois usuelles discrètes	6
Fonctions génératrice et caractéristique des lois usuelles	12
Probabilité de ruine de Lundberg	43
Probabilité de ruine de 2 exponentielles	44
Probabilité de ruine calculée par le modèle de De-Vylder	45
Probabilité de ruine où cas des remboursements à queue lourde	47
Résumé des données de la compagnie d'assurance (CNAS)	51

ملخص:

شركات التأمين هي دائمة البحث عن قواعد جديدة لتسيير و تقييم خطر الإفلاس واحتمال حدوثه.

نظرية المخاطر جاءت بقواعد وطرق عديدة لتقييم احتمال هذا الخطر.

الهدف من عملنا هو تقييم خطر الافلاس في مدة زمنية غير منتهية لشركة التأمين للعمال الاجراء بالقلية اعتمادا على المقاربة الستوكاستيكية و نتائج نظرية الخطر.

كلمات مفتاحية: التأمين, فحص المقاربة, نموذج الخطر, احتمال الافلاس, محاكاة.

RESUME :

Les compagnies d'assurance sont toujours à la recherche de nouvelles règles pour aller et évaluer le risque de faillite et la possibilité de son apparition.

La théorie des risques est venue de nombreuses règles et méthodes pour évaluer la possibilité de ce danger.

L'objectif de notre travail est d'évaluer la probabilité de ruine à temps infini pour la compagnie d'assurance (CNAS) de Kolea. Nous nous appuyons sur l'approche stochastique et les résultats de la théorie de risque avec un ajustement de données collectées. De plus nous réalisons une approche de simulation pour estimer la probabilité de ruine à temps infinie.

Mots clés : Assurance, test d'ajustement, model de risque, probabilité de ruine, simulation.

ABSTRACTE :

Insurance companies are always looking for new rules to go and assess the risk of bankruptcy and the possibility of its appearance.

The theory of risk came from many rules and methods to assess the possibility of this danger.

The objective of this work is to evaluate the ruin probability with infinite time of insurance agency (CNAS) of Kolea, we introduce the stochastic approach and the results of the ruin theory with an adjustment of collected data. Furthermore a simulation study is realized in order to estimate a ruin probability in infinite time.

Keywords : Insurance, ajustment test, risk models, ruin probability, simulation.

Chapitre I :

Définition préliminaires et notions de probabilités

Chapitre I : Définitions Préliminaires et Notions de probabilités

Dans ce chapitre, nous présentons les bases de mathématiques et les définitions préliminaires nécessaires à la compréhension de ce mémoire, la définition de risque et de l'assurance et de la prime d'assurance et la théorie de risque, et nous rappelons quelques lois usuelles de probabilités utilisées pour la modélisation du nombre de sinistres et les montants de remboursements.

1. Définitions préliminaires

1.1. Risque :

Le risque correspond à l'occurrence d'un fait imprévisible (ou tout au moins incertain) susceptible d'affecter les membres, le patrimoine, l'activité de l'entreprise.

Nous parlons généralement de risque pour traduire une exposition de danger.

Dans le domaine financiers (Bancaire ou assurantielle ...), nous pouvons assimiler ce risque à une perte probable de valeur. Chacun désire connaître quel montant il peut perdre.

Le fondement de risque se base sur un arbitrage entre la rentabilité et le risque.

Il est commun de dire que sans prendre de risque, on ne peut rien gagner, Sans prendre de risque nous ne pouvons pas obtenir une rentabilité. Tout investissement représente un risque, qui sera plus ou moins élevé selon les différents types d'actifs financiers.

1.2 Assurance :

L'assurance est l'activité qui consiste, en échange de la perception d'une cotisation ou prime, à fournir une prestation prédéfinie, généralement financière, à un individu, une association ou une entreprise lors de la survenance d'un risque.

En assurance, on qualifie de risque, la probabilité que la réserve d'une compagnie d'assurance qui est la différence entre le totale des primes reçues et le total des montants des réclamations payés, deviennent négative à un certain temps. Ace moment la on dit que la **ruine** apparait.

Une compagnie assure un certain type de risque (incendie, vol, automobile ...), elle touche régulièrement les primes qui paient ses clients, et rembourse les sinistres au fur et à mesure qu'ils se produisent (ou qu'ils sont déclaré). La compagnie dispose de plus d'une certaine réserve de capital.

La problématique fondamentale pour une compagnie d'assurance est d'être en mesure d'effectuer les remboursements. Si à un instant donné la compagnie ne dispose pas du montant suffisant pour effectuer un remboursement on dira qu'elle est **ruinée**. Par conséquence, la compagnie doit être solvable à tout instant (la réserve ne doit pas tomber en dessous de 0), et rentable (La tarification doit permettre a l'assureur d'engranger des bénéfices pour rémunérer les actionnaires et les employés).

Le concept de la probabilité de ruine sera basé sur des modèles qui relèvent de la théorie de risque. Ces modèles consistent à la représentation du niveau des réserves comme étant le résultat de la différence entre les recettes par primes chargées et les paiements dus aux sinistres, enregistré en tenant compte d'un capital initial.

1.3 Prime d'assurance :

La prime d'assurance est le prix que le preneur d'assurance (assuré ou assureur direct) doit payer pour pouvoir bénéficier de la couverture d'assurance en cas de sinistre.

Cette prime est une prime entièrement technique. Elle est modifiée en fonction de la politique commerciale de la compagnie d'assurance. La prime d'assurance se compose de différentes parties suivantes :

1. Prime pure : c'est le montant du sinistre moyen auquel devra faire face l'assureur pour le risque. Mathématiquement, la prime pure est égale à l'espérance des pertes $E(X)$.
2. Chargement de sécurité : ce montant vient s'ajoute à la prime pure. Il permet à l'assureur de pouvoir résister à la volatilité (fluctuation) naturelle des sinistres.
3. Chargement pour frais : Ces frais comprennent les frais d'acquisition du contrat (rémunération des intermédiaires), les frais d'encaissement des primes, les frais de gestions (loyers, rémunération du personnel,...) et les impôts.

4. Bénéfice : la partie bénéfice correspond à la marge (positive ou négative) que l'assureur consent à une population en fonction de ses objectifs principaux.

1.4 Théorie de risque :

La théorie de risque également appelé théorie de ruine (TR) appartient aux sciences de la gestion des risques et à la mathématique appliquée à l'assurance. Il s'agit de l'étude mathématique de modèle stochastique et dynamiques adaptés aux réserves financières allouées à un portefeuille de contrats d'assurances de type non-vie (Assurance de type IARD (Incendie, Accidents et Risque divers)) ou de type vie (santé).

La richesse d'une compagnie d'assurance modélise en théorie de ruine par un processus stochastique caractérise la réserve de la compagnie $\{R(t), t \geq 0\}$, les remboursements doivent être comptés négativement, et les primes payées s'ajoutent au capital initial noté u .

2. Notions de probabilités:

2.1 Lois usuelles :

Les lois usuelles se répartissent en deux parties lois discrètes, et lois continues.

Les Lois discrètes sont définies par les probabilités élémentaires et les lois continues par leurs densités.

2.1.1 Lois discrètes :

Une variable aléatoire est dite discrète si les valeurs qu'elle peut prendre appartiennent à un ensemble fini ou infini dénombrable.

Soit $A \in \mathbb{N}$ (ou \mathbb{Z}), on obtient la probabilité de l'événement $(X \in A)$ à partir des probabilités des événements $(X = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou \mathbb{Z}), .On dira que "X suit la loi discrète" donné par $p(X = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou \mathbb{Z}), (ou une partie finie de \mathbb{N} (ou \mathbb{Z}),).

Table 1 : Lois usuelles discrètes

Nom et symbole	Support	Probabilités $P(X = K)$	Espérance	Variance
Bernoulli $B(p)$ $p \in]0,1[$	$\{0,1\}$	$P(X = 0) = 1 - p$ $P(X = 1) = p$	p	$p(1 - p)$
Binomiale $B(n, p)$ $p \in]0,1[, n \in \mathbb{N}^*$	$\{0,1, \dots, n\}$	$C_n^K p^K (1 - p)^{n-K}$	np	$np(1 - p)$
Binomiale négative $BN(n, p)$ $p \in]0,1[, n \in \mathbb{N}^*$	$\{n, n + 1, \dots\}$	$C_{k-1}^{n-1} p^n (1 - p)^{k-n}$	$\frac{n}{p}$	$\frac{n(1 - p)}{p^2}$
Poisson $p(\lambda)$ $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$	\mathbb{N}	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^K}{k!}$	λ	λ
Géométrique $\mathcal{G}(p)$ $p \in]0,1[$	\mathbb{N}^*	$p(1 - p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1 - p}{p^2}$

2.1.2 Lois continues :

Une variable aléatoire X est dite continue, s'il existe une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\forall A \subset \mathbb{R} \quad p_X(A) = p(X \in A) = \int_A f(x) dx$$

f Est appelée densité de X , on la note f_X .

- Gamma $\Gamma(\alpha, \lambda)$: avec $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \lambda \in \mathbb{R}^{+*}, x \in \mathbb{R}^+$ de Densité

$$f_X(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-2} e^{-\lambda x}$$

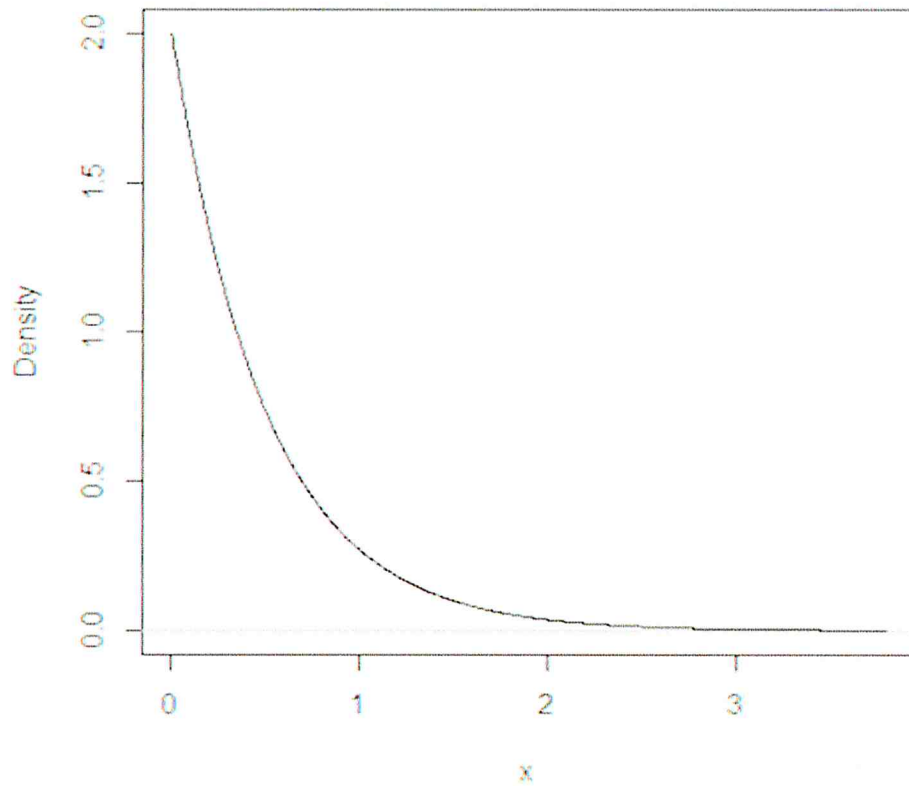


FIG 2 : Graphe du la densité de loi exponentiel

- normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2) : x \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ de densité

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$$

Espérance : $E(X) = m$

Variance : $var(X) = \sigma^2$

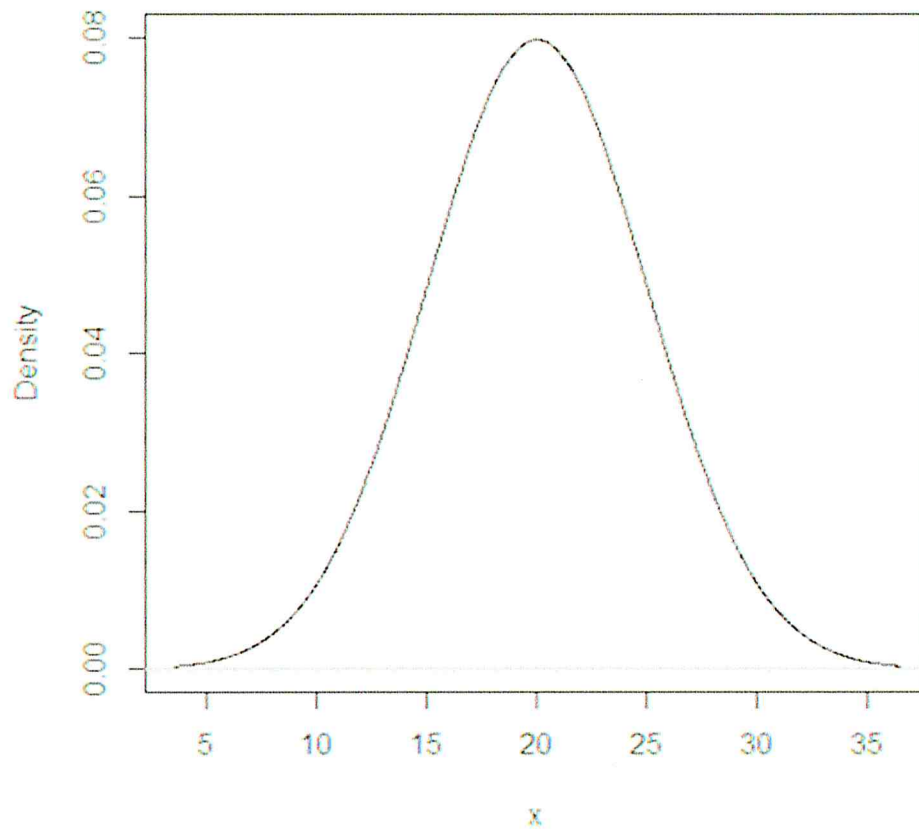


FIG 3 : Graphe du densité de la loi normale

- Weibull $W(c, \mathcal{J}) : c \in \mathbb{R}^{+*}, \mathcal{J} \in \mathbb{R}^{+*}$ sa densité

$$f_X(x) = c \mathcal{J} x^{\mathcal{J}-1} e^{-cx^{\mathcal{J}}}$$

Espérance : $E(X) = c \Gamma\left(1 + \frac{2}{\mathcal{J}}\right)$ (Γ signifie la loi Gamma)

