

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université Saad Dahlab - Blida1

Faculté des sciences

Département de mathématiques

Mémoire de fin d'étude
PRESENTE POUR L'OBTENTION DU DIPLOME DE
Master EN MATHÉMATIQUES
SPECIALITE : RECHERCHE OPERATIONNELLE

Thème

**La Domination sécurisée et totale sécurisée dans
les graphes**

Présenté par : Herma Fatine Nesrine

Jury :

Président : Chellali M.

Professeur, Univ. Blida1

Promoteur: Boumediene H.

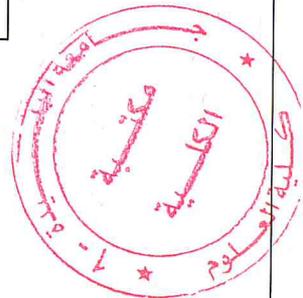
Maître de Conférences, Univ .Blida1

Examineur : Bouchou A.

Maître de Conférences, Univ .Media

Examineur : Ikhlef Eschouf N.

Maître de Conférences, Univ .Media



Remerciements

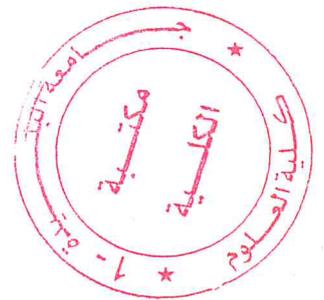
Premièrement et avant tout, Je remercie mes très chers parents qui ont toujours été là pour moi à me soutenir à m'encourager et à me pousser en avant.

Je tiens à remercier tous les membres de ma famille, dont le soutien et l'aide m'ont été précieux.

Je tiens à remercier mon promoteur **Monsieur H. Boumediene** pour la confiance qu'il m'a accordée en me proposant ce thème et d'avoir accepté de le diriger.

Je remercie aussi tous les membres de jury : **Mr M. Chellali** pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de mémoire. Qu'il trouve ici l'expression de mon profond respect.

Mr A. Bouchou et **Mr N. Ikhlef Eschouf** pour avoir accepté d'examiner ce travail, qu'ils trouvent ici ma profonde reconnaissance.



Résumé

Dans ce mémoire, nous nous intéressons aux concepts de la protection dans les graphes. Une stratégie de protection d'un graphe consiste à placer des gardiens au chevet de chaque sommet afin de le défendre contre une éventuelle attaque. Dans la littérature, plusieurs variantes de ces problèmes de protection ont été étudiées.

Nous présentons la *domination sécurisée* où un gardien au plus est placé dans un sommet. Lorsqu'un sommet sans gardien est attaqué, un gardien sur un sommet voisin peut se déplacer pour le défendre. Nous cherchons à utiliser le minimum de gardiens tel que l'ensemble des gardiens forme, avant et après l'attaque, un dominant du graphe. Un tel ensemble est dit *dominant sécurisé* et sa cardinalité minimum est dite *nombre de domination sécurisée*. Si de plus un sommet avec gardien doit être protégé par un autre gardien, nous parlons alors de la *domination sécurisée totale*.

Dans ce mémoire, nous considérons ces concepts et nous reprenons les résultats de la littérature, en particulier les questions ouvertes. Nous contribuons à l'étude du sujet également par des résultats de bornes sur le nombre de domination sécurisée.

Abstract

In this brief, we focus on the concepts of protection in the graphs. A strategy for protection of a graph is to place guards at each vertex in order to defend it against a possible attack. In the literature, several variants of these protection issues were studied.

We present the *secure domination*, where one guard is placed in a vertex. When a vertex without a guard is attacked, a guard in a neighbor vertex can move to defend it. We seek to use the minimum of guards so that all guards form before and after the attack, a dominant set of the graph. Such a set is called *secure dominant* and its cardinality minimum is called *secure domination number*. When even a vertex with guard must be protected by another guard, then we speak of *secure total domination*.

In this memory, we consider these concepts and we retake the results of the literature, especially the open questions. We contribute to the topic also by providing some bounds on the number of secure domination.

