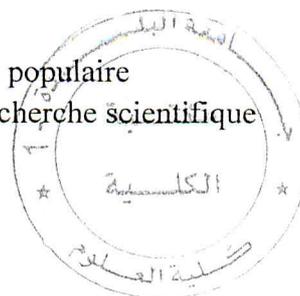


114 - 2014 - 2015
République algérienne démocratique et populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université BLIDA 1



Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'étude en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option :

Modélisation stochastiques et Statistique

Thème

Analyse de changement climatique par la théorie des valeurs extrêmes

Réalisés Par

KHEDDAOUI RADHIA

Devant le jury composé de :

O.TAMI

Z.DAHMANE

R. FRIHI

Président

Examinatrice

Promoteur

MA-510-26-1

Remerciements

Je souhaite d'abord exprimer ma profonde gratitude à mon promoteur, Mr R. FRIHI pour son soutien constant tout au long de la préparation de ce travail. Je le remercie pour son appui scientifique, qui m'a été indispensable, et aussi pour ses encouragements aux initiatives personnelles, ses orientations, ses conseils et sa disponibilité.

Je suis honoré que les professeurs O. TAMI et Z. DAHMANE d'accepter de faire partie du jury. Je leur adresse mes sincères remerciements pour l'intérêt qu'ils ont accordé à mon travail.

Dédicaces

Toutes les lettres ne sauraient trouver les mots qu'il faut...?.

Tous les mots ne sauraient exprimer la gratitude, l'amour,

Le respect, la reconnaissance...?

Ainsi, c'est tout simplement que

Je dédie ce mémoire :

A mes très chers parents, les prunelles de mes yeux,

A ma mère ZAHRA qui n'a jamais cessé de ménager ses efforts pour que j'atteigne ce niveau .Ni sacrifices, ni privatisations ne l'ont empêché d'accomplir son devoir de mère soucieuse de l'avenir de ses enfants.

A mon cher papa MOHAMED qui a su se montrer patiente, compréhensif et encourageant, sa chaleur paternelle a été et sera toujours pour moi d'un grand réconfort.

A mon mari ISMAIL et sa famille, a ma petite fille TASNIME.

A ma sœur SOUMIA et mes frères AYOUB, BILAL et SOHEIB que Dieu vous garde et vous protège et que votre chemin soit plein succès.

A tous mes amies

YASMINE, ASSIA, ASMA, AMEL et à mon chère amie HASSINA pour leur aide et leur soutien que dieu vous protège et vous préserve.

A ma grande famille ; mes cousins et mes cousines et a toutes les personnes que j'aime.

RADHA

Table des matières

I	APPROCHE THÉORIQUE ET NOTIONS DE BASE	6
1.1	Les lois de probabilité [10,7]	7
1.2	Convergence et théorèmes limites [10,7]	10
1.2.1	Convergence de variables aléatoires	11
1.2.2	Théorèmes limites	11
1.3	Inférence statistique [3,12]	13
1.3.1	Modèle paramétrique	13
1.3.2	Modèle non paramétrique	13
1.4	Estimation [12]	14
1.4.1	Estimation paramétrique	14
1.4.2	Estimation non paramétrique	16
II	THÉORIE DES VALEURS EXTRÊMES	20
2.1	Introduction	21
2.2	Lois des valeurs extrêmes [6,13,15,16]	22
2.3	Loi des valeurs extrêmes généralisées [3,14]	27
2.3.1	Estimation du quantile des valeurs extrêmes	27
2.4	Loi de Pareto généralisée [1,6]	29
2.4.1	Estimation du quantile de loi de Pareto généralisée	30

2.5	Quantile extrême (niveau de retour) [3]	31
III ESTIMATION DES PARAMÈTRES EXTRÊMES		33
3.1	Estimation des paramètres de la loi des valeurs extrêmes [3,7,11,17]	34
3.1.1	Méthode du maximum de vraisemblance (Prescott et Walden, 1980, 1983)	34
3.1.2	Méthode des moments pondérés (Hosking et al)	35
3.1.3	Méthode des moments pondérés généralisés	36
3.1.4	Amélioration de l'estimateur par la méthode de Rao-Blackwell	37
3.2	Estimation des paramètres de GPD	38
3.2.1	Méthode du maximum de vraisemblance	38
3.2.2	Méthode des moments pondérés	40
3.3	Recherche du seuil	41
3.3.1	Méthode 1: Utilisation de la fonction moyenne des excès	41
3.3.2	Méthode 2 :(Estimation de Hill)[3,9]	42
3.3.3	Méthode 3 :(Test d'adéquation de Kolmogorov-Smirnov)[3,9]	42
IV APPLICATION À L'HYDROLOGIE		43
4.1	Introduction	44
4.2	Description de l'échantillon	44
4.3	Resumé descriptif	47

4.3.1	GEV	47
4.3.2	GPD	50
4.3.2.3	Conclusion	53

ملخص:

منذ بضع سنوات تلقي نظرية القيم المتطرفة الكثير من الاهتمام سواء من الناحية النظرية والممارسة.

ولها تأثير في مجالات مختلفة وهي الهيدرولوجيا ، الأرصاد الجوية، علم الأحياء، الهندسة والإدارة البيئية، التمويل، التأمين و العلوم الاجتماعية.....الخ

وأصبحت نظرية القيم المتطرفة اليوم أساسية في إدارة المخاطر في جميع هذه المجالات، لذلك يمكن لهذه التقنيات أن تساعد في دراسة كميات المخاطر.

Résumé

Depuis quelques années, la théorie des valeurs extrêmes a reçu beaucoup d'attention aussi bien sur le plan théorique que sur le plan pratique.

Les domaines d'applications sont en effet très variés : hydrologie, météorologie, biologie, ingénierie, gestion de l'environnement, finance, assurance, sciences sociales, et

En effet la gestion des risques est devenue aujourd'hui fondamentale dans tous ces domaines, ce type d'analyse basé sur la théorie des valeurs extrêmes pour analyser les risques donc ces techniques peuvent aider à l'étude quantitative des risques.

Introduction générale

Les événements extrêmes et catastrophiques (tremblements de terre, inondations, accidents nucléaires, crises monétaires ou financières, Krachs boursiers, chocs pétroliers, etc. . .) sont aujourd'hui un champ de recherche particulièrement actif, notamment par l'importance de leurs impacts économiques et sociaux.

Les domaines d'application utilisant les modèles de la théorie des valeurs extrêmes (TVE) n'ont cessé de se développer ces dernières années touchant des domaines variés.

-En hydrologie, domaine dans lequel la prévision des crues par exemple est particulièrement importante (Davison et Smith, 1990.Katz, 2002), et en météorologie (Coles et Watshaw, 1994.Smith, 2001. Klajnmi, 2003) où l'étude de la vitesse de vent, par exemple permet d'évaluer le degré de résistance des matériaux face à la pression exercée par le vent (au cours d'une tempête par exemple) sur les bâtiments ou les structures de génie civil.

-En assurance dont l'une des préoccupations est la prise en compte des grands sinistres (MC Neil et Al, 1997.Rootzen et Tajvidi, 1997. Longin, 1998), en finance, ces valeurs appelées "booms" ou "krachs" sont particulièrement importantes puisqu'elles sont associées au risque de défont des investisseurs, au risque de faillite des institutions financières et au risque systémique.

-Dans les domaines des sciences humaines et sociales, comme le domaine de la démographie.

Dans le chapitre 1, nous allons exposer brièvement un aperçu sur les lois des probabilités, ainsi les lois asymptotiques des échantillons indépendants de même loi.

Dans le chapitre 2, nous allons mettre en évidence, la notion de la théorie des valeurs extrêmes, ainsi que les théorèmes fondamentaux de cette théorie.

Dans le chapitre 3, nous allons donner un aperçu sur quelques méthodes d'estimation des paramètres extrêmes.

Dans le chapitre 4, nous allons faire une application de la théorie des valeurs extrêmes à des données hydrologiques et précisément aux précipitations.

Nous achevons ce travail par une conclusion générale.

CHAPITRE I

APPROCHE THÉORIQUE ET NOTIONS DE BASE

Dans ce chapitre, nous allons regrouper des définitions et des résultats sur la statistique classique.

1.1 Les lois de probabilité [10, 7]

Il est toujours possible d'associer à une variable aléatoire, une loi probabilité.

Il existe deux types de lois, les lois discrètes et les lois continues.

On dit qu'une variable aléatoire est de type discret si le nombre de différentes valeurs qu'elle peut prendre est fini ou infini dénombrable, et une variable aléatoire qui peut prendre un nombre infini non dénombrable de valeurs est dite variable aléatoire de type continue.

Le tableau suivant résume les lois de probabilités de type discret.

Tableau-1-Les lois de probabilités de type discret.

Notation de loi de probabilité	Densité de probabilité	E(X)	Var(X)
Uniforme	$\forall i, p(X = i) = \frac{1}{n}$, avec $i \in \mathbb{N}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Bernoulli $X \rightsquigarrow B(1, p)$	$P(X=0)=q$ $P(X=1)=p$ avec $p+q=1$	p	pq
Binomiale $X \rightsquigarrow B(n, p)$	$P(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ avec $p+q=1$	np	npq

Le tableau suivant résume les lois de probabilités de type continue.

Tableau-2-les lois de probabilité de type continue.

Notation de loi de probabilité	Densité de probabilité	E(X)	Var(X)
Normale $X \rightsquigarrow N(\mu, \sigma^2)$	$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$ pour $-\infty < x < +\infty$	μ	σ^2
Gamma $X \rightsquigarrow G(\alpha, \lambda)$	$f_X(x) = \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} (\lambda x)^{\alpha-1} e^{-\lambda x}$ pour $x > 0, \alpha > 0$ et $\lambda > 0$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$
Weibull $X \rightsquigarrow W(\lambda, \beta)$	$f_X(x) = \lambda\beta x^{\beta-1} \exp(-\lambda x^\beta)$ pour $x > 0, \lambda > 0$ et $\beta > 0$	$\frac{\Gamma(1+\beta^{-1})}{\lambda^{\frac{1}{\beta}}}$	$\frac{\Gamma(1+2\beta^{-1}) - \Gamma^2(1+\beta^{-1})}{\lambda^{\frac{2}{\beta}}}$
Bêta $X \rightsquigarrow Be(\alpha, \beta)$	$f_X(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}$ pour $0 < x < 1$ où $\alpha > 0$ et $\beta > 0$	$\frac{\alpha}{\alpha + \beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta)^2}$
Lognormale $X \rightsquigarrow LN(\mu, \sigma^2)$	$f_X(x) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$ pour $x > 0$, où $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$	$e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$	$e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$
Student $X \rightsquigarrow T_n$	$f(T) = c(n) \left(1 + \frac{T^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$ et $c(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$	0, si $n > 2$	$\frac{n}{n-2}$, si $n > 2$
Pareto	$d(x) = a \frac{x_0^a}{x^{a+1}}$, pour $x \geq x_0, x_0 > 0$	$\frac{ax_0}{a-1}$, pour $a > 1$	$\frac{ax_0^2}{(a-1)^2(a-2)}$, pour $a > 2$
Cauchy	$p(x) = \frac{a}{\pi} \frac{1}{a^2 + x^2}$, $a \in \mathbb{R}$	non définie	non définie

Remarque 1.1.1

-Pour la distribution normale, si $\mu = 0$ et $\sigma = 1$.

