MA - 510 - 48 - 2

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Blida 1
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Laboratoire LAMDA-RO

Mémoire de Master
Spécialité : Recherche Opérationnelle

Thème:

Etude de la α-Domination dans les Graphes

Présenté par
Khadidja ALILICHE

Devant le jury composé de :

Mr. Omar TAMI	M.C.B	Univ. de Blida 1	Président
Mr. Mostafa BLIDIA	Prof.	Univ. de Blida 1	Promoteur
Mr. Mustapha CHELLALI	Prof.	Univ. de Blida 1	Examinateur
Mme. Nacéra MEDDAH	M.C.B	Univ. de Blida 1	Examinatrice

MA-510-48-2

2017-2018

Dédicace

À mes parents, mes sœurs et mes frères.

À toute ma famille.

À tous mes amis.

جامعة البليدة 1 - كلية العلوم
مكتبة الكلية

Remerciements

Je tiens à remercier en tout premier lieu, Dieu de m'avoir donnée la volonté, la force et le courage pour aller au bout de ce mémoire.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude et ma reconnaissance à mon directeur de thèse,

Monsieur Mostafa BLIDIA, Professeur à Blida, pour avoir accepté de diriger mon travail. Je le remercie pour son implication, son soutien et ses précieux conseils qui m'ont permis de mener à bien ce travail.

Je remercie vivement Monsieur Omar TAMI, Professeur à BLIDA, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury. Mon profond respect et mes remerciements vont à Monsieur Mustapha CHELLALI, Professeur à Blida, Madame Nacéra MEDDAH, Professeur à Blida pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de faire partie du jury et d'examiner ce mémoire.

Je remercie tous les professeurs de département de mathématiques.

Je voudrais exprimer plus particulièrement mes remerciements à mes parents pour leur éducation, leur générosité, leurs sacrifices, leurs précieux conseils. J'adresse un remerciement à mes sœurs, mes frères, toute ma grande et petite famille qui m'ont offert l'opportunité de faire ce mémoire, de m'avoir offert un environnement favorable à ce travail. Merci à vous tous d'être près de moi.

Enfin, je remercie toutes les personnes, famille, amis, qui directement ou indirectement ont contribué à la réalisation de ce travail.

ملخص

يهتم موضوع هذه الأطروحة بالمعلمة α–الهيمنة في الرسوم البيانية، المجموعة الفرعية S من V هي عبارة عن α-الهيمنة لـG ، إذا كانت كل قمة $x\in V\text{-}S$ مجاورة على الأقل لـقمم $\alpha|N(v)|$ في S بحيث $0<\alpha\leq 1$ ، ونرمز لعدد الحد الأدنى لمجموعة α–المهيمنة من G ب $\gamma_{\alpha}(G)$ وتسمى عدد α-الهيمنة.

ويتضمن هذا الموضوع جزأين، في الجزء الأول، ركزنا على دراسة تحديد القيمة الدقيقة لعدد α-الهيمنة في الرسوم البيانية الثلاثية الكاملة وتحديد القيم الدقيقة وقيم عليا من عدد α-الهيمنة في الرسم البياني الملك وننظر أيضًا في بعض النتائج للأشجار، بعد ذلك، نحدد عدد α-الهيمنة لبعض فئات الرسوم البيانية، إذ تتضمن هذه الفئات عجلة الرسم البياني، والشمس، والمروحة، والرسم البياني الأوسط، الإجمالي، والمجاور لعديد من الرسوم البيانية.

في الجزء الأخير ، تعاملنا مع المشكلة النقدية. إذ اهتممنا بشكل رئيسي بحذف قمة الرسم البياني. إذ اقترحنا نتائج عندما يترك حذف قمة قيمة عدد α-الهيمنة مستقرا، أي لا تتغير قيمة α–الهيمنة.

Résumé

Dans ce mémoire, on s'intéresse essentiellement au paramètre α-domination dans les graphes. Un sous-ensemble S de V est un α-dominant de G, si tout sommet $x \in V - S$ est adjacent à au moins $\alpha\,|N(v)|$ sommets dans S pour $0 < \alpha \leq 1$. Le cardinal minimum d'un ensemble α-dominant de G, est noté par $\gamma_\alpha(G)$, est appelé le nombre de α-domination.

Ce mémoire comprend deux parties. Dans la première partie, on s'intéresse à l'étude de la détermination de la valeur exacte du nombre α-domination dans les graphes tripartis complets et la détermination des valeurs exactes et des bornes supérieures du nombre α-domination dans le graphe du Roi, aussi on considère des résultats relatifs aux arbres. Par la suite, on établit le nombre de α-domination de certaines classes des graphes. Ces classes comprennent le graphe roue, le graphe soleil, le graphe éventail, le graphe milieu, le graphe total et le graphe adjoint de quelques familles de graphes simples.

Dans la deuxième partie, nous abordons le problème de la criticité. On s'est intéressé essentiellement à la suppression d'un sommet du graphe. On propose des résultats quand la suppression d'un sommet laisse la valeur du nombre de α-domination stable c-à-d la valeur de α-domination ne change pas.

Abstract

In this thesis, we mainly focus on the parameter α-domination in graphs. A subset S of V is an α-dominant of G, if every vertex $x \in V - S$ is adjacent to at least $\alpha|N(v)|$ vertices in S for $0 < \alpha \leq 1$. The minimum cardinality of α-dominant set of G, is denoted by $\gamma_\alpha(G)$, is called the number of α-domination.

Our work contains two parts. In the first part, we are interested in the study of the determination of the exact value of the α-domination number in complete tripartite graphs and the determination of the exact values and upper bounds of the number α-domination in the King graph, also we consider some results in trees. Subsequently, we establish the number of α-domination of some classes of graphs, these classes include the wheel graph, the sun graph, the fan graph, the middle graph, the total graph, and the line graph of some families of simple graphs.

In the second part, we consider the problem of criticality. We were mainly interested in deleting a vertex from a graph. We propose results when the deletion of a vertex leaves the value of the α-domination number inchanged.

Table des matières

Liste des figures

Introduction

La théorie des graphes est une branche des mathématiques discrètes. Elle représente un moyen très utile et très efficace pour résoudre des problèmes discrets de la Recherche Opérationnelle. Elle est ainsi souvent présente dans notre vie quotidienne, sans que l'on en soit toujours conscient. Le problème appelé *"problème des ponts de Koenigsberg"* posé par Euler en 1736 est à l'origine de cette branche. Ce problème consiste à répondre à la question suivante : "peut-on se promener dans la ville Pregel en traversant tous les ponts et en empruntant chaque pont une et une seule fois ?". Depuis, la théorie des graphes s'est développée, notamment grâce aux travaux de *Berge* qui a grandement contribué à sa diffusion.

La théorie des graphes est maintenant un outil majeur dans la recherche mathématique, électrotechnique, programmation informatique et réseautage, affaires administration, sociologie, économie, marketing et communication, la liste peut continuer encore et encore. En particulier, de nombreux problèmes peuvent être modélisés avec des chemins formés en voyageant le long des arêtes d'un certain graphe. Par exemple, problèmes de planification efficace des itinéraires pour la livraison du courrier, ramassage des ordures, le déneigement, les diagnostics dans les réseaux informatiques et autres, peuvent être résolus en utilisant des modèles qui impliquent des chemins dans les graphes. La théorie des graphes a également été utilisé de nombreuses fois dans les problèmes provenant du monde physique, comme la prise en compte des isomères chimiques, des réseaux électriques etc.

L'étude mathématique des ensembles dominants dans les graphes remonte à 1850 avec l'étude du problème de la détermination du nombre minimum de reines qui sont nécessaires pour couvrir un échiquier $n \times n$. Plus d'une centaine de types de paramètres de domination ont été étudiés par différents auteurs. Des mathématiciens indiens ont apporté une contribution substantielle à l'étude de la domination dans les graphes. En 1979, ils publièrent un rapport technique intitulé «Développements récents dans la théorie de la domination dans les graphes, rapport technique 14 IRM» qui déclencha une recherche considérable dans ce domaine.

La domination trouve son application dans de nombreux domaines tels que la localisation des radars, l'emplacement des stations de communication entre différentes villes, les routages, etc.

Un sous ensemble S de sommets dans un graphe $G = (V, E)$ est dit dominant si tout sommet extérieur à S a au moins un voisin dans S. Plusieurs variantes de domination sont dérivées de la domination classique, en imposant des propriétés supplémentaires sur les ensembles dominants, on cite par exemple la α-domination, en imposant la condition que tout sommet extérieur à S a un nombre de voisins dans S égal à au moins α fois le nombre de voisins de v dans G.

Ce mémoire comporte deux volets, le premier volet est consacré à l'introduction de la notion de la α-domination dans les graphes, la détermination de la valeur exacte du nombre α-domination dans certaines classes de graphes et la détermination de bornes qui encadrent ce paramètre. Le deuxième volet comporte la notion de criticité par rapport à ce paramètre c'est à dire voir le comportement du nombre de α-domination sous l'effet de l'ajout ou de la suppression d'un sommet du graphe. Ce manuscript s'articule autour de quatre chapitres:

Dans le premier chapitre, on présente les définitions et les notions de base de la théorie des graphes qui nous seront utiles pour la suite, on commence dans le chapitre par des définitions générales de graphe non orienté. On fournit par la suite quelques familles particulières de graphes. Aussi, on introduit la notion de la α-domination dans les graphes, en donnant un aperçu historique sur cette dernière et la notion de criticité.

Dans le deuxième chapitre, on commence par fournir des résultats existants et connus sur le nombre de α-domination qui sont obtenus par Danbar et al [1], dans ce cadre on donne des preuves de certains propositions qui sont omises dans leur article. Ensuite on présente la valeur exacte du nombre de stabilité et le nombre de domination dans le graphe du Roi $K[s \times t]$. Puis, on énonce deux résultats sur les arbres, l'un est en relation avec la α-domination introduite par F. Dahme et al [4] et l'autre en relation avec à la domination citée par M. Lemañska [5], ces résultats seont utiles pour la détermination de nouveaux résultats qui seront proposés dans le chapitre suivant.

Notre contribution dans le cas du premier volet fera l'objet du chapitre trois. Dans un premier lieu, on s'est intéressé au nombre de α-domination dans les graphes tripartis complets et dans ce cas on donne la valeur exacte de ce paramètre. Par la suite, on détermine les valeurs exactes et des bornes supérieures du nombre α-domination pour le graphe du Roi $K[s \times t]$ pour certaines valeurs de α et la valeur exacte de $K[2 \times t]$ et $K[3 \times t]$ pour toutes les valeurs de α. D'autre part, on donne quelques résultats relatifs au nombre α-domination dans le cas des arbres. Dans un deuxième lieu, on étudie le nombre de α-domination de certains types de graphes, dont le graphe roue, le graphe soleil, le graphe éventail, et le graphe milieu, total, et adjoint des chaines, des cycles, des étoiles, et des soleils.

Dans le chapitre quatre, on aborde les problèmes liés à la notion de criticité par rapport au paramètre de α-domination, on traite seulement le cas de la suppression d'un sommet. Dans la première section on présente quelques résultats connus quand la suppression d'un sommet diminue le nombre de la α-domination considéré dans l'article de N.Jafari Rad et al [7], dans la deuxième section, on détermine certains résultats quand la suppression d'un sommet laisse inchanger le nombre de α-domination.

Le mémoire s'achève par une conclusion générale sur l'ensemble des travaux réalisés et propose certaines perspectives de recherche.

CHAPITRE 1

Concepts fondamentaux des graphes

Dans ce chapitre, on introduit d'abord les définitions de base de la théorie des graphes qui nous seront utiles tout au long de ce mémoire. Dans un premier temps on rappelle les principales définitions de la notion de graphe non orienté. Ensuite, on rappelle quelques classes et familles particulières de graphes. Enfin, on aborde brièvement l'historique de la α-domination dans les graphes et la notion de criticité.

1.1 Quelques notions de base de théorie des graphes

1.1.1 Définitions générales (graphe non orienté)

Un graphe non orienté $G = (V(G), E(G))$, est un couple composé d'un ensemble $V(G)$ de sommets de G, et d'un ensemble $E(G)$, d'arêtes qui sont des paires de sommets (non nécessairement distincts). Si $e = uv$ est une arête alors on dit que e relie u et v, et les sommets u et v sont appelés les extrémités de e. Une arête $e = uv$ est une boucle si $u = v$. Dans le cas général, un graphe peut avoir des arêtes multiples, c'est-à-dire des arêtes différentes qui ont les mêmes extrémités. Les nombres de sommets et d'arêtes de G sont notés $|V(G)|$ et $|E(G)|$, ces deux paramètres fondamentaux sont appelés l'ordre et la taille de G, respectivement.

Un graphe simple est un graphe sans boucle, et dans lequel toute paire de sommets est reliée par au plus une arête. Dans toute la suite de ce mémoire, nous considérerons uniquement les graphes simples.

Adjacence et Voisinage

Soit G un graphe. Pour une arête $e = uv$, on dit que: u et v sont *adjacents*. Pour un graphe G, le *voisinage ouvert* d'un sommet u, noté $N_G(u)$, est l'ensemble des sommets adjacents à u. Le *voisinage fermé* de u, noté $N_G[u]$, est l'ensemble $N_G[u] = N_G(u) \cup \{u\}$.

Le voisinage ouvert (respectivement fermé) d'un sous ensemble de sommets $S \subseteq V(G)$ est $N_G(S) = \cup_{u \in S} N_G(u)$ (respectivement $N_G[S] = \cup_{u \in S} N_G[u]$).

Degré d'un sommet

Le *degré* d'un sommet u dans un graphe G, noté $d_G(u)$, est le nombre d'arêtes incidentes à u, et donc $d_G(u) = |N_G(u)|$. Le degré maximum (respectivement minimum) d'un graphe G est noté $\Delta(G)$ (respectivement $\delta(G)$) et défini comme le maximum (respectivement minimum) des degrés des sommets de G. Pour $S \subseteq V(G)$ et $u \in V - S$, on définit $d_S(u) = |N_S(u)| = |N_G(u) \cap S|$.

Distance et diamètre

On appelle distance de u à v notée $d(u, v)$, la longueur d'une plus courte chaîne de u à v. Le diamètre dans un graphe G noté $diam(G)$ est la distance maximum entre deux sommets de G, c-à-d $diam(G) = max_{u,v \in V}(d(u, v))$.

1.1.2 Classes particulières de graphes.

Sous-graphe et sous-graphe induit

Un *sous-graphe* $H = (V_H, E_H)$ d'un graphe $G = (V_G, E_G)$ est le graphe G auquel des sommets et/ou des arêtes ont été enlevés, c'est-à-dire $V_H \subseteq V_G$ et $E_H \subseteq E_G$. et le sous-graphe H de $G = (V_G, E_G)$ induit par $U \subseteq V_G$, noté $G[U]$, est défini par $V_H = U$ et $E_H = \{xy \in E_G \mid x, y \in U\}$, autrement dit les arêtes de H sont celles de G dont les deux extrémités sont dans U.

Chaînes et cycles

Une *chaîne* de longueur $k - 1$ dans un graphe G est une séquence alternée de sommets et d'arêtes $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, ..., v_{i-1}, e_{i-1}, v_i, ..., v_{k-1}, e_k, v_k$ telle que $e_{i-1} = v_{i-1}v_i$ pour $i = 2, ..., k+1$. Le nombre d'arêtes dans la chaîne définit sa *longueur* et le nombre de sommets définit son *ordre*. L'entier $k \geq 1$ représente le nombre de sommets de la chaîne. Une chaîne dans laquelle aucune arête ne se répète est dite *simple* et une chaîne dans laquelle aucun sommet ne se répète est dite *élémentaire*. Une *corde* est une arête reliant deux sommets non consécutifs dans une chaîne. Une chaîne minimale induite par k sommets, notée P_k, est une chaîne élémentaire sans cordes. Un *cycle* noté C_k de longueur k est une chaîne de longueur $k \geq 1$ dans lequel les deux extrémités de la chaîne sont confondues, dans ce cas le nombre de sommets de C_k est égal à sa longueur.

Graphe connexe

Un graphe G est dit *connexe* si toute paire de sommets de G est reliée par une chaîne.

Graphe complet

Un graphe simple est dit *complet* si tous ses sommets sont adjacents, c'est à dire si toutes les arêtes possibles existent. On appellera K_n le graphe complet à n sommet.

Graphe biparti

Un graphe G est dit *biparti* si $V(G)$ peut être partitionné en deux ensembles V_1 et V_2 de telle sorte que toute arête du graphe possède une extrémité dans V_1 et l'autre extrémité dans V_2.

Dans le cas particulier où $|V_1| = m$, $|V_2| = n$, $d_G(u) = n \; \forall u \in V_1$ et $d_G(v) = m \; \forall v \in V_2$, alors G est dit graphe biparti complet et est noté $K_{m,n}$.

Multiparti complet

Un graphe *multiparti complet* ou t-parti complet $K_{n_1,n_2,...,n_t}$, $t \geqslant 2$, est un graphe G où l'ensemble des sommets $V(G)$, $|V(G)| = n_1 + n_2 + ... + n_t$, peut être partitionné en t stables V_i (c'est-à-dire $G[V_i]$ est sans arête), $i = 1, ..., t$ avec $|V_i| = n_i$ et pour toute paire de sommets $u \in V_i$ et $v \in V_j$, $1 \leq i < j \leq t$, $uv \in E(G)$.

Graphe complémentaire d'un graphe

Le graphe complémentaire de $G = (V, E)$ est le graphe $\overline{G} = (V, \overline{E})$ où $\overline{G}$ à les mêmes sommets que G et deux sommets distincts de $\overline{G}$ sont adjacents si et seulement s'ils ne sont pas adjacents dans G.

Arbres

Un arbre T d'ordre n est un graphe connexe sans cycle. Les sommets de degré 1 sont des sommets pendants appelés aussi les feuilles (il en a au moins 2, si $n \geq 2$) et les sommets adjacents aux sommets pendants (de degré au moins 2), sont des supports. L'ensemble des sommets pendants dans T est noté par $L(T)$, la cardinalité de $L(T)$ est l. L'ensemble des supports dans T est noté par $S(T)$, la cardinalité de $S(T)$ est s. Les arbres qui n'ont que deux sommets pendants sont les chemins. En particulier, les chaînes élémentaires et les étoiles sont des arbres.

Etoile et étoile subdivisée

L'étoile est un cas particulier d'arbre, souvent étudié comme sous-graphe induit. Une étoile est un arbre à un seul nœud et k feuilles, appelé le centre de l'étoile. Cela peut aussi être vu comme un biparti complet, noté $K_{1,n-1}$. Une étoile subdivisée est obtenue à partir d'une étoile avec au moins deux arêtes, en subdivisant chaque arête exactement une fois.

Couronnes

La couronne $\mathrm{cor}(H)$ d'un graphe H est obtenu à partir de H en ajoutant une arête pendante à chaque sommet de H.

Produit cartésien de deux graphes

Soient G et H deux graphes. *Le produit cartésien ou produit carrée* $G\square H$ de G et H est le graphe ayant pour ensemble de sommets $V(G) \times V(H)$. Deux sommets (u_1, v_1) et (u_2, v_2) de $V(G) \times V(H)$ sont reliés par une arête si et seulement si $u_1u_2 \in E(G)$ et $v_1 = v_2$, ou $v_1v_2 \in E(H)$ et $u_1 = u_2$.

Produit tensoriel de deux graphes

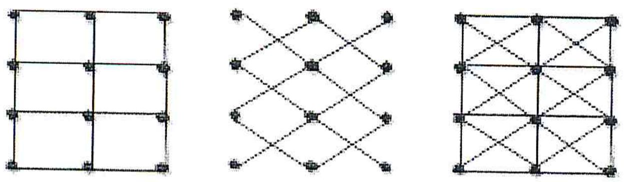
Soient G et H deux graphes. *Le produit tensoriel, produit direct* ou encore *produit croisée*, $G \times H$ de G et H est le graphe ayant pour ensemble de sommets $V(G) \times V(H)$. Deux sommets (u_1, v_1) et (u_2, v_2) de $V(G) \times V(H)$ sont reliés par une arête si et seulement si $u_1u_2 \in E(G)$ et $v_1v_2 \in E(H)$.

Produit fort de deux graphes

Soient G et H deux graphes. Le produit *fort* ou produit total $G \boxtimes H$ de G et H est le graphe ayant pour ensemble de sommets $V(G) \times V(H)$. $(u_1, v_1)(u_2, v_2)$ est une arête de $G \boxtimes H$, avec $(u_1, v_1) \neq (u_2, v_2)$ si et seulement si elle est arête de $G\square H$ ou bien de $G \times H$, c'est-à-dire

$$E(G \boxtimes H) = E(G\square H) \cup E(G \times H)$$

Exemple: la Figure 1.1 représente les différents produits de deux chaînes (P_3 et P_4).



$P_3 \square P_4$ $P_3 \times P_4$ $P_3 \boxtimes P_4$.

Figure 1.1. Illustrations des différents produits.

1.1.3 Quelques ensembles particuliers

Dans cette section, nous allons parcourir différents ensembles de sommets ou d'arêtes.

Un sous-ensemble A de V est dit est *minimal* (resp. *maximal*) par rapport à une propriété $\mathcal{P}$ s'il n'existe pas d'ensemble $B \subseteq A$ (resp. $B \supseteq A$) tel que le sous graphe $G[B]$ induit par B vérifie la propriété $\mathcal{P}$. Un sous-ensemble A de V est dit *minimum* ou de *taille minimale* (resp. *maximum* ou de *taille maximale*) par rapport à une propriété $\mathcal{P}$ s'il n'existe pas d'ensemble $B \subseteq V$ tel que le sous graphe $G[B]$ induit par B vérifie la propriété $\mathcal{P}$ et tel que $|A| > |B|$ (resp. $|B| > |A|$) où $|A|$ désigne le nombre d'éléments de l'ensemble A.

Couplage et Couplage parfait

Un couplage dans un graphe est un ensemble d'arêtes non-adjacents. Si M est un couplage, les deux extrémités de chaque arête de M sont dites couplées par M, et tout sommet incident à une arête de M est dit être couvert par M. Un couplage parfait est un couplage qui couvre tous les sommets du graphe, aucun graphe d'ordre impair ne peut avoir de couplage parfait, puisqu'un couplage couvre clairement un nombre pair de sommets, et un couplage maximum est un couplage qui couvre autant de sommets que possible. Rappelons que le nombre d'arêtes dans un couplage maximum d'un graphe G est appelé le cardinal maximal d'un couplage de G et il est noté $\alpha'(G)$.

Nombre de transversalité

Un transversal T dans un graphe G est un sous-ensemble de sommets de G tel que pour toute arête e de T, il existe un sommet $v \in T$, tel que v est une extrémité de e.

Le nombre de transversalité $\alpha_0(G)$ de G est le cardinal minimal d'un transversal dans G: $\alpha_0(G) = \min\{|T| : T \text{est un transversal de } G\}$

Domination

Un ensemble dominant S appelé aussi ensemble absorbant est un ensemble de sommets tel que tout sommet extérieur à cet ensemble c-à-d appartenant à $V - S$ possède au moins un voisin dans S. Le nombre de domination (dit aussi le nombre de domination inférieur) est la cardinalité minimale d'un ensemble dominant de G et il est noté $\gamma(G)$, on peut aussi définir le nombre de domination supérieur qui représente la cardinalité maximale d'un ensemble dominant minimal, noté $\Gamma(G)$.

Stabilité

Un ensemble stable S appelé aussi ensemble indépendant est un ensemble de sommets deux à deux non adjacents. La taille d'un stable est égale au nombre de sommets qu'il contient. La cardinalité minimale (resp. maximale) d'un ensemble indépendant maximal est appelée le nombre de domination stable (resp. le nombre de stabilité ou d'indépendance) du graphe G, noté par $i(G)$ (resp. $\beta(G)$)

1.2 La α-domination dans les graphes

1.2.1 Aperçu sur la α-domination

La terminologie graphique non présenté ici peut être trouvée dans Chartrand et Lesniak [2]. Soit $G = (V, E)$ un graphe à n sommets, m arêtes et sans sommets isolés. On considère un échiquier $s \times t$ contenant s rangés et t colonnes (c-à-d contenant $s \times t$ cases ou cellules), le graphe représentatif aux déplacements ou bien aux mouvements du Roi sur l'échiquier dit aussi graphe du Roi noté par $K[s \times t]$ est un graphe dont les sommets représentent les cellules de l'échiquier et les arêtes correspondent aux différents mouvements du Roi sur l'échiquier (Un Roi peut passer à une cellule voisine horizontalement, verticalement ou en diagonale).

Un puzzle mentionné par David Woolbright consiste à déterminer un ensemble de cellules surveillées chacune par un gardien et de cardinalité minimale dans un échiquier

6×6 où chaque cellule est occupée par un prisonnier, sous réserve seulement de la contrainte que chaque prisonnier extérieur à cet ensemble soit voisin à au moins autant de gardiens que de prisonniers (où le voisinage est supposé être verticale, horizontale ou diagonale) c-à-d le nombre de voisins qui sont à l'intérieur de l'ensemble à déterminer est supérieur ou égal au nombre de voisins qui sont à l'extérieur de cet ensemble. Il a été montré par Mark Liatti [3] que la cardinalité minimale d'un ensemble de gardiens est 14 dans ce cas, comme le montre la figure 1.2.

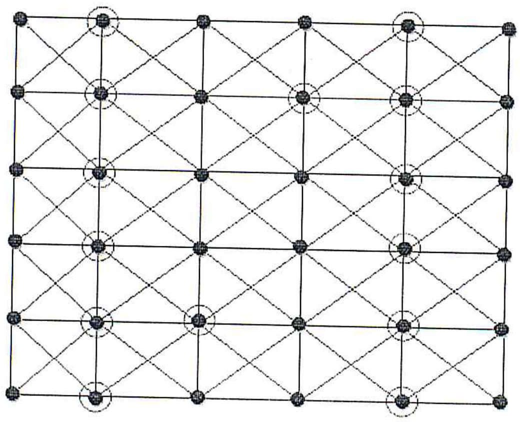


Figure 1.2. Un ensemble semi-dominant pour $K[6 \times 6]$.

Ce puzzle généralise un invariant ou un paramètre de graphe à savoir le nombre de Woolbright d'un graphe. Le nombre de Woolbright d'un graphe G est la taille d'un plus petit ensemble de sommets tel que tout sommet de $V - S$ a au moins autant de voisins dans S que de voisins qui ne sont pas dans S. Pour résoudre le puzzle cité précédemment il suffit de trouver le nombre de Woolbright dans le graphe du Roi $K[6 \times 6]$.

A présent on introduit le concept de α-domination qui est une généralisation du nombre de Woolbright : Pour un réel α avec $0 < \alpha \leq 1$, un ensemble $S \subseteq V$ est dit α-dominant si pour tout $v \in V - S$, on a $|N_G(v) \cap S| \geq \alpha |N_G(v)|$ c-à-d $d_S(v) \geq \alpha d_G(v)$. La cardinalité d'un plus petit ensemble S est appelé le nombre de α-domination et noté par $\gamma_\alpha(G)$. Ainsi le nombre de Woolbright d'un graphe G est $\gamma_{\frac{1}{2}}(G)$. La taille d'un plus grand ensemble minimal S est appelé le nombre de α-domination supérieur et il est désigné par $\Gamma_\alpha(G)$.

Rappelons qu'un ensemble $S \subseteq V$ est un ensemble dominant si chaque sommet du graphe est soit dans S ou est adjacent à un sommet de S. Suivant ce contexte, nous pourrions dire qu'un ensemble dominant vérifie la propriété: pour tout sommet $v \in V - S$ on a $|N(v) \cap S| \geq 1$.

Puisque le plus petit ensemble α-dominant est un ensemble dominant, il est immédiat de voir que $\gamma(G) \leq \gamma_\alpha(G)$ pour tout graphe G et pour tout $0 < \alpha \leq 1$. Donc le nombre de domination $\gamma(G)$ est une borne inférieure pour $\gamma_\alpha(G)$.

1.3 La criticité par rapport à la α-domination dans les graphes

Pour de nombreux paramètres de graphe, la notion de criticité est un problème de grande importance, vu son côté pratique qui consiste à étudier la vulnérabilité, la robustesse et la stabilité des réseaux. On trouve dans la littérature beaucoup d'articles qui traitent le problème du comportement ou attitude d'un paramètre donné vis à vis de l'ajout ou de la suppression d'un sommet ou d'une arête dans un graphe. En général, un paramètre donnée peut augmenter, diminuer ou rester stable (inchanger) quand un sommet (ou arête) est ajouté (ou supprimé) au graphe.

On définit maintenant plusieurs concepts de criticité, par rapport à un paramètre $\pi(G)$.

Définition 1.1. *Soit $G = (V, E)$ un graphe*

1. *Un graphe G est dit π-sommet-enlevé-stable si et seulement si $\pi(G - v) = \pi(G)$, pour tout sommet $v \in V$.*

2. *Un graphe G est dit π^+-sommet-enlevé-critique si et seulement si $\pi(G - v) > \pi(G)$, pour tout sommet $v \in V$.*

3. *Un graphe G est dit π^--sommet-enlevé-critique si et seulement si $\pi(G - v) < \pi(G)$, pour tout sommet $v \in V$.*

4. *Un graphe G est dit π-sommet-ajouté-stable si et seulement si $\pi(G + v) = \pi(G)$, pour tout sommet $v \in V$.*

5. *Un graphe G est dit π^+-sommet-ajouté-critique si et seulement si $\pi(G + v) > \pi(G)$, pour tout sommet $v \in V$.*

CHAPITRE 2

Résultats existants dans le concept de la α-domination dans les graphes

Dans ce chapitre, on présente quelques résultats connus et des observations préliminaires qui s'avérerons utiles. Dans un premier temps, on rappelle certains résultats donnés par Dunbar et al [1] dont quelques uns sont cités sans démonstrations. Ici on présente leurs preuves et dans un second temps, on énonce des résultats existants dans la classe des arbres traités par F. Dahme et al [4], et M. Lemańska [5].

2.1 Résultats pour quelques classes de graphes simples

Proposition 2.1. *[6]*

- *Si P_n est une chaîne à n sommets avec $n \geq 1$, alors $\gamma(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.*
- *Si C_n est un cycle à n sommets avec $n \geq 3$, alors $\gamma(C_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.*

Proposition 2.2. *[1] Si G est un graphe ayant $\Delta(G)$ comme degré maximum, alors on a $\gamma_\alpha(G) = \gamma(G)$ pour tout $0 < \alpha \leq \frac{1}{\Delta(G)}$.*

Preuve. Pour tout $\gamma_\alpha(G)$-ensemble, on a $\gamma(G) \leq \gamma_\alpha(G)$. Pour montrer l'autre inégalité, soit S un $\gamma(G)$-ensemble, nous avons $\forall x \in V - S$, $|N_G(x) \cap S| \geq 1 \geq \alpha\Delta(G) \geq \alpha d_G(x) = \alpha\,|N_G(x)|$. Donc S est un α-dominant. D'où on a $\gamma_\alpha(G) \leq |S| = \gamma(G)$. Par conséquent la double inégalité donne le résultat $\gamma_\alpha(G) = \gamma(G)$. □

Proposition 2.3. *[1] Si P_n est une chaîne à n sommets. Alors on a*

$$\gamma_\alpha(P_n) = \begin{cases} \lceil \frac{n}{3} \rceil & si\ 0 < \alpha \leq \frac{1}{2} \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor & si\ \frac{1}{2} < \alpha \leq 1 \end{cases}.$$

Preuve. Soit P_n est une chaîne à n sommets.

Cas 1. $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$. On sait que le degré maximum d'une chaîne est deux, alors par la Proposition 2.2 et la Proposition 2.1, on déduit que $\gamma_\alpha(P_n) = \gamma(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

Cas 2. $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$. Il faut montrer que $\gamma_\alpha(P_n) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ et ensuite exhiber un α-dominant S tel que $|S| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Tout d'abord on montre que pour tout α-dominant S, $|S| \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Soit S un α-dominant de G, alors $\forall x \in V - S$ on a $|N_G(x) \cap S| \geq \alpha |N_G(x)| = \alpha d_G(x) > \frac{1}{2} d_G(x)$. Donc $d_S(x) > \frac{1}{2} d_G(x)$ c'est-à-dire tout sommet extrémité de P_n qui n'est pas dans S a un voisin dans S , et un sommet intermédiaire de P_n qui n'est pas dans S a ses deux voisins dans S, autrement dit les sommets qui sont dans S sont des sommets alternés de P_n. Ce qui implique que $|S| \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Soit la chaîne $P_n = \{x_1, x_2, \ldots.., x_n\}$. Alors on a forcément,

$$S = \bigcup_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \{x_{2k}\}$$

et comme un tel S est un α-dominant, alors $|S| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Par conséquent, $\gamma_\alpha(P_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. □

Proposition 2.4. *[1] Si C_n est un cycle à n sommets, avec $n \geq 3$. Alors*

$$\gamma_\alpha(C_n) = \begin{cases} \lceil \frac{n}{3} \rceil & si \;\; 0 < \alpha \leq \frac{1}{2} \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil & si \;\; \frac{1}{2} < \alpha \leq 1 \end{cases}.$$

Preuve. Soit C_n est un cycle à n sommets, avec $n \geq 3$.