Variance : $var(X) = c^2 [\Gamma\left(1 + \frac{2}{\mathcal{J}}\right) - \Gamma\left(1 + \frac{2}{\mathcal{J}}\right)^2]$

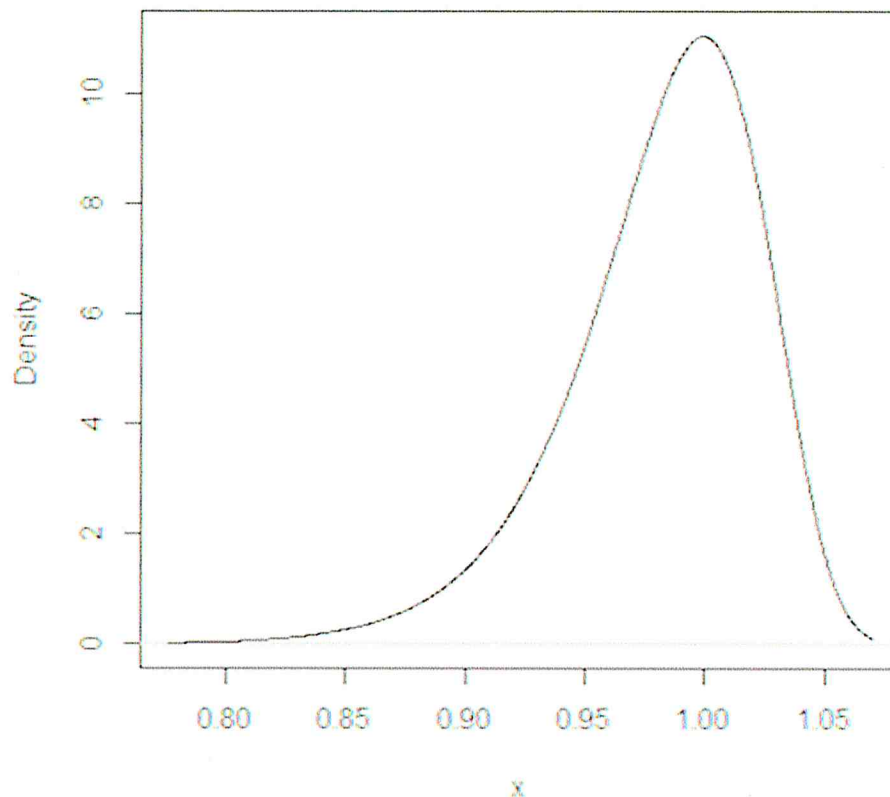


FIG 4 : Graphe du densité de la loi Weibull

2.2 Fonction caractéristique :

La fonction caractéristique d'une v.a réelle X est la fonction à valeurs complexes définies sur \mathbb{R} est

$$\begin{aligned}\phi_X(t) &= E[e^{itX}] \\ &= E[\cos(tX)] + iE[\sin(tX)]\end{aligned}$$

Si cette variable aléatoire possède une densité f_X , nous avons $\phi_X(t) = \int f_X(x)e^{itx} dx$

Si $E[(X^n)] < \infty$ la fonction caractéristique est n fois dérivable et :

$$\phi_X^k(0) = i^k E(X^k) , \forall k \leq n.$$

La fonction caractéristique des moments est très utilisé pour le calcul des moments ($E(X), E(X^2), E(X^3), \dots$).

2.3 Fonctions génératrices et transformé de Laplace :

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace de probabilité, on appelle transformée de Laplace de la loi de X la fonction réelle \hat{f}_X définie par

$$\hat{f}_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx} f(x) dx = E(e^{-tx})$$

Soit X une variable aléatoire, on appelle fonction génératrice des moments de la variable aléatoire X la fonction $\mathcal{M}_X(t)$ définie par :

$$\mathcal{M}_X(t) = E(e^{tx})$$

Si X est continue nous avons

$$\mathcal{M}_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x) dx$$

Si X est discrète nous avons

$$\mathcal{M}_X(t) = \sum e^{tx} f_X(x)$$

De plus, la fonction génératrice des moments est obtenue de manière immédiate à partir de la transformée de Laplace

$$\mathcal{M}_X(s) = \hat{f}_X(-s)$$

Table 2 : Fonctions génératrice et caractéristique des lois usuelles

Nom et symbole	Fonction génératrice	Fonction caractéristique
Bernoulli $B(p)$ $p \in]0,1[$	$q + pe^t$	$q + pe^{it}$
Binomiale $B(n,p)$ $p \in]0,1[, n \in \mathbb{N}^*$	$(q + pe^t)^n$	$(q + pe^{it})^n$
Binomiale négative $BN(n,p)$ $p \in]0,1[, n \in \mathbb{N}^*$	$(\frac{p}{1 - qe^t})^r$	$(\frac{p}{1 - qe^{it}})^r$
Poisson $p(\lambda)$ $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$	$e^{\lambda(e^t - 1)}$	$e^{\lambda(e^{it} - 1)}$
Géométrique $G(p)$ $p \in]0,1[$	$\frac{e^t p}{1 - qe^t}$	$\frac{e^{it} p}{1 - qe^{it}}$
Gamma $\Gamma(\alpha, \lambda)$ $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \beta \in \mathbb{R}^{+*}$	$(1 + \theta t)^{-k}$	$(1 - i\theta t)^{-k}$
Exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$	$(1 - \frac{t}{\lambda})^{-1}$	$(1 - \frac{it}{\lambda})^{-1}$
normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ $x \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{R} \text{ et } \sigma > 0$	$e^{(ut + \frac{\sigma^2 t^2}{2})}$	$e^{(uit - \frac{\sigma^2 t^2}{2})}$
Weibull $W(\eta, \beta)$ $\eta \in \mathbb{R}^{+*}, \beta \in \mathbb{R}^{+*}$	$\beta^n \Gamma(1 + \frac{\eta}{k})$	

2.4 Produit de convolution :

Le produit de convolution de deux fonctions réelles ou complexes f et g est une autre fonction qui se note généralement $\ll f * g \gg$ et qui est définie par :

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt$$

L'étude de produit de convolution nous permet de déterminer la loi d'une somme de variables aléatoires.

Par exemple, soit X_1 et X_2 deux variables indépendantes de même loi de densité f_X alors la densité de $X_1 + X_2$ est la convolution

$$(f_X * f_X)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(y)f_X(x-y)dy$$

De même pour $n \geq 1$, on note

$$f_X^{*n}(x) = \underbrace{f_X * \dots * f_X(x)}_{n \text{ fois}}$$

2.5 Processus stochastiques :

Un processus aléatoire généralise la notion de variable aléatoire. Il est défini comme une famille de variables aléatoires $(X(t))_{t \geq 0}$.

2.5.1 Processus à accroissement indépendants et stationnaires:

- On dit qu'un processus $(X(t))_{t \geq 0}$ est à accroissement indépendant si pour tout $n \geq 0$, pour tout $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$, les variables aléatoires

$$X(t_1), X(t_2) - X(t_1), X(t_3) - X(t_2), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$$

sont indépendantes.

- On dit qu'un processus $(X(t))_{t \geq 0}$ est à accroissement stationnaire si la loi $X_{t+h} - X_t$ ne dépend que de la longueur h de l'intervalle $[t, t+h]$,

i. e Pour tout $t, s \geq 0$ et $h \geq 0$

$$X_{t+h} - X_t \stackrel{\text{loi}}{=} X_{s+h} - X_s$$

2.5.2 Processus de renouvellement : Soit F une fonction de répartition continue telle que $F(0) = 0$. Un processus de renouvellement est un processus ponctuel sur \mathbb{R}^+ représentant les instants d'occurrence d'un événement tel que les durées inter-occurrences successives

sont des variables aléatoires réelles indépendantes, de même loi, de fonction de répartition F . Un tel processus peut être défini indifféremment par la suite (X_n) des durées entre les occurrences successives, et la suite (T_n) des instants d'occurrences ($\forall n \geq 1, T_n = X_1 + \dots + X_n$)

2.5.3 Processus de poisson :

On appelle processus de poisson homogène d'intensité λ , un processus $N(t)$ satisfaisant les propriétés suivantes :

- $N(t)$ est un processus à accroissement indépendant.
- $N(t+h) - N(t) \sim \mathcal{P}(\lambda h)$, pour tout t .

Soit $\{\tau_i, i \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires *i. i. d* de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et pour tout $n \geq 1$, si on note $T_n = \sum_{i=0}^n \tau_i$, alors le processus de poisson $N(t)$ d'intensité constante λ est défini par $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{T_n \leq t\}}$

$N(t)$ Est un processus de poisson d'intensité λ Vérifié :

- $P(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$.
- $E(N(t)) = \lambda t$.
- $var(N(t)) = \lambda t$.

2.5.4 Processus de poisson composé:

Une variable aléatoire $S = X_1 + \dots + X_{N(t)}$ suit une loi de poisson composé de paramètre λ et de loi F_X , si $N(t)$ suit une loi de poisson.

Avec :

- Les variables X_i sont i.i.d de loi F_X .
- $N(t)$ suit une loi de poisson $p(\lambda)$.
- Les X_i et $N(t)$ sont indépendants.

Remarque : le modèle généralisé de processus de poisson est appelé somme de processus composé.

Si $K \geq 1$ fixé et S_1, \dots, S_K des variables aléatoires de poisson composé indépendantes, S_i suit une loi de poisson composé de paramètre λ_i et de loi F_i avec $1 \leq i \leq K$.

La variable $\sum_{i=1}^K S_i$ est poisson composé de paramètre Λ et de fonction de répartition F ,

tel que : $\Lambda = \sum_{i=1}^K \lambda_i$ et $F(x) = \frac{1}{\Lambda} \sum_{i=1}^K \lambda_i F_i(x)$

La simplicité du processus de poisson donne des résultats importants concernant le calcul de la fonction génératrice des moments.

2.6 Queue des distributions :

En théorie de probabilité et en statistique, la queue d'une loi de probabilité est le comportement de la loi de probabilité dans la zone éloignée de sa valeur centrale.

Soit X une variable aléatoire positive

On dit que la loi de X est a queue fine, s'il existe $\gamma > 0$ tel que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \frac{P(X > t)}{e^{\gamma t}} < \infty$$

Si $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup P(X > t)e^{\gamma t} = \infty$, pour $\gamma > 0$ on dit que la loi de X est a queue lourde.

2.7 Les tests statistiques :

Il s'agit de faire un choix entre plusieurs hypothèses possibles. On met en avant une hypothèse nulle est notée (H_0), nous souhaitons vérifier si (H_0) est vrai, alors que deux hypothèses seulement sont possible, (H_0) et une hypothèse alternative (H_1).

2.7.1 Test d'adéquation de Kolmogorov-Smirnov :

En statistique, le test de Kolmogorov-Smirnov est un test d'ajustement. La différence avec le test de χ^2 qu'il est fondé sur les fonctions de répartition plutôt que sur les densités. Ce test est utilisé pour déterminer si un échantillon suit bien une loi donnée connu par sa fonction de répartition continue F_0 , On veut tester l'hypothèse

$$H_0 : F = F_0 \text{ contre } H_1 : F \neq F_0$$

2.7.1.1 Fonction de répartition empirique :

On appelle fonction de répartition empirique associée aux n échantillons X_1, X_2, \dots, X_n la fonction :

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{X_i \leq x}.$$

Ou d'une manière différente :

On commence par trier par ordre croissant les valeurs les valeurs X_i de l'échantillon, on les appelle les statistiques d'ordre.

La fonction de répartition empirique est défini par

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < X_1 \\ \frac{i}{n} & \text{pour } X_i \leq x < X_{i+1} \\ 1 & \text{pour } x \geq X_n \end{cases}$$

On mesure l'adéquation de la fonction $F_n(x)$ à la fonction de répartition $F(x)$ au moyen d'une distance particulière dite de Kolmogorov-Smirnov.

2.7.1.2 Distance de Kolmogorov-Smirnov :

Pour obtenir cette distance, on calcule la différence entre $F_n(x)$ et $F_0(x)$ aux points X_i et on cherche le maximum selon la formule

$$D_{KS}(F_0, F_n) = \max_{i=1, \dots, n} \left\{ \left| F_0(X_i) - \frac{i}{n} \right|, \left| F_0(X_i) - \frac{i-1}{n} \right| \right\}$$

On compare la valeur obtenu avec une valeur critique $D_\alpha(n)$ fourni par la table de Kolmogorov-Smirnov .Si $D_{KS} > D_\alpha(n)$, on rejette H_0 avec un risque α de se tromper.

Chapitre II :

Introduction à la théorie de risque

Ce chapitre est considéré comme étant une introduction à la théorie de risque, on présente le modèle de risque pour la modélisation de réserve d'une compagnie d'assurance.