$X \rightsquigarrow N(0, 1)$ est appelée normale centrée réduite.

-Pour la distribution Gamma on a:

La fonction Γ est définie par :

$$\Gamma(\mu) = \int_0^{\infty} x^{\mu-1} e^{-x} dx \quad \text{pour } \mu > 0.$$

Nous avons trois cas particuliers de la loi Gamma, à savoir :

1- Si α est un entier naturel, alors la loi est dite d'Erlang.

2- Si $\alpha = \frac{n}{2}$, où $n \in \{1, 2, \dots\}$ et $\lambda = \frac{1}{2}$, alors la distribution Gamma porte aussi le nom de distribution de Khi-deux (ou Khi-carré) de n degrés de liberté et on note : $X \rightsquigarrow \chi_n^2$.

3- Si $\alpha = 1$, alors la fonction densité f_X devient : $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, pour $x > 0$.

La distribution est dite Exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, on écrit : $X \rightsquigarrow \exp(\lambda)$.

D'espérance : $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ et de variance : $\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

-Pour la distribution de Weibull, nous remarquons que si $\beta = 1$, la distribution de Weibull généralise la distribution exponentielle.

-Pour la distribution bêta, nous avons un cas particulier.

si $\alpha = \beta = 1$, alors on a :

pour $a < x < b$

$$X \rightsquigarrow U(a, b) \text{ si } f_X(x) = \frac{1}{b-a} \text{ pour } a < x < b.$$

Avec : $E(X) = \frac{a+b}{2}$ et $\text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

-Pour la distribution de Cauchy, nous remarquons que tous les moments divergent.

-Il est important de citer que la loi de Pareto et la loi de Cauchy ne sont pas de la famille exponentielle.

Remarque 1.1.2

Il existe deux coefficients importants qui décrivent la dissymétrie et l'aplatissement de la densité de probabilité.

à savoir le coefficient de dissymétrie (skewness en anglais), on dit aussi que c'est le premier paramètre de forme, si le coefficient positif, indique une distribution décalée à gauche de la médiane donc la queue étalée vers la droite, et s'il est négatif, la queue étalée vers la gauche.

Le deuxième coefficient d'aplatissement (kurtosis en anglais), c'est le deuxième paramètre de forme, il mesure la disposition des valeurs de probabilités autour de la moyenne.

La skewness est donné par:

$$\gamma_1 = E\left(\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)^3\right) \quad (1.1.1)$$

Lorsque cette espérance existe, elle est notée

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}$$

Et kurtosis est donné par:

$$\beta_2 = E\left(\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)^4\right) \quad (1.1.2)$$

Lorsque cette espérance existe, est noté par:

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

Où μ_i sont les moments centrés d'ordre i .

1-Si $X \rightsquigarrow N(0, 1)$

Skewness (X)=0.

Kurtosis (X)=2.95 \simeq 3.

2-Si $X \rightsquigarrow t_n$

Skewness (X)=0.

Kurtosis (X)=3.98 \simeq 4.

La loi normale et la loi de student symétriques par rapport à l'axe des ordonnées et la loi normale est plus aplatie par rapport à la loi de student.

1.2 Convergence et théorèmes limites [10,7]

Il existe deux théorèmes limite qui sont à la base des probabilités et des statistiques. La loi des grands nombres et le théorème central limite. Tout d'abord il est important de définir la notion de convergence.

1.2.1 Convergence de variables aléatoires

Les théorèmes limite traduisent la convergence de suites de variables aléatoires vers des limites, qui peuvent être déterministes mais aussi aléatoires. On a trois types de convergence la convergence en probabilité (P), la convergence en loi (L) et la convergence presque sûre (ps).

1.2.2 Théorèmes limites

En littérature statistique, on trouve deux résultats importants sur la convergence des suites de variable aléatoire indépendantes, à savoir la loi des grands nombres et le théorème central limite.

1.2.2.1 Loi des grands nombres

La loi des grands nombres est le première résultat fondamental de la théorie des probabilités.

Elle concerne la moyenne arithmétique de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.

Théorème 1.2.1

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires de même loi, telle que $E[|X_1|] < +\infty$.

Alors lorsque n tend vers l'infini, on a :

$$\frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \underset{p}{\overset{p.s}{\rightsquigarrow}} E[X_1] \quad (1.2.1)$$

Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left[\left|\frac{S_n}{n} - E(X_1)\right| > \varepsilon\right] = 0$$

Remarque 1.2.2

Il existe $A \subset \Omega$ tels que $P(A)=1$ et $\forall w \in A$, on a

$$\frac{S_n(w)}{n} = \frac{X_1(w) + \dots + X_n(w)}{n} \rightsquigarrow E(X_1).$$

Et

$$P[w \in \Omega \setminus \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n(w)}{n} = E(X_1)] = 1$$

1.2.2.2 Théorème limite central (T L C)

Le théorème limite central est un raffinement de la loi des grands nombres, il précise à quelle vitesse a lieu cette convergence, et comment la moyenne arithmétique fluctue autour de sa limite.

Théorème 1.2.3 (T L C):

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, telle que $E(|X_1|) < +\infty$ et $E(|X_1|^2) < +\infty$.

On note $m = E(X_1)$ et $\sigma^2 = Var(X_1)$.

Alors, lorsque n tend vers l'infini, on a:

$$\sqrt{n} \left(\frac{S_n}{n} - m \right) = \frac{(X_1 - m) + \dots + (X_n - m)}{\sqrt{n}} \overset{loi}{\rightsquigarrow} N(0, \sigma^2) \quad (1.2.2)$$

Ou de manière équivalente

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \left(\frac{S_n}{n} - m \right) = \frac{(X_1 - m) + \dots + (X_n - m)}{\sigma \sqrt{n}} \overset{loi}{\rightsquigarrow} N(0, 1)$$

Autrement dit, pour tout x dans \mathbb{R} , lorsque n tend vers l'infini, on a:

$$p\left[\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\frac{S_n}{n} - m\right) \leq x\right] \rightsquigarrow P(N(0,1) \leq x)$$

Ou encore pour tout intervalle $[a, b] \in \mathbb{R}$:

$$p\left[\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\frac{S_n}{n} - m\right) \in [a, b]\right] \rightsquigarrow P(N(0,1) \in [a, b])$$

1.3 Inférence statistique [3,12]

Un modèle statistique est un objet mathématique associé à l'observation des données issues d'un phénomène aléatoire.

Une expérience statistique consiste à recueillir des observations d'un élément aléatoire X , à valeur dans un espace Ω , et dont on ne connaît pas exactement la loi de probabilité.

On distingue deux modèles différents, un modèle paramétrique et un modèle non paramétrique.

1.3.1 Modèle paramétrique

Dans un modèle paramétrique on suppose que le type de loi de X est connu, mais qu'il dépend d'un paramètre θ inconnue, de dimension d .

Alors, la famille de lois de probabilité possible pour X peut s'écrire $P = \{P_\theta, \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^d\}$.

Le problème principal est alors de faire de l'inférence statistique sur θ (estimer et tester).

1.3.2 Modèle non paramétrique

Un modèle non paramétrique P peut être :

- Un ensemble des lois de probabilité continues sur \mathbb{R} .
- Un ensemble des lois de probabilité dont le support est $[0, 1]$.
- Un ensemble des lois de probabilité sur \mathbb{R} symétriques par rapport à l'origine.
- Etc...

Dans ce modèle, il est possible de déterminer des estimations, des intervalles de confiance, effectuer des tests d'hypothèses, on peut effectuer des tests sur la valeur d'une espérance, tester si les observations sont indépendantes, tester si plusieurs échantillons proviennent de la même loi, etc. . .

De manière générale, la statistique non paramétrique regroupe l'ensemble des méthodes statistiques qui permettent de tirer de l'information pertinente de données sans faire l'hypothèse que la loi de probabilité de ces observations appartient à une famille paramétrée connue.

Un des problèmes de la statistique paramétrique est le risque dû à un mauvais choix de modèle, l'avantage de la statistique non paramétrique est de ne pas être soumise à cet aléa.

1.4 Estimation [12]

L'objet de la statistique est précisément la loi P_X , ou plus modestement d'estimer certaines de ses caractéristiques (moyenne, variance, etc. . .).

On appelle estimateur de θ toute quantité $\hat{\theta}_n$ qui est une fonction des données $(X_1, \dots, X_n) = (X_1(w), \dots, X_n(w))$.

Si on considère n observations x_1, \dots, x_n de X , l'estimateur $\hat{\theta}_n$ fournira une estimation de θ notée également $\hat{\theta} = f(x_1, \dots, x_n)$.

1.4.1 Estimation paramétrique

Dans un modèle statistique paramétrique on cherche à estimer le paramètre θ à partir de l'observation X , l'estimateur T doit vérifier certaines propriétés pour être de bonne qualité, il est sans biais et de variance minimale, c'est-à-dire $E(T) = \theta$ et la variance soit la plus petite possible.

$$\text{var}(T) = \min_{T_n} \text{var}(T_n) \text{ où } E(T_n) = \theta.$$

Il existe plusieurs méthodes d'estimation paramétrique comme la méthode des moments, la méthode du maximum de vraisemblance, la méthode de moindre carrée et l'estimation bayésienne.

1.4.1.1 Méthode des moments

La méthode des moments est un outil d'estimation. Elle consiste à estimer les paramètres recherchés en égalisant certains moments théoriques (qui dépendent de ces paramètres) avec leurs contreparties empiriques.

L'égalisation se justifie par la loi des grands nombres qui implique que l'on peut approcher une espérance mathématique par une moyenne empirique. On est donc amené à résoudre un système d'équations.

Définition 1.4.1

On suppose que l'échantillon (X_1, \dots, X_n) est un échantillon indépendamment et identiquement distribué (iid) selon une famille de lois paramétriques, paramétrée par θ .

Toute fonction des données de l'échantillon est donc une fonction $F(\theta)$. C'est particulièrement le cas des moments de la famille, si ceux-ci existent.