Cas 1. $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$. On sait que le degré maximum d'un cycle est 2. Alors par la Proposition 2.2 et la Proposition 2.1, on déduit que $\gamma_\alpha(C_n) = \gamma(C_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

Cas 2. $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$. Il faut montrer que $\gamma_\alpha(P_n) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ et ensuite exhiber un α-dominant S tel que $|S| = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Tout d'abord on montre que pour tout α-dominant S, $|S| \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Soit S un α-dominant, alors $\forall x \in V - S$ on a $|N_G(x) \cap S| \geq \alpha |N_G(x)| = \alpha d_G(x) > \frac{1}{2} d_G(x)$. Donc $d_S(x) > \frac{1}{2} d_G(x)$, c'est-à-dire: tout sommet qui n'est pas dans S a au moins ses 2 sommets voisins dans S. Ce qui implique que $|S| \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Soit le cycle $C_n = \{x_1, x_2, \ldots.., x_n, x_1\}$. L'ensemble

$$S = \begin{cases} \bigcup_{k=1}^{(n-1)/2} \{x_{2k}\} \cup \{x_n\} \text{ si } n \text{ impair} \\ \bigcup_{k=1}^{n/2} \{x_{2k}\} \text{ si } n \text{ pair} \end{cases}$$

est un α-dominant. Alors $|S| = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. On déduit que $\gamma_\alpha(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. □

Proposition 2.5. *[1] Si K_n est un graphe complet à n sommets, alors on a*

$$\gamma_\alpha(K_n) = \lceil \alpha(n-1) \rceil .$$

Preuve. On suppose que S est un α-dominant, alors pour tout sommet $x \in V - S$ on a $|N_G(x) \cap S| \geq \alpha |N_G(x)| \geq \alpha(n-1) \geq \lceil \alpha(n-1) \rceil$. Ce qui implique que $|S| \geq \lceil \alpha(n-1) \rceil$. Donc $\gamma_\alpha(K_n) \geq \lceil \alpha(n-1) \rceil$. Maintenant, soit S un sous ensemble de sommets de K_n tel que $|S| = \lceil \alpha(n-1) \rceil$. Alors S est un α-dominant puisque $\forall x \in V - S$ on a $|N_G(x) \cap S| \geq \lceil \alpha(n-1) \rceil \geq \alpha(n-1) = \alpha |N_G(x)|$. Donc $\lceil \alpha(n-1) \rceil \leq \gamma_\alpha(K_n) \leq |S| = \lceil \alpha(n-1) \rceil$. D'où $\gamma_\alpha(K_n) = \lceil \alpha(n-1) \rceil$. Ceci complète la preuve. $\square$

Proposition 2.6. *[1] Si $K_{m,n}$ est un graphe biparti complet avec $1 \leq m \leq n$, alors on a*

$$\gamma_\alpha(K_{m,n}) = \min\{m, \lceil \alpha m \rceil + \lceil \alpha n \rceil\}.$$

Preuve. Supposons que X_1 et X_2 sont les deux parties stables de $K_{m,n}$ avec $|X_1| = m$ et $|X_2| = n$. Soit S un $\gamma_\alpha(K_{m,n})$-ensemble. Il est clair que les $\gamma_\alpha(K_{m,n})$-ensembles possibles de $K_{m,n}$ sont résumés dans les deux cas suivants.

Cas 1. $S = X_1$ et dans ce cas on a $|S| = |X_1| = m$ car S est un α-dominant de $K_{m,n}$ puisque $\forall x \in V - S$, on a $\left|N_{K_{m,n}}(x) \cap S\right| = m \geq \alpha m = \alpha d_{K_{m,n}}(x) = \alpha \left|N_{K_{m,n}}(x)\right|$).

Cas 2. $S \neq X_1$ et dans ce cas $S \cap X_1 \neq \varnothing$, $S \cap X_2 \neq \varnothing$ et $S \cap X_2 \neq X_2$ car X_1 est meilleur en cardinalité que X_2 qui est un ensemble α-dominant de $K_{m,n}$ puisque $|X_2| = n \geq |X_1| = m$. Alors si $S \neq X_1$, on a $|S| = |S \cap X_1| + |S \cap X_2|$. Comme S est un $\gamma_\alpha(K_{m,n})$-ensemble, $\forall x \in V - S$, si $x \in X_2$ on a $|N_G(x) \cap S| = |S \cap X_1| \geq \lceil \alpha m \rceil$, et si $x \in X_1$ on a $\left|N_{K_{m,n}}(x) \cap S\right| = |S \cap X_2| \geq \lceil \alpha n \rceil$. Par conséquent on a $|S| = |S \cap X_1| + |S \cap X_2| = \lceil \alpha m \rceil + \lceil \alpha n \rceil$, ce qui implique que $\gamma_\alpha(K_{m,n}) = |S| = \lceil \alpha m \rceil + \lceil \alpha n \rceil$. On déduit que $\gamma_\alpha(K_{m,n}) = \min\{\lceil \alpha m \rceil + \lceil \alpha n \rceil, m\}$. $\square$

On a déjà mentionné que pour tout graphe G le paramètre de domination standard $\gamma(G)$ est une borne inférieure pour $\gamma_\alpha(G)$. On peut déterminer une borne supérieure en examinant le nombre de transversalité. Le nombre de transversalité $\alpha_0(G)$ est la taille d'un plus petit ensemble de sommets S tel que chaque arête a au moins une extrémité dans S. Alors clairement qu'on a $\alpha_0(G) = \gamma_1(G)$.

Pour tout graphe G et pour tout α, avec $0 < \alpha \leq 1$, si S est un ensemble α-dominant de taille minimum, on dit que S est un $\gamma_\alpha(G)$-ensemble. De même, si S est un ensemble dominant de taille minimum, on dit que S est un $\gamma(G)$-ensemble. Un résultat immédiat est le suivant : si $\alpha_1 < \alpha_2$, alors $\gamma_{\alpha_1}(G) \leq \gamma_{\alpha_2}(G)$.

La proposition suivante est immédiate.

Proposition 2.7. *[1] Pour tout graphe G, $\gamma(G) \leq \gamma_\alpha(G) \leq \alpha_0(G)$ pour tout α, avec $0 < \alpha \leq 1$.*

Proposition 2.8. *[1] Soit G un graphe, si $(\Delta(G) - 1)/\Delta(G) < \alpha \leq 1$, alors on a*

$$\gamma_\alpha(G) = \alpha_0(G).$$

Preuve. Soient G un graphe et S un $\gamma_\alpha(G)$-ensemble, avec $(\Delta(G)-1)/\Delta(G) < \alpha$. Soit v un sommet avec $v \notin S$. Alors on a $|N_G(v) \cap S| \geq \alpha\, |N_G(v)| > (\Delta(G)-1)\, |N_G(v)|\, /\Delta(G)$, donc $\Delta(G)\, |N_G(v) \cap S| > \Delta(G)\, |N_G(v)| - |N_G(v)|$. Soit $k \geqslant 0$ un entier satisfaisant $k = |N_G(v) - S|$. Alors on a $|N_G(v)| - k = |N_G(v) \cap S|$, et ainsi $\Delta(G)(|N_G(v)| - k) > \Delta(G)\, |N_G(v)| - |N_G(v)|$. Donc $\Delta(G)k < |N_G(v)|$. si $k \geqslant 1$, cela contredit la définition du degré maximum. D'où $k = 0$, comme v est un sommet arbitraire n'appartenant pas à S, alors tous les voisins de v sont contenus dans S. Donc il n'y a pas d'arêtes avec les deux extrémités dans $V - S$. Par conséquent, S est un transversale de G et on a $\alpha_0(G) \leq |S|$. Comme l'inégalité inverse est toujours vrai, on obtient $\gamma_\alpha(G) = \alpha_0(G)$. $\square$

Il est clair que dans un graphe le complémentaire d'un ensemble stable est un ensemble transversale et inversement. D'où on obtient la proposition suivant :

Proposition 2.9. *[11] Pour tout graphe G, $\beta(G) + \alpha_0(G) = n$.*

2.2 Le nombre de α-domination dans le graphe du Roi $K[s \times \ t]$.

Nous revenons au problème original qui est le problème de détermination de $\gamma_{\frac{1}{2}}(G)$, où $G = K[s \times \ t]$ est le graphe du Roi avec s le nombre de rangées et t le nombre de colonnes. Pour tout graphe du Roi $K[s \times t]$, si S est un $\gamma_{\frac{1}{2}}(G)$-ensemble, on dit qu'une colonne est vide si la colonne n'a pas des sommets dans S. De même, une colonne est pleine si tous ses sommets sont dans S. D'abord, nous examinons le graphe du Roi a 2 lignes et t colonnes où t prend des valeurs petites. Il est facile de voir que $\gamma_{\frac{1}{2}}(K[2 \times 1]) = 1$, $\gamma_{\frac{1}{2}}(K[2 \times 2]) = \gamma_{\frac{1}{2}}(K[2 \times 3]) = 2$, et enfin $\gamma_{\frac{1}{2}}(K[2 \times 4]) = 4$. Pour les grandes valeurs de t, nous obtenons le résultat suivant:

Proposition 2.10. *[1] Soit $K[2 \times \ t]$ un graphe du Roi, alors pour tout $t \geqslant 5$, on a*

$$\gamma_{\frac{1}{2}}(K[2 \times t]) = t - 1.$$

Preuve. Nous utiliserons l'induction sur t pour montrer que $t-1$ est une borne supérieure de $\gamma_{\frac{1}{2}}(K[2 \times t])$. Soit G un graphe $K[2 \times 5]$. Les sommets de la deuxième et la quatrième colonne forment un $\frac{1}{2}$-dominant alors $\gamma_{\frac{1}{2}}(K[2 \times 5]) \leq 4$. Les sommets de la deuxième, la cinquième colonnes et un sommet de la troisième colonne forment un $\frac{1}{2}$-dominant alors $\gamma_{\frac{1}{2}}(K[2 \times 6]) \leq 5$. Supposons maintenant que $\gamma_{\frac{1}{2}}(K[2 \times k]) \leq k-1$ pour tout k avec $5 \leq k \leq t-1$ et considérons le graphe $K[2 \times t]$ pour $t \geqslant 7$. Si on ne considère pas les deux premières colonnes, le graphe résultant admet un $\frac{1}{2}$-dominant S' avec cardinalité au plus $t-3$ et en ajoutant les sommets de la deuxième colonne à S', il est clair qu'on obtient un ensemble S qui est $\frac{1}{2}$-dominant de graphe $K[2 \times t]$. Donc $\gamma_{\frac{1}{2}}(K[2 \times t]) \leq |S| = |S'| + 2 \leq t - 3 + 2 = t - 1$.
Pour montrer que $t-1$ est une borne inférieure de $\gamma_{\frac{1}{2}}(K[2 \times t])$, on considère que S est un $\gamma_{\frac{1}{2}}(G)$-ensemble. Soit x le nombre de colonnes avec les deux sommets dans S. Soit y le nombre de colonnes avec exactement un sommet dans S, et soit z le nombre de colonnes sans sommets dans S. Il est immédiat de voir qu'une colonne vide (sauf la colonne t) est suivie d'une colonne pleine située parmi les deux colonnes qui la suivent vers la droite, c-à-d entre deux colonnes vides il y a au moins une colonne pleine, d'où on a $z \leq x + 1$. D'autre part on a $|S| = 2x + y$. Par conséquent, nous avons $t = x + y + z \leq 2x + y + 1$. Donc $|S| = 2x + y \geq t - 1$, c-à-d $\gamma_{\frac{1}{2}}(K[2 \times t]) \geq t - 1$. La double inégalité donne $\gamma_{\frac{1}{2}}(K[2 \times t]) = t - 1$.

□

Le lemme suivant sera utile pour déterminer le nombre de Woolbright d'un $3 \times t$ du graphe du Roi.

Lemme 2.11. *[1] Si G est un graphe du Roi $K[3 \times t]$, alors il existe un $\gamma_{\frac{1}{2}}(K[3 \times t])$-ensemble S avec la propriété suivante: Chaque colonne vide (sauf la colonne t) est suivie d'une colonne pleine située parmi les deux colonnes qui la suivante vers la droite.*

Preuve. Soient $K[3 \times t]$ un graphe du Roi et S un $\gamma_{\frac{1}{2}}(K[3 \times t])$-ensemble. Supposons que la colonne j est vide. Si la colonne $j+1$ est pleine, le résultat est valide. Si la colonne $j+1$ a un seul sommet dans S, ce sommet doit être le sommet milieu de la colonne $j+1$, sinon le sommet opposé qui est de degré 5 dans $K[3 \times t]$ aura au plus 2 voisins dans S. Et dans ce cas il est clair qu'on doit avoir la colonne $j+2$ pleine pour que les deux sommets opposés de la colonne $j+1$ ait chacun deux voisins dans S. Le cas où la colonne $j+1$ est vide ne peut se produire car un sommet non milieu de la colonne $j+1$ qui est de degré 5 n'aura que deux voisins au maximum dans S. Supposons maintenant que la colonne $j+1$ a exactement deux sommets dans S. Alors la colonne $j+2$ doit avoir au moins deux sommets dans S pour $\frac{1}{2}$-dominé le sommet de la colonne $j+1$ qui n'est pas dans S. Dans ce cas, nous pouvons créer un autre $\gamma_{\frac{1}{2}}(K[3 \times t])$-ensemble S' en décalant un sommet de S de la colonne $j+1$ vers l'emplacement vide de la colonne $j+2$, et déplacez le sommet restant de S (si nécessaire) à la position milieu dans la colonne $j+1$. L'ensemble S' ainsi déterminé est un $\frac{1}{2}$-dominant avec le même nombre des sommets que S et ayant la colonne $j+2$ pleine. On peut refaire ce procédé pour chaque colonne vide. A la fin on obtient un $\gamma_{\frac{1}{2}}(K[3 \times t])$-ensemble qui à la propriété du Lemme 2.11. $\square$

Proposition 2.12. *[1] Soit $K[3 \times t]$ un graphe du Roi, alors pour tout $t \geqslant 1$, on a*

$$\gamma_{\frac{1}{2}}(K[3 \times t]) = t.$$

Preuve. Soit G un graphe $K[3 \times t]$. On trouve un $\frac{1}{2}$-dominant S en choisissant tous les sommets milieux appartenant à la deuxième ligne de $K[3 \times t]$. Donc on a $\gamma_{\frac{1}{2}}(K[3 \times t]) \leq |S| = t$. Pour montrer que t est une borne inférieure de $\gamma_{\frac{1}{2}}(K[3 \times t])$, on considère S un $\gamma_{\frac{1}{2}}(G)$-ensemble vérifiant la propriété du Lemme 2.11. Soit w le nombre des colonnes pleines de G c-à-d qui ont les trois sommets dans S. De même, soit x (respectivement, y et z) le nombre des colonnes de G ayant deux (respectivement, un et zéro) sommets dans S. Il est clair que $|S| = 3w + 2x + y$ et $t = x + y + z + w$. Par le Lemme 2.11 on a $z \leq w + 1$

et donc $t \leq 2w + x + y + 1$. Par conséquent $|S| - t \geq w + x - 1$.

Si $w = x = 0$, alors on a forcément $z = 0$, et ainsi chaque colonne à un sommet dans S. Ainsi $|S| = t$ et on a ce qu'il faut. Si au moins un de w ou x est strictement positif, alors nous avons $|S| \geq t + w + x - 1 \geq t$. Dans les deux cas, t est une borne inférieure pour la cardinalité de S. Donc $\gamma_{\frac{1}{2}}(K[3 \times t]) \geq t$. De la double inégalité découle le résultat. □

Pour le graphe du Roi $K[s \times t]$ où s prend des valeurs plus grandes que 4, nous déterminons des bornes pour $\gamma_{\frac{1}{2}}(K[s \times t])$.

Proposition 2.13. *[1] Soit k et t des entiers positifs. Alors on a*

$$\gamma_{\frac{1}{2}}(K[(2k+1) \times t]) \leq kt$$

Preuve. Nous pouvons déterminer un ensemble $\frac{1}{2}$-dominant pour $K[(2k+1) \times t]$ en choisissant tous les t sommets dans chaque ligne de rang pair de $K[(2k+1) \times t]$. Comme il y a k lignes de rang pair, on a $\gamma_{\frac{1}{2}}(K[(2k+1) \times t]) \leq kt$. □

Maintenant, nous examinons le graphe du Roi $K[s \times t]$ avec s un entier pair et t suffisamment grand. D'abord, on remarque que $\gamma_{\frac{1}{2}}(K[4 \times 4]) \leq 7$, en prenant comme ensemble $\frac{1}{2}$-dominant tous les sommets de la troisième colonnes, ainsi que les sommets v_{11}, v_{31}, v_{32} où v_{ij} désigne le sommet de la rangée i et la colonne j. Il est facile de voir que six sommets ne suffisent pas pour former un ensemble $\frac{1}{2}$-dominant de $K[4 \times 4]$. Et donc $\gamma_{\frac{1}{2}}(K[4 \times 4]) = 7$.

Proposition 2.14. *[1] Si $G = K[4 \times t]$, alors $\gamma_{\frac{1}{2}}(G) \leq 2t - 2$ pour $t \geq 5$.*

Preuve. En choisissant les sommets de la deuxième et la quatrième colonnes de $K[4 \times 5]$, on trouve un ensemble $\frac{1}{2}$-dominant de $K[4 \times 5]$ avec huit sommets, donc $\gamma_{\frac{1}{2}}(K[4 \times 5]) \leq 8$. Pour $t = 6$, en sélectionnant les sommets de la deuxième et la cinquième colonne, avec deux sommets de rangées différentes dans les colonnes trois et quatre, on obtient un ensemble $\frac{1}{2}$-dominant avec dix sommets de $K[4 \times 6]$, donc on a $\gamma_{\frac{1}{2}}(K[4 \times 6]) \leq 10$. Ainsi, le résultat est vrai pour $t = 5$ et 6. Maintenant supposons que G est un graphe $K[4 \times t]$ avec $t \geq 7$ et supposons que le résultat est vrai pour tous les graphes du Roi $K[4 \times j]$ avec $5 \leq j < t$. Soit G' le graphe obtenu de G en supprimant les deux dernières colonnes. Alors on a $G' = K[4 \times (t-2)]$. Soit S' un $\gamma_\alpha(G')$-ensemble de G'. Par l'hypothèse d'induction on a $|S'| \leq 2(t-2) - 2$. On construit un ensemble $\frac{1}{2}$-dominant S de G en ajoutant à S' les sommets de la colonne $t-1$. Il est clair que S est un ensemble $\frac{1}{2}$-dominant de G. Donc $|S| = |S'| + 4 \leq 2t - 6 + 4 = 2t - 2$. Par conséquent on a $\gamma_{\frac{1}{2}}(K[4 \times t]) \leq |S| \leq 2t - 2$. □

La borne de la Proposition 2.14 n'est pas toujours atteinte, car il existe un ensemble $\frac{1}{2}$-dominant de taille 13 pour le graphe $K[4 \times 8]$, alors que $\gamma_{\frac{1}{2}}(K[4 \times 8]) < 14$.
Il faut rappeler aussi que le nombre de Woolbright pour le graphe du Roi $K[6 \times 6]$ a été déterminé et il vaut 14. En outre, en remarquant que le graphe du Roi $K[6 \times 5]$ a le même nombre de Woolbright que le graphe du Roi $K[5 \times 6]$, la Proposition 2.13 donne la valeur 12 comme borne supérieure pour $\gamma_{\frac{1}{2}}(K[6 \times 5])$. En utilisant ces deux faits comme énoncés de base, un argument inductif donne la borne supérieure suivante.

Proposition 2.15. *[1] Pour $t \geq 5$, on a $\gamma_{\frac{1}{2}}(K[6 \times t]) \leq 3t - 3$.*

Enfin, on peut utiliser ces propositions pour trouver une borne supérieure de $\gamma_{\frac{1}{2}}(K[s \times t])$ pour tout entier pair $s \geq 6$. Supposons que $s = 2k$ pour $k \geq 3$. En utilisant la Proposition 2.13 on détermine $\gamma_{\frac{1}{2}}(K[2k \times 5]) = \gamma_{\frac{1}{2}}(K[5 \times 2k]) \leq 2(2k) \leq 5k - 3$. Et en utilisant Proposition 2.15 nous obtenons $\gamma_{\frac{1}{2}}(K[2k \times 6]) \leq 3(2k) - 3 = 6k - 3$. Avec ces faits comme étape de base, la démonstration de la proposition suivante découle par induction comme précédemment.

Proposition 2.16. *[1] Pour $k \geq 3$ et $t \geq 5$, $\gamma_{\frac{1}{2}}(K[2k \times t]) \leq kt - 3$.*

2.3 Le nombre de stabilité et le nombre de domination dans le graphe du Roi $K[s \times t]$.

Dans cette section, on donne la valeur exacte du nombre de stabilité et la valeur exacte du nombre de domination dans le graphe du Roi $K[s \times t]$.

Théorème 2.17. *Le nombre d'indépendance ou de stabilité du graphe du Roi $K[s \times t]$ est donné par:*

$$\beta(K_{s \times t}) = \beta(K[s \times t]) = \left\lceil \frac{s}{2} \right\rceil \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil$$

Preuve. Il est clair que tout bloc de 2×2 peut contenir au plus un Roi. En effet, on a quatre situations possibles

Cas 1. Si s et t sont pairs : on peut diviser l'échiquier $s \times t$ en $\frac{s}{2} \times \frac{t}{2}$ blocs de 2×2 sans sommets en commun. Comme chaque bloc de 2×2 peut contenir au plus un Roi, disons que ce Roi est placé dans le coin supérieur à gauche, alors $\beta(K[s \times t]) \leq \frac{s}{2} \times \frac{t}{2}$, comme il est simple de trouver un stable avec $\frac{s}{2} \times \frac{t}{2}$ formé par justement les sommets des coins supérieurs de gauche. Donc $\beta(K[s \times t]) = \frac{s}{2} \times \frac{t}{2}$.

Cas 2. Si s et t sont impairs : on peut diviser l'échiquier $s \times t$ en $(\frac{s-1}{2}.\frac{t-1}{2})$ blocs de 2×2, $(\frac{s-1}{2} + \frac{t-1}{2})$ blocs de 2×1, et 1 bloc de 1×1 sans sommets en commun, dans chaque cas de ces derniers tout bloc peut contenir au plus un Roi, disons que ce Roi est placé dans le coin supérieur de gauche. Le même raisonnement que précédemment nous conduit à $\beta(K[s \times t]) = \frac{s+1}{2} \times \frac{t+1}{2}$.

Cas 3. Si s est pair et t est impair : on peut diviser l'échiquier $s \times t$ en $(\frac{s}{2}.\frac{t-1}{2})$ blocs de 2×2, et $\frac{s}{2}$ blocs de 2×1 sans sommets en commun, dans chaque cas de ces derniers tout bloc peut contenir au plus un Roi, disons que ce Roi est placé dans le coin supérieur à gauche. Le même raisonnement que précédemment nous conduit à $\beta(K[s \times t]) = \frac{s}{2} \times \frac{t+1}{2}$.

Cas 4. Si s est impair et t est pair : on peut diviser l'échiquier $s \times t$ en $(\frac{s-1}{2}.\frac{t}{2})$ blocs de 2×2, et $\frac{t}{2}$ blocs de 2×1 sans sommets en commun, dans chaque cas de ces derniers tout bloc peut contenir au plus un Roi, disons que ce Roi est placé dans le coin supérieure à gauche. Le même raisonnement que précédemment nous conduit à $\beta(K[s \times t]) = \frac{s+1}{2} \times \frac{t}{2}$.

Finalement, si on combine les cas précédents on obtient le résultat du Théorème 2.17.

□

Théorème 2.18. *Le nombre de domination du graphe du Roi $K[s \times t]$ est donné par:*

$$\gamma(K_{s \times t}) = \gamma(K[s \times t]) = \left\lceil \frac{s}{3} \right\rceil . \left\lceil \frac{t}{3} \right\rceil$$

Preuve. Il est clair que tout bloc de 3×3 peut contenir au moins un Roi pour dominer tous les autres sommets du bloc. Suivant la congruence de s et t modulo 3, on a neuf cas à considérer :

Cas 1. Si $s \equiv 0$ [3] et $t \equiv 0$ [3] : on peut diviser l'échiquier $s \times t$ en $\frac{s}{3} \times \frac{t}{3}$ blocs de 3×3. Et comme chaque bloc a besoin d'au moins un Roi, en prenant un Roi au milieu de chaque bloc 3×3, on a alors le nombre de domination $\gamma(K[s \times t]) = \frac{s}{3} \times \frac{t}{3}$.

Cas 2. Si $s \equiv 0$ [3] et $t \equiv 1$ [3] : on peut diviser l'échiquier $s \times t$ en $\frac{s}{3} \times \frac{t-1}{3}$ blocs de 3×3, et $\frac{s}{3}$ blocs de 3×1. Et comme chaque bloc a besoin d'au moins un Roi, cela montre que $\frac{s}{3}.\frac{t-1}{3} + \frac{s}{3}$ Rois sont nécessaires. Le même raisonnement que précédemment donne le nombre de domination $\gamma(K[s \times t]) = \frac{s}{3} \times \frac{t+2}{3}$.

Cas 3. Si $s \equiv 0$ [3] et $t \equiv 2$ [3] : on peut diviser l'échiquier $s \times t$ en $\frac{s}{3} \times \frac{t-2}{3}$ blocs de 3×3 et $\frac{s}{3}$ blocs de 3×1. Et comme chaque bloc a besoin d'au moins un Roi. Ainsi $\frac{s}{3}.\frac{t-2}{3} + \frac{s}{3}$ Rois sont nécessaires. Le même raisonnement que précédemment donne le nombre de domination $\gamma(K[s \times t]) = \frac{s}{3} \times \frac{t+1}{3}$.

Cas 4. Si $s \equiv 1$ [3] et $t \equiv 0$ [3] : on peut diviser l'échiquier $s \times t$ en $\frac{s-1}{3} \times \frac{t}{3}$ blocs de 3×3 et $\frac{t}{3}$ blocs de 3×1. Et comme chaque bloc a besoin d'au moins un Roi. Ainsi $\frac{s-1}{3}.\frac{t}{3} + \frac{t}{3}$ Rois sont nécessaires. Le même raisonnement que précédemment donne le nombre de domination $\gamma(K[s \times t]) = \frac{s+2}{3} \times \frac{t}{3}$.

Cas 5. Si $s \equiv 1$ [3] et $t \equiv 1$ [3] : on peut diviser l'échiquier $s \times t$ en $\frac{s-1}{3} \times \frac{t-1}{3}$ blocs de 3×3 et $\frac{s-1}{3} + \frac{t-1}{3}$ blocs de 3×1 et 1 bloc de 1×1. Et comme chaque bloc a besoin d'au moins un Roi. Cela montre que $\frac{s-1}{3}.\frac{t-1}{3} + \frac{s-1}{3} + \frac{t-1}{3} + 1$ Rois sont nécessaires. Le même raisonnement que précédemment donne le nombre de domination $\gamma(K[s \times t]) = \frac{s+2}{3} \times \frac{t+2}{3}$.

Cas 6. Si $s \equiv 1$ [3] et $t \equiv 2$ [3] : on peut diviser l'échiquier $s \times t$ en $\frac{s-1}{3} \times \frac{t-2}{3}$ blocs de 3×3 et $\frac{t-2}{3}$blocs de 1×3 et $\frac{s-1}{3}$ blocs de 2×3 et 1 bloc de 2×1. Et comme chaque bloc a besoin d'au moins un Roi. Ainsi $\frac{s-1}{3}.\frac{t-2}{3} + \frac{s-1}{3} + \frac{t-2}{3} + 1$ Rois sont nécessaires. Le même raisonnement que précédemment donne le nombre de domination $\gamma(K[s \times t]) = \frac{s+2}{3} \times \frac{t+1}{3}$.

Cas 7. Si $s \equiv 2$ [3] et $t \equiv 0$ [3] : on peut diviser l'échiquier $s \times t$ en $\frac{s-2}{3} \times \frac{t}{3}$ blocs de 3×3 et $\frac{t}{3}$ blocs de 2×3. Et comme chaque bloc a besoin d'au moins un Roi. Donc $\frac{s-2}{3}.\frac{t}{3} + \frac{t}{3}$ Rois sont nécessaires. Le même raisonnement que précédemment donne le nombre de domination $\gamma(K[s \times t]) = \frac{s+1}{3} \times \frac{t}{3}$.

Cas 8. Si $s \equiv 2$ [3] et $t \equiv 1$ [3] : on peut diviser l'échiquier $s \times t$ en $\frac{s-2}{3} \times \frac{t-1}{3}$ blocs de 3×3 et $\frac{t-1}{3}$ blocs de 2×3 et $\frac{s-2}{3}$ blocs de 1×3 et 1 bloc de 2×1. Et comme chaque bloc a besoin d'au moins un Roi. Ainsi $\frac{s-2}{3}.\frac{t-1}{3} + \frac{t-1}{3} + \frac{s-2}{3} + 1$ Rois sont nécessaires. Le même raisonnement que précédemment donne le nombre de domination $\gamma(K[s \times t]) = \frac{s+1}{3} \times \frac{t+2}{3}$.

Cas 9. Si $s \equiv 2\,[3]$ et $t \equiv 2\,[3]$: on peut diviser l'échiquier $s \times t$ en $\frac{s-2}{3} \times \frac{t-2}{3}$ blocs de 3×3, $\frac{s-2}{3} + \frac{t-2}{3}$ blocs de 2×3, et 1 bloc de 2×2. Et comme chaque bloc a besoin d'au moins un Roi. De plus $\frac{s-2}{3}.\frac{t-2}{3} + \frac{t-2}{3} + \frac{s-2}{3} + 1$ Rois sont nécessaires. Le même raisonnement que précédemment donne le nombre de domination $\gamma(K\,[s \times t]) = \frac{s+1}{3} \times \frac{t+1}{3}$.

Finalement, si on combine les cas précédent on obtient le résultat du Théorème 2.18.

□

2.4 La α-domination dans les arbres

Dans cette section on considère la classe des arbres.

Comme tout complémentaire d'un stable de G est un α-dominant de G, l'observation se déduit simplement.

Observation. Soit G un graphe biparti d'ordre n, alors pour tout $\alpha \in \,]0,1]$, on a $\gamma_\alpha(T) \leq \frac{n}{2}$.

Théorème 2.19. *[4] Si $\alpha \in \,]0,1]$ et T est un arbre d'ordre n, alors $\gamma_\alpha(T) = \frac{n}{2}$ si et seulement si T a un couplage parfait M tel que $min\{d_T(u), d_T(v)\} < \lceil \frac{1}{1-\alpha} \rceil$ pour tout $uv \in M$.*

Preuve. On montre d'abord la condition suffisante. Soit T un arbre ayant un couplage parfait M tel que $min\{d_T(u), d_T(v)\} < \lceil \frac{1}{1-\alpha} \rceil$ pour tout $uv \in M$. Soit D un $\gamma_\alpha(T)$-ensemble de T. S'il y a une arête $u_0v_0 \in M$ tel que $u_0, v_0 \notin D$, alors $d_T(u_0) - 1 \geq |N_G(u_0) \cap D| \geq \alpha d_T(u_0)$ et $d_T(v_0) - 1 \geq |N_G(v_0) \cap D| \geq \alpha d_T(v_0)$. Cela implique qu'on a $min\{d_T(u), d_T(v)\} \geq \lceil \frac{1}{1-\alpha} \rceil$, d'où la contradiction. Par conséquent, $|\{u, v\} \cap D| \geq 1$ pour tous les $uv \in M$. Comme T est un arbre donc il est biparti, alors on a $\gamma_\alpha(T) \leq \frac{n}{2}$. Par conséquent

$$\frac{n}{2} = |M| \leq \sum_{uv \in M} |\{u, v\} \cap D| = |D| = \gamma_\alpha(T) \leq \frac{n}{2}.$$

D'où on a $\gamma_\alpha(T) = \frac{n}{2}$.