1. Modèle de risque :

La théorie de la ruine est un domaine des sciences actuarielles dont le but est de modéliser la réserve d'un portefeuille d'assurance par un processus stochastique $\{R(t), t \geq 0\}$, où la réserve au temps t est donné par

$$R(t) = u + Ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

Où $R(0) = u$ est le réserve initiale, C représente le flux des primes généré par le portefeuille à l'instant t . On tient aussi compte $\sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ le montant total des sinistres agrégés à l'instant t , on le modélise par l'un des modèles suivant, individuel ou collectif.

2. Modélisation de montant total de sinistre :

2.1 Modèle individuel :

le modèle individuel modélise la charge totale générée par les sinistres individus par individus $\sum_{i=1}^n X_i I_i$ où n est le nombre des assurés ou l'effectif de portefeuille de l'assurance, et I_i la variable aléatoire de Bernoulli indiquant si l'assuré i a subi un sinistre sur la période $[0, t]$, X_i variable aléatoire positive indépendante de I_i représente le montant de i -ème sinistre.

Ce modèle est souvent utilisé en assurance santé lorsqu'on considère un groupe de n employés d'une entreprise où il est difficile de modéliser les pertes par les variables de même loi. En effet, chaque employé a une couverture différente (en fonction de leur salaire) et comportement différent (les dépenses dépendent notamment de l'âge des employés).

2.2 Modèle collectif :

On définit la charge sinistre totale sur une période t dans le modèle collectif par la variable aléatoire : $\sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ où $N(t)$ et X_i sont des variables aléatoires dans \mathbb{N} et \mathbb{R}^+ (respect) représentant le nombre des sinistres dans la période considéré (souvent un an) et le coût de la

Chapitre II : Introduction à la théorie de risque

i -ème sinistre (respect). Les $(X_i)_{i \geq 1}$ sont supposés indépendants et identiquement distribués, et indépendants de $N(t)$.

L'un des outils les plus puissants pour comprendre l'évolution de la richesse d'une compagnie d'assurance est la modélisation stochastique. L'équilibre à long terme des résultats de la compagnie d'assurance correspond en théorie de ruine à la notion de probabilité de ruine.

La probabilité de ruine permet d'évaluer le risque pour une compagnie d'être en état de faillite (le passage du surplus de la compagnie en dessous d'un certain seuil permettant d'alerter la compagnie sur son état financier déficient).

Pour calculer la probabilité de ruine d'une société d'assurance, nous commençons par ajuster :

- Une loi pour les montants des sinistres
- Une loi pour le nombre des sinistres

Filip Lundberg, et Hald Cramer en 1903 [12, 5], ont proposé le premier modèle pour modéliser la richesse de l'assurance, ce modèle est dit de poisson composé ou aussi dit de Cramer-Lundberg.

Dans ce modèle Cramer et Lundberg ont proposé une loi pour le nombre des sinistres, et une pour le montant des sinistres. La simplicité mathématique de ce modèle permet d'obtenir de nombreux résultats explicitement.

En 1957, Sparre-Anderson [1] propose une extension de modèle classique, ce nouveau modèle dit de Sparre-Anderson.

Donc, le modèle de Cramer-Lundberg diffère de ce de Sparre-Anderson par les distributions caractérisant le processus de nombre des sinistres, et les distributions associées aux montants des sinistres. Deux types de distribution sont assignés à deux types de risque, distributions à queue fine au cas de petits risques ou distributions à queue lourde au cas de grands risques. Concernant les nombres de sinistres, trois lois discrètes regroupées dans une famille connue sous le nom de la famille Panjer.

3. Modèle de ruine classique:

Le modèle classique de ruine est celui de Cramer-Lundberg ou P/G, désigné aussi sous le nom de poisson composé. A été introduit en 1903 par l'actuaire Filip Lundberg [12] et connu comme le base du fondement du risque.

La notion P/G, emprunté de la théorie des files d'attentes fournit l'information au sujet des lois des arrivées et des montants des réclamations des sinistres. La lettre G signifie général et P signifie poisson [10].

L'idée de ce modèle est de modéliser le comportement de la richesse d'un assureur par deux flux monétaire. Le premier, modélise les revenus des primes et le deuxième pour les versements des prestations qui sont aléatoires.

Les sinistres se produisent à des dates $T_1 = 0 < T_2 < \dots < T_n < \dots$, on note $\{\tau_n, n \geq 1\}$ la suite des intervalles entre deux sinistres définis par $\tau_n = T_n - T_{n-1}$, $n \geq 1$ appelés aussi les inter-arrivées (inter-sinistres), $\{\tau_n, n \geq 1\}$ forment une suite de variables aléatoires indépendante et identiquement distribuées de loi exponentielle.

Le processus stochastique régissant l'évolution de réserve financière est supposé être de la forme

$$R(t) = u + ct - \sum_{i=0}^{N(t)} X_i \quad (2.1)$$

On définit également le processus de surplus $\{S_t, t \geq 0\}$ qui représente la perte total à l'instant t)

$$S_t = u - R(t) \quad (2.2)$$

3.1 Hypothèses du modèle Cramer-Lundberg :

Les Hypothèses du modèle de ruine de Cramer-Lundberg sont :

- $u > 0$ est la réserve initiale de la compagnie d'assurance. Une compagnie d'assurance dispose d'un capital initial, qui augmente régulièrement grâce aux cotisations des assurés, mais diminue ponctuellement lors des remboursements de sinistres.

Chapitre II : Introduction à la théorie de risque

- $c > 0$ le taux de cotisations reçues continument dans le temps (c est appelé temps instantané de prime) Supposant que la prime perçue par l'assureur est linéaire en fonction du temps.

c-à-d $p(t) = ct$ est la prime perçue sur l'intervalle de temps $[0, t[$, c'est appelé taux instantané de prime.

- $N(t)$ est un processus de poisson homogène d'intensité λ modélise le nombre des sinistres jusqu'au l'instant t .

Le $i^{\text{ème}}$ sinistre se produisant (où étant déclaré) à la date i a un coût pour la compagnie d'assurance X_i . Le nombre des sinistres à la date t est lié aux dates des sinistres par la

$$\text{relation } N(t) = n \Leftrightarrow T_n \leq t \leq T_{n-1}.$$

- $(X_i)_{i>0}$ Suite de variables aléatoires strictement positive, identiquement distribués et indépendantes (l'indépendance de montant des réclamations se caractérise naturellement, car le montant d'une réclamation est une estimation de dégât causés par le sinistre qui n'influe aucunement sur les montants des autres réclamations), avec moyen μ et variance σ^2 , indépendant de $N(t)$ représentant le montant de $i^{\text{ème}}$ sinistre, d'où le processus des montants total remboursé par l'assureur $\sum_{i=0}^{N(t)} X_i$ forme un processus de poisson composé.

3.2 Cas particulier : Modèle Lundberg ou P/P :

Un cas particulier du modèle de Cramer-Lundberg est le modèle de Lundberg appelé aussi modèle P/P. Ce modèle se caractérise par la distribution exponentiel des montants des réclamations, c'est-à-dire

$$F_X(y) = 1 - e^{-\frac{1}{\mu}y} \quad (2.3)$$

On appelle θ coefficient de chargement de sécurité (parfois appelé coefficient de chargement technique), il est définit par

$$c = \lambda\mu(1 + \theta) \quad (2.4)$$

Le coefficient $\lambda\mu$ est interprété comme le montant moyen des sinistres par unité du temps. Il apparait prudent que l'assureur fixe un taux de prime c supérieur à $\lambda\mu$ pour que en

moyenne, les primes reçues soient supérieures aux indemnités payés par la compagnie d'assurance. En effet, nous avons les propriétés [2] suivantes :

1. Si $\theta > 0$, cela garantit d'après la loi forte des grands nombres que le processus de réserve tend presque sûrement vers $+\infty$ (on appelle condition de profit net l'hypothèse $\theta > 0$).
2. Si $\theta < 0$, alors $R(t)$ tend vers $-\infty$ presque sûrement quand t tend vers ∞ .

4. Modèle Sparre-Anderson :

Le modèle de Sparre-Anderson [1] relâche la contrainte que la distribution des temps inter-sinistres soit exponentielle. Dans ce modèle, le processus du montant des sinistres agrégés $\sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ est un processus de renouvellement composé, il s'agit donc d'une généralisation du modèle poisson composé. Le processus du nombre de sinistre $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de renouvellement où les temps inter-sinistres $\{\tau_i, i \in \mathbb{N}^+\}$ forment une suite de variable aléatoires indépendante et identiquement distribuée, où τ_i représente le temps entre le $(i-1)^e$ et le i^e sinistre (τ_1 est le moment du premier sinistre). Les variables aléatoires $\{\tau_i, i \in \mathbb{N}^*\}$ sont distribués avec fonction de densité de probabilité f_τ et fonction de répartition F_τ . Les variables aléatoires des montants des sinistres $\{X_j, j \in \mathbb{N}^+\}$, où X_j représente le montant j^e sinistre sont supposés indépendantes, positives et identiquement distribués avec f_X comme fonction de densité de probabilité et F_X comme fonction de répartition.

4.1 Distribution du nombre des sinistres :

Le nombre des sinistres sur une période de temps donnée $[0, t]$ est supposée distribuée selon une loi de poisson, une loi binomiale ou une loi binomiale négative. Ces trois lois appartiennent à la famille de Panjer.

4.1.1 La famille de Panjer :

La famille de Panjer est caractérisée par l'existence d'une relation de récurrence particulière entre leur masse de probabilité.

Le nombre de sinistres est modélisées par une variable discrète à valeur entière, notée $N(t)$. Parmi les distributions de $N(t)$ possibles, on s'intéresse à celles dont les masses de probabilités vérifient la relation de récurrence

$$\exists a \in \mathbb{R}^-, b \in \mathbb{R}^+, \forall K \in \mathbb{N}^*, P_k = \left(a + \frac{b}{K}\right) P_{k-1} \quad (*)$$

La proposition suivante nous donne les conditions sur les paramètres a et b , pour que la loi des nombres des sinistres suit une loi poisson, Binomiale ou binomiale négative.

Proposition 1 :

Une variable aléatoire de comptage, notée $N(t)$, dont la masse de probabilité sont liés par la relation de récurrence (*), suit une loi de poisson, une loi binomiale ou une loi binomiale négative, plus précisément :

- Si $a = 0$, alors $b = \lambda > 0$, et $N(t) \sim p(\lambda)$
- Si $0 < a < 1$, alors $a + b > 0$ et $N(t) \sim BN(n, p)$
- Si $a < 0$, alors $\exists n \in \mathbb{N}$, tel que $b = -a(n + 1)$, donc $N(t) \sim B(n, p)$, avec

$$p = a(a - 1)^{-1} \text{ et } n = -1 + ba^{-1}$$

4.2 Distribution des montants des sinistres :

Il est important dans la théorie de risque de connaître le type de queue d'une distribution. En général on n'aime pas avoir des queues épaisses qui signifient que les événements de grande amplitude ont une probabilité assez forte d'arriver. Une grande catastrophe, même si elle arrive rarement, est très lourde de conséquences pour les compagnies d'assurances.

On distingue deux types de distributions associées à deux types de risque, on parle de distributions à queue légère (Exponentielle, Gamma, ...) par opposition aux distributions à queue lourde ou distribution des valeurs extrêmes (Log-normal, Pareto, ...) caractérisée par la non définition de la fonction génératrice des moments.

Chapitre II : Introduction à la théorie de risque

L'étude de la probabilité de ruine et notamment son comportement asymptotique vont dépendre significativement de type de la loi de montant d'un sinistre X (queue fine ou lourde).

Historiquement, Lundberg et Cramer ont fait leur étude pour les lois à queues fines, qui ont l'avantage d'être plus simples à manipuler. Cependant des études statistiques ont montré que des événements comme les catastrophes naturelles, tremblements de terres relativement rares mais d'un coût très élevé, ne peuvent être modélisés par des lois à queues fines. La théorie du risque s'est donc développée également pour des lois à queues lourdes.

4.2.1 Distribution à queue fine : Cas des petits risques

Proposition 1 :

La distribution $F_X(x)$ est dite à queue fine si seulement si $\exists a > 0, b > 0$ tel que

$$\bar{F}_X(x) = 1 - F_X(x) \leq ae^{-bx}$$

Ou de façon équivalente si la fonction génératrice des moments de X est définie sur un voisinage de 0).

Exemple de lois à queue fine :

- Loi exponentielle $\mathcal{E}(\beta)$.
- Loi Gamma $\Gamma(\alpha, \beta)$
- Loi Weibull de paramètre c, \mathcal{T} avec $\mathcal{T} \geq 1$.
- Mélange exponentielle $\beta_i > 0, \sum_{i=1}^n \bar{a}_i f_X(x) = \sum_{i=1}^n (\bar{a}_i \beta_i e^{-\beta_i x})$

Dans le cas des petits risques pour évaluer la probabilité de ruine, on aura besoin de faire une hypothèse supplémentaire : l'existence de coefficient d'ajustement.

4.2.1.1 Coefficient d'ajustement :

Dans le cas des montants de sinistres distribués selon des lois à queue fine, le calcul de coefficient d'ajustement joue un rôle très important pour le calcul de la probabilité de ruine.

Soit $\gamma = \sup_z M_X(z) < \infty$, le coefficient d'ajustement noté R est la solution positive de l'équation

$$1 + (1 + \theta)\mu R = M_X(R) \quad R < \gamma. \quad (2.5)$$

4.2.1.1.1 Majoration de coefficient d'ajustement :

Une solution analytique existe pour quelques distributions de montants des sinistres. Dans certain cas quand il est difficile de trouver une expression analytique de coefficient d'ajustement, on cherche une majoration.