On sélectionne alors S moments $G = [m_1(\theta), \dots, m_s(\theta)]$. Qui définissent un vecteur. Il existe donc une fonction G qui est le vecteur composé des S moments d'échantillon, noté \hat{G} , cela signifie que l'on remplace le i -ème moment théorique, à savoir $E_\theta(X^i)$, par la quantité:

$$\hat{m}_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k^i .$$

L'estimateur de θ par la méthode des moments, noté $\hat{\theta}$. Consiste à résoudre l'équation vectorielle : $\hat{G} = G(\hat{\theta})$.

Dans certains cas, la méthode des moments n'est pas capable d'estimer les paramètres donc l'estimation se fait par la méthode du maximum de vraisemblance.

1.4.1.2 Méthode du maximum de vraisemblance

Dans un modèle paramétrique, la fonction de vraisemblance joue le rôle fondamental, où cette fonction est défini par :

$$L(\theta, X) = L(\theta/X_1, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i/\theta) \quad (1.3.1)$$

Donc la fonction de vraisemblance $L(\theta, X)$ admet un maximum unique au point $\hat{\theta}(x)$, alors $x \rightarrow \hat{\theta}(x)$ est appelé statistique de maximum de vraisemblance et $\hat{\theta}(x) = \hat{\theta}$ l'estimateur de maximum de vraisemblance de θ .

$$\hat{\theta} = \max_{\theta} L(\theta, X)$$

En général on préfère maximiser le logarithme de la vraisemblance : $\hat{\theta} = \max(\log L(\theta, X))$

Ensuite on annule sa dérivée par rapport à chaque composante de θ .

Et $\hat{\theta}$ est la solution du système des équations de vraisemblance président.

Donc $\hat{\theta}$ est le point qui maximise la vraisemblance $\theta(x)$.

1.4.2 Estimation non paramétrique

En statistique paramétrique la loi des X_i dépend d'un paramètre θ , mais dans ce modèle l'essentiel est d'estimer θ et à effectuer des tests d'hypothèse sur ce paramètre.

L'estimation du paramètre permet alors d'estimer toutes les caractéristiques intéressantes de la loi de probabilité.

En particulier, on peut estimer l'espérance $E(X)$ et la variance $Var(X)$ de cette loi.

Dans la littérature statistique, nous trouvons beaucoup de tests non paramétriques comme le test de Spearman, test de Kendall, test sur la médiane, test asymptotique sur l'espérance, test de Wilcoxon-Mann-Wallis, test de Kruskal .

Parmi les tests importants, le test du khi-deux et le test de Kolmogorov-Smirnov.

1.4.2.1 Test de Kolmogorov-Smirnov

Si les deux échantillons proviennent de même loi, ils ont la même fonction de répartition, donc leurs fonctions de répartition empiriques F_{n_1} et G_{n_2} doivent être proches.

Le test de Kolmogorov-Smirnov consiste à rejeter $H_0 : "F = G"$ si et seulement si D_{n_1, n_2} est "trop grand".

Tels que

$$D_{n_1, n_2} = \sup_{x \in \mathbb{R}} | F_{n_1}(x) - G_{n_2}(x) | \quad (1.3.2)$$

On montre alors que, sous H_0 , la variable aléatoire $K_{n_1, n_2} = \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} D_{n_1, n_2}$ a une loi de probabilité qui ne dépend pas de F et converge en probabilité vers la loi de Kolmogorov-Smirnov.

Donc le test de comparaison d'échantillon résultant est similaire au test d'adéquation de Kolmogorov-Smirnov.

Si $n_1 = n_2 = m$, la loi de D_{n_1, n_2} sous H_0 est très simple et a une explicité même pour m finie.

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(D_{m, m} > \frac{k}{m}) = 2 \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{m-k}{2} \rfloor} (-1)^{k+1} \frac{(m!)^2}{(m - jk)!(m + jk)!}$$

On peut appliqué le test de Kolmogorov-Smirnov pour un échantillon donné pour tester s'il est régit par une loi de probabilité F_0 ou non.

1.4.2.2 Test de khi-deux (χ^2)

Le test de Khi-deux est une classe de tests très utilisés en pratique, ces tests sont basés sur la loi du χ^2 .

Définition 1.4.2

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi du χ^2 à k degrés de liberté si X est à valeurs dans \mathbb{R}^+ et admet la densité f_X suivante :

$$f_X(x) = \frac{x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma(\frac{k}{2})}.$$

Ci-dessous, on donne l'allure de la densité f_X pour différentes degrés de liberté, c'est-à-dire pour différentes valeurs du paramètre k .

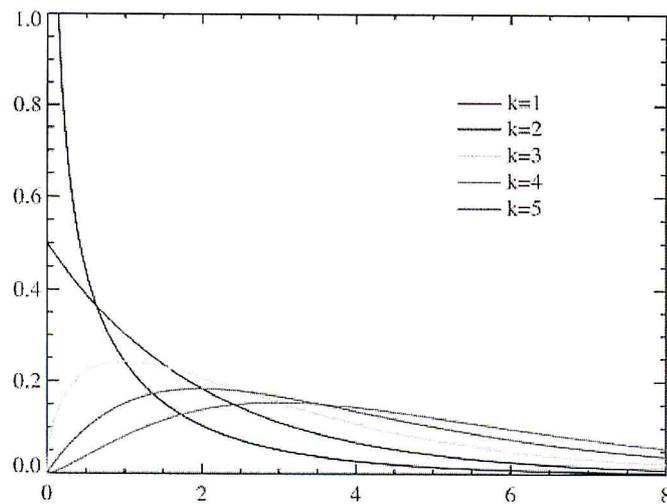


Figure -1-Allure des densité des lois X_k^2 pour différentes valeurs de k

Test d'adéquation d'une loi : Le test du χ^2 d'adéquation à une loi, permet de décider si des observations sont des réalisations d'une loi donnée.

On observe ainsi un échantillon (x_1, \dots, x_n) des variables aléatoires (X_1, \dots, X_n) iid, à valeurs dans un ensemble fini $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ et de loi inconnue $P = (p_1, \dots, p_n)$ où $P_p(x_1 = a_j)$ pour $j \in \{1, \dots, k\}$.

La loi P appartient à l'ensemble de paramètre $\Theta = \{(p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}_k^+, p_1 + \dots + p_k = 1\}$, on suppose par ailleurs donnée une loi à priori $P^0 = (p_1^0, \dots, p_k^0)$.

On souhaite tester l'hypothèse nulle $H_0 : \{P = P^0\}$ contre l'hypothèse alternative $H_1 : \{P \neq P^0\}$.

Autrement dit on souhaite tester si les observations (x_1, \dots, x_n) sont des réalisations de variables aléatoires (X_1, \dots, X_n) de loi P^0 .

Test d'indépendance : Le test d'indépendance du χ^2 permet de disposer d'un échantillon d'une loi à deux composantes $Z = (X, Y)$, de déterminer si les variables X et Y sont indépendantes.

En général

Parmi l'insuffisance de la théorie des statistiques de la moyenne qui ne permet pas de prédire les événements extrêmes qui sont rares de la nature.

C'est pour quoi, on fait appel à la théorie des valeurs extrêmes.

CHAPITRE II

THÉORIE DES VALEURS EXTRÊMES

2.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter les principaux résultats de la théorie des valeurs extrêmes.

Les valeurs extrêmes pour une série d'observations sont des valeurs beaucoup plus fortes ou beaucoup plus faibles que celle observées autour de la moyenne, l'étude de ces valeurs extrêmes revient à l'analyse de plus grandes observations d'un échantillon.

La théorie des extrêmes a été développée pour l'estimation de la probabilité des événements extrêmes c'est-à-dire pour la modalisation statistique des événements rares.

Par définition, les événements rares sont des événements ayant une faible probabilité d'apparition.

Lorsque le comportement des ces événements est dû au hasard on peut étudier leur loi.

Définition 2.1.1 (*statistique d'ordre*)

Soit X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires supposées iid.

On appelle statistique d'ordre le vecteur $X_{k,n}$ obtenu en ordonnant dans l'ordre croissante l'échantillon $X_{1,n} \leq X_{2,n} \leq \dots \leq X_{n,n}$.

On pose $X_{1,n} = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ et $X_{n,n} = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

les variables $X_{1,n}$ et $X_{n,n}$ définissent les statistiques d'ordre extrêmes et leur écart $D = X_{n,n} - X_{1,n}$ est dite déviation extrême.

On vérifie la relation : $\min(X_1, X_2, \dots, X_n) = - \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

2.2 Lois des valeurs extrêmes [6,13,15,16]

Le principal résultat de la théorie des valeurs extrêmes repose sur le théorème Fisher et Tippet (1928) dont la première preuve rigoureuse est due à Gnedenko (1943) celui-ci fait appel à la notion de statistique d'ordre associée aux variables aléatoires $\{X_i, i = 1, 2, \dots, n\}$.

Notons par $X_1 \leq \dots \leq X_n$ le réarrangement croissant de l'échantillon $\{(X_i)_{j=1,n}\}$, la variable aléatoire $X_{i,n}$ s'appelle la $i^{\text{ème}}$ statistique d'ordre de l'échantillon.

Nous pouvons maintenant exposer le résultat principal de la théorie des valeurs extrêmes.

Soit la suite $(X_i)_{i=1,n}$, définie ainsi, $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$. Il existe des suites $(a_i)_{i=1,n}$, $(b_i)_{i=1,n}$, telles que la suite de variables aléatoires $(a_n^{-1}(M_n - b_n))_{n \geq 1}$ où $(M_n = X_{n,n})$ converge en loi vers une limite non dégénérée.

Puisque les variables sont (iid) de fonction de répartition F , alors la fonction de répartition de M_n est donnée par : $F_{M_n}(x) = P[M_n \leq x] = (F(x))^n \dots (*)$

Cette formule(*) présente un intérêt limite car la distribution asymptotique de $(M_n)_n$ donne une loi dégénérée.

$$\text{En effet } \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{M_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } F(x) < 1 \\ 1 & \text{si } F(x) = 1 \end{cases}$$

De plus la loi de X est rarement connue avec précision, et même si la loi est connue, la loi de M_n n'est pas facile à calculer.

Pour ces raisons, il est intéressant de considérer le comportement asymptotique du M_n convenablement normalisé, $(\frac{M_n - b_n}{a_n})$ qui converge en loi vers une loi non dégénérée.

Ce résultat est la base de la théorie des valeurs extrêmes.

Un des résultats fondamentaux de la théorie des valeurs extrêmes est le théorème suivant établie en 1928 par Fisher et Tippet.

Définition 2.2.1

On dit que deux variables aléatoires réelles X et Y sont de même type s'il existe des constantes $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $Y \stackrel{loi}{=} aX + b$, c'est-à-dire si F et H sont les lois respectives des variables X et Y alors $F(ax + b) = H(x)$.