Maintenant on montre la condition nécessaire par induction sur l'ordre n de T. Si $n \leq 2$, alors le résultat est immédiat. Supposons que T est un arbre d'ordre $n \geq 3$ tel que $\gamma_\alpha(T) = \frac{n}{2}$. Soit u un sommet pendant de T et soit v l'unique voisin de u dans T. Si

v est adjacent à un sommet pendant u' de T différent de u, alors $T' = T - \{u\}$. Il est évident qu'il existe un $\gamma_\alpha(T')$-ensemble D' de T' qui contient v. Par conséquent, D' est un ensemble α-dominant de T, ceci donne une contradiction puisque $\gamma_\alpha(T) \leq \gamma_\alpha(T') \leq \frac{n-1}{2}$. Donc u est l'unique sommet pendant de T adjacent à v et tous les composants $T_1, T_2, ..., T_l$ de $T' = T - \{u\}$,sont des arbres d'ordre au moins deux. Pour $1 \leq i \leq l$, soit D_i un $\gamma_\alpha(T_i)$-ensemble de T_i. Puisque l'ensemble $\{v\} \cup D_1 \cup D_2 \cup ... \cup D_l$ est un ensemble α-dominant de T, nous obtenons

$$\frac{n-2}{2} = \gamma_\alpha(T) - 1 \leq \sum_{i=1}^{l} |D_i| = \sum_{i=1}^{l} \gamma_\alpha(T_i) \leq \sum_{i=1}^{l} \frac{|V_{T_i}|}{2} = \frac{n-2}{2}$$

Ceci implique qu'on a forcément $\gamma_\alpha(T_i) = \frac{|V_{T_i}|}{2}$. En utilisant l'induction pour les arbres T_i, on peut dire que chaque T_i a un couplage parfait M_i pour $1 \leq i \leq l$. Clairement, $M = \{uv\} \cup M_1 \cup M_2 \cup ... \cup M_l$ est un couplage parfait de T.
Pour montrer que $min\{d_T(u), d_T(v)\} < \lceil \frac{1}{1-\alpha} \rceil$ pour tout $uv \in M$. Supposons qu'il existe $u_0v_0 \in M$ tel que $min\{d_T(u), d_T(v)\} \geq \lceil \frac{1}{1-\alpha} \rceil$. Puisque T est un arbre, il est facile de vérifier que l'ensemble

$$\begin{aligned} D &= \{w \in V_T : dist_G(w, u_0) \text{ est impair et } dist_G(w, u_0) < dist_G(w, v_0)\} \\ \cup\{w &\in V_T : dist_G(w, v_0) \text{ est impair et } dist_G(w, v_0) < dist_G(w, u_0)\} \end{aligned}$$

est un ensemble α-dominant de T tel que $u_0, v_0 \notin D$ et $|\{u, v\} \cap D| = 1$ pour tous $uv \in M - \{u_0v_0\}$. Ceci implique qu'on a $\gamma_\alpha(T) \leq |D| = \frac{n-2}{2}$ d'où la contradiction avec le fait que $\gamma_\alpha(T) = \frac{n}{2}$. $\square$

Notez que $\lceil \frac{1}{1-\alpha} \rceil = 2$ pour $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$. Ainsi pour ces valeurs de α les arbres décrits par la condition donnée dans le Théorème 2.19 correspond exactement aux arbres T d'ordre n qui satisfont $\gamma(T) = \frac{n}{2}$ (Dans ces arbres chaque sommet qui n'est pas pendant est adjacent à un sommet pendant unique).

Soit T un arbre avec $n(T) \geq 3$ sommets et soit $n_1(T)$ le nombre de sommets pendant de T. L'ensemble des sommets pendant dans T est noté par $\Omega(T)$.

Théorème 2.20. *[5] Si T est un arbre d'ordre au moins trois, alors $\gamma(T) \geq (n(T) + 2 - n_1(T))/3$.*

Preuve. Nous utilisons l'induction sur l'ordre n de T. Le résultat est vrai pour un arbre d'ordre 3. Soit T un arbre d'ordre $n > 3$ et supposons que $n_1(T') \geq n(T') + 2 - 3\gamma_\alpha(T')$ pour tout arbre T' d'ordre $3 < n(T') \leq n - 1$. Soit D un $\gamma_\alpha(T)$-ensemble qui ne contient aucune sommet pendant de T (un tel ensemble peut être facilement déterminé). Soit $P = (v_0, v_1, ..., v_l)$ la plus longue chaîne de T et soit $T' = T - \{v_0\}$. Sans perte de généralité on peut supposer que P est choisie de telle sorte que $d_T(v_1)$ est plus grand possible. Nous considérons deux cas: $d_T(v_1) > 2$ et $d_T(v_1) = 2$.

Cas 1. $d_T(v_1) > 2$, par induction on a $n_1(T') \geq n(T') + 2 - 3\gamma_\alpha(T')$ et comme $n_1(T') = n_1(T) - 1$, $\gamma_\alpha(T') = \gamma_\alpha(T)$ et $n(T') = n(T) - 1$. On obtient $n_1(T) \geq n(T) + 2 - 3\gamma_\alpha(T)$.

Cas 2. si $d_T(v_1) = 2$, on distingue deux sous-cas:

Sous-cas 2.1. Si $\gamma_\alpha(T') < \gamma_\alpha(T)$, alors il est clair que $\gamma_\alpha(T') = \gamma_\alpha(T) - 1$. Par induction on a $n_1(T') \geq n(T') + 2 - 3\gamma_\alpha(T')$. D'où on obtient $n_1(T) \geq n(T) + 2 - 3\gamma_\alpha(T)$ car $n_1(T') = n_1(T)$ et $n(T') = n(T) - 1$.

Sous-cas 2.2. Si $\gamma_\alpha(T') = \gamma_\alpha(T)$, alors $v_2 \notin N_T(\Omega(T))$ (sinon $D - \{v_1\}$ serait un ensemble α-dominant de T' et $\gamma_\alpha(T') = \gamma_\alpha(T - v_0) < \gamma_\alpha(T)$) et donc $l \geq 4$, soit $T - v_2v_3$ et on note par T_1 (respectivement T_2) le sous arbre qui contient v_3 (respectivement v_2). Si $n(T_1) = 2$, alors certainement on a $n_1(T_1) \geq n(T_1) + 2 - 3\gamma_\alpha(T_1)$. Supposons donc que $n(T_1) \geq 3$. Soit Ω_2 l'ensemble $\Omega(T_2) \cap \Omega(T)$ et soit D_2 un $\gamma_\alpha(T_2)$-ensemble qui ne contient pas v_2. Puisque $d_T(v_1) = 2$, et par le choix de P il s'ensuit que tous les voisins de v_2 dans T_2 sont de degré deux, cela implique que $|\Omega_2| = |D_2|$. Par conséquent il est simple de voir que $\gamma_\alpha(T) = \gamma_\alpha(T_1) + \gamma_\alpha(T_2) = \gamma_\alpha(T_1) + |D_2|$ et $n(T) = n(T_1) + |\Omega_2| + |D_2| + 1$. Si v_3 est un sommet pendant de T_1 alors on a $n_1(T) = n_1(T_1) + |\Omega_2| - 1$, sinon $n_1(T) = n_1(T_1) + |\Omega_2| \geq n_1(T_1) + |\Omega_2| - 1$.

Puisque $n(T_1) \geq 3$, on a par induction $n_1(T_1) \geq n(T_1) + 2 - 3\gamma_\alpha(T_1)$. Dans les deux cas, pour $n(T_1) = 2$ et pour $n(T_1) \geq 3$, on obtient

$$n(T_1) + 2 - 3\gamma_\alpha(T_1) \leq n_1(T_1) \leq n_1(T) - |\Omega_2| + 1.$$

Ainsi

$$n(T) - |\Omega_2| - |D_2| - 1 + 2 - 3(\gamma_\alpha(T) - |D_2|) \leq n_1(T) - |\Omega_2| + 1$$

et donc

$$n_1(T) \geq n(T) + 2\,|D_2| - 3\gamma_\alpha(T) \geq n(T) + 2 - 3\gamma_\alpha(T)$$

ce qui implique que $\gamma_\alpha(T) \geq (n(T) + 2 - n_1(T))/3$. □

Le corollaire suivant découle de la Proposition 2.2.

Corollaire 2.21. *Si T est un arbre d'ordre au moins trois et $0 < \alpha \leq 1/\Delta(T)$, alors $\gamma_\alpha(T) \geq (n(T) + 2 - n_1(T))/3$.*

CHAPITRE 3

CONTRIBUTION DANS LE CONCEPT DE α-DOMINATION

Dans ce chapitre, on établit dans un premier temps des valeurs exactes du nombre α-domination pour le graphe triparti complet et le graphe du Roi dans le cas où $s = 2$ et 3. Aussi on établit des bornes pour $\gamma_\alpha [K(s \times t)]$ dans le cas de certaines valeurs de α, par la suite, nous donnons quelques résultats dans le cas des arbres. Dans un second temps, on donne des valeurs exactes pour certains types de graphes comme le graphe roue, le graphe éventail et le graphe soleil. D'autre part, on détermine le nombre de α-domination du graphe milieu, total et adjoint de quelque graphe à savoir les chaînes, les cycles, les étoiles, et les soleils pour tout $\alpha \in]0, 1]$.

3.1 Le nombre de α-domination du graphe triparti complet

Théorème 3.1. *Si K_{m_1,m_2,m_3} est un graphe triparti complet avec $1 \leq m_1 \leq m_2 \leq m_3$. Alors*

(1) Pour** $0 < \alpha \leq m_1/(m_1+m_3)$, **alors on a
$\gamma_\alpha(K_{m_1,m_2,m_3}) = \min\{m_1, \lceil\alpha(m_1+m_2)\rceil + \lceil\alpha(m_2+m_3)\rceil, \lceil\alpha(m_1+m_2)\rceil + \lceil\alpha(m_1+m_3)\rceil\}$.

(2) Pour** $m_1/(m_1+m_3) < \alpha \leq m_3/(m_1+m_3)$, **alors on a
i) Si** $m_1/(m_1+m_2) > m_2/(m_2+m_3)$ **et** $m_1/(m_1+m_3) < \alpha \leq m_2/(m_2+m_3)$, **alors on a $\gamma_\alpha(K_{m_1,m_2,m_3}) = \min\{m_2, \lceil\alpha(m_1+m_3)\rceil, \lceil\alpha(m_1+m_2)\rceil + \lceil\alpha(m_1+m_3)\rceil - m_1\}$.
ii) Si** $m_1/(m_1+m_2) > m_2/(m_2+m_3)$ et $m_2/(m_2+m_3) < \alpha \leq m_1/(m_1+m_2)$, **alors on a $\gamma_\alpha(K_{m_1,m_2,m_3}) = \min\{m_3, m_1+m_2, \lceil\alpha(m_1+m_3)\rceil, \lceil\alpha(m_1+m_2)\rceil + \lceil\alpha(m_1+m_3)\rceil - m_1, \lceil\alpha(m_1+m_2)\rceil + \lceil\alpha(m_2+m_3)\rceil - m_2\}$.
iii) Si** $m_3/(m_2+m_3) > m_2/(m_1+m_2)$ **et** $m_1/(m_1+m_2) < \alpha \leq m_2/(m_1+m_2)$, **alors on a $\gamma_\alpha(K_{m_1,m_2,m_3}) = \min\{m_3, m_1+m_2, \lceil\alpha(m_1+m_3)\rceil, \lceil\alpha(m_1+m_2)\rceil + \lceil\alpha(m_1+m_3)\rceil - m_1, \lceil\alpha(m_1+m_2)\rceil + \lceil\alpha(m_2+m_3)\rceil - m_2\}$.

iv) Si $m_3/(m_2+m_3) > m_2/(m_1+m_2)$ ***et*** $m_2/(m_1+m_2) < \alpha \leq m_3/(m_2+m_3)$, ***alors on a*** $\gamma_\alpha(K_{m_1,m_2,m_3}) = \min\{m_3, m_1+m_2, \lceil\alpha(m_1+m_2)\rceil + \lceil\alpha(m_1+m_3)\rceil - m_1, \lceil\alpha(m_1+m_2)\rceil + \lceil\alpha(m_2+m_3)\rceil - m_2\}$.

v) Si $m_3/(m_2+m_3) < \alpha \leq m_3/(m_1+m_3)$, ***alors on a*** $\gamma_\alpha(K_{m_1,m_2,m_3}) = \min\{m_1 + m_2, \lceil\alpha(m_2+m_3)\rceil, \lceil\alpha(m_1+m_2)\rceil + \lceil\alpha(m_1+m_3)\rceil - m_1, \lceil\alpha(m_1+m_2)\rceil + \lceil\alpha(m_2+m_3)\rceil - m_2, \lceil\alpha(m_2+m_3)\rceil + \lceil\alpha(m_1+m_3)\rceil - m_3\}$.

vi) Si $m_1/(m_1+m_2) \leq m_2/(m_2+m_3)$ *et* $m_1/(m_1+m_3) < \alpha \leq m_1/(m_1+m_2)$, ***alors on a*** $\gamma_\alpha(K_{m_1,m_2,m_3}) = \min\{m_2, \lceil\alpha(m_1+m_3)\rceil, \lceil\alpha(m_1+m_2)\rceil + \lceil\alpha(m_1+m_3)\rceil - m_1\}$.

vii) Si $m_1/(m_1+m_2) \leq m_2/(m_2+m_3)$ *et* $m_1/(m_1+m_2) < \alpha \leq m_2/(m_2+m_3)$, ***alors on a*** $\gamma_\alpha(K_{m_1,m_2,m_3}) = \min\{m_2, \lceil\alpha(m_1+m_2)\rceil + \lceil\alpha(m_1+m_3)\rceil - m_1\}$.

viii) Si $m_1/(m_1+m_2) \geq m_2/(m_2+m_3)$ ***et*** $m_2/(m_2+m_3) < \alpha \leq m_3/(m_2+m_3)$, ***alors on a*** $\gamma_\alpha(K_{m_1,m_2,m_3}) = \min\{m_3, m_1+m_2, \lceil\alpha(m_2+m_3)\rceil, \lceil\alpha(m_1+m_2)\rceil + \lceil\alpha(m_1+m_3)\rceil - m_1, \lceil\alpha(m_1+m_2)\rceil + \lceil\alpha(m_2+m_3)\rceil - m_2\}$.

ix) Si $m_1/(m_1+m_2) \geq m_2/(m_2+m_3)$ *et* $m_3/(m_2+m_3) < \alpha \leq m_2/(m_1+m_2)$, ***alors on a*** $\gamma_\alpha(K_{m_1,m_2,m_3}) = \min\{m_1+m_2, \lceil\alpha(m_2+m_3)\rceil, \lceil\alpha(m_1+m_2)\rceil + \lceil\alpha(m_1+m_3)\rceil - m_1, \lceil\alpha(m_1+m_2)\rceil + \lceil\alpha(m_2+m_3)\rceil - m_2, \lceil\alpha(m_2+m_3)\rceil + \lceil\alpha(m_1+m_3)\rceil - m_3\}$.

x) Si $m_2/(m_1+m_2) < \alpha \leq m_3/(m_1+m_3)$, ***alors on a*** $\gamma_\alpha(K_{m_1,m_2,m_3}) = \min\{m_1 + m_2, \lceil\alpha(m_2+m_3)\rceil, \lceil\alpha(m_1+m_2)\rceil + \lceil\alpha(m_1+m_3)\rceil - m_1,$
$\lceil\alpha(m_1+m_2)\rceil + \lceil\alpha(m_2+m_3)\rceil - m_2, \lceil\alpha(m_2+m_3)\rceil + \lceil\alpha(m_1+m_3)\rceil - m_3\}$.

(3) Si $m_3/(m_1+m_3) < \alpha \leq 1$, ***alors on a***
$\gamma_\alpha(K_{m_1,m_2,m_3}) = \min\{m_1+m_2, \lceil\alpha(m_1+m_2)\rceil + \lceil\alpha(m_1+m_3)\rceil - m_1,$
$\lceil\alpha(m_1+m_2)\rceil + \lceil\alpha(m_2+m_3)\rceil - m_2, \lceil\alpha(m_2+m_3)\rceil + \lceil\alpha(m_1+m_3)\rceil - m_3,$
$\lceil \lceil\alpha(m_1+m_2)\rceil + \lceil\alpha(m_1+m_3)\rceil + \lceil\alpha(m_2+m_3)\rceil /2 \rceil\}$.

Preuve. Supposons que X_1, X_2 et X_3 sont les trois parties stables de K_{m_1,m_2,m_3} avec $|X_1| = m_1$, $|X_2| = m_2$ et $|X_3| = m_3$. Soit S un $\gamma_\alpha(K_{m_1,m_2,m_3})$-ensemble. Il est clair que les $\gamma_\alpha(K_{m_1,m_2,m_3})$-ensembles possibles de K_{m_1,m_2,m_3} sont résumés dans les cas suivants.
Cas 1. $0 < \alpha \leq m_1/(m_1+m_3)$. Dans ce cas X_1 est un ensemble α-dominant de K_{m_1,m_2,m_3}

puisque $\forall x \in V - S$, on a

$$\left|N_{K_{m_1,m_2,m_3}}(x) \cap S\right| = m_1 \geq \alpha(m_1 + m_3) = \alpha d_{K_{m_1,m_2,m_3}}(x) = \alpha \left|N_{K_{m_1,m_2,m_3}}(x)\right| \text{ si } x \in X_2$$

et

$$\begin{aligned} \left|N_{K_{m_1,m_2,m_3}}(x) \cap S\right| &= m_1 \geq \alpha(m_1 + m_3) \geq \alpha(m_1 + m_2) = \alpha d_{K_{m_1,m_2,m_3}}(x) \\ &= \alpha \left|N_{K_{m_1,m_2,m_3}}(x)\right| \text{ si } x \in X_3. \end{aligned}$$

Cas 2. $m_1/(m_1+m_3) < \alpha \leq m_2/(m_2+m_3)$. Dans ce cas X_2 est un ensemble α-dominant de K_{m_1,m_2,m_3} (X_1 ne peut être un ensemble α-dominant) puisque $\forall x \in V - S$, on a

$$\left|N_{K_{m_1,m_2,m_3}}(x) \cap S\right| = m_2 \geq \alpha(m_2 + m_3) = \alpha d_{K_{m_1,m_2,m_3}}(x) = \alpha \left|N_{K_{m_1,m_2,m_3}}(x)\right| \text{ si } x \in X_1$$

et

$$\begin{aligned} \left|N_{K_{m_1,m_2,m_3}}(x) \cap S\right| &= m_2 \geq \alpha(m_2 + m_3) \geq \alpha(m_1 + m_3) = \alpha d_{K_{m_1,m_2,m_3}}(x) \\ &= \alpha \left|N_{K_{m_1,m_2,m_3}}(x)\right| \text{ si } x \in X_3. \end{aligned}$$

Cas 3. $m_2/(m_2+m_3) < \alpha \leq m_3/(m_2+m_3)$. Dans ce cas X_3 est un ensemble α-dominant de K_{m_1,m_2,m_3} (X_1 et X_2 ne peuvent être des ensembles α-dominants) puisque $\forall x \in V - S$, on a

$$\left|N_{K_{m_1,m_2,m_3}}(x) \cap S\right| = m_3 \geq \alpha(m_2 + m_3) = \alpha d_{K_{m_1,m_2,m_3}}(x) = \alpha \left|N_{K_{m_1,m_2,m_3}}(x)\right| \text{ si } x \in X_1$$

et

$$\begin{aligned} \left|N_{K_{m_1,m_2,m_3}}(x) \cap S\right| &= m_3 \geq \alpha(m_2 + m_3) \geq \alpha(m_1 + m_3) = \alpha d_{K_{m_1,m_2,m_3}}(x) \\ &= \alpha \left|N_{K_{m_1,m_2,m_3}}(x)\right| \text{ si } x \in X_2. \end{aligned}$$

Il reste les possibilités où on peut prendre des sous ensembles de X_1, X_2 et X_3.

On peut rejeter les trois cas suivants :

- Si $S = X_1 \cup S \cap X_2$ avec $X_2 \neq S \cap X_2 \neq \varnothing$ et $S \cap X_3 = \varnothing$ car $0 < \alpha \leq m_1/(m_1 + m_3)$

et donc X_1 est meilleur en cardinalité que S.

- Si $S = X_2 \cup S \cap X_1$ avec $X_1 \neq S \cap X_1 \neq \varnothing$ et $S \cap X_3 = \varnothing$ car $m_1/(m_1 + m_3) < \alpha \leq m_2/(m_2 + m_3)$ et donc X_2 est meilleur en cardinalité que S.

- Si $S = X_3 \cup S \cap X_1$ avec $X_1 \neq S \cap X_1 \neq \varnothing$ et $S \cap X_2 = \varnothing$ car $m_2/(m_2 + m_3) < \alpha \leq m_3/(m_2 + m_3)$ et donc X_3 est meilleur en cardinalité que S.

Cas 4. $S = X_1 \cup S \cap X_3$ et $X_3 \neq S \cap X_3 \neq \varnothing$ et $S \cap X_2 = \varnothing$. $\forall x \in V - S$, si $x \in X_2$ on a $\left|N_{K_{m_1,m_2,m_3}}(x) \cap S\right| = m_1 + |S \cap X_3| \geq \lceil \alpha(m_1 + m_3) \rceil$, si $x \in X_3$ on a $\left|N_{K_{m_1,m_2,m_3}}(x) \cap S\right| = m_1 \geq \alpha(m_1 + m_2)$. Par conséquent on prend $|S| = \lceil \alpha(m_1 + m_3) \rceil$ si $m_1/(m_1 + m_3) < \alpha \leq m_1/(m_1 + m_2)$ (et X_1 ne peut être un ensemble α-dominant).

Cas 5. $S = X_2 \cup S \cap X_3$ et $X_3 \neq S \cap X_3 \neq \varnothing$ et $S \cap X_1 = \varnothing$. $\forall x \in V - S$, si $x \in X_1$ on a $\left|N_{K_{m_1,m_2,m_3}}(x) \cap S\right| = m_2 + |S \cap X_3| \geq \lceil \alpha(m_2 + m_3) \rceil$, si $x \in X_3$ on a $\left|N_{K_{m_1,m_2,m_3}}(x) \cap S\right| = m_2 \geq \alpha(m_1 + m_2)$. Par conséquent on prend $|S| = \lceil \alpha(m_2 + m_3) \rceil$ si $m_2/(m_2 + m_3) < \alpha \leq m_2/(m_1 + m_2)$ (et X_2 ne peut être un ensemble α-dominant)

Cas 6. $S = X_3 \cup S \cap X_2$ et $X_2 \neq S \cap X_2 \neq \varnothing$ et $S \cap X_1 = \varnothing$. $\forall x \in V - S$, si $x \in X_1$ on a $\left|N_{K_{m_1,m_2,m_3}}(x) \cap S\right| = m_3 + |S \cap X_2| \geq \lceil \alpha(m_2 + m_3) \rceil$, si $x \in X_2$ on a $\left|N_{K_{m_1,m_2,m_3}}(x) \cap S\right| = m_3 \geq \alpha(m_1 + m_3)$. Par conséquent on prend $|S| = \lceil \alpha(m_2 + m_3) \rceil$ si $m_3/(m_2 + m_3) < \alpha \leq m_3/(m_1 + m_3)$ (et X_3 ne peut être un ensemble α-dominant)

Cas 7. $X_1 \neq S \cap X_1 \neq \varnothing$ et $X_2 \neq S \cap X_2 \neq \varnothing$ et $S \cap X_3 = \varnothing . \forall x \in V - S$, si $x \in X_1$ on a $\left|N_{K_{m_1,m_2,m_3}}(x) \cap S\right| = |S \cap X_2| \geq \lceil \alpha(m_2 + m_3) \rceil$, si $x \in X_2$ on a $\left|N_{K_{m_1,m_2,m_3}}(x) \cap S\right| = |S \cap X_1| \geq \lceil \alpha(m_1 + m_3) \rceil$, si $x \in X_3$ on a $\left|N_{K_{m_1,m_2,m_3}}(x) \cap S\right| = |S \cap X_1| + |S \cap X_2| \geq \lceil \alpha(m_1 + m_2) \rceil$. Donc on a $|S| = |S \cap X_1| + |S \cap X_2| = \lceil \alpha(m_2 + m_3) \rceil + \lceil \alpha(m_1 + m_3) \rceil$.

Cas 8. $X_1 \neq S \cap X_1 \neq \varnothing$ et $X_3 \neq S \cap X_3 \neq \varnothing$ et $S \cap X_2 = \varnothing . \forall x \in V - S$, si $x \in X_1$ on a $\left|N_{K_{m_1,m_2,m_3}}(x) \cap S\right| = |S \cap X_3| \geq \lceil \alpha(m_2 + m_3) \rceil$, si $x \in X_2$ on a $\left|N_{K_{m_1,m_2,m_3}}(x) \cap S\right| = |S \cap X_1| + |S \cap X_3| \geq \lceil \alpha(m_1 + m_3) \rceil$, si $x \in X_3$ on a $\left|N_{K_{m_1,m_2,m_3}}(x) \cap S\right| = |S \cap X_1| \geq \lceil \alpha(m_1 + m_2) \rceil$. Donc on a $|S| = |S \cap X_1| + |S \cap X_3| = \lceil \alpha(m_1 + m_2) \rceil + \lceil \alpha(m_2 + m_3) \rceil$.

Cas 9. $X_2 \neq S \cap X_2 \neq \varnothing$ et $X_3 \neq S \cap X_3 \neq \varnothing$ et $S \cap X_1 = \varnothing . \forall x \in V - S$, si $x \in X_1$ on a $\left|N_{K_{m_1,m_2,m_3}}(x) \cap S\right| = |S \cap X_2| + |S \cap X_3| \geq \lceil \alpha(m_2 + m_3) \rceil$, si $x \in X_2$ on a $\left|N_{K_{m_1,m_2,m_3}}(x) \cap S\right| = |S \cap X_3| \geq \lceil \alpha(m_1 + m_3) \rceil$, si $x \in X_3$ on a $\left|N_{K_{m_1,m_2,m_3}}(x) \cap S\right| = |S \cap X_2| \geq \lceil \alpha(m_1 + m_2) \rceil$. Par conséquent on a $|S| = |S \cap X_2| + |S \cap X_3| = \lceil \alpha(m_1 + m_2) \rceil + \lceil \alpha(m_1 + m_3) \rceil$.

Cas 10. $X_1 \neq S \cap X_1 \neq \varnothing$ et $X_2 \neq S \cap X_2 \neq \varnothing$ et $X_3 \neq S \cap X_3 \neq \varnothing . \forall x \in V - S$, si $x \in X_1$ on a $\left|N_{K_{m_1,m_2,m_3}}(x) \cap S\right| = |S \cap X_2| + |S \cap X_3| \geq \lceil \alpha(m_2 + m_3) \rceil$, si $x \in X_2$ on a $\left|N_{K_{m_1,m_2,m_3}}(x) \cap S\right| = |S \cap X_1| + |S \cap X_3| \geq \lceil \alpha(m_1 + m_3) \rceil$ et si $x \in X_3$ on a $\left|N_{K_{m_1,m_2,m_3}}(x) \cap S\right| = |S \cap X_1| + |S \cap X_2| \geq \lceil \alpha(m_1 + m_2) \rceil$. Par conséquent on a

$$\begin{aligned} 2\,|S| &= 2|(X_1 \cup X_2 \cup X_3) \cap S)| = \\ 2(|X_1 \cap S| + |X_2 \cap S| + |X_3 \cap S|) &\geq \lceil \alpha(m_1 + m_2) \rceil + \lceil \alpha(m_1 + m_3) \rceil + \lceil \alpha(m_2 + m_3) \rceil \\ \text{alors } |S| &\geq \frac{\lceil \alpha(m_1 + m_2) \rceil + \lceil \alpha(m_2 + m_3) \rceil + \lceil \alpha(m_1 + m_3) \rceil}{2} \\ \text{d'où on a } |S| &= \left\lceil \frac{\lceil \alpha(m_1 + m_2) \rceil + \lceil \alpha(m_2 + m_3) \rceil + \lceil \alpha(m_1 + m_3) \rceil}{2} \right\rceil \end{aligned}$$

Cas 11. $S = X_1 \cup S \cap X_2 \cup S \cap X_3$ et $X_2 \neq S \cap X_2 \neq \varnothing$ et $X_3 \neq S \cap X_3 \neq \varnothing . \forall x \in V - S$, si $x \in X_2$ on a $\left|N_{K_{m_1,m_2,m_3}}(x) \cap S\right| = m_1 + |S \cap X_3| \geq \lceil \alpha(m_1 + m_3) \rceil$, si $x \in X_3$ on a $\left|N_{K_{m_1,m_2,m_3}}(x) \cap S\right| = m_1 + |S \cap X_2| \geq \lceil \alpha(m_1 + m_2) \rceil$. Par conséquent on a $|S| = m_1 + |S \cap X_2| + |S \cap X_3| = \lceil \alpha(m_1 + m_2) \rceil + \lceil \alpha(m_1 + m_3) \rceil - m_1$.

Cas 12. $S = X_2 \cup S \cap X_1 \cup S \cap X_3$et $X_1 \neq S \cap X_1 \neq \varnothing$ et $X_3 \neq S \cap X_3 \neq \varnothing . \forall x \in V - S$, si $x \in X_1$ on a $\left|N_{K_{m_1,m_2,m_3}}(x) \cap S\right| = m_2 + |S \cap X_3| \geq \lceil \alpha(m_2 + m_3) \rceil$, si $x \in X_3$ on a $\left|N_{K_{m_1,m_2,m_3}}(x) \cap S\right| = m_2 + |S \cap X_1| \geq \lceil \alpha(m_1 + m_2) \rceil$. Par conséquent on a $|S| = m_2 + |S \cap X_1| + |S \cap X_3| = \lceil \alpha(m_1 + m_2) \rceil + \lceil \alpha(m_2 + m_3) \rceil - m_2$

Cas 13. $S = X_3 \cup S \cap X_1 \cup S \cap X_2$ et $X_1 \neq S \cap X_1 \neq \varnothing$ et $X_2 \neq S \cap X_2 \neq \varnothing . \forall x \in V - S$, si $x \in X_1$ on a $\left|N_{K_{m_1,m_2,m_3}}(x) \cap S\right| = m_3 + |S \cap X_2| \geq \lceil \alpha(m_2 + m_3) \rceil$, si $x \in X_2$ on a $\left|N_{K_{m_1,m_2,m_3}}(x) \cap S\right| = m_3 + |S \cap X_1| \geq \lceil \alpha(m_1 + m_3) \rceil$. Par conséquent on a $|S| = m_3 + |S \cap X_1| + |S \cap X_2| = \lceil \alpha(m_1 + m_3) \rceil + \lceil \alpha(m_2 + m_3) \rceil - m_3$

Cas 14. $S = X_1 \cup X_2 \neq \varnothing$ et $S \cap X_3 = \varnothing . \forall x \in V - S$, si $x \in X_3$ on a $\left|N_{K_{m_1,m_2,m_3}}(x) \cap S\right| = m_1 + m_2 \geq \alpha(m_1 + m_2)$, Par conséquent on a $|S| = m_1 + m_2$.

Maintenant on donne les différentes valeurs de $\gamma_\alpha(K_{m_1,m_2,m_3})$ suivant les valeurs de α, en examinant les ensembles α-dominants qui sont sensibles d'être des ensembles α-dominants de cardinalité minimum. Ce procédé nous donne les cas suivants:

(1) Pour $0 < \alpha \leq m_1/(m_1 + m_3)$, alors on a

$\gamma_\alpha(K_{m_1,m_2,m_3}) = \min\{m_1, \lceil \alpha(m_1 + m_2) \rceil + \lceil \alpha(m_2 + m_3) \rceil, \lceil \alpha(m_1 + m_2) \rceil + \lceil \alpha(m_1 + m_3) \rceil\}$.