Le coefficient d'ajustement R satisfait l'inégalité suivante

$$R < \frac{2\theta\mu}{\mu^{(2)}} \quad (2.6)$$

Où

$$\mu^{(2)} = EX_i^2$$

Dans le cas où il est possible de calculer les moments d'ordre trois $\mu^{(3)}$, on peut améliorer la majoration de coefficient d'ajustement trouver précédemment par

$$R < \frac{12\mu\theta}{3\mu^{(2)} + \sqrt{9(\mu^{(2)})^2 + 24\mu\mu^{(3)}\theta}} \quad (2.7)$$

On pose $D(z) = 1 + (1 + \theta)\mu z - M_X(z)$, le coefficient d'ajustement $R > 0$ est une solution de l'équation $D(R) = 0$.

Pour obtenir une solution $R > 0$, nous pouvons utiliser la formule de Newton-Raphson

$$R_{j+1} = R_j - \frac{D(R_j)}{D'(R_j)} \quad (2.8)$$

Où

$$R_0 = \frac{2\theta\mu}{\mu^{(2)}} \quad (2.9)$$

4.2.2 Distribution à queue lourde : cas des grands risques

Proposition 2 :

La distribution $F_X(x)$ est dit à queue lourde, si pour tout $a > 0, b > 0$

$$\bar{F}_X(x) > ae^{-bx} \quad (2.10)$$

(Ou d'une manière équivalente, si $M_X(z) = \infty$).

Exemple de lois à queue lourde :

- Weibull : de paramètre $c > 0, \mathcal{T} < 1$.
- Lognormal : de paramètre $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\log(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $x \geq 0$.
- Pareto : de paramètres $\alpha > 0, \nu > 0$ $f_X(x) = \frac{\alpha}{\nu+x} \left(\frac{\nu}{\nu+x}\right)^\alpha$ $x \geq 0$
- Burr : de paramètres $\alpha > 0, \nu > 0, \tau > 0$ $f_X(x) = \frac{\alpha\tau x^{\tau-1}\nu^\alpha}{(\nu+x^\tau)^{\alpha+1}}$ $x \geq 0$

Dans le cas des distributions à queue lourde, la fonction génératrice des moments n'est pas définie.

Définition 2 :

Soit Y une variable aléatoire positive, Sa loi est dite sous exponentielle si pour une suite $(Y_i)_{i \geq 0}$ iid de même loi Y , avec $S_n = Y_1 + \dots + Y_n, M_n = \max(Y_1, \dots, Y_n)$. On a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P(S_n > t)}{P(M_n > t)} = 1 \quad \text{pour tout } n \geq 1$$

Les grandes valeurs de la somme de variable aléatoire iid sous exponentielle sont donc dues à leurs maximums (la loi sous exponentielle est à queue lourde).

Le théorème suivant nous permet de déterminer si une loi est sous-exponentielle.

Théorème 1 : Supposons que X soit une variable aléatoire positive, avec densité f et posons

$$q(x) = \frac{f(x)}{P(X>x)} \quad x \geq 0 \quad (2.11)$$

Alors la loi de X est sous-exponentielle si $q(x)$ est décroissante dans un voisinage de l'infini et la fonction $x \rightarrow e^{xq(x)}f(x)$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ .

Donc les lois Weibull, Lognormal, Pareto sont sous-exponentielle.

4.3 Fonction de répartition, Fonction génératrice des montants de sinistres:

4.3.1 Fonction de répartition :

On considère la variable $Z_{N(t)}$ représentant les remboursements totale dans la période $[0, t]$,

Alors la fonction de répartition de $Z_{N(t)}$ est :

$$F_{Z_{N(t)}}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} p_n F_X^{*n} \quad (2.12)$$

Avec

$$p_n = P(N(t) = n)$$

F_X^{*n} est la fonction F_X convoluée n fois avec elle-même.

Et sa densité

$$f_{Z_{N(t)}}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} p_n f_X^{*n}(x) \quad (2.13)$$

4.3.2 Fonction génératrice :

La fonction génératrice des moments de Z_N est donnée en fonction de la fonction génératrice des probabilités de N_t et de la fonction génératrice des moments de X

$$M_{Z_{N(t)}}(s) = M_{N(t)}(\ln(M_X(s))) \quad (2.14)$$

4.3.3 Moment de $Z_{N(t)}$:

L'espérance mathématique de $Z_{N(t)}$ est donnée par

$$E(Z_{N(t)}) = E(N(t))E(X) \quad (2.15)$$

La variance est donnée par

$$\text{var}(Z_{N(t)}) = E(N(t))\text{var}(X) + E(X^2)\text{var}(N(t)) \quad (2.16)$$

En générale, la fonction de répartition de est difficilement calculable. Cependant, il existe certains cas où on a des résultats analytiques plus ou moins faciles à utiliser.

4.4 Cas particuliers :

- 1) Si Le nombre de sinistres $N(t)$ est supposées distribué suivant une loi poisson de paramètre λ , et F_X est la fonction de répartition d'un montant d'un sinistre X . Alors la variable aléatoire $Z_{N(t)}$ suit une loi de poisson composé de paramètre λ est de fonction de répartition F_X , et de fonction génératrice des moments de donnée par

$$M_{Z_{N(t)}}(s) = e^{\lambda(M_X(s)-1)} \quad (2.17)$$

Moments de $Z_{N(t)}$:

$$E(Z_{N(t)}) = \lambda E(X)$$

$$\text{var}(Z_{N(t)}) = \lambda E(X^2)$$

- 2) Si N_t suit une loi géométrique $\mathcal{G}(\beta)$ et les montants de sinistres X_i suit une exponentielle de moyenne θ

Chapitre III : Estimation de la probabilité de ruine

La valeur exacte de la probabilité de ruine peut être calculée dans le cas du modèle de ruine classique en utilisant la transformé de Laplace, mais dans le cas des distributions des montants de sinistres à queue lourde, le calcul de la transformée de la place est très difficile à trouver, il existe des formules qui donne des valeurs approximatifs de la probabilité de ruine.

Dans ce chapitre, nous allons donner les définitions de la probabilité de ruine et énoncer les différents résultats et formules pour le calcul de la probabilité de ruine

1. Définition de la probabilité de ruine :

La ruine d'une compagnie d'assurance intervient lorsque le montant des réserves tombe à zéro. Donc, on définit

L'instant de ruine noté τ associé à une réserve initiale u est défini par

$$\tau(u) = \inf \{t \geq 0 : R_t < 0\} = \inf \{t \geq 0 : S_t > u\} \quad (3.1)$$

La probabilité de ruine avant l'instant T où la probabilité de ruine à l'horizon de temps fini est définie par

$$\psi(u, T) = p(\inf_{t \in [0, T]} R_t < 0 : R(0) = u) \quad (3.2)$$

La probabilité de ruine ultime ou probabilité de ruine à horizon de temps infini, définie par

$$\psi(u) = P(\inf_{t \geq 0} R_t < 0 : R(0) = u) \quad (3.3)$$

Où, on la définit d'une manière différente

Supposant $L = \sup_{0 < t < \infty} \{S_t\}$, donc la probabilité de ruine à temps infini est écrite

$$\psi(u) = p(\tau(u) < \infty) = p(L > u) \quad (3.4)$$

La probabilité complémentaire, ou probabilité de non ruine (ou de survie) notée ϕ est définie par :

$$\phi(u) = 1 - \psi(u) \quad (3.5)$$

Après la définition de la probabilité de ruine, nous passons à l'étape suivante qui est le calcul de la probabilité de ruine en temps infini.

En général, il est difficile de trouver une valeur exacte de la probabilité de ruine, mais il existe quelques méthodes qui donnent la valeur explicite de la probabilité de ruine, dans le cas où le montant de sinistre suit une loi Gamma, Géométrique ou mélange de 2 exponentielles

2. Probabilité de ruine exacte à temps infini

Le calcul exacte est basé sur le calcul de la transformé de Laplace pour la distributions de montants des réclamations, ou bien la fonction de répartition, Dans ce cas il existe des expressions analytiques simple qui donne la valeur exacte de la probabilité de ruine.

2.1 Formule de Pollaczec–Khinchine :

La formule de Pollaczec–Khinchine pour le calcul de la probabilité de ruine

$$\psi(u) = 1 - p(L \leq u) = 1 - \frac{\theta}{1+\theta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^n F_L^{*n}(u) \quad (3.6)$$

Où $F_L^{*n}(u)$ est la $n^{\text{ème}}$ convolution de la fonction F_L .

L est une variable aléatoire représentant la perte maximale agrégée (maximum agregate loss)

L est définit par

$$L = S(w_0) + (S(w_1) - S(w_0)) + \dots + (S(w_{N_G}) - S(w_{N_G-1})) \quad (3.7)$$

On peut déduire que

$$L = \sup_{i \geq 0} \{S(w_i)\} \quad (3.8)$$

On se rappelle le processus $S(t)$ de la perte total à l'instant t

$$S(t) = u - R(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i - Ct \quad (3.9)$$

Où $\{w_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ est la suite des montants ou la réserve atteint un nouveau pic (En terme de processus $R(t)$, si le montant initial investi par l'assureur est $R(0) = u$, alors chaque fois le processus plonge en bas de zéro, on observe record du processus $S(t)$).

N_G est une variable aléatoire distribué selon la loi géométrique de paramètre $\frac{\theta}{1+\theta}$ (θ le chargement de sécurité) représente le nombre des chutes de processus $R(t)$, et L est une variable aléatoire géométrique composé.

On a clairement

$$\psi(u) = p(L > u) \text{ et } \phi(u) = p(L \leq u) \quad (3.10)$$

Si le capital initial $u = 0$, il est facile d'obtenir la formule exacte de $\psi(u)$ à partir de la formule de Pollaczec–Khinchine. On obtient

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\theta} \quad (3.11)$$

Remarque: Nous présentons une collection de résultats pour le calcul de la probabilité de ruine à temps infini $\psi(u)$, avec en supposons que la loi des N_t est géométrique.

2.2 Résultats de probabilité de ruine exacte :

Dans le cas où les distributions des montants de sinistres (remboursements) sont à queue fine (Light-tailed distributions), il existe des résultats analytiques de la formule de probabilité de ruine.

Les résultats suivants de la probabilité de ruine sont donnés en fonction de la loi de probabilité des montants des sinistres :

2.2.1 Distribution exponentiel:

Un parmi les premiers résultats de la probabilité de ruine, la formule explicite de la probabilité de ruine pour montants de sinistres exponentiels avec un paramètre β

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\theta} \exp\left(\frac{-\theta\beta u}{1+\theta}\right) \quad (3.12)$$

2.2.2 Distribution gamma :

Une recherche est faite par Grandell et Segerdedahl. Pour une distribution gamma de paramètre α, β , si la moyenne $\mu = 1$ et $\alpha \leq 1$, et R représente le coefficient d'ajustement.

La valeur exacte de $\psi(u)$ est donné par

$$\psi(u) = \frac{\theta(1-\frac{R}{\theta})\exp(-Ru)}{1+(1+\theta)R-(1+\theta)(1-\frac{R}{\alpha})} + \frac{\alpha\theta \sin(\alpha\pi)}{\pi} \cdot I \quad (3.13)$$

Où

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha} \exp\{-(x+1)\alpha u\}}{[x^{\alpha}\{1 + \alpha(1+\theta)(x+1)\} - \cos(\alpha\pi)]^2 + \sin^2(\alpha\pi)} dx.$$

Cette intégrale est convergente donc I est finie.

L'hypothèse sur la moyenne n'est pas restrictive. Etant donné que pour les réclamations X avec une moyenne arbitraire μ , nous avons que

$$\psi_X(u) = \psi_{X/\mu}\left(\frac{u}{\mu}\right) \quad (3.14)$$

2.2.3 Mélange de deux exponentielles :

Pour des réclamations $\{X_j\}_{j=1}^{N_t}$ de distribution mélange de deux exponentielles avec les paramètres α, β et les poids $q, 1 - q$, en utilisant la transformée de Laplace d'inversion, on peut obtenir une formule explicite :

$$\psi(u) = \frac{1}{(1+\theta)(r_2-r_1)} \{(\rho - r_1) \exp(-r_1 u) + (r_2 - \rho) \exp(-r_2 u)\} \quad (3.15)$$

Où

$$r_1 = \frac{\rho + \theta(\alpha + \beta) - [\{\rho + \theta(\alpha + \beta)\}^2 - 4\alpha\beta\theta(1 + \theta)]^{1/2}}{2(1 + \theta)}$$

$$r_2 = \frac{\rho + \theta(\alpha + \beta) + [\{\rho + \theta(\alpha + \beta)\}^2 - 4\alpha\beta\theta(1 + \theta)]^{1/2}}{2(1 + \theta)}$$

Et

$$\rho = \alpha(1 - p) + \beta p$$

Avec

$$p = \frac{q\alpha^{-1}}{q\alpha^{-1} + (1 - q)\beta^{-1}}$$

2.3 Calcul de la probabilité de ruine exacte pour le modèle classique de ruine :

La probabilité de ruine exacte à l'horizon infini dans le cas de modèle classique de ruine est donnée par la formule suivant

$$\psi(u) = \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right)^n \overline{(F_X^S)^{*n}}(u) \quad (3.16)$$

Où $\overline{(F_X^S)^{*n}} = 1 - (F_X^S)^{*n}$, $(F_X^S)^{*n}$ est la $n^{ème}$ convolution de F_X^S

Telle que $F_X(z) = \frac{1}{\mu} \int_0^z (1 - F_X(y)) dy \quad z \geq 0$.