De façon analogue au théorème central limite, Fisher et Tippet ont prouvé l'existence des constantes $a_n > 0$ et $b_n \in \mathbb{R}$ et une loi non dégénérée H telle que

$$P\left[\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right] = (F(a_n x + b_n))^n \xrightarrow{loi} H(x).$$

D'où le théorème de Fisher-Tippet et Gnedenko.

Théorème 2.2.1 (Fisher-Tippet-Gnedenko) [8]

Soit $(X_i)_{i=1,n}$ une suite des variables aléatoires iid, il existe deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ et on a $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$, et soit ξ un paramètre réel, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left[\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right] = H_\xi(x)$$

Avec H appartient à la classe de fonction suivantes :

$$H_\xi(x) = \begin{cases} e^{-(1+\xi x)^{-\frac{1}{\xi}}}, & \text{pour } x > 0, \text{ si } \xi \neq 0 \\ e^{-e^{-x}}, & \text{pour } x \in \mathbb{R}, \text{ si } \xi = 0 \end{cases} \quad (2.2.1)$$

H_ξ est la fonction de répartition de la loi des valeurs extrêmes et ξ est appelé indice de valeurs extrêmes et il mesure l'épaisseur de la queue.

Preuve. (voir [15]) ■

On distingue trois cas selon les valeurs de cet indice :

- Si $\xi < 0$, on dit que F appartient au domaine d'attraction de Weibull.
- Si $\xi = 0$, on dit que F appartient au domaine d'attraction de Gumbel.
- Si $\xi > 0$, on dit que F appartient au domaine d'attraction de Fréchet.

la figure suivante représente les trois cas de la distribution des valeurs extrêmes.

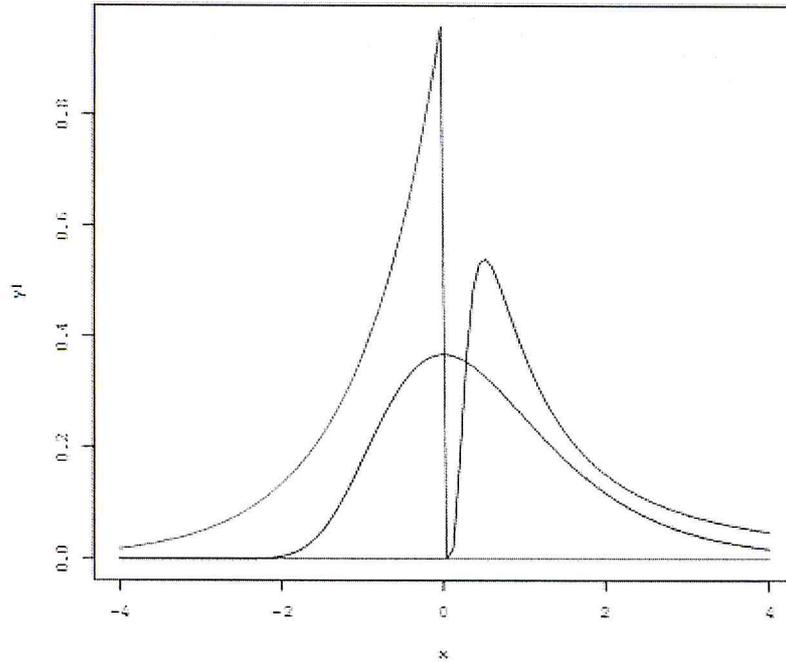


Figure-1-Exemple de densité associé à loi des valeurs extrêmes avec $\xi = -1$ (rouge), $\xi = 0$ (noir) et $\xi = 1$ (bleu)

Si on considère des variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 1}$ iid et leur maximum $(M_n)_{n \geq 1}$, on peut chercher les suites $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ pour différentes lois.

Voici quelques exemples.

Exemple 2.2.1 : Loi uniforme

On suppose que la loi X_1 est la loi uniforme sur $[0, \theta]$, $\theta > 0$. la fonction de répartition de la loi est $F(x) = \frac{x}{\theta}$, pour $x \in [0, \theta]$.

On note F_n la fonction de répartition de $n(\frac{M_n}{\theta} - 1) = \frac{M_n - \frac{\theta}{n}}{\frac{\theta}{n}}$, avec $a_n = \frac{\theta}{n}$ et $b_n = \theta$, comme $M_n < \theta$, on a $F_n(x) = 1$.

Si $x \geq 0$, considérons le cas $x < 0$.

$$F_n(x) = P(M_n \leq \theta + \theta \frac{x}{n}) = (P(X_1 \leq \theta + \theta \frac{x}{n}))^n = (1 + \frac{x}{n})^n$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = e^x$ pour $x < 0$, donc le domaine d'attraction de la loi uniforme est le domaine de Weibull.

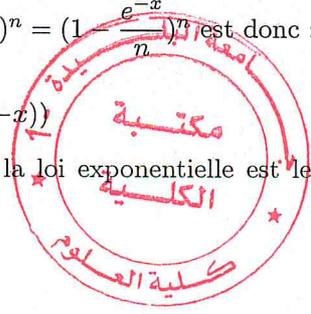
Exemple 2.2.2 : Loi exponentielle

Dans le cas d'une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, $F(X) = 1 - e^{-\lambda x}$, d'où l'on déduit que :

$$P(\lambda X_{(n)} - \ln(n) \leq x) = P(X_1 \leq \frac{x + \ln(n)}{\lambda})^n = (1 - \frac{e^{-x}}{n})^n \text{ est donc :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(\lambda X_{(n)} - \ln(n) \leq x) = \exp(-\exp(-x))$$

Ce qui montre que le domaine d'attraction de la loi exponentielle est le domaine de Gumbel.



Exemple 2.2.3 :Loi de Cauchy

On suppose que X_1 suit la loi de cauchy (de paramètre $a=1$), donc la fonction de densité est

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, x \in \mathbb{R}.$$

Comme le support de densité est non borné, il est clair que la suite $(M_n, n \geq 1)$ diverge.

On note F_n la fonction de répartition de $\frac{\pi M_n}{n}$, on a :

$$F_n(x) = P(M_n \leq \frac{nx}{\pi}) = (P(X_1 \leq \frac{nx}{\pi}))^n = (1 - \int_{\frac{nx}{\pi}}^{\infty} \frac{1}{\pi(1+y^2)} dy)^n$$

Pour $x > 0$, on a : $\int_{\frac{nx}{\pi}}^{\infty} \frac{1}{\pi(1+y^2)} dy = \frac{1}{nx} + o((nx)^{-3})$

On a alors pour $x > 0$, $F_n(x) = \frac{1}{nx} + o((nx)^{-3})$

On déduit que $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = e^{-1/x}$, pour $x > 0$.

Donc la loi de cauchy appartient au domaine d'attraction de Fréchet.

Les lois usuelle peuvent être classées selon leur domain d'attraction comme dans le tableau suivant:

Weibull	Gumbel	Fréchet
	Normale	Cauchy
Uniforme	Log-normale	Student
bêta	Gamma	Pareto
	Exponentielle	

-Le domaine d'attraction de Weibull contient les distributions à queue finies.

-Le domaine d'attraction de Fréchet contient les distributions à queue lourdes.

-Le domaine d'attraction de Gumbel contient les distributions à queue légées.

2.3 Loi des valeurs extrêmes généralisées [3,14]

En introduisant les paramètres de localisation (où de position), μ , un paramètre qui régit la position d'une densité de probabilité et de dispersion σ (où d'échelle) est un paramètre qui régit l'aplatissement de la loi de probabilité dans la formule

$$H_{\xi}(x) = \begin{cases} e^{-(1+\xi x)^{-\frac{1}{\xi}}}, & \text{pour } x > 0. \text{ Si } \xi \neq 0 \\ e^{-e^{-x}}, & \text{pour } x \in \mathbb{R}. \text{ Si } \xi = 0 \end{cases}$$

On obtient la forme la plus générale appelée loi de valeurs extrêmes généralisée (Generalized extremes value) notée GEV.

La fonction de répartition GEV a la forme suivante:

$$H_{\xi, \mu, \sigma}(x) = \begin{cases} e^{-(1+\xi \frac{x-\mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}}, & \text{pour } x > 0. \text{ Si } \xi \neq 0 \\ e^{-e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}}, & \text{pour } x \in \mathbb{R}. \text{ Si } \xi = 0 \end{cases} \quad (2.3.1)$$

2.3.1 Estimation du quantile des valeurs extrêmes

Définition 2.3.1 d'un quantil

Pour une variable aléatoire X , le niveau de retour Z , associe à la période de retour T , est la valeur que X dépasse en moyenne une fois le niveau z_T pendant une période T .

Telle que $P(X_t > z_t) = 1 - p = \frac{1}{T}$.

Dans le cas stationnaire, un niveau de retour z_t est l'équivalent d'un quantile extrême (q).

Il est possible d'estimer un quantile extrême en utilisant le résultat précédent sur la GEV.

Supposons que $(X_i)_{i=1, \dots, n}$ un échantillon de variables aléatoires iid de la loi F , on séparons ces variables en k blocs de taille r , si r est assez grand, alors on fait l'hypothèse que la distribution de M_r est une distribution GEV de paramètres $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}$ et $\hat{\xi}$.

Or la distribution de M_r est F^r car les X_i sont indépendantes, alors on a l'approximation:

$$F^r(x) = H_{\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\xi}}(x)$$

$$F^r(x) = \begin{cases} e^{-(1+\hat{\xi} \frac{x - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}})^{-\frac{1}{\hat{\xi}}}} & \text{pour } x > 0, \text{ si } \hat{\xi} \neq 0 \\ e^{-e \frac{x - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}} & \text{si } \hat{\xi} = 0 \end{cases} \quad (2.3.2)$$

On cherche q telque $p = p[X > q] = 1 - F(q)$.

Pour un quantile q élevé il suffit de prendre le cas $\hat{\xi} \geq 0$, Cette condition borne inférieurement la fonction de répartition.

Dans le cas $\hat{\xi} > 0$, il faut résoudre l'équation:

$$p^r = e^{-(1+\hat{\xi} \frac{\hat{q} - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}})^{-\frac{1}{\hat{\xi}}}}$$

Ce qui donne finalement

$$\hat{q} = \hat{\mu} + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} ((-r \ln(p))^{-\hat{\xi}} - 1) \quad (2.3.3)$$

Ce fournit une estimation d'un quantile extrême.

Dans le cas $\hat{\xi} = 0$, on a :

$$p^r = e^{-e \frac{\hat{q} - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}}$$

Donc on trouve

$$\hat{q} = \hat{\mu} + \hat{\sigma}(-r \ln(p)) \quad (2.3.4)$$

Il existe une autre approche de la théorie des valeurs extrêmes permettant d'estimer des quantiles est la loi de Pareto généralisée.