(2) Pour $m_1/(m_1 + m_3) < \alpha \leq m_3/(m_1 + m_3)$, alors on a

i) Si $m_1/(m_1+m_2) > m_2/(m_2+m_3)$ **et** $m_1/(m_1+m_3) < \alpha \leq m_2/(m_2+m_3)$, **alors on a** $\gamma_\alpha(K_{m_1,m_2,m_3}) = \min\{m_2, \lceil\alpha(m_1+m_3)\rceil, \lceil\alpha(m_1+m_2)\rceil + \lceil\alpha(m_1+m_3)\rceil - m_1\}$.

ii) Si $m_1/(m_1+m_2) > m_2/(m_2+m_3)$ et $m_2/(m_2+m_3) < \alpha \leq m_1/(m_1+m_2)$, **alors on a** $\gamma_\alpha(K_{m_1,m_2,m_3}) = \min\{m_3, m_1+m_2, \lceil\alpha(m_1+m_3)\rceil, \lceil\alpha(m_1+m_2)\rceil + \lceil\alpha(m_1+m_3)\rceil - m_1, \lceil\alpha(m_1+m_2)\rceil + \lceil\alpha(m_2+m_3)\rceil - m_2\}$.

iii) Si $m_3/(m_2+m_3) > m_2/(m_1+m_2)$ **et** $m_1/(m_1+m_2) < \alpha \leq m_2/(m_1+m_2)$, **alors on a** $\gamma_\alpha(K_{m_1,m_2,m_3}) = \min\{m_3, m_1+m_2, \lceil\alpha(m_1+m_3)\rceil, \lceil\alpha(m_1+m_2)\rceil + \lceil\alpha(m_1+m_3)\rceil - m_1, \lceil\alpha(m_1+m_2)\rceil + \lceil\alpha(m_2+m_3)\rceil - m_2\}$.

iv) Si $m_3/(m_2+m_3) > m_2/(m_1+m_2)$ **et** $m_2/(m_1+m_2) < \alpha \leq m_3/(m_2+m_3)$, **alors on a** $\gamma_\alpha(K_{m_1,m_2,m_3}) = \min\{m_3, m_1+m_2, \lceil\alpha(m_1+m_2)\rceil + \lceil\alpha(m_1+m_3)\rceil - m_1, \lceil\alpha(m_1+m_2)\rceil + \lceil\alpha(m_2+m_3)\rceil - m_2\}$.

v) Si $m_3/(m_2+m_3) < \alpha \leq m_3/(m_1+m_3)$, **alors on a** $\gamma_\alpha(K_{m_1,m_2,m_3}) = \min\{m_1+m_2, \lceil\alpha(m_2+m_3)\rceil, \lceil\alpha(m_1+m_2)\rceil + \lceil\alpha(m_1+m_3)\rceil - m_1, \lceil\alpha(m_1+m_2)\rceil + \lceil\alpha(m_2+m_3)\rceil - m_2, \lceil\alpha(m_2+m_3)\rceil + \lceil\alpha(m_1+m_3)\rceil - m_3\}$.

vi) Si $m_1/(m_1+m_2) \leq m_2/(m_2+m_3)$ et $m_1/(m_1+m_3) < \alpha \leq m_1/(m_1+m_2)$, **alors on a** $\gamma_\alpha(K_{m_1,m_2,m_3}) = \min\{m_2, \lceil\alpha(m_1+m_3)\rceil, \lceil\alpha(m_1+m_2)\rceil + \lceil\alpha(m_1+m_3)\rceil - m_1\}$.

vii) Si $m_1/(m_1+m_2) \leq m_2/(m_2+m_3)$ et $m_1/(m_1+m_2) < \alpha \leq m_2/(m_2+m_3)$, **alors on a** $\gamma_\alpha(K_{m_1,m_2,m_3}) = \min\{m_2, \lceil\alpha(m_1+m_2)\rceil + \lceil\alpha(m_1+m_3)\rceil - m_1\}$.

viii) Si $m_1/(m_1+m_2) \geq m_2/(m_2+m_3)$ **et** $m_2/(m_2+m_3) < \alpha \leq m_3/(m_2+m_3)$, **alors on a** $\gamma_\alpha(K_{m_1,m_2,m_3}) = \min\{m_3, m_1+m_2, \lceil\alpha(m_2+m_3)\rceil, \lceil\alpha(m_1+m_2)\rceil + \lceil\alpha(m_1+m_3)\rceil - m_1, \lceil\alpha(m_1+m_2)\rceil + \lceil\alpha(m_2+m_3)\rceil - m_2\}$.

ix) Si $m_1/(m_1+m_2) \geq m_2/(m_2+m_3)$ et $m_3/(m_2+m_3) < \alpha \leq m_2/(m_1+m_2)$, **alors on a** $\gamma_\alpha(K_{m_1,m_2,m_3}) = \min\{m_1+m_2, \lceil\alpha(m_2+m_3)\rceil, \lceil\alpha(m_1+m_2)\rceil + \lceil\alpha(m_1+m_3)\rceil - m_1, \lceil\alpha(m_1+m_2)\rceil + \lceil\alpha(m_2+m_3)\rceil - m_2, \lceil\alpha(m_2+m_3)\rceil + \lceil\alpha(m_1+m_3)\rceil - m_3\}$.

x) Si $m_2/(m_1+m_2) < \alpha \leq m_3/(m_1+m_3)$, **alors on a** $\gamma_\alpha(K_{m_1,m_2,m_3}) = \min\{m_1+m_2, \lceil\alpha(m_2+m_3)\rceil, \lceil\alpha(m_1+m_2)\rceil + \lceil\alpha(m_1+m_3)\rceil - m_1,$
$\lceil\alpha(m_1+m_2)\rceil + \lceil\alpha(m_2+m_3)\rceil - m_2, \lceil\alpha(m_2+m_3)\rceil + \lceil\alpha(m_1+m_3)\rceil - m_3\}$.

(3) Si $m_3/(m_1+m_3) < \alpha \leq 1$, **alors on a**

$\gamma_\alpha(K_{m_1,m_2,m_3}) = \min\{m_1+m_2, \lceil\alpha(m_1+m_2)\rceil + \lceil\alpha(m_1+m_3)\rceil - m_1,$
$\lceil\alpha(m_1+m_2)\rceil + \lceil\alpha(m_2+m_3)\rceil - m_2, \lceil\alpha(m_2+m_3)\rceil + \lceil\alpha(m_1+m_3)\rceil - m_3,$

$\lceil\lceil\alpha(m_1+m_2)\rceil+\lceil\alpha(m_1+m_3)\rceil+\lceil\alpha(m_2+m_3)\rceil/2\rceil\}$. $\square$

Exemple:

On donne les différentes valeurs de $\gamma_\alpha(K_{m_1,m_2,m_3})$ suivant les valeurs prises par α.

Si $m_1=2$, $m_2=3$, et $m_3=5$.

Cas (1). $0<\alpha\leq\frac{2}{7}$, alors $\gamma_\alpha(K_{m_1,m_2,m_3})=2$.

Cas (2). $\frac{2}{7}<\alpha\leq\frac{5}{7}$

Sous-cas (2.i). $\frac{2}{7}<\alpha\leq\frac{3}{8}$ et $\frac{3}{8}<\frac{2}{5}$, alors $\gamma_\alpha(K_{m_1,m_2,m_3})=3$.

Sous-cas (2.ii). $\frac{3}{8}<\alpha\leq\frac{2}{5}$ et $\frac{3}{8}<\frac{2}{5}$, alors $\gamma_\alpha(K_{m_1,m_2,m_3})=3$.

Sous-cas (2.iii). $\frac{2}{5}<\alpha\leq\frac{3}{5}$ et $\frac{3}{5}<\frac{5}{8}$, alors $\gamma_\alpha(K_{m_1,m_2,m_3})=\begin{cases}4 & \text{si } \frac{2}{5}<\alpha\leq\frac{4}{8}\\ 5 & \text{si } \frac{4}{8}<\alpha\leq\frac{3}{5}\end{cases}$.

Sous-cas (2.iv). $\frac{3}{5}<\alpha\leq\frac{5}{8}$ et $\frac{3}{5}<\frac{5}{8}$, alors $\gamma_\alpha(K_{m_1,m_2,m_3})=5$.

Sous-cas (2.v). $\frac{5}{8}<\alpha\leq\frac{5}{7}$, alors $\gamma_\alpha(K_{m_1,m_2,m_3})=5$.

Cas (3). $\frac{5}{7}<\alpha\leq1$, alors $\gamma_\alpha(K_{m_1,m_2,m_3})=5$.

Si $m_1=2$, $m_2=3$, et $m_3=4$.

Cas (1). $0<\alpha\leq\frac{1}{3}$, alors $\gamma_\alpha(K_{m_1,m_2,m_3})=2$.

Cas (2). $\frac{1}{3}<\alpha\leq\frac{2}{3}$

Sous-cas (2.vi). $\frac{1}{3}<\alpha\leq\frac{2}{5}$ et $\frac{2}{5}<\frac{3}{7}$, alors $\gamma_\alpha(K_{m_1,m_2,m_3})=3$.

Sous-cas (2.vii). $\frac{2}{5}<\alpha\leq\frac{3}{7}$ et $\frac{2}{5}<\frac{3}{7}$, alors $\gamma_\alpha(K_{m_1,m_2,m_3})=3$.

Sous-cas (2.viii). $\frac{3}{7}<\alpha\leq\frac{4}{7}$ et $\frac{4}{7}<\frac{3}{5}$, alors $\gamma_\alpha(K_{m_1,m_2,m_3})=4$.

Sous-cas (2.ix). $\frac{4}{7}<\alpha\leq\frac{3}{5}$ et $\frac{4}{7}<\frac{3}{5}$, alors $\gamma_\alpha(K_{m_1,m_2,m_3})=5$.

Sous-cas (2.x). $\frac{3}{5}<\alpha\leq\frac{2}{3}$ alors $\gamma_\alpha(K_{m_1,m_2,m_3})=5$.

Cas (3). $\frac{2}{3}<\alpha\leq1$, alors $\gamma_\alpha(K_{m_1,m_2,m_3})=5$.

3.2 Etude du nombre de α-domination du graphe du Roi

Dans cette section, on va déterminer des valeurs exactes et des bornes supérieures pour le nombre de α-domination du graphe du Roi $K[s\times t]$.

Théorème 3.2. *Soit G le graphe du Roi $K[s \times t]$. Alors*

$$\gamma_\alpha(K[s \times t]) = \begin{cases} \lceil \frac{s}{3} \rceil \lceil \frac{t}{3} \rceil & si\ 0 < \alpha \leq \frac{1}{8} \\ \lfloor \frac{s}{2} \rfloor \lfloor \frac{t}{2} \rfloor & si\ \frac{1}{8} < \alpha \leq \frac{1}{5} \\ s \times t - \lceil \frac{s}{2} \rceil \lceil \frac{t}{2} \rceil & si\ \frac{7}{8} < \alpha \leq 1 \end{cases}.$$

Preuve. **Cas 1.** $0 < \alpha \leq \frac{1}{8}$. Le degré maximum d'un graphe du Roi est 8. Par la Proposition 2.2, on déduit que $\gamma_\alpha(G) = \gamma(G)$, et par le Théorème 2.18 on obtient le résultat suivant $\gamma_\alpha(K[s \times t]) = \lceil \frac{s}{3} \rceil \lceil \frac{t}{3} \rceil$.

Cas 2. $\frac{1}{8} < \alpha \leq \frac{1}{5}$. Les sommets de degré 3 qui n'appartiennent pas à S, ont au moins un sommet voisin dans S. De même, les sommets de degré 5 (respectivement 8) qui n'appartiennent pas à S, ont au moins un sommet voisin (respectivement deux sommets voisins) dans S. Pour montrer le résultat on utilise l'idée suivante : tout bloc de 2×2 peut contenir au moins un sommet dans S. Si on place ce sommet dans le coin inférieur à droite alors:

- Si s et t sont pairs: on peut diviser l'échiquier $s \times t$ en $\frac{s}{2} \times \frac{t}{2}$ blocs de 2×2. En outre le nombre $\frac{s}{2} \times \frac{t}{2}$ est suffisant pour α-dominer tous les sommets. Donc $\gamma_\alpha(K[s \times t]) = \frac{s}{2} \times \frac{t}{2}$.
- Si s et t sont impairs: on peut diviser l'échiquier $s \times t$ en $\frac{s-1}{2} \times \frac{t-1}{2}$ blocs de 2×2. En outre le nombre $\frac{s-1}{2} \times \frac{t-1}{2}$ est suffisant pour α-dominer tous les sommets. Donc $\gamma_\alpha(K[s \times t]) = \frac{s-1}{2} \times \frac{t-1}{2}$.
- Si s est pair et t est impair: on peut diviser l'échiquier $s \times t$ en $\frac{s}{2} \times \frac{t-1}{2}$ blocs de 2×2. En outre le nombre $\frac{s}{2} \times \frac{t-1}{2}$ est suffisant pour α-dominer tous les sommets. Ce qui implique que $\gamma_\alpha(K[s \times t]) = \frac{s}{2} \times \frac{t-1}{2}$.
- Si s est impair et t est pair: on peut diviser l'échiquier $s \times t$ en $\frac{s-1}{2} \times \frac{t}{2}$ blocs de 2×2. En outre le nombre $\frac{s-1}{2}\frac{t}{2}$ est suffisant pour α-dominer tous les sommets. Ce qui implique que $\gamma_\alpha(K[s \times t]) = \frac{s-1}{2} \times \frac{t}{2}$.

Finalement, si on combine les cas précédents on obtiendrait le résultat, quand $\frac{1}{8} < \alpha \leq \frac{1}{5}$.

Cas 3. $\frac{7}{8} < \alpha \leq 1$. Le résultat peut être facilement vérifié. Soit S un $\gamma_\alpha(G)$-ensemble, alors $\forall x \in V \setminus S$, $|N(x) \cap S| = d_S(x) \geq \alpha d_G(x) > \frac{7}{8} d_G(x)$. Il existe 3 types de degré pour les sommets de $K[s \times t]$, degré 3, 5 et 8. Ainsi si $d_G(x) = 3$ alors $d_S(x) > \frac{7}{8}.3 = 3$, si $d_G(x) = 5$ alors $d_S(x) > \frac{7}{8}.5 = 5$, si $d_G(x) = 8$ alors $d_S(x) > \frac{7}{8}\ 8 = 8$. Par conséquent S est un $\gamma_1(G)$-ensemble. Les Propositions (2.8) et (2.9) impliquent que $\gamma_\alpha(G) = s \times t - \beta(G)$, et par le Théorème 2.18 on obtient le résultat $\gamma_\alpha(G) = s \times t - \lceil \frac{s}{2} \rceil \lceil \frac{t}{2} \rceil$. $\square$

Malheureusement, on n'a pas pu donner les valeurs exactes pour $\frac{1}{5} < \alpha \leq \frac{7}{8}$. Dans ce qui suit on donne les valeurs exactes pour tout $0 < \alpha \leq 1$ de $\gamma_\alpha(K[2 \times t])$ et $\gamma_\alpha(K[3 \times t])$.

Théorème 3.3. *Si $G = K[2 \times t]$ un graphe du Roi, alors*

$$\gamma_\alpha(K[2 \times t]) = \begin{cases} \lceil \frac{t}{3} \rceil & si\ 0 < \alpha \leq \frac{1}{5} \\ \lceil \frac{2t}{3} \rceil & si\ \frac{1}{5} < \alpha \leq \frac{1}{3},\ t \geq 2 \\ 2\lceil \frac{t}{3} \rceil & si\ \frac{1}{3} < \alpha \leq \frac{2}{5},\ t \geq 2 \\ t-1 & si\ \frac{2}{5} < \alpha \leq \frac{3}{5},\ t \geq 5 \\ 2\lfloor \frac{t}{2} \rfloor & si\ \frac{3}{5} < \alpha \leq \frac{2}{3},\ t \geq 2 \\ t+1 & si\ \frac{2}{3} < \alpha \leq \frac{4}{5},\ t \geq 2 \\ \lfloor \frac{3t}{2} \rfloor & si\ \frac{4}{5} < \alpha \leq 1 \end{cases}.$$

Preuve. Cas 1. Si $0 < \alpha \leq \frac{1}{5}$, alors d'après la Proposition 2.2 et le Théorème 2.18, on trouve que $\gamma_\alpha(K[2 \times t]) = \gamma(K[2 \times t]) = \lceil \frac{t}{3} \rceil$.

Cas 2. Si $\frac{1}{5} < \alpha \leq \frac{1}{3}$, alors pour tout ensemble α-dominant S, les sommets de degré 3 (respectivement, 5) qui n'appartiennent pas à S ont au moins un sommet (respectivement 2 sommets) voisins dans S. Il est simple de voir que $\gamma_\alpha(K[2 \times 1]) = 1$. On suppose que $t \geq 2$. Soit $X = \{x_1, x_2, ..., x_t\}$ les sommets du premier rangé. $Y = \{y_1, y_2, ..., y_t\}$ les sommets du deuxième rangé. Soit l'ensemble S tel que:

$$S = \begin{cases} \bigcup\limits_{k=1}^{(t-1)/2} \{x_{2k}, x_{2k+1}\} \text{ si } t \equiv 0\,[3] \\ \bigcup\limits_{k=1}^{(t-2)/2} \{x_{2k}, x_{2k+1}\} \text{ si } t \equiv 1\,[3] \\ \bigcup\limits_{k=1}^{(t-3)/2} \{x_{2k}, x_{2k+1}\} \cup \{x_t\} \text{ si } t \equiv 2\,[3] \end{cases}$$

Il est clair que S est un α-dominant, par conséquent $\gamma_\alpha(K[2 \times t]) \leq \lceil \frac{2t}{3} \rceil$.
Soit S un γ_α-ensemble de $K[2 \times t]$, il est impérativement remarquable que dans tout bloc de (2×3), il faut prendre au moins deux sommets dans S; sinon, on a un sommet de degré 5 qui n'aura pas deux voisins dans S. Le graphe $K[2 \times t]$ contient au moins $\frac{t}{3}$ blocs de (2×3). Alors la cardinalité de S est au moins $\frac{2t}{3}$, ce qui donne $\gamma_\alpha(K[2 \times t]) = |S| \geq \lceil \frac{2t}{3} \rceil$.
Par conséquent la double inégalité donne le résultat.

Cas 3. Si $\frac{1}{3} < \alpha \leq \frac{2}{5}$, alors pour tout ensemble α-dominant S, les sommets de degré 3 (respectivement, 5) qui n'appartiennent pas à S ont au moins deux (respectivement 2) sommets voisins dans S. Il est simple de voir que $\gamma_\alpha(K\,[2 \times 1]) = 1$. On suppose que $t \geq 2$. Soit $X = \{x_1, x_2 ..., x_t\}$ les sommets du premier rangé. $Y = \{y_1, y_2 ..., y_t\}$ les sommets du deuxième rangé. Soit l'ensemble S tel que :

$$S = \begin{cases} \bigcup\limits_{k=1}^{t/3} \{x_{3k-1}, y_{3k-1}\} \text{ si } t \equiv 0\,[3] \\ \bigcup\limits_{k=1}^{(t-1)/3} \{x_{3k-1}, y_{3k-1}\} \cup \{x_n, y_n\} \text{ si } t \equiv 1\,[3] \\ \bigcup\limits_{k=1}^{(t+1)/3} \{x_{3k-1}, y_{3k-1}\} \text{ si } t \equiv 2\,[3] \end{cases}$$

il est clair que S est un α-dominant. Donc $\gamma_\alpha(K\,[2 \times t]) \leq 2\left\lceil \frac{t}{3} \right\rceil$.
Soit S un γ_α-ensemble de $K\,[2 \times t]$, il est immédiat de voir que dans tout bloc de (2×3), il faut prendre au moins 2 sommets dans S; sinon, on a un sommet de degré 5 n'aura pas deux voisins dans S. Le graphe $K\,[2 \times t]$ contient au moins $\frac{t}{3}$ blocs de (2×3). Alors la cardinalité de S est au moins $\frac{2t}{3}$, ce qui donne $\gamma_\alpha(K\,[2 \times t]) = |S| \geqslant 2\left\lceil \frac{t}{3} \right\rceil$. Par conséquent la double inégalité donne le résultat.

Cas 4. Si $\frac{2}{5} < \alpha \leq \frac{3}{5}$, alors pour tout α-dominant S, les sommets de degré 3 (respectivement, 5) qui n'appartiennent pas à S ont au moins deux (respectivement 3) sommets voisins dans S. On fait le même raisonnement que celui de la preuve de la Proposition 2.10.

Cas 5. Si $\frac{3}{5} < \alpha \leq \frac{2}{3}$, alors pour tout ensemble α-dominant S, les sommets de degré 3 (respectivement 5) qui n'appartiennent pas à S ont au moins deux (respectivement 4) sommets voisins dans S. Il est simple de voir que $\gamma_\alpha(K\,[2 \times 1]) = 1$. On suppose que $t \geq 2$. Soit $X = \{x_1, x_2 ..., x_t\}$ les sommets du premier rangé. $Y = \{y_1, y_2 ..., y_t\}$ les sommets du deuxième rangé. Soit l'ensemble S tel que:

$$S = \begin{cases} \bigcup\limits_{k=1}^{t/2} \{x_{2k}, y_{2k}\} \text{ si } t \text{ est pair} \\ \bigcup\limits_{k=1}^{(t-1)/2} \{x_{2k}, y_{2k}\} \text{ si } t \text{ est impair} \end{cases}$$

Il est clair que S est un α-dominant. Donc $\gamma_\alpha(K\,[2 \times t]) \leq 2\left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor$.
Soit S un γ_α-ensemble de $K\,[2 \times t]$, il est évident de voir que dans tout bloc de (2×2), il est nécessaire de prendre au moins deux sommets dans S. Le graphe $K\,[3 \times t]$ contient

au moins $\frac{t}{2}$ blocs de (2×2). Alors la cardinalité de S est au moins $\frac{2t}{2}$, ce qui donne $\gamma_\alpha(K[2 \times t]) = |S| \geqslant 2\left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor$. Par conséquent la double inégalité donne le résultat.

Cas 6. Si $\frac{2}{3} < \alpha \leq \frac{4}{5}$, alors pour tout ensemble α-dominant S, les sommets de degré 3 (respectivement 5) qui n'appartiennent pas à S ont au moins 3 (respectivement 2) sommets voisins dans S. Il est simple de voir que $\gamma_\alpha(K[2 \times 1]) = 1$. On suppose que $t \geq 2$. Soit $X = \{x_1, x_2 \dots, x_t\}$ les sommets du premier rangé, $Y = \{y_1, y_2 \dots, y_t\}$ les sommets du deuxième rangé. Soit l'ensemble S tel que :

$$S = \begin{cases} \bigcup\limits_{k=1}^{t/2} \{x_{2k}, y_{2k}\} \cup \{x_1\} \text{ si } t \text{ est pair} \\ \bigcup\limits_{k=1}^{(t-1)/2} \{x_{2k}, y_{2k}\} \cup \{x_1, x_t\} \text{ si } t \text{ est impair} \end{cases}$$

Il est clair que S est un α-dominant. Par conséquent $\gamma_\alpha(K[2 \times t]) \leq t + 1$.
On suppose que S est un γ_α-ensemble de $K[2 \times t]$. Soit x_0 le nombre de colonnes dans le graphe sans sommet dans S (colonne vide). Soit x_1 le nombre de colonnes dans le graphe ayant un sommet dans S. Soit x_2 le nombre de colonnes dans le graphe ayant deux sommets dans S (colonne pleine). Il est immédiat de voir que tout colonne vide est forcément voisine de deux colonnes pleines, alors $x_2 \leq x_0 - 1$. Il est clair qu'on a $|S| = 2x_2 + x_1$. Ainsi $t = x_2 + x_1 + x_0 \leq 2x_2 + x_1 - 1$. Donc $t + 1 \leq |S| = \gamma_\alpha(K[2 \times t])$. Par conséquent la double inégalité donne le résultat.

Cas 7. Si $\frac{4}{5} < \alpha \leq 1$, alors pour tout ensemble α-dominant S, les sommets de degré 3 (respectivement 5) qui n'appartiennent pas à S ont au moins 3 (respectivement 5) sommets voisins dans S. De plus $(s \times t - S)$ est un stable, cela implique que S est un transversal. On sait que $\alpha_0(G) = \gamma_\alpha(G)$ et par la Proposition 2.9, on obtient donc $\gamma_\alpha(K[2 \times t]) = \alpha_0(K[2 \times t]) = 2 \times t - \beta(K[2 \times t])$. Par le Théorème 2.17, on trouve que $\gamma_\alpha(K[2 \times t]) = 2 \times t - \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{3t}{2} \right\rfloor$. $\square$

Théorème 3.4. *Si $G = K[3 \times t]$ un graphe du Roi, alors*

$$\gamma_\alpha(K[3 \times t]) = \begin{cases} \left\lceil \frac{t}{3} \right\rceil & si \;\; 0 < \alpha \leq \frac{1}{8} \\ \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor & si \; \frac{1}{8} < \alpha \leq \frac{1}{5} \\ \left\lceil \frac{2t}{3} \right\rceil & si \; \frac{1}{5} < \alpha \leq \frac{1}{4} \\ t & si \; \frac{1}{4} < \alpha \leq \frac{3}{5} \\ \left\lfloor \frac{3t}{2} \right\rfloor & si \; \frac{3}{5} < \alpha \leq \frac{2}{3} \\ \left\lfloor \frac{3t+2}{2} \right\rfloor & si \; \frac{2}{3} < \alpha \leq \frac{3}{4} \\ t + 2\left\lceil \frac{t}{3} \right\rceil & si \; \frac{3}{4} < \alpha \leq \frac{4}{5} \\ \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil + 3\left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor & si \; \frac{4}{5} < \alpha \leq 1 \end{cases} .$$

Preuve. Cas 1. Si $0 < \alpha \leq \frac{1}{8}$, alors d'après le premier cas du Théorème 3.2 .On trouve $\gamma_\alpha(K[3 \times t]) = \gamma(K[3 \times t]) = \left\lceil \frac{t}{3} \right\rceil$.

Cas 2. Si $\frac{1}{8} < \alpha \leq \frac{1}{5}$, alors pour tout ensemble α-dominant S. Les sommets de degré 3 (respectivement 5 et 8) qui n'appartiennent pas à S ont au moins un sommet (respectivement, un sommet, deux sommets) voisins dans S. Il est simple de voir que $\gamma_\alpha(K[3 \times 1]) = 1$. On suppose que $t \geq 2$. Soit $X = \{x_1, x_2, ..., x_t\}$ les sommets du premier rangé, $Y = \{y_1, y_2, ..., y_t\}$ les sommets du deuxième rangé, $Z = \{z_1, z_2...., z_t\}$ les sommets du troisième rangé. Soit l'ensemble S tel que :

$$S = \bigcup_{k=1}^{\left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor} \{y_{2k}\}$$

il est clair que S est un α-dominant. Par conséquent $\gamma_\alpha(K[3 \times t]) \leq \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor$.
Soit S un $\gamma_\alpha(K[3 \times t])$-ensemble. Dans tout bloc de (3×2) il faut prendre au moins un sommet dans S, de plus il y a au moins $\frac{t}{2}$ blocs dans $K[3 \times t]$. Alors la cardinalité de S est au moins $\frac{t}{2}$. Donc $\gamma_\alpha(K[3 \times t]) = |S| \geq \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor$. Par conséquent la double inégalité donne le résultat.

Cas 3. Si $\frac{1}{5} < \alpha \leq \frac{1}{4}$, alors pour tout ensemble α-dominant S. Les sommets de degré 3 (respectivement 5, 8) qui n'appartiennent pas à S ont au moins un sommet (respectivement deux sommets, deux sommets) voisins dans S. Soit $X = \{x_1, x_2...., x_t\}$ les sommets du premier rangé, $Y = \{y_1, y_2, ..., y_t\}$ les sommets du deuxième rangé, $Z = \{z_1, z_2, ..., z_t\}$ les sommets du troisième rangé. Soit l'ensemble S tel que :

$$S = \begin{cases} \bigcup_{k=1}^{(t-3)/3} \{y_{3k}, y_{3k+1}\} \cup \{y_1, y_t\} \text{ si } t \equiv 0\,[3] \\ \bigcup_{k=1}^{(t-1)/3} \{y_{3k}, y_{3k+1}\} \cup \{y_1\} \text{ si } t \equiv 1\,[3] \\ \bigcup_{k=1}^{(t-5)/3} \{y_{3k}, y_{3k+1}\} \cup \{y_1, y_{t-2}, y_t\} \text{ si } t \equiv 2\,[3] \end{cases}$$

il est clair que S est un α-dominant. Donc $\gamma_\alpha(K\,[3 \times t]) \leq \lceil \frac{2t}{3} \rceil$.

Soit S un $\gamma_\alpha(K\,[3 \times t])$-ensemble, il est évident de voir que dans tout blocs (3×3), il est nécessaire de prendre au moins deux sommets dans S. Le graphe $K\,[3 \times t]$ contient au moins $\frac{t}{3}$ blocs de (3×3). Alors la cardinalité de S est au moins $\frac{2t}{3}$. Donc $|S| \geq \lceil \frac{2t}{3} \rceil$. D'où $\gamma_\alpha(K\,[3 \times t]) \geq \lceil \frac{2t}{3} \rceil$. Par conséquent la double inégalité donne le résultat.

Cas 4. Si $\frac{1}{4} < \alpha \leq \frac{1}{3}$, alors pour tout ensemble α-dominant S. Les sommets de degré 3 (respectivement 5, 8) qui n'appartiennent pas à S ont au moins un sommet (respectivement deux sommets, trois sommets) voisins dans S. Soit $X = \{x_1, x_2 ...., x_t\}$ les sommets du premier rangé, $Y = \{y_1, y_2, ..., y_t\}$ les sommets du deuxième rangé, $Z = \{z_1, z_2, ..., z_t\}$ les sommets du troisième rangé. Soit l'ensemble S tel que :

$$S = \begin{cases} \bigcup_{k=0}^{(t-3)/3} \{x_{3k+2}, y_{3k+2}, z_{3k+2}\} \text{ si } t \equiv 0\,[3] \\ \bigcup_{k=0}^{(t-4)/3} \{x_{3k+2}, y_{3k+2}, z_{3k+2}\} \cup \{y_t\} \text{ si } t \equiv 1\,[3] \\ \bigcup_{k=0}^{(t-5)/3} \{x_{3k+2}, y_{3k+2}, z_{3k+2}\} \cup \{y_{t-1}, y_t\} \text{ si } t \equiv 2\,[3] \end{cases}$$

il est clair que S est un α-dominant. Donc $\gamma_\alpha(K\,[3 \times t]) \leq t$.

Soit S un $\gamma_\alpha(K\,[3 \times t])$-ensemble, il est évident de voir que dans tout bloc (3×3), il est nécessaire de prendre au moins 3 sommets dans S, sinon on obtient un sommet de degré 5 en dehors de S qui n'aura pas 2 voisins dans S. Le graphe $K\,[3 \times t]$ contient au moins $\frac{t}{3}$ blocs de (3×3). Alors la cardinalité de S est au moins $\frac{3t}{3}$. Donc $\gamma_\alpha(K\,[3 \times t]) = |S| \geq t$, Par conséquent la double inégalité donne le résultat.

Cas 5. Si $\frac{1}{3} < \alpha \leq \frac{3}{8}$, alors pour tout ensemble α-dominant S. Les sommets de degré 3 (respectivement 5, 8) qui n'appartiennent pas à S ont au moins 2 (respectivement 2, 3) sommets voisins dans S. On fait le même raisonnement que celui de la preuve de la Proposition 2.12.

Cas 6. Si $\frac{3}{8} < \alpha \leq \frac{2}{5}$, alors pour tout ensemble α-dominant S. Les sommets de degré 3 (respectivement 5, 8) qui n'appartiennent pas à S ont au moins 2 (respectivement 2, 4) sommets voisins dans S. On fait le même raisonnement que celui de la preuve de la Proposition 2.12.

Cas 7. Si $\frac{2}{5} < \alpha \leq \frac{1}{2}$, alors pour tout ensemble α-dominant S. Les sommets de degré 3 (respectivement 5, 8) qui n'appartiennent pas à S ont au moins 2 (respectivement 3, 4) sommets voisins dans S. On fait le même raisonnement que celui de la preuve de la Proposition 2.12.

Cas 8. Si $\frac{1}{2} < \alpha \leq \frac{3}{5}$, alors pour tout ensemble α-dominant S. Les sommets de degré 3 (respectivement 5, 8) qui n'appartiennent pas à S ont au moins 2 (respectivement 3, 5) sommets voisins dans S. On fait le même raisonnement que celui de la preuve de la Proposition 2.12.