ملخص

في هذه المذكرة، نهتم بمفاهيم حماية البيانات. احدى الاستراتيجيات تتضمن وضع حراس على بعض العقد لدفع هجوم محتمل. في الابحاث السابقة، تمت دراسة العدد من هذه الاشكاليات

في الهيمنة الأمنة يتم وضع حارس على الاكثر في كل عقدة . عند حدوث هجوم على عقدة ما يتم الدفاع بواسطة الحارس الموجود في القمة او اى حارس مجاور على ان يشكل الحراس قبل وبعد الهجوم مجموعة مهيمنة

أصل هذه المجموعة يسمى العدد المهيمن الأمن. عندما يطلب عدم ترك الحارس بدون حارس مجاور نتحدث عن الهيمنة الكاملة الأمنة

في هذه المذكرة نذكر بالنتائج المحصل عليها في الابحاث السابقة ونعطى بعض النتائج الجزئية. بالاضافة لاهم مشكلات الموضوع

Table des matières

Remerciements

Résumé

Table des matières

Liste des figures

Introduction

I- Concepts fondamentaux

1.1. Définitions de base.	1
1.1.1. Premières définitions	1
1.1.2. Complémentaire.	2
1.1.3. Voisinage et degré	3
1.1.4 Connexité.	4
1.1.5. Graphes particuliers.	4
1.1.6. Sous-graphes	5
1.1.7. Sous graphe induit interdit.	6
1.1.8. Stables, cliques.	6
1.1.9. Isomorphisme de graphes.	7
1.1.10. Arbres et forêts.	8
1.1.11. Produit cartésien.	8
1.1.12. Grille.	9
1.1.13. Circonférence d'un graphe.	9
1.1.14 Graphe scindé.	9

1.2. Paramètres de graphes.	10
1.2.1. Nombres de Stabilité et clique.	10
1.2.2. Couplage	12
1.2.3. Partition en cliques	13
1.3. La Domination dans les graphes	14
1.3.1. Histoire.	14
1.3.2. Ensemble dominant et nombre de domination γ	15
1.4. Quelques variantes de la domination.	16
1.4.1. Domination totale	16
1.4.2. Domination connexe.	17
1.4.3. Domination couplée	18
1.4.4. Domination doublement connexe	19
 II- Domination sécurisée et domination totale sécurisée	
2.1. Domination sécurisée	20
2.2. Domination totale sécurisée	22
2.3. Variantes de la domination sécurisée	24
2.3.1. Domination connexe sécurisée	24
2.3.2. Domination doublement connexe sécurisée	25
2.4. Autres concepts de la domination avec sécurité	26
2.4.1. Domination 1-mouvable	26
2.4.2. Domination Co-sécurisée	27
 III- Résultats pour la domination sécurisée et la domination totale sécurisée.	
3.1. Relation entre γ_s et γ_{st} et caractérisation des γ_s, γ_{st} -ensembles	29
3.1.1. Bornes pour γ_{st} en fonction de γ_s	29
3.1.2. Caractérisation des γ_s, γ_{st} -ensembles	30

3.1.3. Domination totale sécurisée et domination totale	31
3.1.4. Caractérisation d'un arbre T pour lequel $\gamma(T) = \gamma_s(T)$	31
3.2. γ_s et γ_{st} en fonction des paramètres du graphe	32
3.2.1. γ_s et γ_{st} en fonction de l'ordre du graphe	32
3.2.2. La domination sécurisée dans les arbres	34
3.3. γ_s et γ_{st} pour des graphes particuliers	35
3.4. Relations de la domination sécurisée et totale sécurisée avec d'autres paramètres	37
3.4.1. Domination sécurisée et couplage	37
3.4.2. Domination sécurisée et Indépendance	38
3.4.3. Domination totale sécurisée et Indépendance	40
3.4.4. Domination totale sécurisée et partition en cliques	40
3.5. Complexité algorithmique du calcul de γ_s	41
IV- Contribution en domination sécurisée	
4.1. Caractérisation des graphes tels que $\gamma_{st}(G) = \gamma_s(G) = 2$	42
4.2. Borne pour $\gamma_s(G)$	43
4.3. γ_s d'un graphe et son complémentaire	44
4.4. Borner γ_{st} en fonction de γ_t	45
4.5. Autres bornes pour le nombre de domination sécurisée	46
Conclusion et perspectives	47
Bibliographie	49