2.4 Loi de Pareto généralisée [1,6]

Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F et μ un réel suffisamment grand appelé seuil (*PeaksOverThreshold* "POT").

on définit les excès du seuil μ comme l'ensemble des variables aléatoires y tels que $y_i = x_j - \mu, x_j > \mu$.

On appelle point terminal de la fonction de répartition F , le point X_F (X_F peuvent être infinie) telque $\mu < X_F$.

On a $F_\mu(y) = P(x - \mu < y \mid x > \mu) = \frac{F(y + \mu) - F(\mu)}{1 - F(\mu)}$ pour $0 \leq y \leq X_F - \mu$.

Ce qui est équivalent à :

$$F_\mu(y) = P(X > x \mid x > \mu) = \frac{F(x) - F(\mu)}{1 - F(\mu)} \text{ pour } x \geq \mu.$$

Définition 2.4.1

La loi de Pareto généralisée (où GPD pour Generalized Pareto Distribution) est donnée par:

$$G_{\xi, \sigma}(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \frac{\xi}{\sigma}x)^{-\frac{1}{\xi}} & \text{si } \xi \neq 0, \sigma > 0 \\ 1 - \exp(-\frac{x}{\sigma}) & \text{si } \xi = 0, \sigma > 0. \end{cases} \quad (2.4.1)$$

Balkema-de Haan et Pickands ont donné le résultat important suivant qui est la base de la théorie des valeurs extrêmes à un seuil.

Théorème 2.4.1 (Balkema-de Haan-Pickands) [4,5]

Il existe une fonction σ positive, telle que:

$$\lim_{\mu \rightarrow X_F} \sup_{0 \leq x \leq X_F - \mu} |F\mu(x) - G_{\xi, \sigma(\mu)}(x)| = 0.$$

Si et seulement si F appartient au domaine d'attraction de la loi H_ξ .

La loi GPD présente quelques cas particuliers:

- Si $\sigma = 1$, on parle de la loi GPD standard.
- Si $\xi = 0$, la GPD correspond à une loi exponentielle.
- Si $\xi = -1$, elle correspond à une loi uniforme sur $[0, \sigma]$.
- Si $\xi > 0$, on trouve la loi de Pareto décentrée.

Il aura plusieurs techniques pour l'estimations de quantile.

2.4.1 Estimation du quantile de loi de Pareto généralisée

Supposons que on a un seuil μ convenable, donc on approche la quantité $\frac{F(x + \mu) - F(\mu)}{1 - F(x)}$ par $G_{\hat{\xi}, \hat{\sigma}}(x)$, où $\hat{\xi}$ et $\hat{\sigma}$ sont estimés sur ces données.

En posant $y = x + \mu$, alors

$$\frac{F(y) - F(\mu)}{1 - F(\mu)} \approx G_{\hat{\xi}, \hat{\sigma}}(y - \mu)$$

Notre objectif est de trouver y telque $F(y) = p$, avec p fixé, lorsque $\xi > 0$ la relation

$$y \approx \mu + G_{\hat{\xi}, \hat{\sigma}}^{-1}\left(\frac{p - F(\mu)}{1 - F(\mu)}\right)$$

Donc

$$y \approx \mu + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} \left(\left(1 - \frac{p - F(\mu)}{1 - F(\mu)}\right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right) \quad (2.4.2)$$

Pour estimer y , en estimant $1 - F(\mu)$ par $\frac{N_\mu}{n}$ qui est la proportion d'observations du seuil μ :

$$y \approx \mu + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} \left(\left(\frac{n}{N_\mu} (1 - p) \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right)$$

De même lorsque $\xi = 0$.

$$y \approx \mu + G_{\hat{\xi}, \hat{\sigma}}^{-1} \left(\frac{p - F(\mu)}{1 - F(\mu)} \right)$$

Ce qui donne :

$$y \approx \mu - \hat{\sigma} \ln \left(\frac{n}{N_\mu} (1 - p) \right) \quad (2.4.3)$$

2.5 *Quantile extrême (niveau de retour) [3]*

Dans le cas de GEV et GPD on peut obtenir ainsi un estimateur de la période de retour.

L'estimateur d'une période de retour associée à une probabilité qui représente la probabilité d'excès au delà d'un niveau de retour, cette période s'interprète comme une moyenne du temps ou du nombre d'années séparant un événement de grandeur donnée d'un second événement d'une grandeur égale ou supérieure.

On donne les deux tableaux suivant qui résume les formules de temps de retour dans le cas de GEV et GPD.

Pour GEV

$\xi \neq 0$	$\xi = 0$
$\mu - \frac{\sigma}{\xi} [1 - \{-\log(1 - P)\}^{-\xi}]$	$\mu - \sigma \log\{-\log(1 - P)\}$

(2.5.1)

Pour GPD

$\xi \neq 0$	$\xi = 0$
$\mu - \frac{\sigma}{\xi} (1 - (1 - P)^{-\xi})$	$\mu - \sigma (\log(1 - P))$

(2.5.2)

CHAPITRE III

ESTIMATION DES PARAMÈTRES EXTRÊMES

Dans ce chapitre, nous allons exposer quelques méthodes d'estimation des paramètres de la loi GEV et GPD.

Dans tout ce qui suit, on est sur que F appartient à l'un des domaines d'attractions définis précédemment, on s'intéresse à l'estimation des paramètres de ces lois.

3.1 Estimation des paramètres de la loi des valeurs extrêmes [3, 7, 11, 17]

Nous avons choisi quelques méthodes d'estimation souvent utilisées.

3.1.1 Méthode du maximum de vraisemblance (Prescott et Walden, 1980, 1983)

La méthode du maximum de vraisemblance consiste à maximiser la quantité

$$L(\xi, \mu, \sigma, M_1, \dots, M_k) = \prod_{i=1}^n h_{\xi, \mu, \sigma}(M_i) \quad (3.1.1)$$

Où $h_{\xi, \mu, \sigma}$ est la densité de GEV, il suffit d'écrire les dérivées partielles et égaliser à 0, ensuite utiliser un algorithme cherchant à optimiser cette fonction.

3.1.2 Méthode des moments pondérés (Hosking et al)

Cette méthode consiste à obtenir les paramètres comme fonction des moments $w_s = E(MH_{\xi, \mu, \sigma}^s(M))$, où M suit une GEV de fonction de répartition $H_{\xi, \mu, \sigma}$, pour $s = 0, 1, 2$.

pour $0 < \xi < 1$ on a :

$$w_s = \frac{1}{s+1} \left(\mu - \frac{\sigma}{\xi} (1 - (s+1)^\xi \Gamma(1 - \xi)) \right) \quad (3.1.2)$$

Et pour $\xi = 0$ on a :

$$w_s = \frac{1}{s+1} (\mu - \sigma(\gamma - \ln(s+1))) \quad (3.1.3)$$

Avec Γ est la fonction Gamma et γ est la constante d'Euler .

Pour $\xi \geq 1$, les moments ne sont pas définis (la queue de distribution étant trop épaisse, ils ne sont pas finis).

Hosking, Wallis et Wood ont montré que ces quantités pouvaient être approchées par :

$$w_s = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left(\frac{j - 0.35}{k} \right)^s M(j) \quad (3.1.4)$$

Où $M_{(1)} \leq M_{(j)} \leq M_{(k)}$ sont les maximums ordonnés.

Alors on déduit les valeurs des paramètres :

$$\begin{aligned} \frac{3\hat{w}_2 - \hat{w}_0}{2\hat{w}_1 - \hat{w}_0} &= \frac{3\hat{\xi} - 1}{2\hat{\xi} - 1} \\ \hat{\sigma} &= \frac{2(\hat{w}_1 - \hat{w}_0)\hat{\xi}}{\Gamma(1 - \hat{\xi})(2\hat{\xi} - 1)} \\ \hat{\mu} &= \hat{w}_0 + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} (1 - \Gamma(1 - \hat{\xi})) \end{aligned}$$

Ces estimateurs sont définis pour $\xi < 1$, mais ils ne sont asymptotiquement normaux que pour $\xi < 1/2$.

3.1.3 Méthode des moments pondérés généralisés

La méthode des moments pondérés perd de son intérêt lorsque ξ dépasse $1/2$ puisqu'il n'ya plus de normalité asymptotique de l'estimateur.

Cette généralisation utilise les moments $V_h = E(Mh(H_{\xi,\mu,\sigma}(M)))$, où M suit une GEV de fonction de répartition $H_{\xi,\mu,\sigma}$ et h est une fonction définie sur $[0, 1]$ et valant 0 sur les bornes.

Aussi si M prend une grande valeur la fonction $H_{\xi,\mu,\sigma}$ est proche de 1 et la fonction h ramène la valeur à 0.

Intuitivement, l'impact des queues de distribution va être moins fort et donc les moments existent pour des valeurs de ξ plus élevées.

Diebolt a montré que si on choisit $h(t) = h_{a,b}(t) = t^a(-\log(t))^a$ et $a > 0, b > 0$.

Alors V_h vérifie :

$$V_h = \frac{\sigma}{\xi} \frac{1}{(a+b)^{b-\xi+1}} \Gamma(b-\xi+1) - \left(\frac{\sigma}{\xi} - \mu\right) \frac{1}{(a+b)^{b+1}} \Gamma(b+1) \quad (3.1.5)$$

Si on choisit $(a, b) = (1, 1), (1, 2), (2, 1)$.

On obtient les estimateurs des paramètres de la GEV avec les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\xi}}{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{\hat{\xi}}} &= \frac{2(\hat{h}_{1,2} - \hat{h}_{1,1})}{\hat{h}_{1,1} - 2.25\hat{h}_{2,1}} \\ \hat{\sigma} &= (\hat{h}_{1,1} - \hat{h}_{1,2}) \frac{2^{3-\hat{\xi}}}{\Gamma(2-\hat{\xi})} \\ \hat{\mu} &= \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} - \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} 2^{\hat{\xi}} \Gamma(2-\hat{\xi}) + 4\hat{h}_{1,1} \end{aligned}$$

Cette méthode est valable pour $\xi < 3/2$, et la normalité asymptotique est vérifiée pour $\xi < 1$.

3.1.4 Amélioration de l'estimateur par la méthode de Rao-Blackwell

Soit $\hat{\Phi} = (\hat{\xi}, \hat{\sigma}, \hat{\mu})$ estimateur obtenu par le maximum de vraisemblance [Ferro et Pezzuli] ont montré qu'il est possible d'améliorer ces estimateurs, si on effectue $N(N < n!)$ permutations sur notre échantillon (iid), alors on obtient les estimateurs de "rao-blackwellisés" notés $\bar{\Phi} = (\bar{\xi}, \bar{\sigma}, \bar{\mu})$ et définis par :

$$\bar{\Phi} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{\Phi}_i \quad (3.1.6)$$

Ces estimateurs sont intéressants car ils vérifient :

$$E(\bar{\Phi}) = E(\hat{\Phi})$$

$$Var(\bar{\Phi}) = \frac{1}{N} Var(\hat{\Phi}) + \frac{1}{N^2} \sum_{i \neq j} Cov(\hat{\Phi}_i, \hat{\Phi}_j) \leq Var(\hat{\Phi})$$

Alors la variance des estimateurs est réduite par rapport aux estimateurs classiques.