Cas 9. Si $\frac{3}{5} < \alpha \leq \frac{5}{8}$, alors pour tout ensemble α-dominant S. Les sommets de degré 3 (respectivement 5, 8) qui n'appartiennent pas à S ont au moins 2 (respectivement 4, 5) sommets voisins dans S. Il est simple de voir que $\gamma_\alpha(K[3\times 1]) = 1$. De plus $\gamma_\alpha(K[3\times 2]) = 2$. Enfin $\gamma_\alpha(K[3\times 3]) = 4$. On suppose que $t \geq 4$. Soit $X = \{x_1, x_2, ..., x_t\}$ les sommets du premier rangé, $Y = \{y_1, y_2, ..., y_t\}$ les sommets du deuxième rangé, $Z = \{z_1, z_2, ..., z_t\}$ les sommets du troisième rangé. Soit l'ensemble S tel que :

$$S = \begin{cases} \bigcup\limits_{k=1}^{(t-2)/2} \{x_{2k+1}, y_{2k+1}, z_{2k+1}\} \cup \{y_1, y_2, y_t\} \text{ si } t \text{ est pair} \\ \bigcup\limits_{k=1}^{(t-3)/2} \{x_{2k+1}, y_{2k+1}, z_{2k+1}\} \cup \{y_1, y_2, y_{t-1}, y_t\} \text{ si } t \text{ est impair} \end{cases}$$

il est clair que S est un α-dominant. Donc $\gamma_\alpha(K[3\times t]) \leq \lfloor \frac{3t}{2} \rfloor$.
Soit S un $\gamma_\alpha(K[3\times t])$-ensemble. Dans tout bloc de (3×2) il faut prendre au moins 3 sommets dans S. De plus il y a au moins $\frac{t}{2}$ blocs de (3×2) dans $K[3\times t]$. Alors la cardinalité de S est au moins $\frac{3t}{2}$. Donc $\gamma_\alpha(K[3\times t]) = |S| \geq \frac{3}{2}t \geq \lfloor \frac{3t}{2} \rfloor$. Par conséquent la double inégalité donne le résultat.

Cas 10. Si $\frac{5}{8} < \alpha \leq \frac{2}{3}$, alors pour tout ensemble α-dominant S. Les sommets de degré 3 (respectivement 5, 8) qui n'appartiennent pas à S ont au moins 2 (respectivement 4, 6) sommets voisins dans S. Le même raisonnement que celui fait précédemment abouti au résultat.

Cas 11. Si $\frac{2}{3} < \alpha \leq \frac{3}{4}$, alors pour tout ensemble α-dominant S. Les sommets de degré 3 (respectivement 5, 8) qui n'appartiennent pas à S ont au moins 3 (respectivement 4, 6) sommets voisins dans S. Il est simple de voir que $\gamma_\alpha(K\,[3 \times 1]) = 1$. On suppose que $t \geq 2$. Soit $X = \{x_1, x_{2,\ldots,} x_t\}$ les sommets du premier rangé, $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_t\}$ les sommets du deuxième rangé, $Z = \{z_1, z_2 \ldots, z_t\}$ les sommets du troisième rangé. Soit l'ensemble S tel que :

$$S = \begin{cases} \bigcup\limits_{k=1}^{t/2} \{x_{2k}, y_{2k}, z_{2k}\} \cup \{y_1\} \text{ si } t \text{ est pair} \\ \bigcup\limits_{k=1}^{(t-1)/2} \{x_{2k}, y_{2k}, z_{2k}\} \cup \{y_1, y_t\} \text{ si } t \text{ est impair} \end{cases}$$

il est clair que S est un α-dominant. Donc $\gamma_\alpha(K\,[3 \times t]) \leq \left\lfloor \frac{3t+2}{2} \right\rfloor$.

Soit S un $\gamma_\alpha(K\,[3 \times t])$-ensemble, il est évident de voir que dans tout bloc 3×3, il est nécessaire de prendre au moins 3 sommets dans S, sinon on obtient un sommet de degré 5 en dehors de S qui n'aura pas 2 voisins dans S. Le graphe $K\,[3 \times t]$ contient au moins $\frac{t}{3}$ blocs de (3×3). Alors la cardinalité de S est au moins $\frac{3t}{3}$. Donc $|S| \geq \frac{3}{2}t$, mais $\frac{3}{2}t$ n'est pas suffisant pour α-dominer tous les sommets alors $|S| \geq \frac{3}{2}t + 1 \geq \left\lfloor \frac{3t+2}{2} \right\rfloor$. Donc $\gamma_\alpha(K\,[3 \times t]) \geq \left\lfloor \frac{3t+2}{2} \right\rfloor$. Par conséquent la double inégalité donne le résultat.

Cas 12. Si $\frac{3}{4} < \alpha \leq \frac{4}{5}$, alors pour tout ensemble α-dominant S. Les sommets de degré 3 (respectivement 5, 8) qui n'appartiennent pas à S ont au moins 3 (respectivement, 4 et 7) sommets voisins dans S. Soit $X = \{x_1, x_{2,\ldots,} x_t\}$ les sommets du premier rangé, $Y = \{y_1, y_{2,\ldots,} y_t\}$ les sommets du deuxième rangé, $Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_t\}$ les sommets du troisième rangé. Soit l'ensemble S tel que :

$$S = \begin{cases} \bigcup\limits_{k=0}^{(t-3)/3} \{x_{3k+2}, y_{3k+2}, z_{3k+2}\} \cup \bigcup\limits_{k=1}^{(t-3)/3} \{y_{3k}, y_{3k+1}\} \cup \{y_1, y_t\} \text{ si } t \equiv 0\,[3] \\ \bigcup\limits_{k=0}^{(t-4)/3} \{x_{3k+2}, y_{3k+2}, z_{3k+2}\} \cup \bigcup\limits_{k=1}^{(t-4)/3} \{y_{3k}, y_{3k+1}\} \cup \{x_t, y_1, y_{t-1}, y_t, z_t\} \text{ si } t \equiv 1\,[3] \\ \bigcup\limits_{k=0}^{(t-2)/3} \{x_{3k+2}, y_{3k+2}, z_{3k+2}\} \cup \bigcup\limits_{k=1}^{(t-2)/3} \{y_{3k}, y_{3k+1}\} \cup \{y_1\} \text{ si } t \equiv 2\,[3] \end{cases}$$

il est clair que S est un α-dominant. Donc $\gamma_\alpha(K\,[3 \times t]) \leq t + 2\left\lceil \frac{t}{3} \right\rceil$.

Soit S un $\gamma_\alpha(K\,[3 \times t])$-ensemble. Dans tout bloc de (3×3) il faut prendre au moins 5 sommets dans S, sinon on obtient un sommet de degré 3 (respectivement 5) en dehors de S qui n'aura pas 3 (respectivement 4) voisins dans S. De plus il y a au moins $\frac{t}{3}$ blocs dans $K\,[3 \times t]$. Alors la cardinalité de S est au moins $\frac{5t}{3}$. Donc $\gamma_\alpha(K\,[3 \times t]) = |S| \geq t + 2\left\lceil \frac{t}{3} \right\rceil$. Par conséquent la double inégalité donne le résultat.

Cas 13. Si $\frac{4}{5} < \alpha \leq \frac{7}{8}$, alors pour tout ensemble α-dominant S. Les sommets de degré 3 (respectivement 5, 8) qui n'appartiennent pas à S ont au moins 3 (respectivement 5, 7) sommets voisins dans S. Soit $X = \{x_1, x_2 ..., x_t\}$ les sommets du premier rangé, $Y = \{y_1, y_2 ..., y_t\}$ les sommets du deuxième rangé, $Z = \{z_1, z_2 ..., z_t\}$ les sommets du troisième rangé. Soit l'ensemble S tel que :

$$S = \begin{cases} \bigcup\limits_{k=1}^{t/2} \{x_{2k}, y_{2k}, z_{2k}\} \cup \bigcup\limits_{k=0}^{(t-2)/2} \{y_{2k+1}\} \text{ si } t \text{ est pair} \\ \bigcup\limits_{k=1}^{(t-1)/2} \{x_{2k}, y_{2k}, z_{2k}\} \cup \bigcup\limits_{k=0}^{(t-1)/2} \{y_{2k+1}\} \text{ si } t \text{ est impair} \end{cases}$$

il est clair que S est un α-dominant. Donc $\gamma_\alpha(K[2 \times t]) \leq \lceil \frac{t}{2} \rceil + 3 \lfloor \frac{t}{2} \rfloor$.
Soit S un $\gamma_\alpha(K[3 \times t])$-ensemble. Dans tout bloc de (3×4) il faut prendre au moins 8 sommets dans S. De plus il y a au moins $\frac{t}{4}$ blocs dans $K[3 \times t]$. Alors la cardinalité de S est au moins $\frac{8t}{4} = 2t$. Donc $\gamma_\alpha(K[3 \times t]) = |S| \geq 2t \geq \lceil \frac{t}{2} \rceil + 3 \lfloor \frac{t}{2} \rfloor$. Par conséquent la double inégalité donne le résultat.

Cas 14. Si $\frac{7}{8} < \alpha \leq 1$, alors pour tout ensemble α-dominant S. Les sommets de degré 3 (respectivement 5, 8) qui n'appartiennent pas à S ont au moins 3 (respectivement 5, 8) sommets voisins dans S. D'après le cas dernier de la Proposition 3.2. On obtient le résultat. $\square$

pour tout s et t, on donne dans ce qui suit les bornes de $\gamma_\alpha(K[s \times t])$ pour $\frac{5}{8} < \alpha \leq \frac{7}{8}$.

Proposition 3.5. *Soit G le graphe du Roi $K[s \times t]$.*
Si $\frac{5}{8} < \alpha \leq \frac{2}{3}$, alors

$$\begin{aligned} \gamma_\alpha(G) &\leq \min\{L(s \times t), L(t \times s)\} \\ \text{où } L(s \times t) &= \begin{cases} \lfloor \frac{s}{3} \rfloor + st/2 & \text{si } t \text{ est pair} \\ 2\lfloor \frac{s}{3} \rfloor + s(t-1)/2 & \text{si } t \text{ est impair} \end{cases} \end{aligned}.$$

Si $\frac{2}{3} < \alpha \leq \frac{3}{4}$, alors

$$\begin{aligned} \gamma_\alpha(G) &\leq \min\{L(s \times t), L(t \times s)\} \\ \text{où } L(s \times t) &= \begin{cases} \lceil \frac{s}{3} \rceil + st/2 & \text{si } t \text{ est pair} \\ 2\lceil \frac{s}{3} \rceil + s(t-1)/2 & \text{si } t \text{ est impair} \end{cases} \end{aligned}.$$

Si $\frac{3}{4} < \alpha \leq \frac{4}{5}$, *alors*

$$\begin{array}{rcl} \gamma_\alpha(G) & \leq & \min\{L(s \times t), L(t \times s)\} \\ \text{où } L(s \times t) & = & \begin{cases} t - 1/2 \left\lfloor \frac{s}{3} \right\rfloor + st/2 + \left\lceil \frac{s}{3} \right\rceil & \text{si } t \text{ est pair} \\ t - 3/2 \left\lfloor \frac{s}{3} \right\rfloor + s(t-1)/2 + 2 \left\lceil \frac{s}{3} \right\rceil & \text{si } t \text{ est impair} \end{cases} . \end{array}$$

Si $\frac{4}{5} < \alpha \leq \frac{7}{8}$, *alors*

$$\begin{array}{rcl} \gamma_\alpha(G) & \leq & \min\{L(s \times t), L(t \times s)\} \\ \text{où } L(s \times t) & = & \begin{cases} t - 1/2 \left\lceil \frac{s}{3} \right\rceil + st/2 + \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor & \text{si } t \text{ est pair} \\ t - 3/2 \left\lceil \frac{s}{3} \right\rceil + s(t-1)/2 + 2 \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor & \text{si } t \text{ est impair} \end{cases} . \end{array}$$

Preuve. Pour prouver ces bornes, il suffit de trouver un ensemble des sommets S qu'il soit un α-dominant. En effet,

- **Si** $\frac{5}{8} < \alpha \leq \frac{2}{3}$. Les sommets de degré 3 (respectivement, 5 et 8) qui n'appartiennent pas à S ont au moins 2 (respectivement, 4 et 6) sommets voisins dans S. Ainsi

- *Si* t est pair, on sélectionne dans S, $\left\lfloor \frac{s}{3} \right\rfloor$ sommets dans la première colonne et s sommets dans toute colonne paire.

- *Si* t est impair, on sélectionne dans S, $\left\lfloor \frac{s}{3} \right\rfloor$ sommets dans la première colonne et dans la dernière colonne, et s sommets dans toute colonne paire.

Nous pouvons facilement voir que S est un ensemble α-dominant. On déduit du raisonnement précédent que $L(s \times t)$ est la cardinalité d'un ensemble α-dominant. Aussi d'une manière similaire on obtient : $L(t \times s)$ est la cardinalité d'un ensemble α-dominant. Par conséquent $\gamma_\alpha(G) \leq |S| = \min\{L(s \times t), L(t \times s)\}$.

- **Si** $\frac{2}{3} < \alpha \leq \frac{3}{4}$. Les sommets de degré 3 (respectivement, 5 et 8) qui n'appartiennent pas à S ont au moins 3 (respectivement, 4 et 6) sommets voisins dans S. Ainsi

- *Si* t est pair, on sélectionne dans S, $\left\lceil \frac{s}{3} \right\rceil$ sommets dans la première colonne et s sommets dans toute colonne paire.

- *Si* t est impair, on sélectionne dans S, $\lceil \frac{s}{3} \rceil$sommets dans la première colonne et dans dernière colonne, et s sommets de toute colonne paire.

Nous pouvons facilement voir que S est un ensemble α-dominant. On déduit du raisonnement précédent que $L(s \times t)$ est la cardinalité d'un ensemble α-dominant. Aussi d'une manière similaire on obtient : $L(t \times s)$ est la cardinalité d'un ensemble α-dominant. Par conséquent $\gamma_\alpha(G) \leq |S| = \min\{L(s \times t), L(t \times s)\}$.

- **Si** $\frac{3}{4} < \alpha \leq \frac{4}{5}$. Les sommets de degré 3 (respectivement, 5 et 8) qui n'appartiennent pas à S ont au moins 3 (respectivement, 4 et 6) sommets voisins dans S. Ainsi

- *Si* t est pair, on sélectionne dans S, $\lceil \frac{s}{3} \rceil$ sommets dans la première colonne, et s sommets dans toute colonne paire et $\lfloor \frac{s}{3} \rfloor$ sommets dans toute colonne impaire.

- *Si* t est impair, on sélectionne dans S, $\lceil \frac{s}{3} \rceil$ sommets dans la première colonne et dans la dernière colonne, et s sommets dans toute colonne paire et $\lfloor \frac{s}{3} \rfloor$ sommets dans toute colonne impaire.

Nous pouvons facilement voir que S est un ensemble α-dominant. On déduit du raisonnement précédent que $L(s \times t)$ est la cardinalité d'un ensemble α-dominant. Aussi d'une manière similaire on obtient : $L(t \times s)$ est la cardinalité d'un ensemble α-dominant. Par conséquent $\gamma_\alpha(G) \leq |S| = \min\{L(s \times t), L(t \times s)\}$.

- **Si** $\frac{4}{5} < \alpha \leq \frac{7}{8}$. Les sommets de degré 3 (respectivement, 5 et 8) qui n'appartiennent pas à S ont au moins 3 (respectivement, 5 et 6) sommets voisins dans S. Ainsi

- *Si* t est pair, on sélectionne dans S, $\lfloor \frac{s}{2} \rfloor$ sommets dans la première colonne, et s sommets dans toute colonne paire et $\lceil \frac{s}{3} \rceil$ sommets dans toute colonne impaire.

- *Si* t est impair, on sélectionne dans S, $\lfloor \frac{s}{2} \rfloor$ sommets dans la première colonne et dans la dernière colonne, et s sommets dans toute colonne paire et $\lceil \frac{s}{3} \rceil$ sommets dans toute colonne impaire.

Nous pouvons facilement voir que S est un ensemble α-dominant. On déduit du raisonnement précédent que $L(s \times t)$ est la cardinalité d'un ensemble α-dominant. Aussi d'une manière similaire on obtient : $L(t \times s)$ est la cardinalité d'un ensemble α-dominant. Par conséquent $\gamma_\alpha(G) \leq |S| = \min\{L(s \times t), L(t \times s)\}$. $\square$

Problème ouvert: Déterminer des bornes ou des valeurs exactes pour $\gamma_\alpha(K[s \times t])$ quand $\frac{1}{5} < \alpha \leq \frac{5}{8}$.

Dans le théorème suivant on a essayé de déterminer une borne supérieure du nombre de Woolbright de graphe $K[4 \times t]$. Notre résultat est plus précis que celui donné par Danbar et al [1] dans la Proposition 2.14.

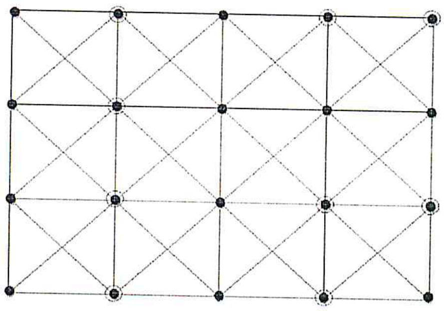


Figure 3.1. le bloc (4×5) pour construire un ensemble de α-dominant de $K[4 \times t]$

Théorème 3.6. *Si $G = K[4 \times t]$ est le graphe du Roi et $t \geq 9$, alors*

$$\gamma_{\frac{1}{2}}(K[4 \times t]) \leq \begin{cases} 9\left\lfloor \frac{t}{5} \right\rfloor - 1 & si\ t \equiv 0\,[5] \\ 9\left\lfloor \frac{t}{5} \right\rfloor + 1 & si\ t \equiv 1\,[5] \\ 9\left\lfloor \frac{t}{5} \right\rfloor + 3 & si\ t \equiv 2\,[5] \\ 9\left\lfloor \frac{t}{5} \right\rfloor + 4 & si\ t \equiv 3\,[5] \\ 9\left\lfloor \frac{t}{5} \right\rfloor + 7 & si\ t \equiv 4\,[5] \end{cases} \leq \frac{9}{5}t - \frac{1}{5}$$

Preuve. Pour voir que c'est une borne supérieure. Soit S un $\frac{1}{2}$-dominant. On considère le bloc (4×5) de la figure 3.1. La technique utilisée consiste à répéter ce bloc au long de toutes les colonnes t et fait des décalages des sommets dans le dernier bloc. Pour cela, on distingue la cardinalité de S selon les cas suivants :

si $t \equiv 0\,[5]$ on décale un sommet de colonne t qui appartient à S vers la colonne $t-1$ à la deuxième rangée, puis on enlève l'autre sommet de colonne t qui appartient à S. Donc S est un $\frac{1}{2}$-dominant. Donc $|S| = 9\left\lfloor \frac{t}{5} \right\rfloor - 1$.

si $t \equiv 1\,[5]$ on décale le sommet dernier de colonne $t-2$ vers la colonne $t-1$ dans la quatrième rangée, alors on domine tous les sommets sauf les sommets de la colonne t, puis il faut ajouter dans S, le sommet qui n'appartient pas à S dans la colonne $t-1$. Ainsi S est un $\frac{1}{2}$-dominant. Ce qui implique que $|S| = 9\left\lfloor \frac{t}{5} \right\rfloor + 1$.

si $t \equiv 2\,[5]$ on décale les sommets de colonne t qui appartient à S vers la colonne $t-1$sans préciser la position; puis, on décale un sommet de colonne $t-2$ qui appartient à S vers le sommet qui n'appartient pas à S dans la colonne $t-3$. À la fin, on enlève le sommet qui reste dans S dans la colonne $t-2$. Ainsi S est un $\frac{1}{2}$-dominant. En conséquence $|S| = 9\left\lfloor \frac{t}{5} \right\rfloor + 3$.

si $t \equiv 3\,[5]$ Lorsque ce processus est répété pour chaque colonne, on obtient que S est un $\frac{1}{2}$-dominant. Donc $|S| = 9\left\lfloor \frac{t}{5} \right\rfloor + 4$.

si $t \equiv 4\,[5]$ on décale les sommets de colonne $t-2$ qui appartient à S vers la colonne $t-1$ sans préciser la position. puis, on décale les 3 sommets de colonne t qui appartiennent à S, vers deux colonnes, la première est $t-3$ qui prend 2 sommets, l'un est positionné en deuxième rangée et l'autre en quatrième rangée, et placé le troisième sommet dans la colonne $t-2$ en seconde rangée. Ainsi S est un $\frac{1}{2}$-dominant. En conséquence $|S| = 9\left\lfloor \frac{t}{5} \right\rfloor + 7$. □

3.3 Etude de la α-domination dans les arbres

Proposition 3.7. *Soient $\alpha \in\,]0,1]$ et T un arbre d'ordre $n \equiv 0\,[3]$. Si $V(T)$ admet une partition disjointes en $\frac{n}{3}$ ensembles $V(T_i); i = 1, \ldots, \frac{n}{3}$ où $T_i = P_3 = \{u_i, x_i, v_i\}$ tel que $d_T(u_i) \leq \left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor$ et $d_T(v_i) \leq \left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor$ pour tout $i = 1, \ldots, \frac{n}{3}$, alors $\gamma_\alpha(T) = \frac{n}{3}$.*

Preuve. On procède par induction sur l'ordre n pour montrer ce résultat. Si $n = 3$, alors le résultat est immédiat. Supposons que le résultat est vrai pour tout arbre T' d'ordre $n' \equiv 0\,[3]$ et $3 < n' < n$ vérifiant la propriété. Montrons que le résultat est vrai pour les arbres d'ordre n avec $n \equiv 0\,[3]$ et possédant une partition disjointes en $\frac{n}{3}$ ensembles $V(T_i)$; $i = 1, \ldots, \frac{n}{3}$ où $T_i = P_3 = \{u_i, x_i, v_i\}$ tel que $d_T(u_i) \leq \left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor$ et $d_T(v_i) \leq \left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor$ pour tout $i = 1, \ldots, \frac{n}{3}$. Il est clair que T possède un $P_3 = \{u_k, x_k, v_k\}$ parmi les P_3 de la partition tel que $T' = T - \{u_k, x_k, v_k\}$ soit un arbre. Il est simple de vérifier que la partition de $V(T')$ déduite de celle de T satisfait les hypothèses du théorème puisque $d_{T'}(x) \leq d_T(x)$. Par induction on a $\gamma_\alpha(T') = \frac{n'}{3}$, Comme un α-dominant est un dominant $\gamma_\alpha(T')+1 \leq \gamma_\alpha(T) \leq \gamma_\alpha(T') + 1$, alors on a $\gamma_\alpha(T) = \gamma_\alpha(T') + 1$, donc $\gamma_\alpha(T) = \frac{n'}{3} + 1 = \frac{n-3}{3} + 1 = \frac{n}{3}$. □

Remarque 3.8. *Si T est un arbre tel que $V(T) = L(T) \cup S(T)$ et $l = s(i-1)$ avec $i \geq 2$, alors $\gamma_\alpha(T) = \frac{n}{i}$. Car $\alpha_0(T) = s \geq \gamma_\alpha(T) \geq \gamma(T) = s = \frac{s(i-1)+s}{i} = \frac{n}{i}$.*

Soit T un arbre avec $n = n(T)$ l'ordre de T et soit $n_1 = n_1(T)$ le nombre des sommets pendant de T. L'ensemble des sommets pendants dans T est noté par $L(T)$.

Théorème 3.9. *Si T un arbre d'ordre au moins trois et $(\Delta(T)-1)/\Delta(T) < \alpha \leq 1$, alors $\alpha_0(T) = \gamma_\alpha(T) \geq (n(T) + 1 - n_1(T))/2$.*

Preuve. On utilise l'induction sur l'ordre n de T. Le résultat est vrai pour un arbre d'ordre 3. Soit T un arbre d'ordre $n > 3$ et supposons que $n_1(T') \geq n(T') + 1 - 2\gamma_\alpha(T')$ pour tout arbre T' d'ordre $3 < n(T') \leq n-1$ et $(\Delta(T')-1)/\Delta(T') < \alpha \leq 1$. Soit D un $\gamma_\alpha(T)$-ensemble qui ne contient aucune sommet pendant de T. Soit $P = (v_0, v_1, ..., v_k)$ la plus longue chaîne de T et soit $T' = T - \{v_0\}$. Sans perte de généralité on peut supposer que P est choisi de telle sorte que $d_T(v_1)$ est plus grand possible. Nous considérons deux cas: $d_T(v_1) > 2$ et $d_T(v_1) = 2$.

Cas 1. $d_T(v_1) > 2$, si $d_T(v_1) \neq \Delta(T)$, alors $\Delta(T') = \Delta(T)$, donc $(\Delta(T)-1)/\Delta(T) < \alpha \leq 1$, et si $d_T(v_1) = \Delta(T)$, alors $\Delta(T') = \Delta(T)-1$, donc $(\Delta(T)-2)/(\Delta(T)-1) < \alpha \leq 1$, ainsi $(\Delta(T)-1)/\Delta(T) < \alpha \leq 1$, donc par induction on a $n_1(T') \geq n(T') + 1 - 2\gamma_\alpha(T')$ et comme $n_1(T') = n_1(T) - 1$, $\gamma_\alpha(T') = \gamma_\alpha(T)$ et $n(T') = n(T) - 1$. On obtient que $n_1(T) \geq n(T) + 1 - 2\gamma_\alpha(T)$.

Cas 2. $d_T(v_1) = 2$, si $d_T(v_1) \neq \Delta(T) \neq 2$, alors $\Delta(T') = \Delta(T)$, donc $(\Delta(T) - 1)/\Delta(T) < \alpha \leq 1$, et si $d_T(v_1) = \Delta(T) = 2$, alors $\Delta(T') = \Delta(T) - 1$, donc $(\Delta(T) - 2)/(\Delta(T)-1) < \alpha \leq 1$, ainsi $(\Delta(T)-1)/\Delta(T) < \alpha \leq 1$. On considère deux sous-cas.

Sous-cas 2.1. si $\gamma_\alpha(T') < \gamma_\alpha(T)$, alors il est clair que $\gamma_\alpha(T') = \gamma_\alpha(T) - 1$. Par induction on a, $n_1(T') \geq n(T') + 1 - 2\gamma_\alpha(T')$, par conséquent $n_1(T) \geq n(T) + 1 - 2\gamma_\alpha(T)$ car $n_1(T') = n_1(T)$ et $n(T') = n(T) - 1$.

Sous-cas 2.2. si $\gamma_\alpha(T') = \gamma_\alpha(T)$, alors $v_2 \notin N_T(L(T))$ (sinon $D - \{v_1\}$ serait un ensemble α-dominant de T' et $\gamma_\alpha(T') = \gamma_\alpha(T - v_0) < \gamma_\alpha(T)$) et donc $k \geq 3$, soit $T - v_1v_2$ et on note par T_1(respectivement T_2) l'arbre qui contient v_1 (respectivement v_2). Si $n(T_2) = 2$, alors on a $n_2(T_2) \geq n(T_2) + 1 - 2\gamma_\alpha(T_2)$. Supposons donc que $n(T_2) \geq 3$.

Soit L_1 l'ensemble $L(T_1) \cap L(T)$ et soit D_1 un $\gamma_\alpha(T_1)$-ensemble. Puisque $n(T_1) = 2$ et $v_0 \in L_1$, $v_1 \in D_1$, alors $|L_1| = |D_1|$. Il est simple de voir que $\gamma_\alpha(T) = \gamma_\alpha(T_1) + \gamma_\alpha(T_2) = \gamma_\alpha(T_2) + |D_1|$ et $n(T) = n(T_2) + |L_1| + |D_1|$. Si v_2 est un sommet pendant de T_2 alors on a $n_1(T) = n_1(T_2) + |L_1| - 1$, sinon $n_1(T) = n_1(T_2) + |L_1| \geq n_1(T_2) + |L_1| - 1$.
Puisque $n(T_2) \geq 3$, on a par induction $n_1(T_2) \geq n(T_2) + 1 - 2\gamma_\alpha(T_2)$. Dans les deux cas, pour $n(T_2) = 2$ et pour $n(T_2) \geq 3$ on obtient

$$n(T_2) + 1 - 2\gamma_\alpha(T_2) \leq n_1(T_2) \leq n_1(T) - |L_1| + 1$$

Ainsi

$$n(T) - |L_1| - |D_1| + 1 - 2(\gamma_\alpha(T) - |D_1|) \leq n_1(T) - |L_1| + 1$$

et donc $n_1(T) \geq n(T) + |D_1| - 2\gamma_\alpha(T) \geq n(T) + 1 - 2\gamma_\alpha(T)$, ce qui implique que $\gamma_\alpha(T) \geq (n(T) + 1 - n_1(T))/2$. □

Le résultat du Corollaire 2.21 est valable pour tous les valeurs de α. Notons que le résultat du Théorème 3.9 est meilleur que celui du Corollaire 2.21 dans le cas où $(\Delta(T) - 1)/\Delta(T) < \alpha \leq 1$. La borne du Théorème 3.9 est presque atteinte pour le cas des chaînes.

3.4 Le nombre de α-domination pour certains types de graphes

3.4.1 Le graphe roue

Définition 3.10. *Le graphe roue noté W_n est un graphe d'ordre $n \geq 4$ formé en ajoutant un sommet "centre" relié à tous les sommets d'un cycle C_{n-1}.*

Le nombre des arêtes de W_n est $2(n-1)$. Le degré maximum $\Delta(W_n) = n - 1$. Le degré minimum $\delta(W_n) = 3$, on a $n - 1$ sommets de degré 3 et un sommet de degré $n - 1$.

Théorème 3.11. *Si W_n est un graphe roue à n sommets avec $n \geq 4$, alors*

$$\gamma_\alpha(W_n) = \begin{cases} 1 & si\ 0 < \alpha \leq \frac{1}{3} \\ \lceil \frac{n+2}{3} \rceil & si\ \frac{1}{3} < \alpha \leq \frac{2}{3},\ si\ n \neq 5 \\ 2\ si\ \frac{1}{3} < \alpha \leq \frac{2}{4}\ et\ n = 5 \\ 3\ \ si\ \frac{2}{4} < \alpha \leq \frac{2}{3}\ et\ n = 5 \\ \lceil \frac{n+1}{2} \rceil & si\ \frac{2}{3} < \alpha \leq 1 \end{cases}.$$

Preuve. Si $0 < \alpha \leq \frac{1}{3}$. Soit S un γ_α-ensemble de W_n. Il est simple de voir que $\gamma_\alpha(W_n) = 1$, car dans ce cas les sommets qui n'appartiennent pas à S ont au moins un voisin dans S (à l'exception de sommet v), le sommet v sommet centre de W_n est un ensemble α-dominant de W_n, ceci implique que $1 \leq \gamma_\alpha(W_n) \leq 1$.

Si $\frac{1}{3} < \alpha \leq \frac{2}{3}$. Soit S un γ_α-ensemble de W_n. Dans ce cas pour tout sommet $x \notin S$, si x est un sommet de degré 3, on a $\lceil \alpha d_G(x) \rceil = 2$, c'est-à-dire tout sommet de $V - S$ est adjacent à au moins deux voisins dans S, si x est le sommet v de degré $n-1$, on a $\lceil \alpha d_G(v) \rceil > \frac{n-1}{3}$, donc $\lceil \alpha d_G(v) \rceil \geq \frac{n-1}{3} + 1$. On peut supposer sans perte de généralité que $v \in S$. Sinon pour α-dominer v il faut au moins $\lfloor \frac{n+2}{3} \rfloor$ sommets dans S et pour α-dominer les sommets n'appartenant pas à S et de degré 3, il faut au moins $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ sommets dans S. Donc S contient au moins $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ sommets. Par contre si $v \in S$, on aura besoin de seulement $\lceil \frac{n-1}{3} \rceil + 1$ sommets dans S et $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil \geq \lceil \frac{n-1}{3} \rceil + 1$. D'où $\gamma_\alpha(W_n) = \lceil \frac{n-1}{3} \rceil + 1 = \lceil \frac{n+2}{3} \rceil$.

La figure 4.1 représente les cas où $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil = \lceil \frac{n-1}{3} \rceil + 1$.

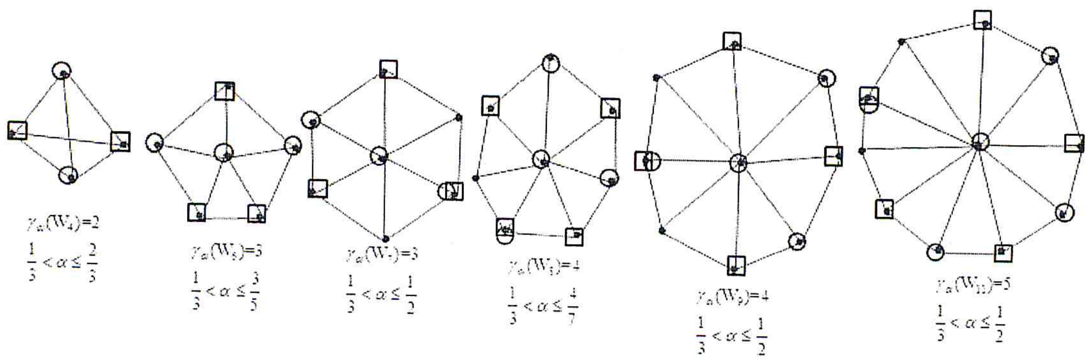


Figure 4.1.