2.3.1 Application au modèle de Lundberg P/P :

En utilisant la formule précédente, nous allons déduire l'expression exacte de $\psi(u)$, pour le modèle de risque de Lundberg (P/P),

$$\psi(u) = (1 - \rho) \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \rho)^n \overline{(F_X^S)^{*n}}(u) \quad (3.17)$$

Avec : $\rho = \frac{\lambda}{\delta c}$

Pour des montants des réclamations exponentielles de paramètre δ , nous avons

$$F_X(u) = \begin{cases} 1 - e^{-\delta u} & u \geq 0 \\ 0 & u \leq 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

Calculons

$$F_X^S(u) = \delta \int_0^u (1 - F_X(y)) dy \quad (3.19)$$

$$F_X^S(u) = \delta \int_0^u e^{-\delta y} dy = \delta \left(\frac{-1}{\delta}\right) [e^{-\delta u}]_0^u = 1 - e^{-\delta u} \quad (3.20)$$

Alors $F_X^S(u) = F_X(u) \quad u \in \mathbb{R}$.

$(F_X^S)^{*n}$ Représente la $n^{ème}$ convolution de F_X^S . Puisque nous avons l'indépendance de n variables aléatoires $X_i, i = \overline{1, n}$ de distribution commune $\mathcal{E}(\delta)$.

Donc $(F_X^S)^{*n}$ est la fonction de répartition de la somme de n variables aléatoires X_i .

Chapitre III : Estimation de la probabilité de ruine

Nous utiliserons la transformée de Laplace à fin de déterminer $(F_X^S)^{*n}$.

On a $\widehat{f}_X^{*n}(t) = [\widehat{f}_X(t)]^n$

$$\widehat{f}_X(t) = \int_0^\infty f_X(t) e^{-xt} dt = \int_0^\infty \delta e^{-(\delta+x)t} dt = \frac{\delta}{\delta+x} \quad (3.21)$$

D'où $\widehat{f}_X^{*n}(t) = \left[\frac{\delta}{\delta+t}\right]^n$ est la transformée de Laplace de la loi d'*Erlang* (δ, n)

La densité de probabilité est donnée par

$$\widehat{f}_X^{*n}(t) = \frac{\delta(\delta t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\delta t} \quad t \geq 0 \quad (3.22)$$

La fonction de répartition est donnée par

$$F_X^{*n}(t) = (F_X^S)^{*n}(t) = \frac{\Gamma(n, \delta t)}{(n-1)!} = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\delta t} \frac{(\delta t)^k}{k!} \quad (3.23)$$

Ce résultat signifie que la somme de n variables aléatoires indépendantes de distribution exponentielle de même paramètre δ est une loi d'*Erlang* (δ, n) .

Alors :

$$\overline{F_X^{*n}(t)} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\delta t} \frac{(\delta t)^k}{k!} \quad (3.24)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \psi(u) &= (1 - \rho) \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\delta u} \frac{(\delta u)^k}{k!} \\ &= (1 - \rho) e^{-\delta u} \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\delta u)^k}{k!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (1 - \rho)e^{-\delta u} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\delta u)^k}{k!} \sum_{n=k+1}^{\infty} \rho^n \\
 &= (1 - \rho)e^{-\delta u} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\delta u)^k}{k!} \frac{\rho^{k+1}}{1 - \rho} \\
 &= \rho e^{-\delta u} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho \delta u)^k}{k!} = \rho e^{-\delta u} e^{\rho \delta u} \\
 &= \rho e^{-\left(\delta - \frac{\lambda}{c}\right)u}
 \end{aligned}$$

Finalement, dans le cas de nombre de sinistre suit la loi de poisson de paramètre λ et des montants exponentielle de paramètre δ , la formule qui donne la valeur exacte de la probabilité de ruine à l'horizon infini est

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{c\delta} e^{-\left(\delta - \frac{\lambda}{c}\right)u} \quad (3.25)$$

Dans la partie suivante, nous allons énoncer la littérature de la théorie de ruine et nous constatons que la probabilité est calculée d'une manière approximation les deux cas de la distribution des montants de sinistre (réclamations) à queue fine ou à queue lourde.

3. Approximations de la probabilité de ruine en temps infini

Lorsque la distribution des montants de réclamation est exponentielle (ou très proche), de simples résultats d'analyse de la probabilité de ruine en temps infini peut être possible.

Pour plus général des réclamations avec queue lourde (Heavy-tailed), la technique de la transformée de Laplace ne fonctionne pas.

Nous allons présenter des différents résultats pour l'approximation de la probabilité de ruine.

3.1 Approximation de Cramér-Lundberg :

Nous pouvons obtenir une formule approximative pour $\psi(u)$ pour u assez grand.

Chapitre III : Estimation de la probabilité de ruine

Cramér-Lundberg a donnée la formule asymptotique de probabilité de ruine

$$\psi_{CL}(u) = Ce^{-Ru} \quad (3.26)$$

Où

$$C = \theta\mu / \{M'_X(R) - \mu(1 + \theta)\} \quad (3.27)$$

Et R représente le coefficient d'ajustement.

L'application de Cramér-Lundberg est exacte pour les loi a queue fine mais il faut s'assurer que R existe, pour la loi exponentielle la probabilité de ruine est exacte.

3.2 Approximation exponentielle :

Cette approximation a été proposé et dérivés par De Vylder , il nécessite que les trois premiers moments de remboursements d'être finis .

$$\psi_E(u) = \exp \left\{ -1 - \frac{2\mu\theta u - \mu^{(2)}}{\sqrt{(\mu^{(2)})^2 + \frac{4}{3}\theta\mu\mu^{(3)}}} \right\} \quad (3.28)$$

3.3 Approximation de Lundberg :

La formule suivante appelée l'approximation de Lundberg .Il ne nécessite que les trois premiers moments d'être finis.

$$\psi_L(u) = \left\{ 1 + \left(\theta u - \frac{\mu^{(2)}}{2\mu} \right) \frac{4\theta\mu^2\mu^{(3)}}{3(\mu^{(2)})^3} \right\} \exp \left(\frac{-2\mu\theta u}{\mu^{(2)}} \right) \quad (3.29)$$

3.4 Approximation de Beekman-Bowers :

L'approximation de Beekman-Bowers utilise la représentation suivante de la probabilité de ruine.

$$\psi(u) = P(L > u) = P(L > 0)P(L > u|L > 0) \quad (3.30)$$

L'idée de l'approximation est de remplacer la probabilité conditionnelle

$1 - P(L > u|L > 0)$ Avec un Gamma de la fonction de distribution $\Gamma(u)$ par l'ajustement de trois premiers moments. Cela conduit à :

$$\psi_{BB}(u) = \frac{1}{1+\theta} (1 - \Gamma(u)) \quad (3.31)$$

Où les paramètres α, β de Γ sont données par

$$\alpha = \left\{ 1 + \left(\frac{4\mu^{(1)}\mu^{(3)}}{3(\mu^{(2)})^2} - 1 \right) \theta \right\} / (1 + \theta)$$

et

$$\beta = 2\mu\theta / \left\{ \mu^{(2)} + \left(\frac{4\mu^{(1)}\mu^{(3)}}{\mu^{(2)}} - \mu^{(2)} \right) \theta \right\}$$

L'approximation de Beekman-Bowers donne plutôt des résultats précis. Dans le cas exponentiel, la formule est exacte. Il peut être utilisé seulement pour les distributions à moments jusqu'à l'ordre 3 finis.

3.5 Approximation de Renyi :

L'approximation de Renyi peut être dérivée à partir de (3.33) lorsque l'on remplace la distribution Gamma avec une exponentielle. Par conséquent, il peut être considéré comme une version simplifiée de l'approximation Beekman-Bowers

$$\psi_R(u) = \frac{1}{1+\theta} \exp \left\{ -\frac{2\mu^{(1)}\theta u}{\mu^{(2)}(1+\theta)} \right\} \quad (3.32)$$

3.6 Approximation de Vylder :[7]

L'idée de cette approximation est de remplacer le processus de surplus S_t avec le processus \bar{S}_t des montants de sinistres exponentiel. Telles que les trois moments du processus de coïncider, à savoir $Es_t^k = E\bar{S}_t^k$ pour $k = 1,2,3$. le processus \bar{S}_t est déterminé par les trois paramètres $(\bar{\lambda}, \bar{\theta}, \bar{\beta})$ ainsi, les paramètres doivent satisfaire

$$\bar{\lambda} = \frac{9\lambda\mu^{(2)3}}{2\mu^{(3)2}}$$

$$\bar{\theta} = \frac{2\mu\mu^{(3)}}{3\mu^{(2)2}}\theta$$

$$\bar{\beta} = \frac{3\mu^{(2)}}{\mu^{(3)}}$$

Puis l'approximation de De Vylder est donnée par

$$\psi_{DV}(u) = \frac{1}{1+\bar{\theta}} \exp\left(-\frac{\bar{\theta}\bar{\beta}u}{1+\bar{\theta}}\right) \quad (3.33)$$

3.7 Approximation de 4-moment Gamma De Vylder :[7]

L'approximation de 4-moment Gamma De Vylder, proposé par Burnecki, mista et weron (2003) est basé sur l'approximation De Vylder d'idée de remplacer le processus de surplus S_t avec un autre processus \bar{S}_t pour lesquels l'expression de $\psi(u)$ est explicite.

Cette fois, les paramètres de la nouvelle procédure sont calculés avec des montants de remboursements distribué avec une loi Gamma et appliquer exactement la formule exacte de la probabilité de ruine pour des distribution gamma .Par faire correspondre les quatre moments de S_t et \bar{S}_t , notons d'abord que processus de surplus \bar{S}_t des montants de distributions Gamma est déterminée par les quatre paramètres $(\bar{\lambda}, \bar{\theta}, \bar{\mu}, \bar{\mu}^{(2)})$.

Depuis

Chapitre III : Estimation de la probabilité de ruine

$$Es_t = -\theta\lambda\mu t,$$

$$Es_t^2 = \lambda\mu^{(2)}t + (\theta\mu t)^2,$$

$$Es_t^3 = \lambda\mu^{(3)}t - 3(\lambda\mu^{(2)}t)(\theta\lambda\mu t) - (\theta\lambda\mu t)^2,$$

$$\bar{E}s_t^4 = \lambda\mu^{(4)}t - 4(\lambda\mu^{(3)}t)(\theta\lambda\mu t) + 3(\lambda\mu^{(2)}t)^2 + 6(\lambda\mu^{(2)}t)(\theta\lambda\mu t)^2 + (\theta\lambda\mu t)^4,$$

Et pour la distribution Gamma

$$\bar{\mu}^{(3)} = \frac{\bar{\mu}^{(2)}}{\bar{\mu}} (2\bar{\mu}^{(2)} - \bar{\mu}^2)$$

$$\bar{\mu}^{(4)} = \frac{\bar{\mu}^{(2)}}{\bar{\mu}^2} (2\bar{\mu}^{(2)} - \bar{\mu}^2)(3\bar{\mu}^{(2)} - 2\bar{\mu}^2)$$

Les paramètres $(\bar{\lambda}, \bar{\theta}, \bar{\mu}, \bar{\mu}^{(2)})$, satisfaire aux équations

$$\theta\lambda\mu = \bar{\theta}\bar{\lambda}\bar{\mu}$$

$$\lambda\mu^{(2)} = \bar{\lambda}\bar{\mu}^{(2)}$$

$$\lambda\mu^{(3)} = \bar{\lambda}(2\bar{\mu}^{(2)} - \bar{\mu}^2)\bar{\mu}^{(2)}/\bar{\mu}^2$$

$$\lambda\mu^{(4)} = \bar{\lambda}(2\bar{\mu}^{(2)} - \bar{\mu}^2)(3\bar{\mu}^{(2)} - \bar{\mu}^2)\bar{\mu}^{(2)}/\bar{\mu}^2$$

Par conséquent

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda(\mu^{(3)})^2(\mu^{(2)})^3}{\{\mu^{(2)}\mu^{(4)} - 2(\mu^{(3)})^2\}\{2\mu^{(2)}\mu^{(4)} - 3(\mu^{(3)})^2\}}$$

$$\bar{\theta} = \frac{\theta\mu\{2(\mu^{(3)})^2 - \mu^{(2)}\mu^{(4)}\}}{(\mu^{(2)})^2\mu^{(3)}}$$

$$\bar{\mu} = \frac{3(\mu^{(3)})^2 - 2\mu^{(2)}\mu^{(4)}}{\mu^{(2)}\mu^{(3)}}$$

$$\bar{\mu}^{(2)} = \frac{\{\mu^{(2)}\mu^{(4)} - 2(\mu^{(3)})^2\} \{2\mu^{(2)}\mu^{(4)} - 3(\mu^{(3)})^2\}}{(\mu^{(2)}\mu^{(3)})^2}$$

Nous avons aussi besoin de supposer que $\mu^{(2)}\mu^{(4)} < \frac{3}{2}(\mu^{(3)})^2$ pour s'assurer que $\bar{\mu}^{(2)} > \bar{\mu}^2$ et $\bar{\mu}, \bar{\mu}^{(2)} > 0$. Dans le cas où cette hypothèse ne peut pas être satisfaite, nous avons simplement mis $\bar{\mu} = \mu$ et ne pas calculer le quatrième moment, ce cas conduit à :

$$\bar{\lambda} = \frac{2\lambda(\mu^{(2)})^2}{\mu(\mu^{(3)} + \mu^{(2)}\mu)}$$

$$\bar{\theta} = \frac{\theta\mu(\mu^{(3)} + \mu^{(2)}\mu)}{2(\mu^{(2)})^2}$$

$$\bar{\mu} = \mu$$

$$\bar{\mu}^{(2)} = \frac{\mu(\mu^{(3)} + \mu^{(2)}\mu)}{2\mu^{(2)}}$$

Nous obtenons l'approximation

$$\psi_{4MGDV}(u) = \frac{\bar{\theta}(1-\frac{R}{\bar{\alpha}})e^{-\frac{\beta R}{\bar{\alpha}}}}{1+(1+\bar{\theta})R-(1+\bar{\theta})(1-\frac{R}{\bar{\alpha}})} + \frac{\bar{\alpha}\bar{\theta} \sin(\bar{\alpha}\pi)}{\pi} \cdot I \quad (3.34)$$

Où

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^{\bar{\alpha}} e^{-(x+1)\bar{\beta}u} dx}{[x^{\bar{\alpha}}\{1 + \bar{\alpha}(1 + \bar{\theta})(x + 1)\} - \cos \bar{\alpha}\pi]^2 + \sin^2(\bar{\alpha}\pi)}$$

Et $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ sont donnés par

$$\bar{\alpha} = \frac{\bar{\mu}^2}{\bar{\mu}^{(2)} - \bar{\mu}^2}$$

$$\bar{\beta} = \frac{\bar{\mu}}{\bar{\mu}^{(2)} - \bar{\mu}^2}$$

Dans le cas de distribution exponentiel et Gamma, cette méthode donne le résultat exact.