Liste des figures

1.1	Un exemple de pseudo graphe, avec une boucle	2
1.2	Un exemple de graphe orienté	2
1.3	Un graphe et son complémentaire	3
1.4	Quelques graphes particuliers	5
1.5	Un graphe G , sous graphe, graphe partiel, et sous graphe induit	6
1.6	Un stable $\{v_2, v_4\}$ et une clique $\{v_1, v_2, v_3\}$	7
1.7	Deux graphes isomorphes et la bijection explicitée	8
1.8	Exemples d'arbres	8
1.9	Le produit cartésien $K_4 \square K_2$	9
1.10	Une grille $P_3 \square P_4$	9
1.11	Un stable maximal et un stable maximum	11
1.12	Une clique $\{v_1, v_2, v_3\}$ d'un graphe G avec $\omega(G) = 3$	12
1.13	Un couplage $\{v_1v_6, v_2v_3, v_4v_5\}$ d'un graphe G avec $\alpha(G) = 3$	13
1.14	Un graphe qui n'a pas un couplage parfait	13
1.15	Un graphe G avec $\theta(G) = 3$	14
1.16	Deux graphes et leurs γ -ensembles de G	16
1.17	Un graphe G avec $\gamma_t(G) = 3$	17
1.18	Un graphe G avec $\gamma_c(G) = 4$	18
1.19	Un graphe G avec $\gamma_{pr}(G) = 2$	19
1.20	Un graphe G avec $\gamma_{cc}(G) = 4$	19
2.1	Quelques graphes avec leurs nombres de domination sécurisée	21
2.2	Un graphe G avec $\gamma_s(G) = 3$	21
2.3	(a) le village de l'exemple 2.1	22

2.3	(b) le graphe qui représente le village	22
2.4	Deux graphes avec leurs nombres de domination totale sécurisée	23
2.5	Un graphe G avec un $\gamma_{st}(G) = 3$	24
2.6	Un graphe G avec $\gamma_{sc}(G) = 4$	25
2.7	Un graphe G avec $\gamma_{sec}(G) = 1$	26
2.8	Un graphe G avec $\gamma_m^1(G) = 2$	27
2.9	Un graphe G avec $\gamma_{cs}(G) = 5$	28
3.1	Une étoile $K_{1,n}$ avec $\gamma_t(K_{1,n}) = 2$ et $\gamma_{st}(K_{1,n}) = n + 1$	45

Introduction

La théorie des graphes est un outil puissant de modélisation et de résolution de problèmes concrets. A l'origine, la théorie des graphes était présentée comme une curiosité mathématique; Euler lors d'une de ses promenades nocturnes a voulu tracer un itinéraire circulaire dans la ville de Königsberg. Partant d'un point donné, il voulait visiter les sept ponts de cette ville une seule fois seulement, puis retourner à son point de départ. Un graphe donc est un dessin géométrique défini par la donnée d'un ensemble de points (appelés *sommets* ou *nœuds*), reliés entre eux par un ensemble de lignes ou de flèches (appelées *arêtes* ou *arcs*). Chaque arête a pour extrémités deux points éventuellement confondus. Les graphes sont utilisés pour modéliser de nombreuses situations et leurs applications sont par conséquent aussi nombreuses que variées: dans d'autres branches des mathématiques (algèbre, combinatoire, etc.), en informatique, en recherche opérationnelle (tournées de distribution, ordonnancement de tâches, construction de circuits imprimés, etc.), en cartographie (coloriage de cartes), en chimie, etc.. Actuellement, la théorie des graphes englobe plusieurs domaines les uns aussi intéressants que les autres, citons par exemple la coloration, la stabilité, la domination, etc..

La domination dans les graphes est considérée actuellement comme l'un des domaines les plus florissants de la théorie des graphes, elle trouve son origine dans les problèmes de jeux d'échecs. L'intéressement majeur à cette théorie est dû à sa richesse dans de nombreuses applications. Un dominant dans un graphe est un sous ensemble de sommets où tout sommet du graphe est ou bien dans cet ensemble ou bien adjacent à un sommet de cet ensemble. Le cardinal minimum d'un tel ensemble est appelé le nombre de domination. Plusieurs types de domination sont définis sur la base de la définition précédente en imposant des propriétés supplémentaires sur l'ensemble des sommets du graphe. Par exemples, si on impose à ce que les sommets du dominant ne soient pas isolés à l'intérieure de l'ensemble alors on a la domination totale.

La protection des graphes contre les attaques extérieures est devenue très importante à l'ombre du développement immense des nouvelles technologies et du volume des données traitées. Plusieurs modèles existent dans la littérature que se différencient entre autres, du

nombre d'attaques et de leur synchronisation. Nous nous intéressons dans ce mémoire à un modèle de protection appelé domination sécurisée où une seule attaque peut survenir sur un seul sommet. Pour protéger le graphe, nous déployons un gardien dans certains sommets et l'ensemble des gardiens doit former un dominant du graphe. Lorsque un sommet sans gardien est attaqué, un gardien dans un sommet voisin peut se déplacer pour le défendre de sorte que le nouveau placement des gardiens forme toujours un ensemble dominant du graphe. L'objectif est alors d'utiliser un nombre minimum de gardiens, nous parlons du nombre de domination sécurisée. Lorsque l'ensemble dominant doit être total, avant et après l'attaque, nous parlons de la domination sécurisée totale.