Si $\frac{2}{3} < \alpha \leq 1$. Soit S un γ_α-ensemble de W_n. Dans ce cas pour tout sommet $x \notin S$, si x est un sommet de degré 3, on a $\lceil \alpha d_G(x) \rceil = 3$, c'est-à-dire tout sommet de $V - S$ est adjacent à au moins trois voisins dans S, si x est le sommet v de degré $n-1$, on a $\lceil \alpha d_G(v) \rceil > \frac{2(n-1)}{3}$, donc $\lceil \alpha d_G(v) \rceil \geq \frac{2(n-1)}{3} + 1$. On peut supposer sans perte de généralité que $v \in S$. Sinon pour α-dominer v il faut au moins $\lfloor \frac{2n+1}{3} \rfloor$ sommets dans S et pour α-dominer les sommets n'appartenant pas à S et de degré 3, il faut au moins $n-1$ sommets dans S. Donc S contient au moins $n-1$ sommets. Par contre si $v \in S$, on aura besoin de seulement $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 1$ sommets dans S et $n-1 \geq \lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 1$. Donc on déduit que $\gamma_\alpha(W_4) = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 1 = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$.

La figure 4.2 représente les cas où $n-1 = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 1$.

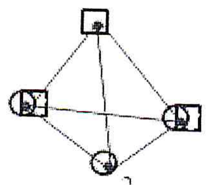


Figure 4.2.

□

3.4.2 Le graphe soleil

Définition 3.12. *Le graphe soleil noté S_n est un graphe à $2n$ sommets obtenu en attachant n arête pendante à un cycle C_n, avec $V(S_n) = \{v_1, v_2, ..., v_n\} \cup \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ et $E(S_n) = \{e_1, e_2, ..., e_n\} \cup \{s_1, s_2, ..., s_n\}$.*

Le nombre des arêtes de S_n est $2n$. Le degré maximum $\Delta(W_n) = 3$. Le degré minimum $\delta(W_n) = 1$, on a n sommets de degré 3 et n sommets de degré un.

Comme $\gamma(S_n) = \alpha_0(S_n) = n$ et $\gamma(G) \leq \gamma_\alpha(G) \leq \alpha_0(G)$ pour tout graphe G, alors on a le résultat suivant:

Théorème 3.13. *Si S_n est un graphe soleil, avec $0 < \alpha \leq 1$, alors $\gamma_\alpha(S_n) = n$.*

3.4.3 Le graphe éventail

Définition 3.14. *Un graphe éventail $F_{1,n}$ est défini comme le joint de K_1 avec une chaîne P_n, noté $K_1 \wedge P_n$, où K_1 est la clique à un sommet et P_n est une chaîne à n sommets, c-à-d*

$V(F_{1,n}) = \{v, v_1, v_2, ..., v_n\}$ *et* $E(F_{1,n}) = \{e_1, e_2, ..., e_n\} \cup \{s_1, s_2, ..., s_{n-1}\}$ *où* $e_i = (v, v_i)$ $i = 1, ..., n$ *et* $s_i = (v_i, v_{i+1})$; $i = 1, ..., n-1$.

Le nombre de sommets de $F_{1,n}$ est $n+1$. Le nombre des arêtes de $F_{1,n}$ est $2n-1$. Le degré maximum $\Delta(F_{1,n}) = n$. Le degré minimum $\delta(F_{1,n}) = 2$, on a un sommet de degré n, $n-2$ sommets de degré 3, et deux sommets de degré deux.

Théorème 3.15. *Si $F_{1,n}$ est un graphe éventail, avec $n \geq 2$, alors*

$$\gamma_\alpha(F_{1,n}) = \begin{cases} 1 & si\ 0 < \alpha \leq \frac{1}{3} \\ \left\lfloor \frac{n+3}{3} \right\rfloor & si\ \frac{1}{3} < \alpha \leq \frac{1}{2} \\ \left\lceil \frac{n+3}{3} \right\rceil & si\ \frac{1}{2} < \alpha \leq \frac{2}{3} \\ \left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor & si\ \frac{2}{3} < \alpha \leq 1 \end{cases}.$$

Preuve. Si $0 < \alpha \leq \frac{1}{3}$. Soit S un γ_α-ensemble de $F_{1,n}$. Il est simple de voir que $\gamma_\alpha(F_{1,n}) = 1$, car dans ce cas les sommets qui n'appartiennent pas à S ont au moins un voisin dans S (à l'exception de sommet v), le sommet v sommet centre de $F_{1,n}$ est un ensemble α-dominant de $F_{1,n}$, ceci implique que $1 \leq \gamma_\alpha(F_{1,n}) \leq 1$.

Si $\frac{1}{3} < \alpha \leq \frac{1}{2}$. Soit S un γ_α-ensemble de $F_{1,n}$. Pour tout sommet $x \notin S$, si x est un sommet de degré 2, 3, on a $\lceil \alpha d_G(x) \rceil = 1$, $\lceil \alpha d_G(x) \rceil = 2$, respectivement. Si x est le sommet v de degré n, on a $\lceil \alpha d_G(v) \rceil > \frac{n}{3}$, donc $\lceil \alpha d_G(v) \rceil \geq \frac{n}{3} + 1$. On peut supposer sans perte de généralité que $v \in S$. Sinon pour α-dominer v il faut au moins $\left\lfloor \frac{n+3}{3} \right\rfloor$ sommets dans S et pour α-dominer les sommets n'appartenant pas à S et de degré 2 et 3, il faut au moins $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ sommets dans S. Donc S contient au moins $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ sommets. Par contre si $v \in S$, on aura besoin de seulement $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 1$ sommets dans S et $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 1$. D'où $\gamma_\alpha(F_{1,n}) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{n+3}{3} \right\rfloor$.

La figure 4.3 représente les cas où $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 1$.

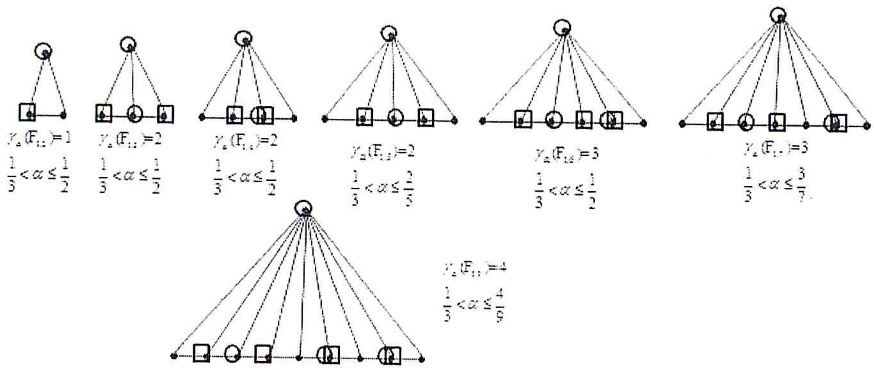


Figure 4.3.

Si $\frac{1}{2} < \alpha \leq \frac{2}{3}$. Soit S un γ_α-ensemble de $F_{1,n}$. Pour tout sommet $x \notin S$, si x est un sommet de degré 2, 3, on a $\lceil \alpha d_G(x) \rceil = 2$, $\lceil \alpha d_G(x) \rceil = 2$, respectivement. Si x est le sommet v de degré n, on a $\lceil \alpha d_G(v) \rceil > \frac{n}{2}$, donc $\lceil \alpha d_G(v) \rceil \geq \frac{n}{2} + 1$. On peut supposer sans perte de généralité que $v \in S$. Sinon pour α-dominer v il faut au moins $\lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor$ sommets dans S et pour α-dominer les sommets n'appartenant pas à S et de degré 2 et 3, il faut au moins $\lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor$ sommets dans S. Donc S contient au moins $\lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor$ sommets. Par contre si $v \in S$, on aura besoin de seulement $\lceil \frac{n}{3} \rceil + 1$ sommets dans S et $\lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor \geq \lceil \frac{n}{3} \rceil + 1$. D'où $\gamma_\alpha(F_{1,n}) = \lceil \frac{n}{3} \rceil + 1 = \lceil \frac{n+3}{3} \rceil$.

La figure 4.4 représente les cas où $\lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor = \lceil \frac{n}{3} \rceil + 1$.

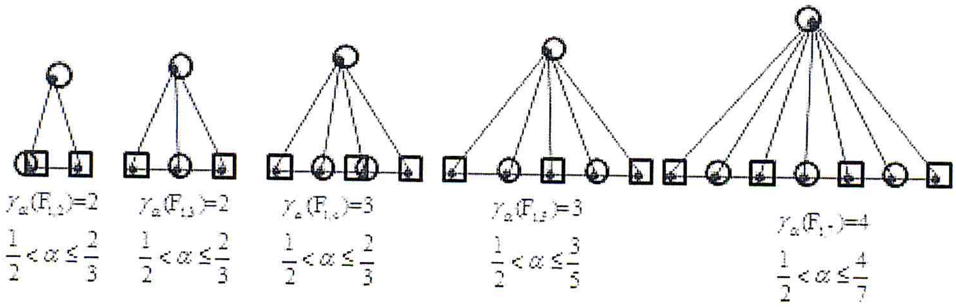


Figure 4.4.

Si $\frac{2}{3} < \alpha \leq 1$. Soit S un γ_α-ensemble de $F_{1,n}$. Pour tout sommet $x \notin S$, si x est un sommet de degré 2, 3, on a $\lceil \alpha d_G(x) \rceil = 2$, $\lceil \alpha d_G(x) \rceil = 3$, respectivement. Si x est le sommet v de degré n, on a $\lceil \alpha d_G(v) \rceil > \frac{2n}{3}$, donc $\lceil \alpha d_G(v) \rceil \geq \frac{2n}{3} + 1$. On peut supposer sans perte de généralité que $v \in S$. Sinon pour α-dominer v il faut au moins $\lfloor \frac{2n+3}{3} \rfloor$ sommets dans S et pour α-dominer les sommets n'appartenant pas à S et de degré 2 et 3, il faut au moins n sommets dans S. Donc S contient au moins n sommets. Par contre si $v \in S$, on aura besoin de seulement $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ sommets dans S et $n > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$, (si $n = 2$, on a $n = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$). D'où $\gamma_\alpha(F_{1,n}) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor$. □

3.5 Le graphe milieu d'un graphe

Dans cette section, on détermine le nombre de α-domination $\gamma_\alpha(G)$ du graphe milieu de certaines classes de graphes à savoir les chaînes P_n, les cycles C_n, les étoiles $K_{1,n}$, et les soleils S_n.

Définition 3.16. *Le graphe milieu d'un graphe connexe $G = (V, E)$ est noté par $M(G)$, l'ensemble des sommets de $M(G)$ est $V(G) \cup E(G)$, deux sommets sont adjacents si:*

(i). *x, y sont dans $E(G)$, et x, y sont adjacents dans G.*

(ii). *x est dans $V(G)$, y est dans $E(G)$, et x, y sont incidents dans G.*

3.5.1 Le graphe milieu de P_n

Le nombre de sommets de $M(P_n)$ est $2n - 1$. Le nombre des arêtes de $M(P_n)$ est $3n - 4$. Le degré maximum $\Delta(M(P_n)) = 4$. Le degré minimum $\delta(M(P_n)) = 1$, on a 2 sommets de degré un, 2 sommets de degré 3, $n - 2$ sommets de degré 2 et $n - 3$ sommets de degré 4.

Théorème 3.17.

$$\gamma_\alpha(M(P_n)) = \begin{cases} \lceil \frac{n}{2} \rceil & si\ 0 < \alpha \leq \frac{1}{2} \\ n - 1 & si\ \frac{1}{2} < \alpha \leq 1 \end{cases}.$$

Preuve. Soit $v_1, v_2, ..., v_n$ et $e_1, e_2, ..., e_{n-1}$ sont les sommets et les arêtes du graphe P_n, respectivement. Puisque $M(P_n)$ est le graphe milieu de P_n, alors $v_1, v_2, ..., v_n$ sont les sommets de P_n, et $u_1, u_2, ..., u_{n-1}$ sont les nouveaux sommets ajoutés correspondants aux arêtes $e_1, e_2, ..., e_{n-1}$, où $e_i = v_i v_{i+1}$, $1 \leq i \leq n-1$. L'ensemble des sommets de $M(P_n)$ est donné par

$$V(M(P_n)) = V(P_n) \cup E(P_n) = \{v_i : 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_i : 1 \leq i \leq n-1\}.$$

dans lequel chaque v_i est adjacent à u_i, et u_i est adjacent à v_{i+1}, $1 \leq i \leq n-1$. Et u_i est adjacent à u_{i+1}, $1 \leq i \leq n-2$.

Si $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$. Soit S un ensemble α-dominant. Pour tout sommet $x \notin S$, de degré 2 on a $\lceil \alpha d_G(x) \rceil = 1$, de degré 3 on a $\lceil \alpha d_G(x) \rceil = 1$, ou 2, de degré 4 on a $\lceil \alpha d_G(x) \rceil = 1$, ou 2. Soit

$$S = \begin{cases} \bigcup_{k=0}^{(n-3)/2} \{u_{2k+1}\} \cup \{u_{n-1}\} \text{ si } n \text{ impair} \\ \bigcup_{k=0}^{(n-2)/2} \{u_{2k+1}\} \text{ si } n \text{ pair} \end{cases},$$

puisque chaque sommet de $V - S$ est adjacent à au moins $\lceil \alpha d_G(x) \rceil$ dans S, alors S est un ensemble α-dominant. Donc $\gamma_\alpha(M(P_n)) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Soit S un $\gamma_\alpha(M(P_n))$-ensemble qui contient les supports de $M(P_n)$ (un tel ensemble existe toujours), alors forcément les deux sommets de degré trois appartiennent à S. Comme les deux sommets de degré trois peuvent dominer chacun un sommet pendant et un sommet de degré deux, le reste des sommets de S forment forcément un ensemble dominant pour dominer les sommets de degré deux. Ainsi il est facile de voir que $|S| \geq \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor + 2 = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Donc $\gamma_\alpha(M(P_n)) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Par conséquent $\gamma_\alpha(M(P_n)) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Si $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$. Soit S un ensemble α-dominant. Pour tout sommet $x \notin S$, de degré 2 on a $\lceil \alpha d_G(x) \rceil = 2$, de degré 3 on a $\lceil \alpha d_G(x) \rceil = 2$, ou 3, de degré 4 on a $\lceil \alpha d_G(x) \rceil = 3$, ou 4. Soit

$$S = \bigcup_{k=1}^{n-1} \{u_k\},$$

puisque chaque sommet de $V - S$ est adjacent à au moins $\lceil \alpha d_G(x) \rceil$ dans S, alors S est un ensemble α-dominant. Donc $\gamma_\alpha(M(P_n)) \leq n-1$.

Soit S un $\gamma_\alpha(M(P_n))$-ensemble qui contient les supports de $M(P_n)$ (un tel ensemble existe toujours), alors forcément les deux sommets de degré trois appartiennent à S. Les sommets de degré 2 qui n'appartiennent pas à S ont au moins deux voisins dans S. On peut vérifier que S contient au moins $n-1$ sommets dans S, sinon on a un sommet de degré deux qui n'est pas dans S, n'aura pas deux voisins dans S, donc $|S| \geq n-1$. Ainsi $\gamma_\alpha(M(P_n)) \geq n-1$. Par conséquent $\gamma_\alpha(M(P_n)) = n-1$. □

Exemple:

Par la figure 4.5 on obtiet que: $\gamma_\alpha(M(P_{10})) = 5$, ces sommets sont encadré dans le graphe, si $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, $\gamma_\alpha[M(P_{10})] = 9$, ces sommets sont encerclé dans le graphe, si $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$. Et $\gamma_\alpha(M(P_{11})) = 6$, ces sommets sont encadré dans le graphe, si $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, $\gamma_\alpha[M(P_{11})] = 10$, ces sommets sont encerclé dans le graphe, si $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$.

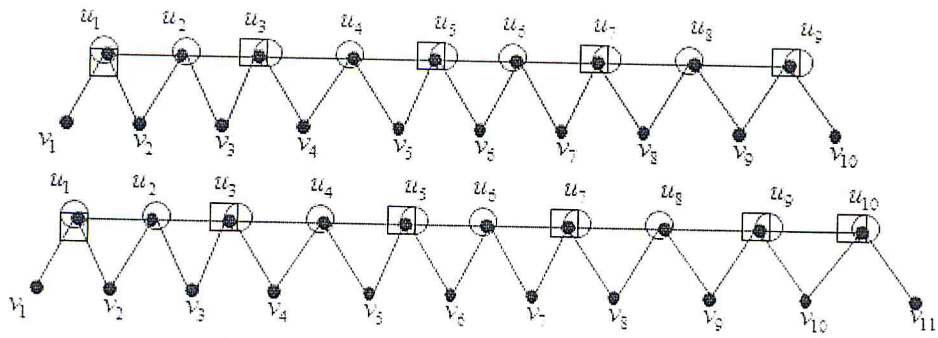


Figure 4.5.

3.5.2 Le graphe milieu de C_n

Le nombre de sommets de $M(C_n)$ est $2n$. Le nombre des arêtes de $M(C_n)$ est $3n$. Le degré maximum $\Delta(M(C_n)) = 4$. Le degré minimum $\delta(M(C_n)) = 2$, on a n sommets de degré 2 et n sommets de degré 4.

Théorème 3.18.

$$\gamma_\alpha(M(C_n)) = \begin{cases} \lceil \frac{n}{2} \rceil & si\ 0 < \alpha \leq \frac{1}{2} \\ n & si\ \frac{1}{2} < \alpha \leq 1 \end{cases}.$$

Preuve. Soit $v_1, v_2, ..., v_n$ et $e_i = v_i v_{i+1}$, $1 \leq i \leq n-1$ et $e_n = v_n v_1$ sont les sommets et les arêtes du graphe C_n, respectivement. Puisque $M(C_n)$ est le graphe milieu de C_n, alors $v_1, v_2, ..., v_n$ sont les sommets de C_n et $u_1, u_2, ..., u_n$ sont les nouveaux sommets ajoutés correspondants aux arêtes $e_1, e_2, ..., e_n$. L'ensemble des sommets de $M(C_n)$ est donné par

$$V(M(C_n)) = V(C_n) \cup E(C_n) = \{v_i : 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_i : 1 \leq i \leq n\}.$$

dans lequel chaque v_i est adjacent à u_i, et u_i est adjacent à v_{i+1}, $1 \leq i \leq n-1$, et u_n est adjacent à v_1. Et u_i est adjacent à u_{i+1}, $1 \leq i \leq n-1$, et u_n est adjacent à u_1.

Si $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$. Soit S un ensemble α-dominant. Pour tout sommet $x \notin S$, de degré 2 on a $\lceil \alpha d_G(x) \rceil = 1$, de degré 4 on a $\lceil \alpha d_G(x) \rceil = 1$, ou 2. Soit

$$S = \begin{cases} \bigcup_{k=1}^{(n-1)/2} \{u_{2k}\} \cup \{u_n\} \text{ si } n \text{ impair} \\ \bigcup_{k=1}^{n/2} \{u_{2k}\} \text{ si } n \text{ pair} \end{cases},$$

comme chaque sommet de $V - S$ est adjacent à au moins $\lceil \alpha d_G(x) \rceil$ dans S, alors S est un ensemble α-dominant. Ainsi $\gamma_\alpha(M(C_n)) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Soit S un $\gamma_\alpha(M(C_n))$-ensemble. tout sommet de degré deux qui n'appartient pas à S est adjacent à au moins un sommet dans S et tout sommet de degré quatre qui n'est pas dans S a au moins deux voisins dans S. Il est facile de voir que S contient au moins $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ pour 1-dominé les sommets de degré deux et 2-dominé (ou 1-dominé) les sommets de degré quatre. Donc $\gamma_\alpha(M(C_n)) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$. D'où on déduit que $\gamma_\alpha(M(C_n)) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Si $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$. Soit S un ensemble α-dominant. Pour tout sommet $x \notin S$, de degré 2 on a $\lceil \alpha d_G(x) \rceil = 2$, de degré 4 on a $\lceil \alpha d_G(x) \rceil = 3$, ou 4. Soit

$$S = \bigcup_{k=1}^{n} \{u_k\},$$

Comme chaque sommet de $V - S$ est adjacent à au moins $\lceil \alpha d_G(x) \rceil$ dans S, alors S est un ensemble α-dominant. Ainsi $\gamma_\alpha(M(C_n)) \leq n$.

Soit S un $\gamma_\alpha(M(C_n))$-ensemble, chaque sommet de degré deux qui n'appartient pas à S est adjacent à au moins deux sommets dans S, pour α-dominer tous les sommets de degré deux, il faut au moins n sommets dans S, alors il est nécessaire de prendre tous les sommets de degré quatre dans S, s'il existe un sommet de degré quatre n'appartient pas à S on trouve un ensemble α-dominant plus grand que S car au lieu de prendre ce sommet de degré quatre il faut prendre deux sommets de degré deux dans S, et tout ensemble de cardinalité inférieure à celle de S n'est pas un ensemble α-dominant de $M(C_n)$. Donc $\gamma_\alpha(M(C_n)) \geq n$. Par conséquent $\gamma_\alpha(M(C_n)) = n$. $\square$

Exemple:

Par la figure 4.6 on obtient que $\gamma_\alpha(M(C_6)) = 3$, ces sommets sont encadré dans le graphe, si $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, $\gamma_\alpha[M(C_6)] = 6$, ces sommets sont encerclé dans le graphe, si $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$. Et $\gamma_\alpha(M(C_7)) = 4$, ces sommets sont encadré dans le graphe, si $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, $\gamma_\alpha[M(C_6)] = 7$, ces sommets sont encerclé dans le graphe, si $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$.

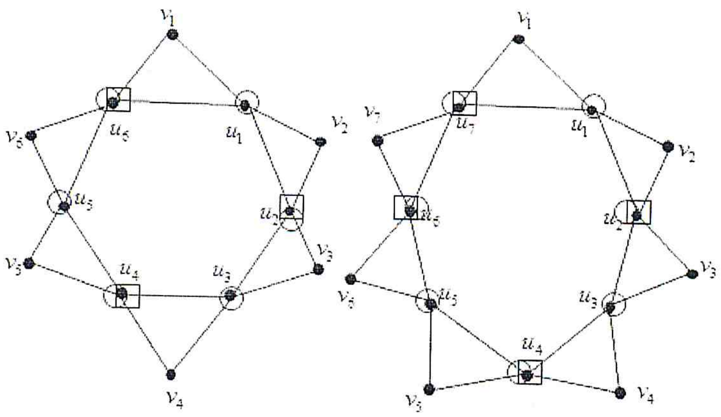


Figure 4.6.

3.5.3 Le graphe milieu de $K_{1,n}$

Le nombre de sommets de $M(K_{1,n})$ est $2n+1$. Le nombre des arêtes de $M(K_{1,n})$ est $\frac{n(n+3)}{2}$. Le degré maximum $\Delta(M(P_n)) = n$. Le degré minimum $\delta(M(P_n)) = 1$, on a, n sommets de degré un, n sommets de degré $n+1$ et un sommet de degré n.

Théorème 3.19. $\gamma_\alpha(M(K_{1,n})) = n$.

3.5.4 Le graphe milieu de S_n

Le nombre de sommets de $M(S_n)$ est $4n$. Le nombre des arêtes de $M(S_n)$ est $7n$. Le degré maximum $\Delta(M(P_n)) = 6$. Le degré minimum $\delta(M(P_n)) = 1$, on a n sommets de degré un, n sommets de degré 3, n sommets de degré 4 et n sommets de degré 6.

Théorème 3.20.

$$\gamma_\alpha(M(S_n)) = \begin{cases} n \quad si\ 0 < \alpha \leq \frac{1}{3} \\ n + \lceil \frac{n}{2} \rceil \quad si\ \frac{1}{3} < \alpha \leq \frac{2}{3} \\ 2n \quad si\ \frac{2}{3} < \alpha \leq 1 \end{cases}.$$

Preuve. Soit $\{v_1, v_2, ..., v_n\} \cup \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ et $\{e_i' : 1 \leq i \leq n\} \cup \{e_i : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{e_n\}$ où ($e_i = v_i v_{i+1}$, $e_n = v_n v_1$, et $e_i' = v_i u_i$) sont les sommets et les arêtes du graphe S_n, respectivement. Puisque $M(S_n)$ est le graphe milieu de S_n, alors $\{v_1, v_2, ..., v_n\} \cup \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ sont les sommets de S_n, et $\{v_1', v_2', ..., v_n'\} \cup \{u_1', u_2', ..., u_n'\}$ sont les nouveaux sommets ajoutés correspondants aux arêtes $\{e_i' : 1 \leq i \leq n\} \cup \{e_i : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{e_n\}$. L'ensemble des sommets de $M(S_n)$ est donné par

$$\begin{aligned} V(M(S_n)) &= V(S_n) \cup E(S_n) = \{v_i : 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_i : 1 \leq i \leq n\} \\ &\cup \left\{v_i' : 1 \leq i \leq n\right\} \cup \left\{u_i' : 1 \leq i \leq n\right\}. \end{aligned}$$

Si $0 < \alpha \leq \frac{1}{3}$. Soit S un $\gamma_\alpha(M(S_n))$-ensemble qui contient les sommets supports, pour tout sommet $x \notin S$, de degré 3 on a $\lceil \alpha d_G(x) \rceil = 1$, de degré 4 et 6 on a $\lceil \alpha d_G(x) \rceil = 1$, ou 2. Le graphe milieu de chaque graphe soleil contient n sous-graphe K_4. De plus, nous voyons que chaque K_4 est relié au sommet pendant. Ainsi $|S| = n$. Par conséquent $\gamma_\alpha(M(S_n)) = n$.

Si $\frac{1}{3} < \alpha \leq \frac{2}{3}$. Soit S un ensemble α-dominant. Pour tout sommet $x \notin S$, de degré 3 on a $\lceil \alpha d_G(x) \rceil = 2$, de degré 4 on a $\lceil \alpha d_G(x) \rceil = 2$,ou 3, de degré 6 on a $\lceil \alpha d_G(x) \rceil = 3$, ou 4. Supposons que v_i', $1 \leq i \leq n$ sont les sommets nouveaux ajoutés de degré six, et u_i', $1 \leq i \leq n$, sont les sommets nouveaux ajoutés de degré quatre. Soit

$$S = \begin{cases} \bigcup_{k=1}^{n} \{u_k'\} \cup \bigcup_{k=1}^{(n-1)/2} \{v_{2k}'\} \cup \{v_n'\} \text{ si } n \text{ impair} \\ \bigcup_{k=1}^{n} \{u_k'\} \cup \bigcup_{k=1}^{n/2} \{v_{2k}'\} \text{ si } n \text{ pair} \end{cases},$$

Comme chaque sommet de $V - S$ est adjacent à au moins $\lceil \alpha d_G(x) \rceil$ dans S, alors S est un ensemble α-dominant. Ainsi $\gamma_\alpha(M(S_n)) \leq n + \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Soit S un $\gamma_\alpha(M(S_n))$-ensemble qui contient les sommets supports (sommets de degré quatre), le nombre de sommets de degré quatre est n, comme les sommets de degré trois doivent avoir deux voisins au moins dans S, alors il faut ajouter au moins $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ sommets aux sommets supports pour α-dominé les sommets de degré trois et six, sinon on obtient un sommet de degré trois qui n'aura pas deux voisins dans S, ce qui implique que $|S| \geq n + \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Donc $\gamma_\alpha(M(S_n)) \geq n + \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Par conséquent $\gamma_\alpha(M(S_n)) = n + \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Si $\frac{2}{3} < \alpha \leq 1$. Soit S un ensemble α-dominant. Pour tout sommet $x \notin S$, de degré 3 on a $\lceil \alpha d_G(x) \rceil = 3$, de degré 4 on a $\lceil \alpha d_G(x) \rceil = 3$, ou 4, de degré 6 on a $\lceil \alpha d_G(x) \rceil = 5$, ou 6. Soit

$$S = \bigcup_{k=1}^{n} \{u_k', v_k'\}$$

Comme chaque sommet de $V - S$ est adjacent à au moins $\lceil \alpha d_G(x) \rceil$ dans S, alors S est un ensemble α-dominant. Ainsi $\gamma_\alpha(M(S_n)) \leq 2n$.

Soit S un $\gamma_\alpha(M(S_n))$-ensemble qui contient les sommets supports (sommets de degré quatre), le nombre de sommets de degré quatre est n, comme les sommets de degré trois doivent avoir trois voisins au moins dans S, alors il faut ajouter au moins n sommets aux sommets supports pour α-dominé tous les sommets, sinon on obtient un des sommets qui n'est pas α-dominé, ce qui implique que $|S| \geq 2n$. Donc $\gamma_\alpha(M(S_n)) \geq 2n$. Par conséquent $\gamma_\alpha(M(S_n)) = 2n$. □

Exemple:

Par la figure 4.7 on obtient que $\gamma_\alpha(M(S_5)) = 5$, ces sommets sont encadré dans le graphe, si $0 < \alpha \leq \frac{1}{3}$, $\gamma_\alpha(M(S_5)) = 8$, ces sommets sont encerclé dans le graphe, si $\frac{1}{3} < \alpha \leq \frac{2}{3}$, $\gamma_\alpha(M(S_5)) = 10$, ces sommets sont représenté par les triangles dans le graphe, si $\frac{2}{3} < \alpha \leq 1$.

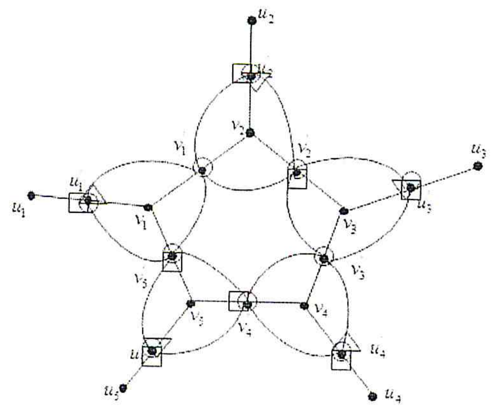


Figure 4.7.

3.6 Le graphe total d'un graphe

Dans cette section, on détermine le nombre de α-domination $\gamma_\alpha(G)$ du graphe total de certaines classes de graphes à savoir les chaînes P_n, les cycles C_n, les étoiles $K_{1,n}$.

Définition 3.21. *Le graphe total d'un graphe G est noté par $T(G)$, l'ensemble des sommets de $T(G)$ est $V(G) \cup E(G)$, deux sommets sont adjacents si:*

(i). *x, y sont dans $V(G)$, et x est adjacent à y dans G.*

(ii). *x, y sont dans $E(G)$, et x, y sont adjacents dans G.*

(iii). *x est dans $V(G)$, y est dans $E(G)$, et x, y sont incidents dans G.*

3.6.1 Le graphe total de P_n

Le nombre de sommets de $T(P_n)$ est $2n-1$. Le nombre des arêtes de $T(P_n)$ est $4n-5$. Le degré maximum $\Delta(T(P_n)) = 4$. Le degré minimum $\delta(T(P_n)) = 2$, on a 2 sommets de degré 2, 2 sommets de degré 3 et $2n-5$ sommets de degré 4.

Définition 3.22. *On appelle les blocs i, $i = 1, ..., 5$, les blocs représenté dans la figure* 4.8 *comme suit*

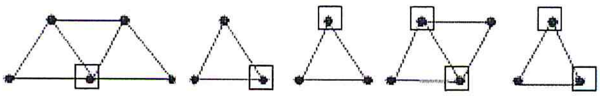


Figure 4.8. Les blocs $1, 2, 3, 4$, et 5 pour construire un ensemble α-dominant du graphe total de P_n.

Théorème 3.23.

$$\gamma_\alpha(T(P_n)) = \begin{cases} \left\lceil \frac{2n-1}{5} \right\rceil & si\ 0 < \alpha \leq \frac{1}{4} \\ \left\lfloor \frac{2n-1}{3} \right\rfloor & si\ \frac{1}{4} < \alpha \leq \frac{1}{3} \\ \left\lceil \frac{2n-1}{3} \right\rceil & si\ \frac{1}{3} < \alpha \leq \frac{1}{2} \\ n & si\ \frac{1}{2} < \alpha \leq \frac{3}{4} \\ \left\lfloor \frac{4n-2}{3} \right\rfloor & si\ \frac{3}{4} < \alpha \leq 1 \end{cases}.$$

Preuve. Soit $v_1, v_2, ..., v_n$ et $e_i = v_iv_{i+1}$, $1 \leq i \leq n-1$ sont les sommets et les arêtes du graphe P_n, respectivement. Puisque $T(P_n)$ est le graphe total de P_n, alors $v_1, v_2, ..., v_n$ sont les sommets de P_n, et $u_1, u_2, ..., u_{n-1}$ sont les nouveaux sommets ajoutés correspondants aux arêtes $e_1, e_2, ..., e_{n-1}$. L'ensemble des sommets de $T(P_n)$ est donné par

$$V(T(P_n)) = V(P_n) \cup E(P_n) = \{v_i : 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_i : 1 \leq i \leq n-1\}.$$

dans lequel chaque v_i est adjacent à v_{i+1}et u_i, $1 \leq i \leq n-1$. Et u_i est adjacent à v_{i+1} et u_{i+1}, $1 \leq i \leq n-1$.