3.8 Approximations au cas de distribution à queue lourde :

Le terme « queue lourde » vient de la théorie des files d'attente. Dans la théorie de risque cela signifie que sur la moyenne des primes dépassent légèrement les sinistres attendus .cela implique que le coefficient de chargement de sécurité est positif et petit

$$\psi_{HT}(u) = \exp\left(-\frac{2\theta\mu^{(1)}u}{\mu^{(2)}}\right) \quad (3.35)$$

3.9 Approximations au cas de distribution à queue fine :

La théorie des files d'attente terme « queue lourde » a une évidente interprétation dans la théorie du risque, à savoir, en moyenne, les primes sont beaucoup plus grandes que les sinistres attendus .cela implique que θ est grand

$$\psi_{LT}(u) = \lambda \int_u^\infty \bar{F}_X(x) dx \quad (3.36)$$

La méthode donne des résultats précis, simplement pour des valeurs de θ très grande.

Chapitre IV :

Application

Chapitre IV Application

Le but de la théorie de ruine est d'évaluer le risque pour les compagnies d'assurance, et de calculer la probabilité de ruine, qui nous permet d'évaluer le risque d'être en état de faillite pour une compagnie d'assurance.

Dans ce dernier chapitre nous allons aborder le cœur de sujet l'évaluation de la probabilité de ruine, le travail se repartit en deux sections.

La première section consiste à calculer la valeur de la probabilité de ruine exacte et approximative à l'horizon infini par simulation de vecteurs de nombre de sinistres et montants de réclamation.

Nous allons appliquer la formule de Lundberg (P/P), le modèle mélange de 2 exponentiels pour le calcul exacte de $\psi(u)$ et la formule de De-Vylder pour la valeur approximative de la probabilité de ruine sur des vecteurs générés (simulés).

Dans la deuxième section, nous ajustons des données d'une compagnie d'assurance par des lois statistiques représentées dans les chapitres précédents. Ensuite nous calculons la probabilité de ruine avec des méthodes concernant les résultats d'ajustement.

Tout le calcul est effectuée à l'aide du logiciel libre R.

1. Estimation de la probabilité de ruine par simulation :

Cette étape consiste à générer les données : le nombre de sinistre, le montant de réclamations, à l'aide de logiciel R.

Nous avons appliqué le modèle de Lundberg pour le calcul exacte de la probabilité de ruine, donc nous avons simulé 500 échantillons de loi de poisson, et 500 échantillons de loi exponentielle.

Le processus de comptage $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de poisson de paramètre λ , et $N(t)$ suit une loi de poisson de paramètre λt

Nous avons supposée que le processus de comptage $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de poisson de paramètre $\lambda=60$, et $t = 100$, c'est à dire que le nombre de réclamations qui surviennent dans l'intervalle de temps $[0, t]$, est une variable aléatoire qui suit une distribution de poisson de paramètre λt ($\lambda=60$, et $t = 100$). Donc à l'aide de logiciel R nous avons généré une

Chapitre IV Application

variable aléatoire de loi poisson de paramètre λt , cette variable est noté N présente le nombre de sinistres dans l'intervalle $[0, t]$.

Nous avons générer 500 vecteurs aléatoire de taille N suivent une loi de poisson de paramètre $\lambda = 60$, Le résultat est obtenu sous forme d'une matrice de taille $[N, 500]$ (500 vecteurs colonne de taille N suivent la loi poisson). Pour chaque vecteur colonne nous avons calculé sa moyenne pour trouvé les nouveaux paramètres λ_i , Le résultat est obtenus sous forme d'un vecteur de taille 500, ces composantes représentent les paramètres $\lambda_i, i = 1, \dots, 500$.

Ce résultat est utilisé pour toutes les méthodes appliquées dans ce chapitre.

Dans le modèle de Lundberg, les montants de réclamations suivent la loi exponentielle, nous avons générés 500 vecteurs aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\delta = 9.42 \times 10^{-5}$ de taille N (l'arrivée de N sinistres après génération de la loi poisson) Le résultat est obtenu sous forme d'une matrice de taille $[N, 500]$.

Pour chaque vecteurs nous avons calculé la moyenne, Donc nous avons obtenir un vecteur de taille 500, après nous avons passé au calcul de paramètre $\delta_i, i = 1, \dots, 500$ chaque $\delta_i = 1/\mu_i$ ou μ_i représente la moyenne de vecteurs de la position i dans la matrice générée.

$$\overline{F_X(t)} = 1 - F_X(t) = \exp(\delta_i t)$$

Décroit exponentiellement en fonction de t , ce qui signifie que la queue de la distribution de F_X est légère qui permet d'obtenir des solutions quantitative simples de la probabilité de ruine.

Pour ces échantillons simulés, nous avons appliqué la formule de Lundberg pour le calcul exacte de la probabilité ultime de ruine

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{c\delta} e^{-(\delta - \lambda/c)u}$$

Nous avons appliqué cette formule pour les deux vecteurs de paramètres de loi poisson et exponentiel pour différentes valeur de u . Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau suivant

Table 3 : probabilité de ruine de Lundberg

u	0	10^2	10^4	10^5	10^6	10^7
$\bar{\psi}(u)$	0.7562	0.7545	0.6022	0.1002	0.0012	4.95×10^{-6}
$\bar{\psi}_{min}$	0.2876	0.2879	-0.522	-1.104	-0.07	3.45×10^{-6}
$\bar{\psi}_{max}$	1.225	1.230	1.72	1.30	0.0748	6.46×10^{-6}

Les valeurs de $\bar{\psi}_{min}$ et $\bar{\psi}_{max}$ représentent les borne de l'intervalle de confiance de la probabilité c-à-d $\bar{\psi} \in [\bar{\psi}_{min}, \bar{\psi}_{max}]$

Les valeurs de $\bar{\psi}_{min}$ et $\bar{\psi}_{max}$ sont calculées par la même méthode dans le tableau précédent et dans tout les tableaux qui suivent

On a

$$\bar{\psi}_{min} = \bar{\psi} - q\hat{\sigma}$$

$$\bar{\psi}_{max} = \bar{\psi} + q\hat{\sigma}$$

Et $\hat{\sigma} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\psi_i - \bar{\psi})^2$ $\hat{\sigma}$: l'écart type de la probabilité de ruine

q : est la quantile de la loi normale ($n = 150, \alpha = 0.05$)

Le résultat de tableau est représenté dans le graphe suivant

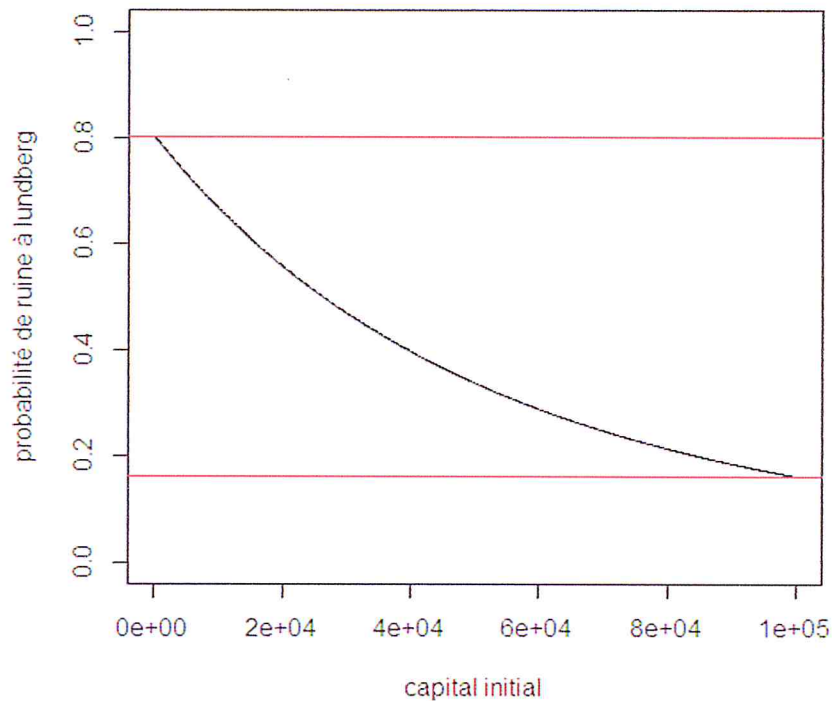


FIG 5 : Graphe représentant la probabilité de ruine de Lundberg

Nous avons appliqué une deuxième méthode de calcul exacte de la probabilité de ruine , la méthode de mélange de deux exponentiel.

Donc nous avons généré deux échantillons exponentiel avec deux paramètre $\alpha = 5.24 \times 10^{-5}$ avec une probabilité $q = 0.7$ et $\beta = 1.18 \times 10^{-6}$ avec la probabilité $1 - q$

Le calcul est fait à l'aide de logiciel R,

Nous avons supposé que le chargement de sécurité $\theta = 0.3$

Les résultats obtenus sont représentés dans le tableau et la figure suivant

Table 4 : représente la probabilité de ruine en fonction de le capital initial ;

u	0	10^4	10^7	10^8	10^{10}
$\bar{\psi}(u)$	0.769	0.765	0.57	0.047	0

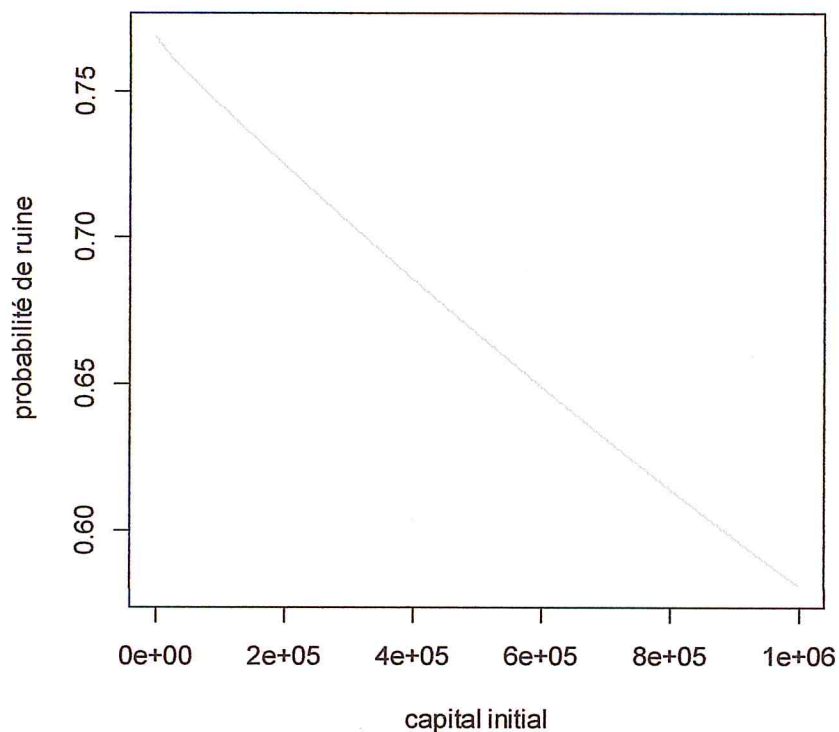


FIG 6 : Graphe représente la probabilité de ruine en fonction de capital initial pour loi 2 exponentielles

Dans le cas des montants de sinistres à queue lourde le calcul de la transformé de Laplace est difficile, pour cela on cherche une approximation à la probabilité de ruine.

Nous allons appliquer la formule de De-Vylder, est l'approximation de heavy-traffic (montants des réclamation à queue lourd)

La formule de De-Vylder est la suivante

$$\bar{\lambda} = \frac{9\lambda\mu^{(2)^3}}{2\mu^{(3)^2}},$$

$$\bar{\theta} = \frac{2\mu\mu^{(3)}}{3\mu^{(2)^2}} \theta,$$

$$\bar{\beta} = \frac{3\mu^{(2)}}{\mu^{(3)}}$$

Puis l'approximation de De Vylder est donnée par

Chapitre IV Application

$$\psi_{DV}(u) = \frac{1}{1 + \bar{\theta}} \exp\left(-\frac{\bar{\theta}\bar{\beta}u}{1 + \bar{\theta}}\right)$$

Et les paramètres $\bar{\theta}$ et $\bar{\beta}$ sont déterminés par

$$\bar{\theta} = \frac{2\mu\mu^{(3)}}{3\mu^{(2)^2}}\theta$$

$$\bar{\beta} = \frac{3\mu^{(2)}}{\mu^{(3)}}$$

Où : θ est le coefficient de chargement de sécurité ($\theta = (c - \lambda\mu) / \lambda\mu$), et $\mu, \mu^{(2)}, \mu^{(3)}$

Sont les moments d'ordre 1, 2, 3 des montants de réclamations respectivement.