On peut définir deux estimateurs du quantile d'ordre p :

$$\bar{q} = \bar{\mu} + \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\xi}} ((-r \ln(p))^{-\bar{\xi}} - 1) \quad (3.1.7)$$

$$\bar{q} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{q}_i \quad (3.1.8)$$

Où $\hat{q}_i = \hat{\mu} + \frac{\hat{\sigma}_i}{\hat{\xi}_i} ((-r \ln(p))^{-\hat{\xi}_i} - 1)$ avec $(\hat{\xi}_i, \hat{\sigma}_i, \hat{\mu}_i)$ obtenus par maximum de vraisemblance à partir de la $i^{\text{ème}}$ permutation de l'échantillon.

3.2 Estimation des paramètres de GPD

Si un échantillon a pour fonction de répartition F , alors quand μ tend vers la borne supérieure du support de F , la fonction de répartition $F_\mu(x) = \frac{F(x + \mu) - F(\mu)}{1 - F(\mu)}$ définie pour $x > 0$ tend vers une limite $G_{\xi, \sigma(\mu)}(x)$.

Donc il est possible de déduire la valeur de ξ lorsque F est connue, on peut obtenir la convergence de façon théorique, alors $F_\mu(x) = \frac{F(x + \mu)}{1 - F(\mu)} = 1 - \frac{\bar{F}(x + \mu)}{\bar{F}}$.

Exemple 3.2.1 : (loi exponentielle de paramètre θ)

On a:

$$F_\mu(x) = 1 - \frac{\bar{F}(x + \mu)}{F(\mu)} = 1 - \frac{e^{-\theta(x+\mu)}}{e^{-\theta\mu}} = (1 - e^{-\theta x})$$

$F_\mu(x)$ est un loi exponentielle de même paramètre, il s'agit aussi d'une loi GPD $\xi = 0$ et $\sigma = \frac{1}{\theta}$.

Il existe d'autres méthodes plus efficaces pour estimer ξ .

Dans les deux méthodes suivantes on fixe μ et on cherche à estimer ξ et $\sigma(\mu) = \sigma$.

3.2.1 Méthode du maximum de vraisemblance

Soit $(Z_i)_{i=1, \dots, N_\mu}$ l'échantillon des dépassements : c'est-à-dire si $x_i > \mu$, alors on va mettre la valeur aléatoire $x_i - \mu$ dans l'échantillon, si non on va regarder la valeur x_{i+1} et ainsi de suite, on pose N_μ le nombre de dépassements. \hat{F}_μ^r est la fonction de l'échantillon $(Z_i)_{i=1, N_\mu}$.

Par l'utilisation de la théorème de [Balkema – Haan – Pickands], on suppose que $(Z_i)_{i=1, N_\mu}$ suivent une distribution GPD.

On va estimer les paramètres par la méthode de maximum de vraisemblance, la fonction de vraisemblance s'écrit comme :

$$L(\xi, \sigma, Z_1, \dots, Z_{N_\mu}) = \frac{1}{\sigma^{N_\mu}} \prod_{i=1}^{N_\mu} \left(1 + \xi \frac{Z_i}{\sigma}\right)^{-1 - \frac{1}{\xi}} \quad (3.2.1)$$

En suite on va passer par log de vraisemblance et on calcule les dérivées partielles par rapport aux paramètres ξ et σ , et en les égalisant à 0.

Dans le cas $\xi \neq 0$. C'est équations n'ont pas de solution explicite.

Dans le cas $\xi = 0$. on obtient :

$$L(0, \sigma, Z_1, \dots, Z_{N_\mu}) = -N_\mu \ln(\sigma) - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^{N_\mu} (Z_i)$$

L'estimateur de vraisemblance pour σ est alors :

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{N_\mu} \sum_{i=1}^{N_\mu} Z_i \quad (3.2.2)$$

3.2.2 Méthode des moments pondérés

On a la définition des moments pondérés pour $s \geq 0$.

$$w_s(\xi, \sigma) = E(XG_{\xi, \sigma}^s(x))$$

On peut calculer cette quantité pour $\xi < 1$.

$$w_s(\xi, \sigma) = \frac{\sigma}{(s+1)(s+1-\xi)}$$

Les deux premiers moments s'écrivent comme:

$$\begin{aligned} w_0 &= \frac{\sigma}{1-\xi} \\ w_1 &= \frac{\sigma}{2(2-\xi)} \end{aligned}$$

Alors on obtient :

$$\hat{\xi} = \frac{w_0 - 4w_1}{w_0 - 2w_1} \quad (3.2.3)$$

$$\hat{\sigma} = \frac{2w_0w_1}{w_0 - 2w_1} \quad (3.2.4)$$

Il suffit d'estimer ces moments pour déduire la valeur des paramètres de la GPD, on prend comme estimateur:

$$\hat{w}^s(\xi, \sigma) = \frac{1}{N_\mu} \sum_{i=1}^{N_\mu} (Z_i) \hat{F}_\mu^s(Z_i) \quad (3.2.5)$$

Hosking énonce que cette méthode n'est pas valable que pour $\xi < 1$, de même que pour la GEV la normalisation asymptotique n'est vraie que pour $\xi < 1/2$.

3.3 Recherche du seuil

Le choix adéquat de μ influe fortement sur la qualité de l'estimateur.

En effet, un seuil trop faible conduit à une mauvaise adéquation entre la fonction de répartition et la loi GPD et les estimateurs sont biaisés.

Inversement, un seuil trop élevé conduit à une faible taille d'échantillon de dépassement et donc des estimateurs de forte variance.

Voici quelques méthodes pour estimer ce seuil.

3.3.1 Méthode 1: Utilisation de la fonction moyenne des excès

D'abord on définit la fonction moyenne des excès.

$$e(\mu) = E(x - \mu | x > \mu)$$

On peut écrire :

$$e(\mu) = \frac{1}{1 - F(\mu)} \int_{\mu}^{X_F} (1 - F(x)) dx$$

Dans le cas de la loi GPD, on a :

$$\hat{G}_{\xi, \sigma}(x) = \left(1 + \frac{\xi x}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}} \quad (3.3.1)$$

$$\text{Ainsi : } e(\mu) = \left(1 + \frac{\xi \mu}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\xi}} \int_{\mu}^{X_F} \left(1 + \frac{\xi}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}} dx$$

Si $\xi \geq 1$, l'intégrale " $\int_{\mu}^{X_F} \left(1 + \frac{\xi}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}} dx$ " est divergente alors $e(\mu)$ n'existe pas.

En fin, si $\xi = 0$, alors on a :

$$e(\mu) = \sigma \quad (3.3.2)$$

On remarque que pour $\xi = 0$, la fonction moyenne des excès est une constante.

3.3.2 Méthode 2 : (Estimation de Hill) [3,9]

L'estimation de Hill est donné par la forme empirique suivante :

$$\hat{\xi} = \frac{1}{K-1} \sum_{i=1}^{K-1} (\ln X_{1,n} - \ln X_{K,n}) \text{ pour } K \geq 2 \quad (3.3.3)$$

Avec K est l'ordre statistique le plus élevé (le nombre des excès) et $\alpha = 1/\xi$ est l'indice de la queue de distribution, cet estimateur intervient dans la construction du graphique.

Hill - plot : représentation de α en fonction de la statistique d'ordre $X_{1,n}$.

Le Hill-plot permet de choisir un seuil élevé pour le modèle GPD.

Donc le *Hill - plot* est un outil à double utilité:

-L'estimation de l'indice de la queue de la distribution.

-L'estimation du seuil.

3.3.3 Méthode 3 : (Test d'adéquation de Kolmogorov-Smirnov) [3,9]

Le test d'adéquation permet de vérifier si la loi de probabilité d'un échantillon des extrêmes observés appartient à la famille de lois théorique choisies pour l'analyse des extrêmes.

Soit $X_1 \dots X_n$ les valeurs d'un échantillon des extrêmes (des maxima par blocs ou des dépassements d'un seuil) rangées par ordre croissant, et G la fonction de répartition théorique correspondante (respectivement, une GEV ou une GPD) avec les paramètres estimés à partir de l'échantillon considéré.

On cherche alors à tester l'hypothèse H_0 selon laquelle l'échantillon X relève de la loi G .

Le principe du test de *Kolmogorov - Smirnov* consiste simplement à trouver la différence entre la distribution de répartition empirique et théorique qui donnée par:

$$D = \max_{x \in \mathbb{R}} |F(x) - G(x)| \quad (3.3.4)$$

CHAPITRE IV

APPLICATION À L'HYDROLOGIE

4.1 Introduction

L'office national de la météorologie (ONM) crée par ordonnance N° 75-25 du 29 avril 1975, l'ONM sous la tutelle du ministère des transports et son siège est situé à Alger.

Il est devenu Etablissement Public à caractère Industriel et Commercial à vocation scientifique et technique par décret N° 98-258 du 25 août 1998.

Il se compose des quatre unités fonctionnelles et de quatre départements techniques, parmi ces unités le centre National des prévisions Météorologie (C.N.P.M) qui s'intéresse à chargé l'analyse et de la prévision météorologie à l'échelle national et international.

Il est également chargé de contribuer au développement de la prévision numérique du temps.

4.2 Description de l'échantillon

L'échantillon Utilisé dans l'étude est les précipitations journalières de la zone nord centre de l'Algérie a partir de l'année 1952 jusqu'à l'année 2005.

Notre étude est répartie en deux parties, la première partie consiste à modéliser les précipitations mensuelles maximales par GEV et la deuxième partie consiste à modéliser les précipitations saisonnières par GPD.