Si $0 < \alpha \leq \frac{1}{4}$. Soit S un ensemble α-dominant. Pour tout sommet $x \notin S$, de degré 2, 3, 4 on a $\lceil \alpha d_G(x) \rceil = 1$. Soit

$$S = \begin{cases} \bigcup\limits_{k=0}^{(n-5)/5} \{v_{5k+2}\} \cup \bigcup\limits_{k=0}^{(n-5)/5} \{u_{5n+4}\} \text{ si } n \equiv 0 (\text{mod } 5) \\ \bigcup\limits_{k=0}^{(n-6)/5} \{v_{5k+2}\} \cup \bigcup\limits_{k=0}^{(n-6)/5} \{u_{5n+4}\} \cup \{v_n\} \text{ si si } n \equiv 1 (\text{mod } 5) \\ \bigcup\limits_{k=0}^{(n-2)/5} \{v_{5k+2}\} \cup \bigcup\limits_{k=0}^{(n-7)/5} \{u_{5n+4}\} \text{ si } n \equiv 2 (\text{mod } 5) \\ \bigcup\limits_{k=0}^{(n-3)/5} \{v_{5k+2}\} \cup \bigcup\limits_{k=0}^{(n-8)/5} \{u_{5n+4}\} \text{ si } n \equiv 3 (\text{mod } 5) \\ \bigcup\limits_{k=0}^{(n-4)/5} \{v_{5k+2}\} \cup \bigcup\limits_{k=0}^{(n-9)/5} \{u_{5n+4}\} \cup \{u_{n-1}\} \text{ si } n \equiv 4 (\text{mod } 5) \end{cases}$$

On note que S est obtenu à partir des blocs de type 1. Comme chaque sommet de $V - S$ est adjacent à au moins $\lceil \alpha d_G(x) \rceil$ dans S, alors S est un ensemble α-dominant. Donc $\gamma_\alpha(T(P_n)) \leq \lceil \frac{2n-1}{5} \rceil$.

Soit S un $\gamma_\alpha(T(P_n))$-ensemble, le degré maximum de $T(P_n)$ est quatre, alors chaque sommet peut α-dominer au plus quatre sommets distinctes de $T(P_n)$, il est facile de voir que pour chaque bloc de type 1 (voir la figure 4.8) il faut au moins un sommet dans S, comme $T(P_n)$ contient au moins $\frac{2n-1}{5}$ blocs et chaque bloc contient au moins un sommet dans S, alors $|S| \geq \lceil \frac{2n-1}{5} \rceil$. Ce qui implique que $\gamma_\alpha(T(P_n)) \geq \lceil \frac{2n-1}{5} \rceil$. Par conséquent $\gamma_\alpha(T(P_n)) = \lceil \frac{2n-1}{5} \rceil$.

Si $\frac{1}{4} < \alpha \leq \frac{1}{3}$. Soit S un ensemble α-dominant. Pour tout sommet $x \notin S$, de degré 2 on a $\lceil \alpha d_G(x) \rceil = 1$, de degré 3 on a $\lceil \alpha d_G(x) \rceil = 1$, de degré 4 on a $\lceil \alpha d_G(x) \rceil = 2$. Soit

$$S = \begin{cases} \bigcup_{k=0}^{(n-3)/3} \{v_{3k+2}\} \cup \bigcup_{k=1}^{(n-3)/3} \{u_{3k}\} \text{ si } n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3) \\ \bigcup_{k=0}^{(n-4)/3} \{v_{3k+2}\} \cup \bigcup_{k=1}^{(n-1)/3} \{u_{3k}\} \text{ si } n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3) \\ \bigcup_{k=0}^{(n-2)/3} \{v_{3k+2}\} \cup \bigcup_{k=1}^{(n-2)/3} \{u_{3k}\} \text{ si } n \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 3) \end{cases}$$

On note que S est obtenu à partir des blocs de type 2. Comme chaque sommet de $V - S$ est adjacent à au moins $\lceil \alpha d_G(x) \rceil$ dans S, alors S est un ensemble α-dominant. Donc $\gamma_\alpha(T(P_n)) \leq \lfloor \frac{2n-1}{3} \rfloor$.

Soit S un $\gamma_\alpha(T(P_n))$-ensemble, il est facile de voir que pour chaque bloc de type 2 (voir la figure 4.8) il faut au moins un sommet dans S, sinon un des sommets n'est pas α-dominé, le graphe $T(P_n)$ contient au moins $\lfloor \frac{2n-1}{3} \rfloor$ blocs, alors S contient au moins $\lfloor \frac{2n-1}{3} \rfloor$ sommets, ce qui implique que $|S| \geq \lfloor \frac{2n-1}{3} \rfloor$. Donc $\gamma_\alpha(T(P_n)) \geq \lfloor \frac{2n-1}{3} \rfloor$. Par conséquent $\gamma_\alpha(T(P_n)) = \lfloor \frac{2n-1}{3} \rfloor$.

Si $\frac{1}{3} < \alpha \leq \frac{1}{2}$. Soit S un ensemble α-dominant. Pour tout sommet $x \notin S$, de degré 2 on a $\lceil \alpha d_G(x) \rceil = 1$, de degré 3 on a $\lceil \alpha d_G(x) \rceil = 2$, de degré 4 on a $\lceil \alpha d_G(x) \rceil = 2$. Soit

$$S = \begin{cases} \bigcup_{k=1}^{n/3} \{v_{3k}\} \cup \bigcup_{k=0}^{(n-3)/3} \{u_{3k+1}\} \text{ si } n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3) \\ \bigcup_{k=1}^{(n-1)/3} \{v_{3k}\} \cup \bigcup_{k=0}^{(n-4)/3} \{u_{3k+1}\} \cup \{v_n\} \text{ si } n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3) \\ \bigcup_{k=1}^{(n-2)/3} \{v_{3k}\} \cup \bigcup_{k=0}^{(n-2)/3} \{u_{3k+1}\} \text{ si } n \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 3) \end{cases}$$

On note que S est obtenu à partir des blocs de type 3. Comme chaque sommet de $V - S$ est adjacent à au moins $\lceil \alpha d_G(x) \rceil$ dans S, alors S est un ensemble α-dominant. Donc $\gamma_\alpha(M(P_n)) \leq \lceil \frac{2n-1}{3} \rceil$.

Soit S un $\gamma_\alpha(T(P_n))$-ensemble, il est facile de voir que pour chaque bloc de type 3 (voir la figure 4.8) il faut au moins un sommet dans S, sinon un des sommets n'est pas α-dominé, le graphe $T(P_n)$ contient au moins $\frac{2n-1}{3}$ blocs, alors S contient au moins $\frac{2n-1}{3}$ sommets, ce qui implique que $|S| \geq \lceil \frac{2n-1}{3} \rceil$. Donc $\gamma_\alpha(T(P_n)) \geq \lceil \frac{2n-1}{3} \rceil$. Par conséquent $\gamma_\alpha(T(P_n)) = \lceil \frac{2n-1}{3} \rceil$.

Si $\frac{1}{2} < \alpha \leq \frac{3}{4}$. Soit S un ensemble α-dominant. Pour tout sommet $x \notin S$, de degré 2 on a $\lceil \alpha d_G(x) \rceil = 2$, de degré 3 on a $\lceil \alpha d_G(x) \rceil = 2$, ou 3, de degré 4 on a $\lceil \alpha d_G(x) \rceil = 3$.

Soit

$$S = \begin{cases} \bigcup_{k=1}^{n/2} \{v_{2k}\} \cup \bigcup_{k=0}^{(n-2)/2} \{u_{2k+1}\} \text{ si } n \text{ pair} \\ \bigcup_{k=1}^{(n-1)/2} \{v_{2k}\} \cup \bigcup_{k=0}^{(n-3)/2} \{u_{2k+1}\} \cup \{u_{n-1}\} \text{ si } n \text{ impair} \end{cases},$$

On note que S est obtenu à partir des blocs de type 4. Comme chaque sommet de $V - S$ est adjacent à au moins $\lceil \alpha d_G(x) \rceil$ dans S, alors S est un ensemble α-dominant. Donc $\gamma_\alpha(T(P_n)) \leq n$.

Soit S un $\gamma_\alpha(T(P_n))$-ensemble, il est facile de voir que pour chaque bloc de type 4 (voir la figure 4.8) il faut au moins deux sommets dans S, sinon un sommet de degré deux ou quatre n'est pas α-dominé, le graphe $T(P_n)$ contient au moins $\frac{2n-1}{4}$ blocs, alors S contient au moins $2\frac{(2n-1)}{4}$ sommets, ce qui implique que $|S| \geq \lceil \frac{2n-1}{2} \rceil = n$. Donc $\gamma_\alpha(T(P_n)) \geq n$. Par conséquent $\gamma_\alpha(T(P_n)) = n$.

Si $\frac{3}{4} < \alpha \leq 1$. Soit S un ensemble α-dominant. Pour tout sommet $x \notin S$, de degré 2 on a $\lceil \alpha d_G(x) \rceil = 2$, de degré 3 on a $\lceil \alpha d_G(x) \rceil = 3$, de degré 4 on a $\lceil \alpha d_G(x) \rceil = 4$. Soit

$$S = \begin{cases} \bigcup_{k=1}^{n/3} \{v_{3k}\} \cup \bigcup_{k=0}^{(n-3)/3} \{v_{3k+2}, u_{3k+1}\} \cup \bigcup_{k=1}^{(n-3)/3} \{u_{3k}\} \text{ si } n \equiv 0 (\text{mod } 3) \\ \bigcup_{k=1}^{(n-1)/3} \{v_{3k}, u_{3k}\} \cup \bigcup_{k=0}^{(n-4)/3} \{v_{3k+2}, u_{3k+1}\} \text{ si } n \equiv 1 (\text{mod } 3) \\ \bigcup_{k=1}^{(n-2)/3} \{v_{3k}, u_{3k}\} \cup \bigcup_{k=0}^{(n-2)/3} \{v_{3k+2}, u_{3k+1}\} \text{ si } n \equiv 2 (\text{mod } 3) \end{cases},$$

On note que S est obtenu à partir des blocs de type 5. Comme chaque sommet de $V - S$ est adjacent à au moins $\lceil \alpha d_G(x) \rceil$ dans S, alors on S est un ensemble α-dominant. Ainsi $\gamma_\alpha(T(P_n)) \leq \left\lfloor \frac{2(2n-1)}{3} \right\rfloor$.

Soit S un $\gamma_\alpha(T(P_n))$-ensemble, il est facile de voir que pour chaque bloc de type 5 (voir la figure 4.8) il faut au moins deux sommets dans S, sinon un sommet de degré deux ou quatre n'est pas α-dominé, le graphe $T(P_n)$ contient au moins $\lfloor \frac{2n-1}{3} \rfloor$ blocs, alors S contient au moins $2 \lfloor \frac{2n-1}{3} \rfloor$ sommets, ce qui implique que $|S| \geq 2 \left\lfloor \frac{(2n-1)}{3} \right\rfloor$. Si $n \equiv 1, 2(\text{modelo } 3)$ alors $2 \lfloor \frac{2n-1}{3} \rfloor = \left\lfloor \frac{2(2n-1)}{3} \right\rfloor$. Si $n \equiv 0(\text{modelo } 3)$ alors $\left\lfloor \frac{2(2n-1)}{3} \right\rfloor = 2 \lfloor \frac{2n-1}{3} \rfloor + 1$. Donc $\gamma_\alpha(T(P_n)) \geq \left\lfloor \frac{2(2n-1)}{3} \right\rfloor$. Par conséquent $\gamma_\alpha(T(P_n)) = \lfloor \frac{4n-2}{3} \rfloor$. □

Exemple:

Par la figure 4.9 on obtient que $\gamma_\alpha(T(P_{12})) = 5$, ces sommets sont encerclé dans le graphe, si $0 < \alpha \leq \frac{1}{4}$, $\gamma_\alpha(T(P_{12})) = 7$ ces sommets sont encadré dans le graphe, si $\frac{1}{4} < \alpha \leq \frac{1}{3}$, $\gamma_\alpha(T(P_{12})) = 8$, ces sommets sont représenté par les triangles dans le graphe, si $\frac{1}{3} < \alpha \leq \frac{1}{2}$, $\gamma_\alpha(T(P_{12})) = 12$, ces sommets sont représenté par les étoiles dans le graphe, si $\frac{1}{2} < \alpha \leq \frac{3}{4}$, $\gamma_\alpha(T(P_{12})) = 15$, ces sommets sont représenté par les lunes dans le graphe, si $\frac{3}{4} < \alpha \leq 1$.

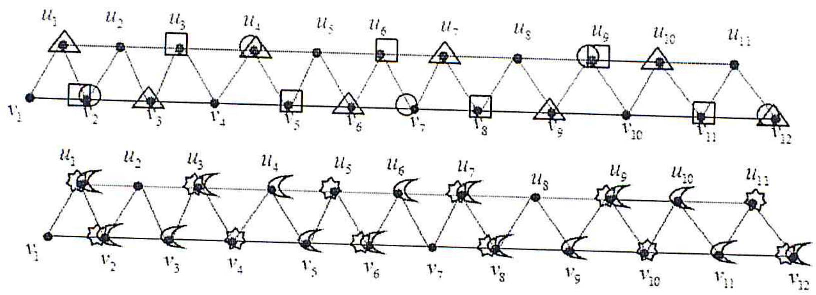


Figure 4.9

3.6.2 Le graphe total de C_n

Le nombre de sommets de $T(C_n)$ est $2n$. Le nombre d'arêtes de $T(C_n)$ est $4n$. Le degré maximum $\Delta(M(P_n)) = 4$. Le degré minimum $\delta(M(P_n)) = 4$, on a $2n$ sommets de degré 4.

Théorème 3.24.

$$\gamma_\alpha(T(C_n)) = \begin{cases} \lceil \frac{2n}{5} \rceil & si\ 0 < \alpha \leq \frac{1}{4} \\ \lceil \frac{2n}{3} \rceil & si\ \frac{1}{4} < \alpha \leq \frac{1}{2} \\ \begin{cases} n \text{ si } n \text{ est pair} \\ n+1 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases} & si\ \frac{1}{2} < \alpha \leq \frac{3}{4} \\ \lceil \frac{4n}{3} \rceil & si\ \frac{3}{4} < \alpha \leq 1 \end{cases}.$$

Preuve. Soit $v_1, v_2, ..., v_n$ et $e_1, e_2, ..., e_{n-1}$ où $e_i = v_iv_{i+1}$, $1 \leq i \leq n-1$ et $e_n = v_nv_1$ sont les sommets et les arêtes du graphe C_n, respectivement. Puisque $T(C_n)$ est le graphe total de C_n, alors on peut obtenir $V(T(C_n))$ à partir de la subdivision de chaque arête e_i de C_n exactement une fois, et en joignant tous ces nouveaux sommets ajoutés $u_1, u_2, ..., u_n$ si les arêtes de C_n sont adjacents, et joignant également les sommets adjacents dans C_n. Alors l'ensemble des sommets de $T(C_n)$ est donné par

$$V(T(C_n)) = \{v_i : 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_i : 1 \leq i \leq n\}$$

tel que les sommets sont ordonnés comme suite $v_1, u_1, v_2, u_2, \ldots, v_{n-1}, u_{n-1}, v_n, u_n, v_1$.

Si $0 < \alpha \leq \frac{1}{4}$. Soit S un ensemble α-dominant. Pour tout sommet $x \notin S$, de degré 4 on a $\lceil \alpha d_G(x) \rceil = 1$. Soit

$$S = \begin{cases} \bigcup_{k=0}^{(n-5)/5} \{v_{5k+1}, u_{5k+3}\} \text{ si } n \equiv 0 (\text{mod } 5) \\ \bigcup_{k=0}^{(n-6)/5} \{v_{5k+1}, u_{5k+3}\} \cup \{v_{n-1}\} \text{ si } n \equiv 1 (\text{mod } 5) \\ \bigcup_{k=0}^{(n-2)/5} \{v_{5k+1}\} \cup \bigcup_{k=0}^{(n-7)/5} \{u_{5k+3}\} \text{ si } n \equiv 2 (\text{mod } 5) \\ \bigcup_{k=0}^{(n-3)/5} \{v_{5k+1}\} \cup \bigcup_{k=0}^{(n-8)/5} \{u_{5k+3}\} \cup \{u_{n-1}\} \text{si } n \equiv 3 (\text{mod } 5) \\ \bigcup_{k=0}^{(n-4)/5} \{v_{5k+1}\} \cup \bigcup_{k=0}^{(n-9)/5} \{u_{5k+3}\} \cup \{v_{n-1}\} \text{ si } n \equiv 4 (\text{mod } 5) \end{cases}$$

Comme chaque sommet de $V - S$ est adjacent à au moins $\lceil \alpha d_G(x) \rceil$ dans S, alors S est un ensemble α-dominant. Donc $\gamma_\alpha(T(C_n)) \leq \lceil \frac{2n}{5} \rceil$.

Soit S un $\gamma_\alpha(T(C_n))$-ensemble, dans tout le graphe $T(C_n)$ les sommets sont de degré quatre, alors chaque sommet peut α-dominer au plus quatre sommets distinctes de $T(P_n)$, donc pour tout cinq sommets il est nécessaire de prendre au moins un sommet dans S, sinon on aura un de ces sommets qui n'est pas α-dominé. Ainsi $|S| \geq \lceil \frac{2n}{5} \rceil$. Ce qui implique que $\gamma_\alpha(T(C_n)) \geq \lceil \frac{2n}{5} \rceil$. Par conséquent $\gamma_\alpha(T(C_n)) = \lceil \frac{2n}{5} \rceil$.

Si $\frac{1}{4} < \alpha \leq \frac{1}{2}$. Soit S un ensemble α-dominant. Pour tout sommet $x \notin S$, de degré 4 on a $\lceil \alpha d_G(x) \rceil = 2$. Soit

$$S = \begin{cases} \bigcup_{k=0}^{(n-3)/3} \{v_{3k+1}, u_{3k+2}\} \text{ si } n \equiv 0 (\text{mod } 3) \\ \bigcup_{k=0}^{(n-1)/3} \{v_{3k+1}\} \cup \bigcup_{k=0}^{(n-4)/3} \{u_{3k+2}\} \text{ si } n \equiv 1 (\text{mod } 3) \\ \bigcup_{k=0}^{(n-2)/3} \{v_{3k+1}, u_{3k+2}\} \text{ si } n \equiv 2 (\text{mod } 3) \end{cases}$$

Comme chaque sommet de $V - S$ est adjacent à au moins $\lceil \alpha d_G(x) \rceil$ dans S, alors S est un ensemble α-dominant. Donc $\gamma_\alpha(T(C_n)) \leq \lceil \frac{2n}{3} \rceil$.

Soit S un $\gamma_\alpha(T(C_n))$-ensemble, pour tout trois sommets il est nécessaire de prendre au moins un sommet dans S, sinon on aura un de ces sommets n'est pas α-dominé, alors il faut au moins $\frac{2n}{3}$ sommets dans S, et tout ensemble inférieure à S ne soit pas un ensemble α-dominant. Donc $|S| \geq \lceil \frac{2n}{3} \rceil$. Ce qui implique que $\gamma_\alpha(T(C_n)) \geq \lceil \frac{2n}{3} \rceil$. Par conséquent $\gamma_\alpha(T(C_n)) = \lceil \frac{2n}{3} \rceil$.

Si $\frac{1}{2} < \alpha \leq \frac{3}{4}$. Soit S un ensemble α-dominant. Pour tout sommet $x \notin S$, de degré 4 on a $\lceil \alpha d_G(x) \rceil = 3$. Soit

$$S = \begin{cases} \bigcup_{k=1}^{n/2} \{v_{2k}, u_{2k}\} & \text{si } n \text{ pair} \\ \bigcup_{k=1}^{(n-1)/2} \{v_{2k}, u_{2k}\} \cup \{v_1, u_n\} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

Comme chaque sommet de $V - S$ est adjacent à au moins $\lceil \alpha d_G(x) \rceil$ dans S, alors S est un ensemble α-dominant. Donc $\gamma_\alpha(T(C_n)) \leq 2 \left\lceil \frac{2n}{4} \right\rceil$.

Soit S un $\gamma_\alpha(T(C_n))$-ensemble, dans tout le graphe $T(C_n)$ les sommets sont de degré 4, alors pour tout quatre sommets il est nécessaire de prendre au moins deux sommets dans S, sinon on a un de ces sommets qui n'aura pas trois voisins dans S, ce qui implique qu'il faut au moins $2 \left\lfloor \frac{2n}{4} \right\rfloor$ sommets dans S. Donc $|S| \geq 2 \left\lfloor \frac{2n}{4} \right\rfloor$. Si n est pair $2 \left\lfloor \frac{2n}{4} \right\rfloor = n$. Si n est impair $2 \left\lfloor \frac{2n}{4} \right\rfloor + 2 = n + 1$ Ainsi $\gamma_\alpha(T(C_n)) \geq 2 \left\lceil \frac{2n}{4} \right\rceil$. Par conséquent $\gamma_\alpha(T(C_n)) = \begin{cases} n \text{ si } n \text{ est pair} \\ n+1 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$.

Si $\frac{3}{4} < \alpha \leq 1$. Soit S un ensemble α-dominant. Pour tout sommet $x \notin S$, de degré 4 on a $\lceil \alpha d_G(x) \rceil = 4$. Soit

$$S = \begin{cases} \bigcup_{k=0}^{(n-3)/3} \{v_{3k+1}, u_{3k+1}\} \cup \bigcup_{k=1}^{n/3} \{v_{3k}, u_{3k-1}\} & \text{si } n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3) \\ \bigcup_{k=0}^{(n-1)/3} \{v_{3k+1}, u_{3k+1}\} \cup \bigcup_{k=1}^{(n-1)/3} \{v_{3k}, u_{3k-1}\} & \text{si } n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3) \\ \bigcup_{k=0}^{(n-2)/3} \{v_{3k+1}, u_{3k+1}\} \cup \bigcup_{k=1}^{(n-2)/3} \{v_{3k}, u_{3k-1}\} \cup \{u_n\} & \text{si } n \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 3) \end{cases}$$

Comme chaque sommet de $V - S$ est adjacent à au moins $\lceil \alpha d_G(x) \rceil$ dans S, alors S est un ensemble α-dominant. Donc $\gamma_\alpha(T(C_n)) \leq \left\lceil \frac{4n}{3} \right\rceil$.

Soit S un $\gamma_\alpha(T(C_n))$-ensemble, dans tout le graphe $T(C_n)$ les sommets sont de degré 4 alors pour tout six sommets il est nécessaire de prendre au moins quatre sommets dans S, sinon on a un de ces sommets qui n'aura pas quatre voisins dans S, ce qui implique qu'il faut au moins $4 \left\lfloor \frac{2n}{6} \right\rfloor$ sommets dans S, Ainsi $|S| \geq 4 \left\lfloor \frac{2n}{6} \right\rfloor$. Si $n \equiv 0, 3$(modelo 6) alors $4 \left\lfloor \frac{2n}{6} \right\rfloor = \left\lceil \frac{4n}{3} \right\rceil$. Si $n \equiv 1, 4$(modelo 6) alors $4 \left\lfloor \frac{2n}{6} \right\rfloor + 2 = \left\lceil \frac{4n}{3} \right\rceil$. Si $n \equiv 2, 5$(modelo 6) alors $4 \left\lfloor \frac{2n}{6} \right\rfloor + 3 = \left\lceil \frac{4n}{3} \right\rceil$. Donc $\gamma_\alpha(T(C_n)) \geq \left\lceil \frac{4n}{3} \right\rceil$. Par conséquent $\gamma_\alpha(T(C_n)) = \left\lceil \frac{4n}{3} \right\rceil$. □

Exemple:

Par la figure 4.10 on obtient que $\gamma_\alpha(T(C_6)) = 3$, ces sommets sont encadré dans le graphe, si $0 < \alpha \leq \frac{1}{4}$, $\gamma_\alpha(T(C_6)) = 4$, ces sommets sont représenté par les triangles dans le graphe, si $\frac{1}{4} < \alpha \leq \frac{1}{2}$, $\gamma_\alpha(T(C_6)) = 6$, ces sommets sont représenté par les tétoiles dans le graphe, si $\frac{1}{2} < \alpha \leq \frac{3}{4}$, $\gamma_\alpha(T(C_6)) = 8$, ces sommets sont encerclé dans le graphe, si $\frac{3}{4} < \alpha \leq 1$.

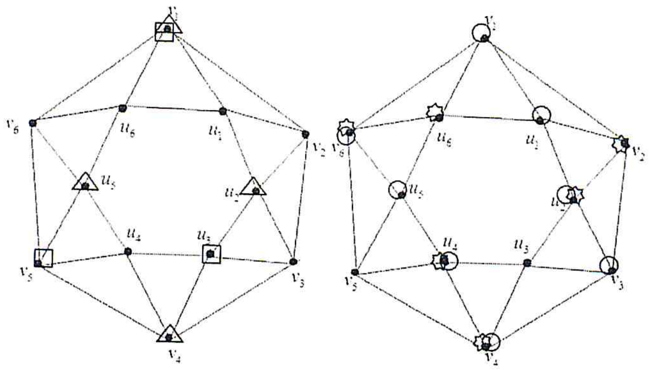


Figure 4.10

3.6.3 Le graphe total de $K_{1,n}$

Le nombre de sommets de $T(K_{1,n})$ est $2n+1$. Le nombre des arêtes de $T(K_{1,n})$ est $(n^2+5n)/2$. Le degré maximum $\Delta(T(K_{1,n})) = n+1$. Le degré minimum $\delta(T(K_{1,n})) = 2$, on a n sommets de degré 2, un sommet de degré $2n$ et n sommets de degré $n+1$.

Théorème 3.25.

$$\gamma_\alpha(T(K_{1,n})) = \begin{cases} 1 & si\ 0 < \alpha \leq \frac{1}{n+1} \\ i & si\ \frac{i-1}{n+1} < \alpha \leq \frac{i}{n+1} \leq \frac{1}{2}\ où\ i = \overline{2,n} \\ n+1 & si\ \frac{1}{2} < \alpha \leq 1 \end{cases}.$$

Preuve. Soit $v_1, v_2, ..., v_n, v$ et $e_1, e_2, ..., e_n$ où $e_i = vv_i$, $1 \leq i \leq n$ sont les sommets et les arêtes du graphe $K_{1,n}$, respectivement. Puisque $T(K_{1,n})$ est le graphe total de $K_{1,n}$, alors on peut obtenir $V(T(K_{1,n}))$ à partir de la subdivision de chaque arête e_i, $1 \leq i \leq n$ de $K_{1,n}$ exactement une fois, et en joignant tous ces nouveaux sommets ajoutés $u_1, u_2, ..., u_n$ si les arêtes de $K_{1,n}$ sont adjacents, et joignant également les sommets adjacents dans $K_{1,n}$. Alors l'ensemble des sommets de $T(K_{1,n})$ est donné par

$$V(T(K_{1,n})) = \{v_i : 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_i : 1 \leq i \leq n\} \cup \{v\}.$$

Si $0 < \alpha \leq \frac{1}{n+1}$. Soit S un γ_α-ensemble de $T(K_{1,n})$. Il est simple de voir que $\gamma_\alpha(T(K_{1,n}))$ $= 1$, car dans ce cas les sommets qui n'appartiennent pas à S ont au moins un voisin dans S (à l'exception de sommet v), le sommet v sommet de degré $2n$ de $T(K_{1,n})$ est un ensemble α-dominant de $T(K_{1,n})$, ceci implique que $1 \leq \gamma_\alpha(T(K_{1,n})) \leq 1$.

Si $\frac{i-1}{n+1} < \alpha \leq \frac{i}{n+1} \leq \frac{1}{2}$. Soit S un γ_α-ensemble de $T(K_{1,n})$, dans ce cas tout sommet de degré deux qui n'appartient pas à S est un α-dominant si $\lceil \alpha d_G(x) \rceil = 1$, alors pour α-dominer les sommets de degré deux du nombre le plus petit possible nous prenons le sommet v dans S. Les sommets de degré $n+1$ est un α-dominant s'ils prennent $\lceil \alpha d_G(x) \rceil =$ i, $i = 1, .., n$ dans S, donc on prend au moins $i - 1$ sommets dans S de n'importe quel sommet de sommets de degré $n + 1$, car tous ces sommets sont adjacents, alors pour α-dominer tout le graphe $T(K_{1,n})$ il faut au moins $(i - 1 + 1)$ sommets dans S. Nous pouvons n'est pas prendre v dans S en cas si $\lceil \alpha d_G(x) \rceil \leq n$ c'est-à-dire v prenait au plus la moitié de ses voisins dans S et dans ce cas les sommets de degré $n + 1$ et aussi dans le cas de prennent au plus la moitié de ses voisins et car $i < n$ (i est la moitié de $n + 1$), alors forcément $v \in S$, si on prend un sommet de degré deux dans S celui-ci est α-dominé un seul sommet de degré $n + 1$ et au final nous obtenons un ensemble α-dominant plus grand que S. Par conséquent $|S| \geq i$. Soit le graphe $T(K_{1,n}) = \{v_1, u_1, v_2, u_2, ..., v_n, u_n, v\}$, et soit

$$S = \bigcup_{k=1}^{i-1} \{u_k\} \cup \{v\},$$

et comme S est un α-dominant, alors $|S| = i$. On déduit que $\gamma_\alpha(T(K_{1,n})) = i$.

Si $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$. Soit S un γ_α-ensemble de $T(K_{1,n})$, dans ce cas les sommets de degré deux qui n'appartiennent pas à S sont un α-dominant si $\lceil \alpha d_G(x) \rceil = 2$, alors pour α-dominer tous ces sommets il faut prendre le sommet de degré $2n$ et les sommets de degré $n + 1$ ou le sommet de degré $2n$ et les sommets de degré 2, il est simple de voir que si on non prend pas v dans S on obtient un ensemble α-dominant plus grand ou égal à $n + 1$ donc on prend v et soit tous les sommets de degré $n + 1$, soit un nombre de sommets de degré 2 et les sommets de degré $n + 1$ mais si on prend les sommets de degré 2, il faut prendre au moins $\lceil \alpha d_G(x) \rceil - 2$ (où x est un sommet de degré $n + 1$) sommets de degré $n + 1$ dans S si le voisin de degré 2 est dans S. Il faut prendre au moins $\lceil \alpha d_G(x) \rceil - 1$ sommets de degré $n + 1$ dans S si le voisin de degré 2 est n'est pas dans S. Donc dans tous ces cas on obtient que $|S| \geq n+1$. Soit le graphe $T(K_{1,n}) = \{v_1, u_1, v_2, u_2, ..., v_n, u_n, v\}$. Soit

$$S = \bigcup_{k=1}^{n} \{u_k\} \cup \{v\},$$

et comme S est un α-dominant, alors $|S| = n+1$. Donc on déduit que $\gamma_\alpha(T(K_{1,n})) = n+1$.

$\square$

Exemple:

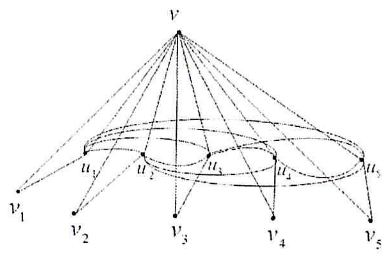


Figure 4.11. $\gamma_\alpha(T(K_{1,5})) =$

1 si $0 < \alpha \leq \frac{1}{6}$,

2 si $\frac{1}{6} < \alpha \leq \frac{1}{3}$,

3 si $\frac{1}{3} < \alpha \leq \frac{1}{2}$, et

6 si $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$.

3.7 Le graphe adjoint d'un graphe

Dans cette section, on détermine le nombre de α-domination $\gamma_\alpha(G)$ du graphe adjoint de certaines classes de graphes à savoir les chaînes P_n, les cycles C_n, les étoiles $K_{1,n}$, et les soleils S_n.

Définition 3.26. *Le graphe adjoint d'un graphe G est noté par $L(G)$, est le graphe défini de la façon suivante :*

(i). *chaque sommet de $L(G)$ représente une arête de G.*

(ii). *deux sommets de $L(G)$ sont adjacents si et seulement si les arêtes correspondantes partagent une extrémité commune dans G.*

3.7.1 Le graphe adjoint de P_n, et C_n

Le graphe adjoint d'une chaîne $L(P_n)$ d'ordre n est une chaîne d'ordre $n-1$. Le graphe adjoint d'un cycle $L(C_n)$ d'ordre n est un cycle d'ordre $n-1$.