Le calcul se fait comme celui de la probabilité de ruine exacte à l'aide de logiciel R,

Nous avons supposé la valeur de la prime constante $c = 900000$.

Les résultats sont représentés dans le tableau suivant

Table 5: représente la probabilité de ruine calculée par le modèle de De-Vylder

u	0	10^2	10^4	10^5	10^6	10^7
$\bar{\psi}(u)$	0.7614	0.75961	0.6022	0.0973	0.0013	1.131×10^{-5}
$\bar{\psi}_{min}$	0.275	0.267	-0.849	-1.119	-0.084	3.48×10^{-5}
$\bar{\psi}_{max}$	1.247	1.251	1.7539	1.3146	0.0877	1.91×10^{-5}

Le graphe suivant représente la probabilité de ruine en fonction du capital initial

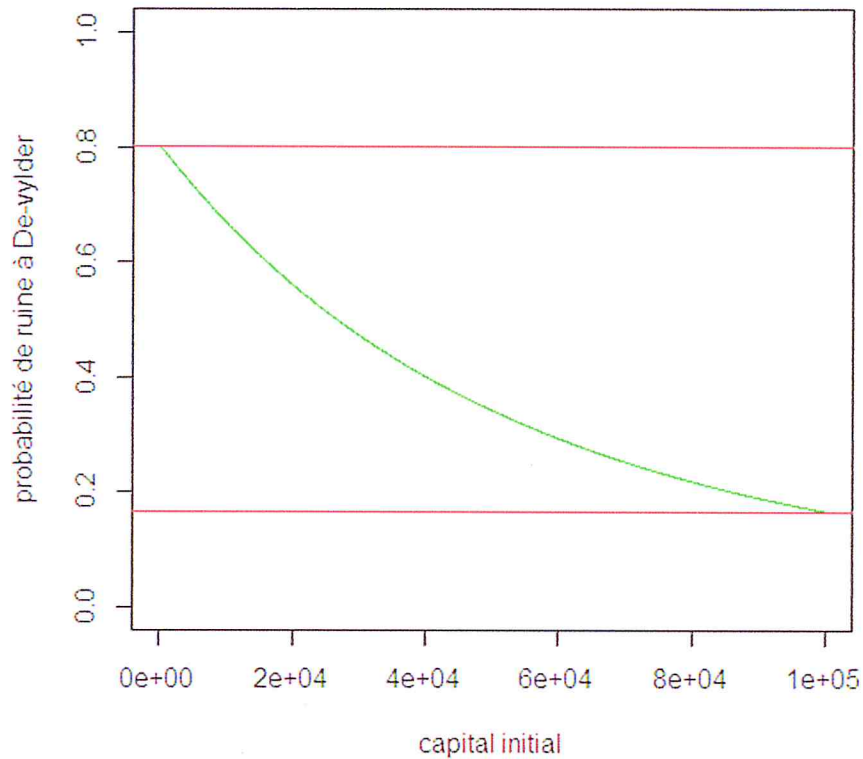


FIG7 : représente la probabilité de ruine de De-Vylder en fonction de capital initial

Nous avons approché la probabilité de ruine par une deuxième formule est

$$\psi_{HT}(u) = \exp\left(-\frac{2\theta\mu^{(1)}u}{\mu^{(2)}}\right)$$

Cette formule est appliqué dans le cas des montants de remboursements à queue lourde.

Le calcul se fait à l'aide de logiciel R, les valeurs de la probabilité de ruine à l'horizon infini sont données dans le tableau suivant

Table 6: représente la probabilité de ruine où cas des remboursements à queue lourde

u	0	10^2	10^4	10^5	10^6	10^7
$\bar{\psi}(u)$	1	0.996	0.725	0.076	0.0013	1.08×10^{-5}
$\bar{\psi}_{min}$	1	0.9997	0.978	-0.3206	0.912	0.9999
$\bar{\psi}_{max}$	1	1	2.103	2.32	1.087	1

Chapitre IV Application

Voici le graphe qui résume ses résultats

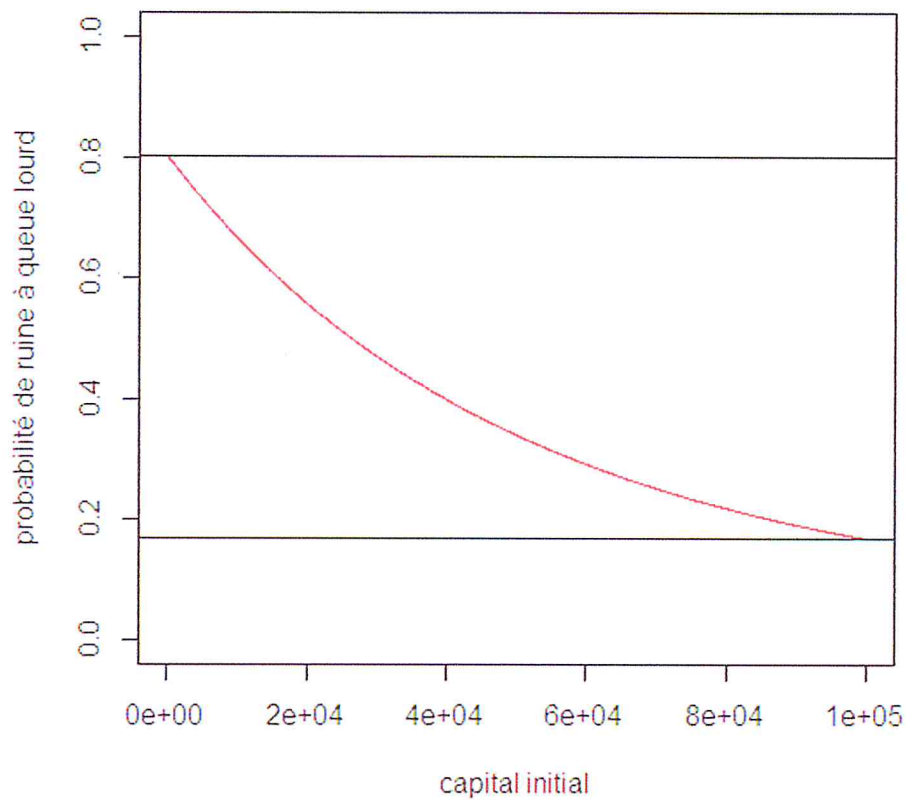


FIG 8 : représente la probabilité de ruine de queue lourde en fonction de capital initial

Les trois méthodes de Lundberg et De-Vylder et queue lourde sont appliqués sur les mema vecteurs du nombre de sinistres et montants de réclamations, Donc le graphe suivant donne une comparaison de valeurs de la probabilité de ruine donné par ces trois méthodes

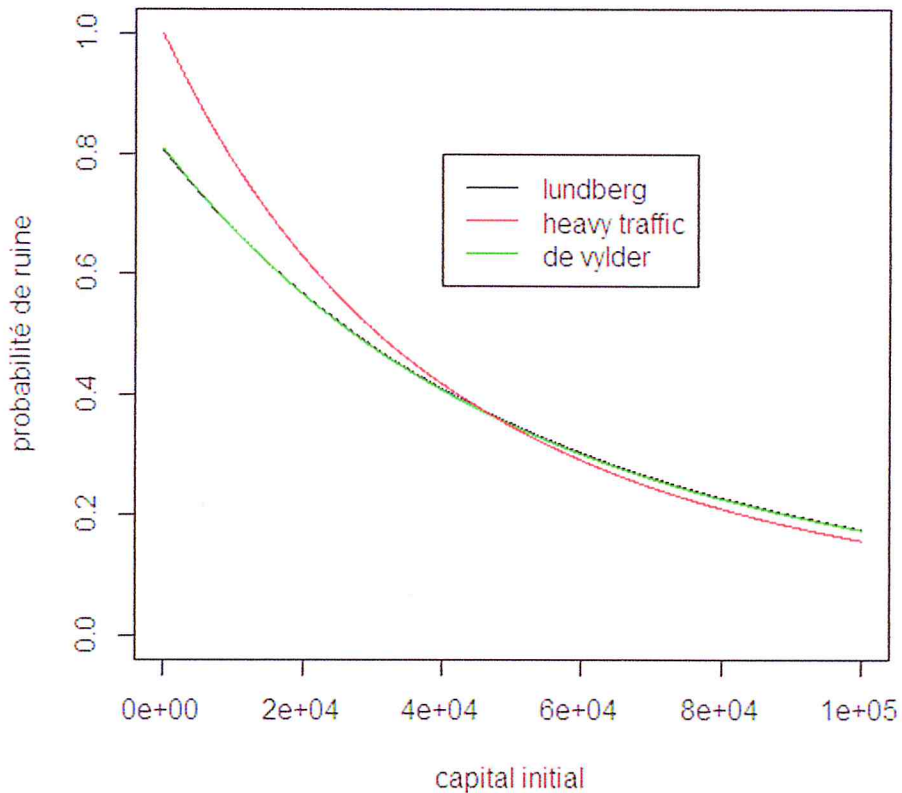


FIG 9 : Comparaison de valeur de probabilité de ruine calculée par les différentes méthodes

Nous constatons que la valeur de la probabilité diminue quand le capital initial augmente, donc la relation entre la probabilité de ruine et le capital initial est une relation d'inverse.

Nous remarquons aussi que le graphe de la probabilité de ruine donné par le modèle de Lundberg et ce de De-Vylder sont confondus, ce qui signifie que ces deux modèles donnent des valeurs proche de la probabilité, car le modèle de De-Vylder donne des valeurs exactes de la probabilité de ruine à l'horizon infini au cas des montants des réclamations à queue fine (exponentiel) et approché dans le cas contraire. La valeur de la probabilité donné par le modèle de queue lourde commence toujours de 1 lorsque $u = 0$, et la probabilité de s'approche de la probabilité de Lundberg et De-Vylder quand le capital initial augmente.

Chapitre IV Application

1.1 Simulation de surplus :

Le réserve d'une compagnie d'assurance est défini par

$$R(t) = u + Ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

Nous avons simulé la trajectoire de surplus pour une compagnie d'assurance dans le cas de modèle de Landberg.

Où $N(t)$ est distribué selon la loi de poisson de paramètre λt , et les montants de réclamations $X_i, i = 1, N(t)$ suivent une loi exponentielle.

La simulation de $N(t)$ et X_i se fait de la même manière dans les deux sections précédentes, nous avons simulé une variable de poisson de paramètre λt ($\lambda = 6, t = 100$), et nous avons simulé un vecteur de loi exponentielle de taille N et de moyenne $\mu = 900$. nous avons supposé que $\theta = 0.3$, Donc nous avons calculé la valeur de c par la relation $c = (1 + \theta)\lambda\mu$ et la somme cumulé des montants de réclamations pour chaque instant d'arrivé de sinistre, ces instants sont généré par la loi uniforme.

On obtient le graphe suivant de la trajectoire de surplus

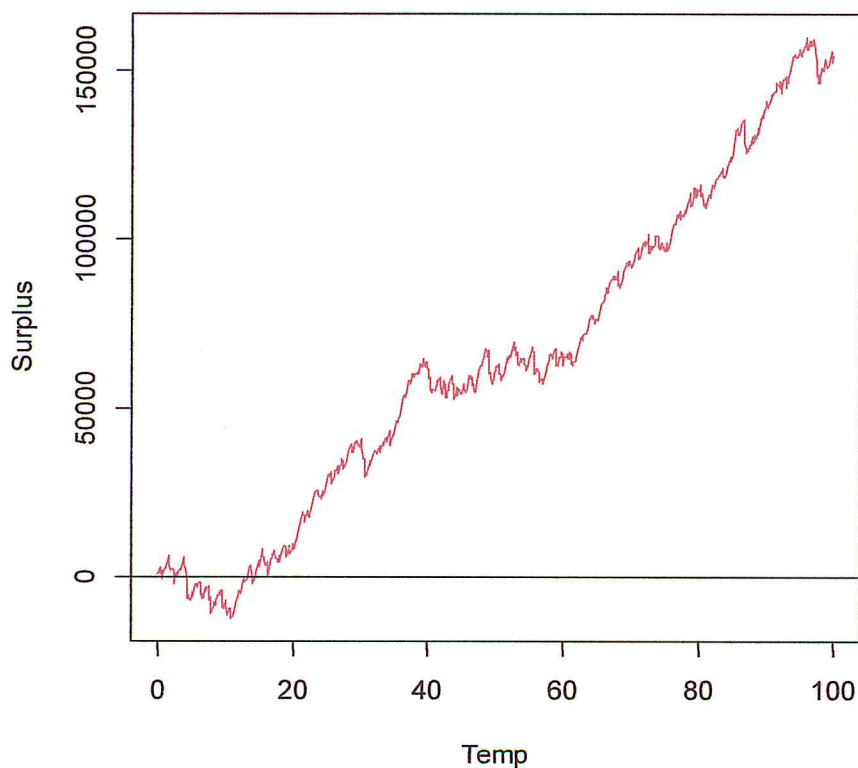


FIG 10 :trajectoire d'un surplus d'une compagnie d'assurance

Chapitre IV Application

2. Calcul de la probabilité de ruine pour une compagnie d'assurance des salaires (CNAS) :

Après la génération des données d'une compagnie d'assurance, Nous avons estimé la probabilité de ruine pour la compagnie d'assurance des salaires de l'agence de Koléa,

Nous avons ajusté le nombre des malades et les montants de remboursements par la loi de poisson et la loi exponentielle respectivement, par le test d'ajustement de Kolmogorov-Smirnov.