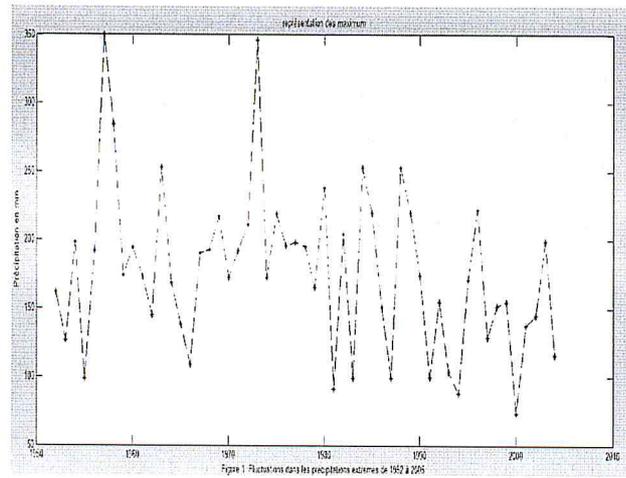


Figure 1: Maximales Mensuelles

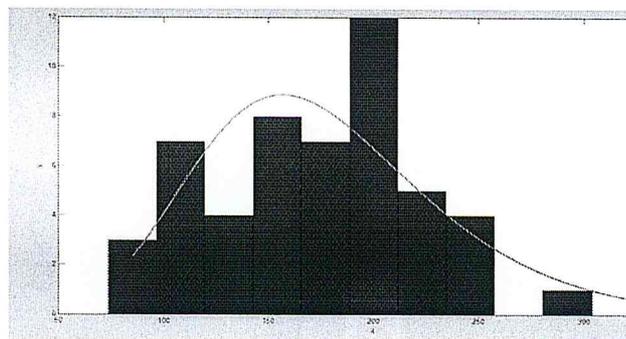


Figure 2: Les maximales Mensuelles de précipitation

La figure -1- représente les maximales Mensuelles de précipitation .

La figure -2- représente l'histogramme des maximales Mensuelles de précipitation.

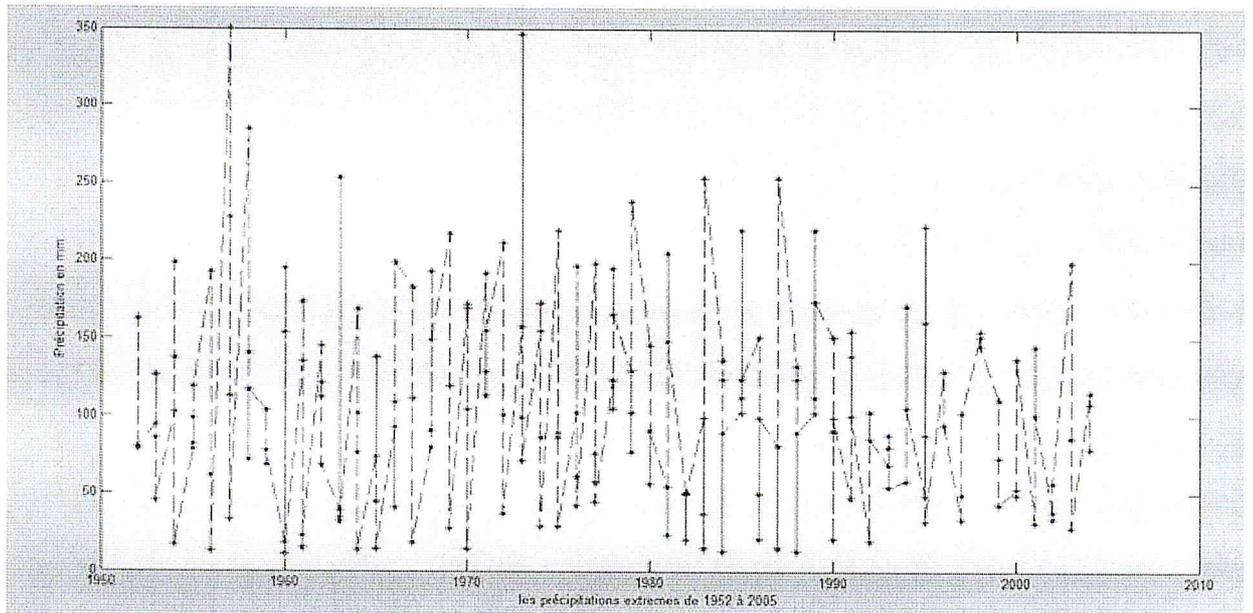


Figure 3: Les maxima saisonniers à un seuil=10

La figure -3- représente les maxima saisonniers à un seuil (de 1952 jusqu'a 2005) de précipitation.

La figure -4- représente l'histogramme des maxima saisonniers de précipitation.

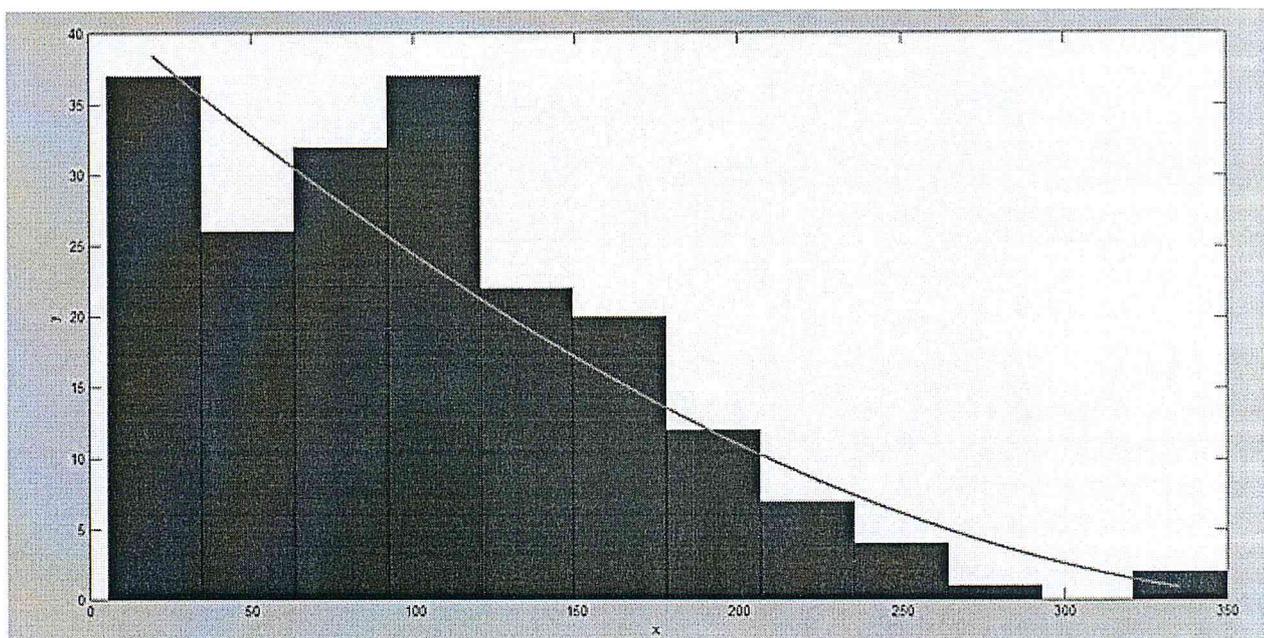


Figure 4: Les maximas saisonnieres de précipitation

4.3 *Resumé descriptif*

4.3.1 GEV

Le tableau ci-dessous résume les valeurs descriptives de la série.

Tableau-1-Les valeurs descriptives des maximas.

Statistique	valeur
La taille de l'échantillon	53
Max	349.8
Min	73.7
Moyenne	177.1226
Variance	3491.817
Ecart-type	59.0916
Skewness	0.7084
Kurtosis	3.9045

Nous remarquons que l'échantillon présente un kurtosis proche de la loi Normale (aplatissement) par contre le skewness tire vers la droite.

Après l'estimation par la méthode des maximums de vraisemblance de GEV, nous avons obtenu les résultats sur le tableau suivant.

Tableau-2-Valeurs estimées par le maximum de vraisemblance.

Les paramètres	ξ	σ	μ
Valeurs estimer	-0.0914	50.8068	152.1147

Pour faire apparaitre la variation des paramètres au niveau de 95%, nous avons déterminer l'intervalle de confiance résumé dans le tableau suivant.

Tableau-3- valeurs d'intervalle de confiance.

Paramètres	Borne inferieure	Borne supérieure	Valeur moyenne
ξ	-0.2696	0.0868	-0.0914
σ	41.1063	62.7965	51.9514
μ	136.8607	167.3688	152.11475

Pour faire la prvision, nous avons calculé le niveau de retour pour 5, 10, 20, 50 et 100 ans, ces résultats sont résumer dans le tableau suivant.

Tableau-4-Niveau de reteur pour la quantile estimer de GEV.

Temps de retour	5	10	20	50	100
Niveau de retour (quantile extrême)	223.33	255.45	284.27	318.86	342.92

4.3.1.1 Ajustement graphique

La comparaisons entre la distribution théorique et la distribution empirique de GEV se donne par la figure -5-.

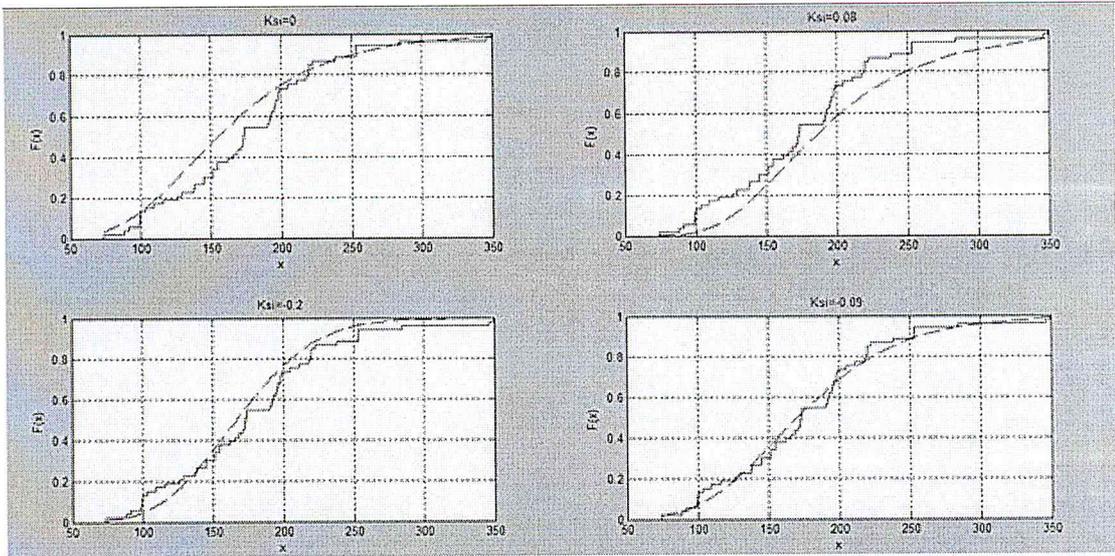


Figure 5: Comparaison de la loi théorique (discontinue) et empirique (continue) de GEV

L'ajustement graphique nous montre que le meilleur modèle est obtenu avec $\xi = -0.09$ (la loi de weibull), par contre la loi de Gumbul ($\xi = 0$) vient en dixième position, mais la loi de Frechet ($\xi = 0.08$) n'estime pas bien notre échantillon.