Théorème 3.27.

$$\gamma_\alpha(L(P_n)) = \gamma_\alpha(P_{n-1}) = \begin{cases} \lceil \frac{n-1}{3} \rceil & si\ 0 < \alpha \leq \frac{1}{2} \\ \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor & si\ \frac{1}{2} < \alpha \leq 1 \end{cases}.$$

$$\gamma_\alpha(L(C_n)) = \gamma_\alpha(C_n) = \begin{cases} \lceil \frac{n}{3} \rceil & si\ 0 < \alpha \leq \frac{1}{2} \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil & si\ \frac{1}{2} < \alpha \leq 1 \end{cases}.$$

3.7.2 Le graphe adjoint de $K_{1,n}$

Théorème 3.28. $\gamma_\alpha(L(K_{1,n})) = \gamma_\alpha(K_n) = \lceil \alpha(n-1) \rceil$.

Preuve. Le graphe adjoint de $K_{1,n}$ est un graphe complet à n sommets. Par la Proposition 2.5 on déduit que le nombre de α-domination du graphe complet $K_{1,n}$ est $\lceil \alpha(n-1) \rceil$. Par conséquent $\gamma_\alpha(L(K_{1,n})) = \lceil \alpha(n-1) \rceil$. □

3.7.3 Le graphe adjoint de S_n

Le graphe adjoint d'un soleil $L(S_n)$ d'ordre n est un graphe milieu du cycle $M(C_n)$ d'ordre n. Alors on obtient le théorème suivant:

Théorème 3.29.

$$\gamma_\alpha(L(S_n)) = \gamma_\alpha(M(C_n)) = \begin{cases} \lceil \frac{n}{2} \rceil & si\ 0 < \alpha \leq \frac{1}{2} \\ n & si\ \frac{1}{2} < \alpha \leq 1 \end{cases}.$$

CHAPITRE 4

Criticité relative au nombre de la α-domination

Dans ce chapitre, on étudie la criticité par rapport au nombre de α-domination. La première section est consacrée à la suppression d'un sommet, on va d'abord présenter les travaux de N. Jafari Rad et al [7] et quelques résultats connus quand la suppression d'un sommet diminue le nombre de α-domination. Ensuite, on donne des caractérisations de quelques graphes quand la suppression d'un sommet stabilise le nombre de α-domination.

4.1 Comportement du nombre de la α-domination vis-à-vis de la suppression d'un sommet d'un graphe

4.1.1 Résultats préliminaires et résultats connus

Dans cette partie, on cite quelques résultats préliminaires et des résultats connus quand la suppression d'un sommet diminue le nombre de α-domination obtenus par N.Jafari Rad et al [7].

Pour un $\gamma_\alpha(G)$-ensemble S d'un graphe G et un sommet $x \in S$, si $S - \{x\}$ est un ensemble α-dominant de $G - x$, alors on dénote $pn(x, S) = \{x\}$.

Rappelons qu'un graphe G est γ_α^--sommet-enlevé-critique, si la suppression de n'importe quel sommet $v \in V(G) - S(G)$ diminue le nombre de α-domination c-à-d $\gamma_\alpha(G - v) < \gamma_\alpha(G)$. Aussi $S(G)$ représente l'ensemble des sommets supports de G.

Observation 4.1. Dans n'importe quel graphe $G \neq P_2$, il y a un $\gamma_\alpha(G)$-ensemble contenant tous les sommets support de G pour $0 < \alpha \leq 1$.

Proposition 4.1. *Soit G un graphe sans sommets isolés. Pour tout sommet $v \in V(G) - S(G)$ et pour tout $0 < \alpha \leq 1$, on a $\gamma_\alpha(G) - 1 \leq \gamma_\alpha(G - v) \leq \gamma_\alpha(G) + d_G(v) - 1$ et ses bornes sont atteintes.*

Preuve. Soit G un graphe sans sommets isolés et $v \in V(G) - S(G)$. Soit S un $\gamma_\alpha(G)$-ensemble. Si $v \notin S$, alors S est un ensemble α-dominant de $G - v$, et donc $\gamma_\alpha(G - v) \leq \gamma_\alpha(G)$. Ainsi, on suppose que $v \in S$, alors $S \cup N_G(v) - \{v\}$ est un ensemble α-dominant pour $G - v$, et donc $\gamma_\alpha(G - v) \leq \gamma_\alpha(G) + d_G(v) - 1$.Pour la borne inférieure. Supposons que D est un $\gamma_\alpha(G - v)$-ensemble. Alors $D \cup \{v\}$ est un ensemble α-dominant pour G, donc $\gamma_\alpha(G) - 1 \leq \gamma_\alpha(G - v)$.

□

Pour voir que la borne supérieure est atteinte, on considère x le centre d'une étoile $K_{1,k}$ pour $k \geq 2$, et $\alpha \leq 1/2$. Soit G obtenu à partir de $K_{1,k}$ en subdivisant chaque arête de $K_{1,k}$trois fois. Notons que G a $3k$ sommets de degré deux, k sommets de degré un, et un sommet de degré k (le sommet x). Il est facile de voir que $\gamma_\alpha(G) = k + 1$ et $\gamma_\alpha(G - x) = 2k$. Pour voir que la borne inférieure est atteinte, considérons un cycle C_4, il est clair que $\gamma_\alpha(G - x) = 1$ et $\gamma_\alpha(G) = 2$.

Notons que pour un graphe G sans sommets isolés, si $V(G) - S(G) = \emptyset$, alors G est γ_α^--sommet-enlevé-critique. Donc P_2 est évidemment un graphe γ_α^--sommet-enlevé-critique car $V(P_2) - S(P_2) = \emptyset$.

A partir de la proposition précédente, on peut dire qu'un graphe G est γ_α^--sommet-enlevé-critique si et seulement si $\gamma_\alpha(G-v) = \gamma_\alpha(G)-1$ pour tout sommet $v \in V(G)-S(G)$ car pour les sommets supports v, on a $\gamma_\alpha(G - v) \geq \gamma_\alpha(G)$.

Nous commençons par une première caractérisation des graphes γ_α^--sommet-enlevé-critique.

Proposition 4.2. *[7] Un graphe G est un γ_α^--sommet-enlevé-critique si et seulement si pour tout sommet x qui n'est pas un sommet support, il exite un $\gamma_\alpha(G)$-ensemble S contenant x tel que $pn\ (x, S) = \{x\}$.*

Preuve. On montre la condition nécessaire. Soient G un γ_α^--sommet-enlevé-critique et $x \notin S(G)$, alors $\gamma_\alpha(G - x) = \gamma_\alpha(G) - 1$. Soit S un $\gamma_\alpha(G - x)$-ensemble. Il est évident que $D = S \cup \{x\}$ est un $\gamma_\alpha(G)$-ensemble avec $pn(x, D) = \{x\}$.
On montre la condition suffisante. Soient $x \notin S(G)$ et S un $\gamma_\alpha(G)$-ensemble contenant x tel que $pn(x, S) = \{x\}$. Alors $S - \{x\}$ est un $\gamma_\alpha(G - x)$-ensemble, ce qui implique que

$\gamma_\alpha(G-x) = \gamma_\alpha(G) - 1$. Donc G est un γ_α^--sommet-enlevé-critique. □

Puisque $\gamma_\alpha(K_{1,n}) = 1$, on obtient le résultat suivant:

Lemme 4.3. *[7] Le graphe $K_{1,n}$ est un γ_α^--sommet-enlevé-critique si et seulement si $n = 1$.*

Proposition 4.4. *[7] Chaque sommet support dans un graphe γ_α^--sommet-enlevé-critique est adjacent à exactement une feuille.*

Preuve. Soit G un γ_α^--sommet-enlevé-critique. Supposons qu'il y a un sommet support x tel que x est adjacent à deux feuilles x_1 et x_2. Par le Lemme 4.3, on peut supposer que $N(x)$ contient un sommet de degré au moins deux. Alors x est un sommet support en $G - x_1$. Par l'observation 4.1, soit S un $\gamma_\alpha(G - x_1)$-ensemble tel que $x \in S$. Alors S est un ensemble α-dominant pour G, une contradiction. □

Observation 4.2. L'étoile subdivisée n'est pas un γ_α^--sommet-enlevé-critique.

Théorème 4.5. *[7] Soit H un graphe connexe d'ordre au moins deux. Alors $G = cor(H)$ est un graphe γ_α^--sommet-enlevé-critique.*

Preuve. Puisque $G = cor(H)$, alors chaque sommet x de G est soit une feuille soit un sommet support adjacent à exactement une feuille. Nous observons que $\gamma_\alpha(G) = |S(G)|$. Soit x une feuille (sommet pendant) de G. Nous montrons que $\gamma_\alpha(G-x) < \gamma_\alpha(G)$. Soit y le sommet support qui adjacent à x. Puisque H est un graphe connexe d'ordre au moins deux, alors il existe un sommet $z \in N(y)$ tel que $d_G(z) > 1$, puis z est un sommet support. Alors $S(G) - \{y\}$ est un ensemble α-dominant pour $G - x$, ce qui implique que $\gamma_\alpha(G-x) < \gamma_\alpha(G)$. Donc G est un γ_α^--sommet-enlevé-critique. □

Soit $\mathcal{F}$ la classe de tous les arbres T telle que $T \in \mathcal{F}$ si et seulement si:

(1). $T = P_2$, ou

(2). $diam(T) \geq 3$, et pour tout sommet x de T, soit x une feuille soit un support adjacent à exactement une feuille.

$\mathcal{F}$ est la famille des arbres qui sont les couronnes d'arbres d'ordre $n \geq 1$.

Proposition 4.6. *[7] Un arbre T est un γ_α^--sommet-enlevé-critique pour $0 < a \leq 1/\Delta(T)$ si et seulement si $T \in \mathcal{F}$.*

Preuve. $\Longleftarrow$). Il est évident que P_2 est un γ_α^--sommet-enlevé-critique. Si $T \neq P_2$ est un arbre dans $\mathcal{F}$, alors le Théorème 4.5 implique que T est un γ_α^--sommet-enlevé-critique.

$\Longrightarrow$). Soit T un arbre γ_α^--sommet-enlevé-critique. Si $diam(T) = 1$, alors $T = P_2$ et donc $T \in \mathcal{F}$. Si $diam(T) = 2$, alors par le Lemme 4.3, on obtient que T n'est pas un γ_α^--sommet-enlevé-critique. Ainsi, nous supposons que $diam(T) \geq 3$. Nous montrons que tous les sommets de T est soit une feuille, soit un sommet support.

Soit y le sommet de T tel que y ne soit ni une feuille, ni un sommet support. Si chaque feuille de T est à distance deux de y, alors par la Proposition 4.4, y est le centre d'une étoile subdivisée, une contradiction avec l'observation 4.2. Ainsi supposons qu'il existe une feuille x dans T telle que $d(x, y) \geq 3$. Soient $d(x, y) = t$ et $P : (x, x_1, x_2, ..., (x_t = y))$ la plus courte chaîne entre x et y. Si x_2 n'est pas un sommet support, alors par la Proposition 4.2, il y a un $\gamma_\alpha(T)$-ensemble S contenant x_2 tel que $pn(x_2, S) = \{x_2\}$, alors $\{x_1, x\} \cap S \neq \emptyset$. Puisque $\alpha\Delta(T) \leq 1$, on voit que $(S - \{x, x_2\}) \cup \{x_1\}$ est un ensemble α-dominant pour T, une contradiction. Ainsi, x_2 est un sommet support. Soit y_2 une feuille adjacent à x_2. Si x_3 n'est pas un sommet support, alors par la Proposition 4.2, il y a un $\gamma_\alpha(T)$-ensemble S contenant x_3 tel que $pn(x_3, S) = \{x_3\}$. Mais $S \cap \{x_2, y_2\} \neq \emptyset$. Ensuite, $S_1 = (S - \{y_2\}) \cup \{x_2\}$ est un $\gamma_\alpha(T)$-ensemble de telle sorte que $pn(x_3, S_1) = \{x_3\}$ et $x_2 \in S_1$. Alors $S_1 - \{x_3\}$ est un α-dominant de T, une contradiction. Ainsi, x_3 est un sommet support. En poursuivant ce processus, on obtient que $x_i \in S(T)$ pour $i = 1, 2, ..., t-1$. Par la Proposition 4.2, il y a un $\gamma_\alpha(T)$-ensemble D contenant y tel que $pn(y, D) = \{y\}$. On pout supposer que $x_{t-1} \in D$, puisque $x_{t-1} \in S(T)$. Alors $D - \{y\}$ est un ensemble α-dominant pour T, une contradiction. $\square$

Proposition 4.7. *[7] (1). Pour $0 < \alpha \leq 1/2$, la chaîne P_n est γ_α^--sommet-enlevé-critique si et seulement si $n \in \{2, 4\}$.*

(2). Pour $1/2 < \alpha \leq 1$, la chaîne P_n est γ_α^--sommet-enlevé-critique si et seulement si $n = 2k$.

Preuve. Si $0 < \alpha \leq 1/2$, alors le résultat découle du Théorème 4.6.

Supposons ensuite que $1/2 < \alpha \leq 1$. Par la Proposition 2.3, on a $\gamma_\alpha(P_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Soit $n = 2k$ pour un entier $k \geq 1$. Il est facile de voir que P_2 et P_4 sont γ_α^--sommet-enlevé-critique. Ainsi, on suppose que $n \geq 6$. Soit x un sommet qui n'est pas un sommet support. Si x est une feuille alors par la Proposition 2.3, on obtient

$$\gamma_\alpha(P_n - x) = \gamma_\alpha(P_{n-1}) = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Supposons maintenant que x n'est pas une feuille. Soit $G = P_n - x$. Alors G a deux composantes P_{n_1} et P_{n_2}. Alors nous supposons que n_1 est pair et n_2 est impair, alors

$$\gamma_\alpha(G) = \gamma_\alpha(P_{n_1}) + \gamma_\alpha(P_{n_2}) = \left\lfloor \frac{n_1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n_2}{2} \right\rfloor.$$

un calcul simple montre que $\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Ainsi, P_n est un γ_α^--sommet-enlevé-critique.

Enfin, nous montrons que P_n n'est pas un γ_α^--sommet-enlevé-critique si n est impair. Soit x une feuille et soit n est impair. Alors $\gamma_\alpha(P_n) = \gamma_\alpha(P_{n-1})$, puisque $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$. □

On utilise la Proposition 2.4, et de la même manière on obtient la proposition suivante.

Proposition 4.8. *[7] (1). Pour $0 < \alpha \leq 1/2$, le cycle C_n est γ_α^--sommet-enlevé-critique si et seulement si $n \equiv 1 \bmod 3$.*

(2). Pour $1/2 < \alpha \leq 1$, le cycle C_n est toujours γ_α^--sommet-enlevé-critique.

Preuve. Si $0 < \alpha \leq 1/2$, par la Proposition 2.4, on a $\gamma_\alpha(C_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$. Alors

$$\gamma_\alpha(C_n - x) = \gamma_\alpha(C_{n-1}) = \left\lceil \frac{n-1}{3} \right\rceil < \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil, \text{ si } n \equiv 1 \bmod 3.$$

car si $n \equiv 1 \bmod 3$. on a $\gamma_\alpha(C_n - x) = \lceil \frac{n-1}{3} \rceil = \frac{n-1}{3} < \frac{n+2}{3} = \gamma_\alpha(C_n)$. Donc C_n est γ_α^--sommet-enlevé-critique.

Enfin, on montre que C_n n'est pas γ_α^--sommet-enlevé-critique si $n \equiv 0, 2 \bmod 3$. On a $\gamma_\alpha(C_n - x) = \lceil \frac{n-1}{3} \rceil = \lceil \frac{n}{3} \rceil = \gamma_\alpha(C_n)$, alors $\gamma_\alpha(C_n) = \gamma_\alpha(C_n - x)$.

Si $0 < \alpha \leq 1/2$, par la Proposition 2.4, on a $\gamma_\alpha(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Et par la Proposition 2.3, on obtient que

$$\gamma_\alpha(C_n - x) = \gamma_\alpha(P_{n-1}) = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor < \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

car si n est pair on a $\gamma_\alpha(C_n - x) = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor = \frac{n-2}{2} < \frac{n}{2} = \gamma_\alpha(C_n)$, et si n est impair on a $\gamma_\alpha(C_n - x) = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor = \frac{n-1}{2} < \frac{n+1}{2} = \gamma_\alpha(C_n)$. Donc C_n est γ_α^--sommet-enlevé-critique. □

Proposition 4.9. *[7] Un graphe complet K_n d'ordre $n \geq 2$ est un γ_α^--sommet-enlevé-critique si et seulement si*

$$\alpha > \frac{\lceil \alpha(n-2) \rceil}{n-1}.$$

Preuve. Par la Proposition 2.5, on a $\gamma_\alpha(K_n) = \lceil \alpha(n-1) \rceil$, alors le graphe complet K_n est un γ_α^--sommet-enlevé-critique si et seulement si $\lceil \alpha(n-2) \rceil < \lceil \alpha(n-1) \rceil$. Ceci est équivalent à $\lceil \alpha(n-2) \rceil < \alpha(n-1)$, ce qui est égale à $\alpha > \lceil \alpha(n-2) \rceil / n-1$. □

Proposition 4.10. *[7] Si $2 \leq m < n$, alors $K_{m,n}$ est γ_α^--sommet-enlevé-critique si et seulement si $m \geq \lceil \alpha m \rceil + \lceil \alpha n \rceil$,*

$$\alpha > \frac{\lceil \alpha(m-1) \rceil}{m} \text{ et } \alpha > \frac{\lceil \alpha(n-1) \rceil}{n}.$$

Preuve. Soient X et Y les deux parties de $G = K_{m,n}$ avec $|X| = m$ et $|Y| = n$. Supposons d'abord que $m < \lceil \alpha m \rceil + \lceil \alpha n \rceil$. Par la Proposition 2.6, on a $\gamma_\alpha(G) = m$. Soit S un $\gamma_\alpha(G-y)$-ensemble, où $y \in Y$. Alors la Proposition 2.6 implique que

$$\begin{aligned} |S| &= \gamma_\alpha(G-y) = \gamma_\alpha(K_{m,n-1}) \\ &= \min\{m, \lceil \alpha m \rceil + \lceil \alpha(n-1) \rceil\} \\ &\geq \min\{m, \lceil \alpha m \rceil + \lceil \alpha n \rceil - 1\} \geq m, \end{aligned}$$

et donc dans ce cas G n'est pas un γ_α^--sommet-enlevé-critique.

Supposons ensuite que $m \geq \lceil \alpha m \rceil + \lceil \alpha n \rceil$. Alors $\gamma_\alpha(G) = \lceil \alpha m \rceil + \lceil \alpha n \rceil$. Soit S_1 un $\gamma_\alpha(G-y)$-ensemble, où $y \in Y$, Soit S_2 un $\gamma_\alpha(G-x)$-ensemble, où $x \in X$. Alors avec le même raisonnement que la preuve de la Proposition 4.9, nous déduisons que G est un graphe γ_α^--sommet-enlevé-critique si et seulement si $\alpha > \lceil \alpha(m-1) \rceil / m$ et $\alpha > \lceil \alpha(n-1) \rceil / n$. □

4.1.2 Etude de la γ_α-sommet-enlevé-stable dans les graphes

On rappelle qu'un graphe est γ_α-sommet-enlevé-stable si et seulement si pour tout sommet v non support c-à-d qui appartient à $V(G) - S(G)$, on a $\gamma_\alpha(G-v) = \gamma_\alpha(G)$ pour tout $0 < \alpha \leq 1$.

Notre contribution dans cette section consiste à caractériser les graphes γ_α-sommet-enlevé-stable pour quelques familles de graphes simples comme l'étoile, l'étoile subdivisée, la chaîne et le cycle.

Lemme 4.11. *Le graphe $K_{1,n}$ est un graphe γ_α-sommet-enlevé-stable si et seulement si $n \geq 2$.*

Proposition 4.12. *L'étoile subdivisée est un graphe γ_α-sommet-enlevé-stable.*

Preuve. Puisque G est une étoile subdivisée, alors chaque sommet x de G est ou bien une feuille, ou bien un sommet support, ou bien un sommet z qui adjacent à tous les supports, nous observons que $\gamma_\alpha(G) = |S(G)|$. Soit x une feuille de G. On montre que $\gamma_\alpha(G - x) = \gamma_\alpha(G)$. Soit y le sommet support qui adjacent à x. alors $S(G) - \{y\}$ n'est pas un ensemble α-dominant pour $G - x$, alors il faut prendre le sommet z qui adjacent à tous les supports, donc $(S(G) - \{y\}) \cup \{z\}$ est un ensemble α-dominant pour $G - x$, ce qui implique que $\gamma_\alpha(G - x) = \gamma_\alpha(G)$. Soit z le sommet qui adjacent à tous les supports dans G. Soit S un $\gamma_\alpha(G)$-ensemble, comme z est adjacent à tous les supports et $|S| = |S(G)| = \gamma_\alpha(G)$ alors S est un $\gamma_\alpha(G - x)$-ensemble. Donc $\gamma_\alpha(G) = \gamma_\alpha(G - x)$. Par conséquent G est un γ_α-sommet-enlevé-stable. □

Proposition 4.13. *(1). Pour $0 < \alpha \leq 1/2$, le cycle C_n est γ_α-sommet-enlevé-stable si et seulement si $n \equiv 0, 2 \bmod 3$.*

(2). Pour $1/2 < \alpha \leq 1$, le cycle C_n n'est pas γ_α-sommet-enlevé-stable.

Preuve. Pour $0 < \alpha \leq 1/2$, Par la Proposition 2.4, on a $\gamma_\alpha(C_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$, Si x est un sommet de C_n alors par la Proposition 2.3, on obtient

$$\gamma_\alpha(C_n - x) = \gamma_\alpha(P_{n-1}) = \left\lceil \frac{n-1}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil . \text{ si } n \equiv 0, 2 \mod 3.$$

car si $n \equiv 0 \bmod 3$, on a $\gamma_\alpha(C_n - x) = \lceil \frac{n-1}{3} \rceil = \frac{n}{3} = \gamma_\alpha(C_n)$, si $n \equiv 2 \bmod 3$, on a $\gamma_\alpha(C_n - x) = \lceil \frac{n-1}{3} \rceil = \frac{n+1}{3} = \gamma_\alpha(C_n)$. Donc C_n est γ_α-sommet-enlevé-stable.

Enfin, on montre que C_n n'est pas γ_α-sommet-enlevé-stable si $n \equiv 1 \bmod 3$. donc on a $\gamma_\alpha(C_n - x) = \lceil \frac{n-1}{3} \rceil = \frac{n-1}{3} < \frac{n+2}{3} = \gamma_\alpha(C_n)$, alors $\gamma_\alpha(C_n) > \gamma_\alpha(C_n - x)$.

Pour $1/2 < \alpha \leq 1$. Par la Proposition 4.8, le cycle C_n est toujours un γ_α^--sommet-enlevé-critique. D'où on obtient le résultat. □

Proposition 4.14. *(1). Pour $0 < \alpha \leq 1/2$, la chaîne P_n est γ_α-sommet-enlevé-stable si et seulement si $n \in \{3, 6\}$ et $n \equiv 2 \mod 3$ avec $n \neq 2$.*

(2). Pour $1/2 < \alpha \leq 1$, la chaîne P_n est γ_α-sommet-enlevé-stable si et seulement si $n \in \{1, 3, 5\}$.

Preuve. (1). Pour $0 < \alpha \leq 1/2$. Par la Proposition 2.3, on a $\gamma_\alpha(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$. Si x est une feuille alors par la Proposition 2.3, on obtient

$$\gamma_\alpha(P_n - x) = \gamma_\alpha(P_{n-1}) = \left\lceil \frac{n-1}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \text{ si } n \equiv 0, 2 \mod 3.$$

car si $n \equiv 0 \mod 3$, on a $\gamma_\alpha(P_n - x) = \lceil \frac{n-1}{3} \rceil = \frac{n}{3} = \gamma_\alpha(P_n)$, si $n \equiv 2 \mod 3$, on a $\gamma_\alpha(P_n - x) = \lceil \frac{n-1}{3} \rceil = \frac{n+1}{3} = \gamma_\alpha(P_n)$. Supposons maintenant que x n'est pas une feuille. Si $n \equiv 0 \mod 3$. Soit x le sommet de la cinquième position de P_n qui n'est pas un sommet support de P_n, alors $P_n - x$ contient deux composantes P_{n_1} et P_{n_2} tel que P_{n_1} est une chaîne P_4 et P_{n_2} est une chaîne d'ordre $n - 5$, par la Proposition 2.3, on obtient que $\gamma_\alpha(P_4) = 2$, et $\gamma_\alpha(P_{n-5}) = \lceil \frac{n-5}{3} \rceil = \frac{n-3}{3}$ car $n_2 \equiv 1 \mod 3$, un calcul simple montre que $\lceil \frac{n-5}{3} \rceil + 2 > \lceil \frac{n}{3} \rceil$. Donc $\gamma_\alpha(P_n - x) > \gamma_\alpha(P_n)$. Ainsi, P_n n'est pas γ_α-sommet-enlevé-stable si $n \equiv 0 (\text{mod } 3)$ et $n \neq 3, 6$.

Si $n \equiv 2 \mod 3$. Soit x le sommet de P_n. $P_n - x$ contient deux composantes P_{n_1} et P_{n_2}. On distingue deux cas : si $n_1 \equiv 0 \mod 3$ et $n_2 \equiv 1 \mod 3$, alors

$$\gamma_\alpha(P_n - x) = \gamma_\alpha(P_{n_1}) + \gamma_\alpha(P_{n_2}) = \frac{n_1}{3} + \frac{n_2 + 2}{3},$$

un calcul simple montre que $\frac{n_1}{3} + \frac{n_2+2}{3} = \frac{n+1}{3} = \gamma_\alpha(P_n)$. Si $n_1 \equiv 2 \mod 3$ et $n_2 \equiv 2 \mod 3$, alors

$$\gamma_\alpha(P_n - x) = \gamma_\alpha(P_{n_1}) + \gamma_\alpha(P_{n_2}) = \frac{n_1 + 1}{3} + \frac{n_2 + 1}{3},$$

un calcul simple montre que $\frac{n_1+1}{3} + \frac{n_2+1}{3} = \frac{n+1}{3} = \gamma_\alpha(P_n)$. Ainsi, P_n est γ_α-sommet-enlevé-stable.

(2). Pour $1/2 < \alpha \leq 1$, Par la Proposition 4.8, on sait que P_n est γ_α^--sommet-enlevé-critique si n est pair. Supposons que n est impair, il est simple de voir que P_1, P_3 et P_5 sont γ_α-sommet-enlevé-stable. On suppose que $n \geq 7$ et on montre que P_n n'est pas γ_α-sommet-enlevé-stable. Soit x le sommet de la quatrième position de P_n qui n'est pas un sommet support. Alors $P_n - x$ a deux composantes P_{n_1} et P_{n_2}tel que P_{n_1} est une chaîne

P_3 et P_{n_2} est une chaîne d'ordre $n-4$, par la Proposition 2.3, on obtient que $\gamma_\alpha(P_3)=1$, et $\gamma_\alpha(P_{n-4})=\frac{n-5}{2}$. Donc $\frac{n-5}{2}+1\neq\frac{n-1}{2}$ où $\gamma_\alpha(P_n)=\frac{n-1}{2}$. Ce qui implique que P_n n'est pas γ_α-sommet-enlevé-stable si $n\geq 7$. Par conséquent P_n est γ_α-sommet-enlevé-stable si et seulement si $n\in\{1,3,5\}$.

$\square$

Conclusion

Dans le cadre de ce mémoire, on s'est intéressé principalement à l'étude du problème de la α-domination dans les graphes.

Dans les deux premiers chapitres, on a présenté certaines notions de base de la théorie des graphes et quelques résultats connus qui ont une relation avec le paramètre de α-domination.

Par la suite, on a énoncé notre contribution à savoir la détermination de bornes ou de valeurs exactes du nombre de α-domination pour certains types de graphes. En premier lieu, on a commencé par déterminer la valeur exacte des graphes tripartis complets, et on a donné des valeurs exactes et des bornes supérieures du graphe du Roi $K[s \times t]$, puis on a obtenu des résultats pour le cas des arbres.

En second lieu, on a déterminé le nombre de α-domination de certaines classes des graphes, comme le graphe roue, le graphe soleil, le graphe éventail, le graphe milieu de chaines, le graphe milieu de cycles, le graphe milieu d' étoiles, le graphe milieu de soleils, le graphe total de chaines, le graphe total de cycles, le graphe total d'étoiles, le graphe adjoint de chaines, le graphe adjoint de cycles, le graphe adjoint d'étoiles, et le graphe adjoint de soleils.

Par ailleurs, on a également etudié la notion de criticité par rapport au nombre de α-domination, puis on a donné quelques résultats quand la suppression d'un sommet laisse inchangé ce nombre (c-à-d quelques caractérisation de graphes simples γ_α-sommet-enlevée-stable comme l'étoile, étoile subdivisée, chaîne et cycles).

Certaines questions abordées dans ce mémoire ne sont pas complètement résolues. On recense ici celles qui d'après nous sont les plus intéressantes et peuvent faire l'objet de travaux futurs.

- Améliorer les bornes de nombre de α-domination pour le graphe du Roi.
- Etudier le paramètre de α-domination pour les produits de graphes.
- Etude des graphes γ_α^+-sommet-enlevé-critique.
- Etude des graphes γ_α-arête-enlevé-stable.

Références

[1] J.E. Dunbar, D.G. Hoffman, R.C. Laskar and L.R. Markus, *α-domination*, Discrete Math.211 (2000), $1-21$.

[2] G. Chartrand, L. Lesniak, *Graphs and Digraphs*, Third ed, Chapman & Hall, London,1996.

[3] M. Liatti, *Personal communication*, 1995.

[4] F. Dahme, D. Rautenbach, and L. Volkmann, *Some remarks on α-domination*, Discussiones Mathematicae Graph Theory 24 (2004), $423-430$.

[5] M. Lemańska, *Lower bound on the domination number of a tree.* Discuss.Math. Graph Theory 24 (2) (2004) $165-169$.

[6] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi et P.J. Slater, *Fundamentals of domination in Graphs.* Marcel Dekker, New York, 1998.

[7] N.Jafari Rad, L.Volkmann, *Vertex-removal in α-domination*, Filomat $26:6$ (2012), $1257-1262$.

[8] J. Fulman, D. Hanson, and G. MacGillivray, *Vertex domination-critical graphs*, Networks 25(1995), $41-43$.

[9] F. Dahme, D. Rautenbach and L. Volkmann, *α-domination perfect trees*, manuscript (2002), $3187-3198$.

[10] N.Jafari Rad, L.Volkmann, *Edge-removal and edge-addition in α-domination.* Graphs Comb. 32, (2016), $1155-1166$.

[11] Haynes, T.W., Hedetniemi, S.T., Slater, P.J. (eds): *Domination in Graphs: Advanced Topics.* Marcel Dekker Inc, New York (1998).

[12] Gagarin, A., Poghosyan, A., Zverovich, V.E, *Upper bounds for α-domination parameters.* Graphs Comb. 25 (4), $513-520$ (2009).

[13] Eugen J. Ionascu, Dan Pritikin and Stephen E. Wright, *k-Dependence and Domination in Kings Graphs*, The American Mathematical Monthly, Vol. 115, No 9 (Nov, 2008), $820-836$.

[14] D. Bauer, F. Harary, J. Nieminen, and C. L. Sufiel. *Domination alteration sets in graphs.* Discrete Math, $47: 153-161$, 1983.

[15] R. C. Brigham, P. Z. Chinn, and R. D. Dutton, *Vertex domination-critical graphs*, Networks 18 (1988), $173-179$.

[16] D.K.Thakkar and J.C. Bosamiya, *Vertex Covering Number of a Graph,* Mathematics Today Vol.27(June-2011) Proc. of Maths Meet. (2011) $30-35$.

[17] B. Thenmozhi, Dr. R. Prabha, *power domination of middle graph of path, cycle and star*, Volume 114 No. 5 2017, $13-19$.

[18] Mary .U, Jothilakshmi . G, *on harmonious coloring of $M(S_n)$ and $M(D_m^3)$*, Issue 4, Volume 4 (July-August 2014), $2250-1797$.

[19] K. Kavitha, N.G. David, *Dominator Chromatic Number of Middle and Total Graphs,* International Journal of Computer Applications, Volume 49- No.20, July 2012, $0975-8887$.

[20] Vivin J. Vernold, M. Venkatachalam and Ali M.M. Akbar, *a note on achromatic coloring of star graph families,* Filomat $23:3$ (2009), $251-255$.

جامعة البليدة - ١ - كلية العلوم مكتبة الكلية