2.1 Représentation des données :

Nous avons résumé les informations sur le nombre de sinistre et les montants de réclamations dans un tableau de statistique, les données de la compagnie a partir de janvier 2013 jusqu'à décembre 2016,

Table 7 : résume les données de la compagnie d'assurance (CNAS)

n=48	Moyenne	Variance	Valeur maximale	Valeur minimale	skewness	Kurtosis
Sinistres	1386,542	24034,8067	1613	1115	-0,4664683	-1,117684
montants	20579498	1,55908E+14	35045595	1624325	-0,5640262	-1,400045

Les deux graphes résument le nombre de sinistres, et les montants des réclamations pendant les 48 mois.

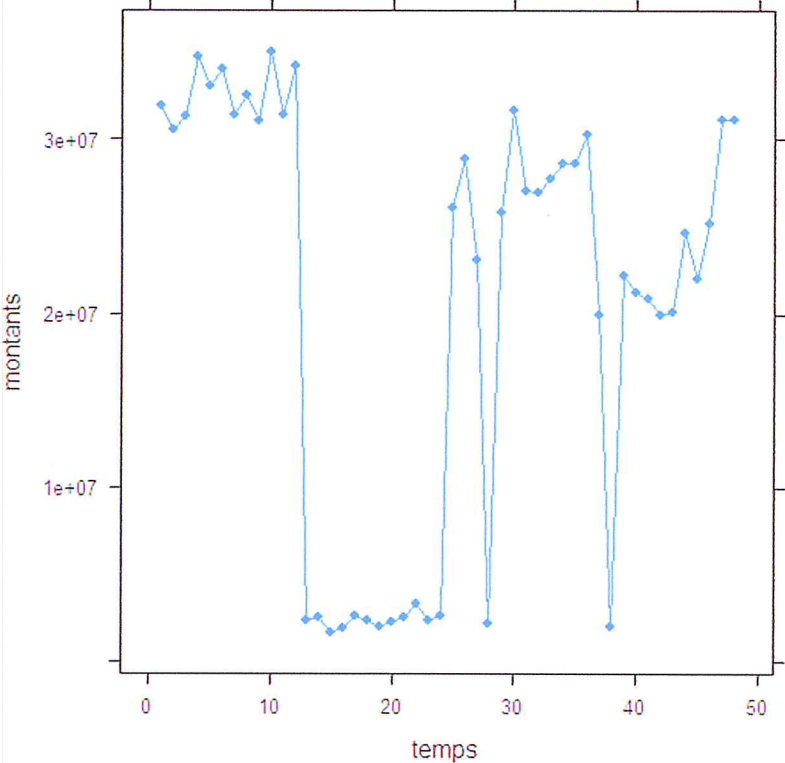


FIG 10 : Representation des montants de remboursements pendant 48 mois

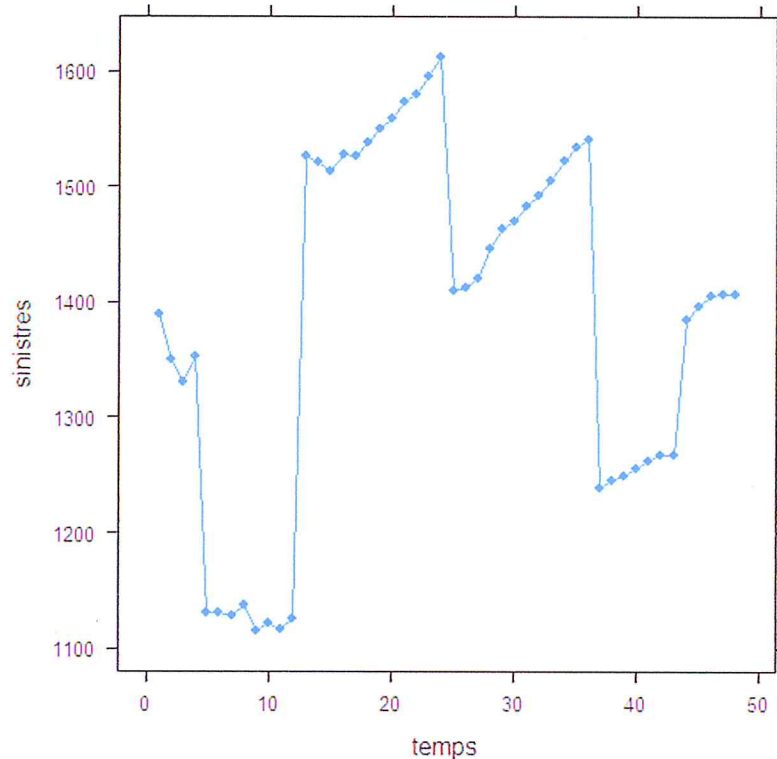


FIG 11: Représentation du nombre des sinistres pendant 48 mois

Nous remarquons de graphes que le nombre de sinistres et les montants de réclamations, se varient en fonction de temps pendant toute la période d'étude, et nous remarquons une relation d'inverse entre les nombres et les montants de sinistres.

2.2 Ajustement des données :

Cette étape consiste à ajuster nos données sur: le nombre de réclamations, le montant des réclamations et la prime par des lois statistiques connues. L'estimation des paramètres des lois et l'ajustement des données sont effectués à l'aide du logiciel libre R.

2.2.1 Ajustement du nombre de réclamations :

Considérons le processus de comptage $\{N(t), t \geq 0\}$ du nombre de réclamation sur $]0, t]$ qui prend comme valeurs l'échantillon observé durant les 48 mois de la période d'étude. Nous avons ajusté le vecteurs de nombre des sinistres a la loi poisson de paramètre $\lambda = 1386,542$ (λ représente la moyenne de l'échantillon),

Chapitre IV Application

Le test d'ajustement de Kolmogorov-Smirnov est fait à l'aide de logiciel R, les résultats obtenus sont représentés dans le tableau suivant

Table 8 : Résultat de test Kolmogorov-Smirnov pour l'ajustement de nombre de sinistres

Loi	n	λ	D_α	$d_{n,\alpha}$	Décision
Poisson	48	1386,542	0.327	0.196	Rejeté

n : Taille de l'échantillon

D_α : Statistique empirique du test de Kolmogorov-Smirnov

$d_{n,\alpha}$: Quantile tabulé du test du de Kolmogorov-Smirnov avec un seuil de signification $\alpha = 0.05$.

Donc à partir de tableau l'hypothèse que le nombre de sinistre $N(t)$ suit une loi de poisson de paramètre $\lambda = 1386,542$ est rejeté.

2.2.2 Ajustement des montants de réclamations :

Nous allons ajuster les données des montants de réclamation par une loi statistique pour connaître le modèle à appliqué pour calculé la probabilité de ruine.

Donc, nous avons ajusté les vecteurs des montants des réclamations par la loi exponentielle de paramètre $\delta = 4.859 \times 10^{-8}$ ($\delta = \frac{1}{\mu}$, $\mu = 20579498$ la moyenne des montants des réclamations de 48 mois), on associé au vecteur des réclamations le test d'ajustement de Kolmogorov-Smirnov avec un seuil de signification $\alpha = 0.05$ a l'aide de logiciel R. Les résultats obtenus sont représenté dans le tableau suivant

Table 9 : Résultat de test Kolmogorov-Smirnov pour l'ajustement des montants des réclamations par la loi exponentielle

Loi	N	δ	D_α	$d_{n,\alpha}$	Décision
exponentiel	48	4.859×10^{-8}	0.327	0.196	Rejeté

A partir des résultats de tableau, l'hypothèse que les montants des réclamations sont exponentiels est rejetée.

Donc, de résultat de la section précédente et le résultat de cette section, on ne peut pas appliquer le modèle de Lundberg pour le calcul de la probabilité de ruine.

2.2.3 Estimation de la probabilité de ruine :

Nous avons supposé que le nombre de sinistre de la compagnie d'assurance suit la loi de poisson dont le paramètre λ estimé est $\lambda = 1386,542$,

Et nous allons appliquer la méthode de heavy-traffic sur les données de cette compagnie d'assurance. Nous considérons que le paramètre $\mu = 20579498$, et $\mu^2 = 5.6741 \times 10^{14}$ et le capital initial $u = 7537843479.70$ la moyenne des capitaux initiaux des quatre années d'études et la prime $c = 967859148$.

Donc nous avons calculé le coefficient de chargement de sécurité, nous avons trouvé que $\theta = 1729429$. Après nous avons calculé la probabilité de ruine de cette compagnie d'assurance, on a trouvé cette dernière nulle.

Le résultat trouvé concernant la probabilité de ruine est logique, car nous avons déjà trouvé que $\theta > 0$, ce résultat signifie que la probabilité de ruine est faible, de plus le capital initial est grand ce qui rend la probabilité de ruine de la compagnie d'assurance nulle.

Le cas de la compagnie d'assurance de kolea est rare, Car les compagnies d'assurance risquent de tomber en faillite, si les montants des remboursements de sinistres dépassent les cotisations des assurés. Donc les statisticiens cherchent toujours des solutions pour éviter la ruine.

Conclusion générale

Conclusion générale

En assurance, il est nécessaire de modéliser le comportement d'un surplus financier afin de quantifier le risque qui lui est associé, plus précisément on tente d'étudier la probabilité que ce surplus financier tombe en dessous de zéro événement qu'on appelle à ruine.

En retiendra que la probabilité de ruine est une procédure d'évaluation des risques de faillite pour les compagnies d'assurances. La théorie de risque présente des méthodes permettant de calculer cette probabilité, après la précision de la distribution de nombre de sinistres et celle de montants de réclamations et les paramètres de ces lois.

Nous avons montré par le biais de la simulation que les méthodes de Lundberg et De-Vylder et pour à queue lourde ont donné le même performance.

Mais dans certain cas, On ne peut pas ajuster les données réelles des compagnies d'assurance par aucune loi usuelles donnée par les modèles de la probabilité de ruine.

Parmi les perspectives est l'étude de la probabilité de ruine dans le cadre multi varié (modèles multi branches, multirisques).

Bibliographie :

- [1] Andersen.e.sparre”on the collective theory of risk in case of contagion between claims”transactions of the XVth international congress of actuaries .vol.2.No.6.1957.
- [2] Asmussen .s,and H. Albrecher. *Ruin probabilities*. World Scientific, 2010.
- [3] Biard.R, dependance et événements extremes en théorie de la ruine: etude univariée et multivariée, problems d’allocation optimal, laboratoire science actuarielle financière-EA 2429.
- [4] Claudla.K, Andreas.k,and Ross.H, ruin probabilities and overshoots for general levy insurance risk processes, institute of mathematical statistics 2004.
- [5] Cramér.H-on the mathematicale theory of risk Skandia jutilee volume stochholm.
- [6] David.c, Dickson.M, insurance risk and ruin, Cambridge university press.
- [7] De-Vylder. f(1996) advance risk theory a self contained introduction actuariat ED-de l’université de bruxelles .
- [8] Dimitrios.K, gurami.I, estimates for the ruin probability in the classical risk modem with constant interest force in the presence of heavy tails, insurance mathematics and economics 31(2002)447-460 .
- [9] Grandell.J.aspects of risk theory springer-verlag, 1991.
- [10] Janssen.J and R. Manca.R. *Semi-Markov risk models for finance,insurance and reliability*. Springer, 2007.
- [11] Kalev.P, risk theory, university of tartu institute of mathematical statistics.
- [12] Lundberg.F. *Approximerad framställning av sannolikehetsfunktionen, aterförsäkering av kollektivrisker*. Almqvist & Wiksell, Uppsala, 1903.
- [13] Schmidt.v, T. Rolski, J. Teugels, and H. Schmidli. *Stochastic Processes for Insurance and Finance*. Wiley, 1999.
- [14] Yong.W, Xiang.H, ruine probability in compound poisson process with investement, journal of applied mathematics.

Annexe :

Symbole	Description
$c\text{-à-d}$	c'est-à-dire
$v.a$	variable aléatoire
f_X	Fonction de densité de X
$E(X)$	Espérance mathématique de la $v.a$ X
$var(X)$	Variance de la $v.a$ X
ϕ_X	Fonction caractéristique de la $v.a$ X
\hat{f}_X	Transformé de Laplace de la $v.a$ X
\mathcal{M}_X	Fonction génératrice de la $v.a$ X
f_X^{*n}	Produit de convolution de densité de la $v.a$ X
F_X	Fonction de répartition de la $v.a$ X
$\mu^{(2)}$	Espérance mathématique d'ordre 2 pour la $v.a$ X
$\tau(u)$	L'instant de ruine associé à un réserve initial u
$\psi(u, T)$	Probabilité de ruine à l'horizon fini
$\psi(u)$	Probabilité de ruine à l'horizon infini
$\phi(u)$	La probabilité de non ruine
L	La perte maximale agrégée
θ	Le coefficient de chargement de sécurité
R	Coefficient d'ajustement
P/G	Modèle de risque de Cramer-Lundberg
p/p	Modèle de risque de Lundberg
ψ_{CL}	Approximation de Cramer-Lundberg
ψ_E	Approximation exponentielle de la probabilité de ruine
ψ_L	Approximation de Lundberg
ψ_{BB}	Approximation de Beekman-Bowers
ψ_R	Approximation de Renyi

- ψ_{DV} Approximation de De-Vylder
- ψ_{4MGDV} Approximation de 4-moment Gamma De Vylder
- ψ_{HT} Approximation $\psi(u)$ dans le cas des remboursements à queue lourde
- ψ_{LT} Approximation $\psi(u)$ dans le cas des remboursements à queue fine