Nous remarquons que pour $\xi = -0.2$ (Weibull) l'estimation est moins "bonne" que Gumbul.

Nous confirmons cette conclusion par le biais de test de Kolmogorov-Smirnov.

4.3.1.2 Test de Kolmogorov-Smirnov

Le test de Kolmogorov-Smirnov consiste à ajuster l'échantillon par la loi de GEV avec un seuil $\alpha = 0.05$.

Nous testons les hypothèses
$$\begin{cases} H_0 : X \sim GEV \\ H_1 : X \not\sim GEV \end{cases}$$

Nous avons obtenu les résultats suivants.

L'hypothèse H_0 est accepté, donc $X \sim GEV$ on confirme ce résultat par le paramètre P-value (la probabilité sous H_0).

On a $P=0.0754 > 0.05$ et $K=0.6648$ donc $X \sim GEV$.

4.3.1.3 Conclusion

Nous remarquons que l'échantillon est ajusté par une loi GEV.

4.3.2 GPD

Le tableau ci-dessous résume les valeurs descriptives de la série GPD.

Tableau-5-Valeurs descriptives de maxima de GPD.

Statistique	Valeur
La taille de l'échantillon	212
Max	349.8
Min	0
Moyenne	96.9184
Variance	4757.15
Ecart-type	68.9721
Skewness	0.7574
Kurtosis	3.6057

Nous remarquons que l'échantillon présente un kurtosis proche de la loi Normale mais le skewness tire vers la droite.

Après l'utilisation de la méthode de maximum de vraisemblance, on obtient les résultats suivants.

Tableau-6-Estimation des paramètres par la méthode de vraisemblance.

Paramètres	ξ	σ
Valeurs estimer	-0.375	144.002

Pour faire la prévision, nous avons calculé le niveau de retour pour 5, 10, 20, 50 et 100 ans pour un seuil $\mu = 10$, ces résultats sont résumer dans le tableau suivant.

Tableau-7-Niveau de reteur pour la quantile estimer de GPD.

Temps de retour	5	10	20	50	100
Niveau de retour (quantile extrême)	185.29	232.29	268.52	303.99	323.78

4.3.2.1 Ajustement graphique

Dans le cas d'estimation GPD, nous avons fixé défférents seuils et obtenu la figure -6-.

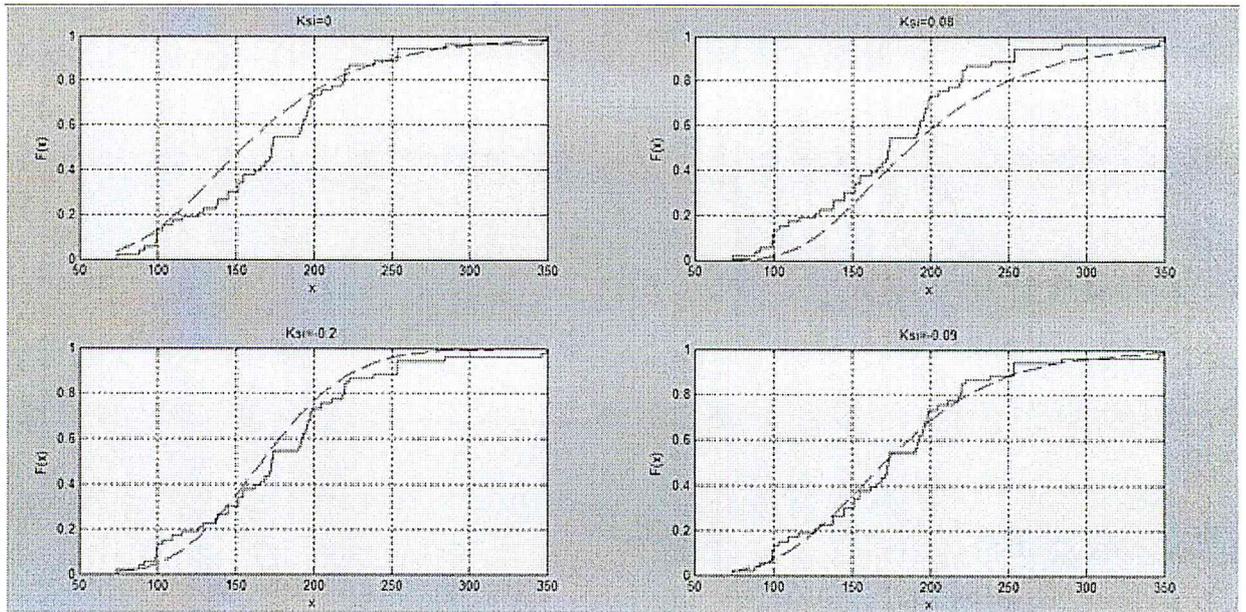


Figure 6: Comparaison de la loi théorique (discontinue) et la loi empirique (continue)

Nous remarquons, si on fixe μ petite notre loi de l'échantillon proche de la loi GPD théorique et si on augmente le seuil sont devient très loin.

On va confirmé cette résultat avec le test de Kolmogorov-Smirnov.

4.3.2.2 Test de Kolmogorov-Smirnov

Le test de Kolmogorov-Smirnov consiste à ajuster l'échantillon par la loi de GPD avec un seuil $\alpha = 0.05$ et différents seuils.

$$\text{Nous testons les hypothèses } \begin{cases} H_0 : X \sim GPD \\ H_1 : X \not\sim GPD \end{cases}$$

Nous avons obtenu les résultats résumées sur le tableau -8-.

Tableau-8-Résultats obtenu par le test de Kolmogorov-Smirnov.

Seuil μ	10	15	16	20	50
Hypothèse H_0	accepté	accepté	rejeté	rejeté	rejeté
P-value (la probabilité sous H_0)	0.1383	0.0288	0.228	0.0063	$7.0014 * 10^{-9}$
K	0.0823	0.1066	0.1096	0.1257	0.2550

4.3.2.3 Conclusion

Nous remarquons que l'échantillon est ajusté par une loi GPD si le seuil inférieur à 15.

Conclusion générale

Une recherche bibliographique montre que la théorie des valeurs extrêmes (EVT) était un outil fiable pour la construction des scénarios des phénomènes extrêmes (inondations, séismes, chute prix de pétrole, crises boursières,...etc.).

La modélisation des phénomènes extrêmes hydrologiques permet de prédire les pics ce qui nous insiste de construire des ouvrages hydrauliques (barrages, digues de protection des villes) résistant à ces phénomènes extrêmes.

Dans ce travail, nous avons mis en évidence l'insuffisance de la théorie des statistiques de la moyenne qui ne permet pas de prédire les événements extrêmes qui sont rares de nature.

De plus l'utilisation directe de la loi du maximum des variables aléatoires i.i.d ne permet pas d'exploiter sa loi de probabilité vu que cette dernière est dégénérée.

Donc la modélisation des événements extrêmes par les lois GEV et GPD est d'une importance capitale.

Nous avons donné un aperçu sur la théorie des valeurs extrêmes ainsi que des méthodes paramétriques et non paramétriques qui permettent d'identifier ces lois.

Nous avons clôturé ce travail par l'application de la théorie des valeurs extrêmes (EVT) pour des données hydrologiques et précisément aux précipitations.

Nous avons abouti à des résultats encourageants où nous avons montré que les valeurs extrêmes des précipitations peuvent être modélisées par les lois GEV ou GPD.

Parmi les perspectives et les extensions directes de ce modeste travail sont l'application de EVT pour les différents paramètres hydrologiques (vitesses du vent, températures, humidité, ...etc.)

Conclusion générale

Une recherche bibliographique montre que la théorie de valeur extrême (EVT) était un outil fiable pour la construction des scénarios des phénomènes extrêmes (inondations, séismes, chute prix de pétrole, crises boursières,...etc.).

La modélisation des phénomènes extrêmes hydrologiques permet de prédire les pics ce qui nous insiste de construire des ouvrages hydriques (barrages, digues de protection des villes) résistant à ces phénomènes extrêmes.

Dans ce travail, nous avons mis en évidence l'insuffisance de la théorie des statistiques de la moyenne qui ne permet pas de prédire les événements extrêmes qui sont rares de nature.

De plus l'utilisation directe de la loi du maximum des variables aléatoires i.i.d ne permet pas d'exploiter sa loi de probabilité vu que cette dernière est dégénérée.

Donc la modélisation des événements extrêmes par les lois GEV et GPD est d'une importance capitale.

Nous avons donné un aperçu sur la théorie des valeurs extrêmes ainsi que des méthodes paramétriques et non paramétriques qui permettent d'identifier ces lois.

Nous avons clôturé ce travail par l'application de la théorie de valeur extrême (EVT) pour des données hydrologiques et précisément aux précipitations.

Nous avons abouti à des résultats encourageants où nous avons montré que les valeurs extrêmes des précipitations peuvent être modélisées par les lois GEV ou GPD.

Parmi les perspectives et les extensions direct de ce modeste travail sont l'application de EVT pour les différents paramètres hydrologiques (vitesses du vent, températures, humidité, ...etc.)

Bibliographie

- [1] A. Guillon, P. Willems. Thèse, Application de la théorie des valeurs extrêmes en Hydrologie, 2006.
- [2] Alexandre Lekina. Estimation non-paramétrique des quantiles extrêmes conditionnels. Thèse, 2010.
- [3] Christian Yamdjieu Ngadeu, Brehima Mariko, Statistique des extrêmes : théorie et application. Thèse, 2013.
- [4] De Hann. L. On regular variation and Its Application to the weak convergence of sample Extremes. Thèse.
- [5] De Hann. L, A. Ferreira. Extremes value : An introduction Springs. Cours, 2006.
- [6] Frédéric Planchet. Utilisation de la théorie des valeurs extrêmes dans le contexte solvabilité 2. Thèse, 2012-2013.
- [7] Frédéric Planchet. Introduction version 3.7.Support de cours, 2014.
- [8] Gnedenko. B, Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire. Cours.
- [9] Hill B. M, A simple general approach to inference about the tail of a loi. Cours, 1975.
- [10] Jürgen ANG ST, Eléments de théorie des probabilités et de statistique. Notes de cours, 2014/2015.
- [11] Journal de la société Française de statistique, Vol. 154 No. 298-118. Article.

[12] Olivier Gaudoin, Statistique Inférentielle Avancée. Notes de cours.

[13] Stéphane Girard, Introduction à la statistique des valeurs extrêmes. Projet, 2007.

[14] Stéphane Girard, Estimation des probabilités et quantiles extrêmes. Projet, 2009.

[15] Société Française de statistique et société mathématique de France (2013) ISSN :2102-6238. Article.

[16] S. Kotzard, S. Nadarajah, Extreme value distributions : theory and Applications. London Imperial college Press. Thèse, 2000.