Pour faciliter la lecture de ce mémoire, nous résumons dans la suite le contenu de ses chapitres. Le premier chapitre comporte les principales définitions et terminologies de la théorie des graphes utilisés dans ce mémoire et un aperçu de la domination classique et de ses variantes. Le deuxième chapitre est dédié aux deux concepts fondamentaux de ce mémoire, la domination sécurisée et sécurisée totale. Nous donnons des définitions illustrées par des exemples de graphes et des situations pratiques. Nous présentons également deux autres modèles de protection de graphe, étroitement liées à la domination sécurisée.

Dans le troisième chapitre, nous exposons les résultats qui ont été trouvés dans la littérature concernant la domination sécurisée et totale sécurisée. Nous commençons par la relation entre les nombres de domination sécurisée et sécurisée totale, ensuite les bornes en fonction des paramètres structurels du graphe. Nous nous intéressons également à des classes particulières de graphes et à la relation liant la domination sécurisée à d'autres invariants du graphe, en particulier le nombre d'indépendance.

Le dernier chapitre comporte notre contribution. Nous donnons une caractérisation des graphes avec des nombres de domination sécurisée et sécurisée totale égaux à 2. Ensuite, nous essayons d'étendre un résultat classique, liant les nombres de domination d'un graphe et son complémentaire, à la domination sécurisée. Nous terminons le chapitre par un résultat négatif, il est impossible de borner le nombre de domination sécurisée totale par un multiple du nombre de domination totale.

Nous terminons le mémoire par une liste de problèmes ouverts sur la domination sécurisée, trouvés dans la littérature ou proposés par nous-même.

Chapitre 1

Concepts fondamentaux

Ce premier chapitre fournit au lecteur les concepts de base en théorie des graphes nécessaires à la bonne compréhension de ce mémoire. La Partie une donne les notions et définitions fondamentales de graphe, degré, sous graphe, etc.

Dans la deuxième partie, nous rappelons les paramètres de graphe utilisés dans ce mémoire, nombre de stabilité, clique maximum, nombre de domination.

Première Partie

1.1 Définitions de base

1.1.1 Premières définitions

Intuitivement un **graphe** (*graph*) est un ensemble de points ou **sommets** (*vertices*), que nous supposons toujours non vide et fini dans la suite, dont certaines paires sont reliées, formant ainsi les **extrémités** (*end points*) d'une **arête** (*edge*). Plus formellement :

Définition 1.1 Un graphe G est un couple, noté $G = (V, E)$ avec

- V est l'ensemble des sommets,
- $E \subseteq \{\{x, y\}, x \in V, y \in V\}$ est l'ensemble des arêtes.

Le nombre de sommets d'un graphe, ou **ordre** (*order*), est noté n . Le nombre d'arêtes est quant à lui, est noté m . Une arête de E est notée xy .

Définition 1.2

- Deux arêtes dans un graphe G sont adjacentes si elles ont une extrémité commune.
- Deux arêtes dans un graphe G sont indépendantes si elles ne sont pas adjacentes dans G .

Notons que la définition 1.1 laisse la possibilité pour une arête d'avoir ses deux extrémités identiques ; une telle arête est appelée **boucle** (*loop*). De plus, pour de nombreuses applications il peut être utile d'avoir plusieurs arêtes ayant mêmes extrémités ; on parle alors d'**arêtes multiples** (*multiple edges*). Un graphe ayant des arêtes multiples est un **multi graphe** (*Multigraph*);s'il contient également des boucles, on parle de **pseudo graphe** (*pseudo graph*) (figure 1.1). Un graphe ne contenant ni boucle ni arête multiple est dit **simple** (*simple graph*).



Figure 1.1 *Un exemple de pseudo graphe, avec une boucle.*

Il est également courant de rencontrer des graphes pour lesquels on distingue l'extrémité initiale de l'extrémité terminale des arêtes, c'est-à dire que l'on ne considère plus des paires mais des couples de sommets ; on parle alors d'**arcs** (*arcs*) et non plus d'arêtes. Un tel graphe est dit **orienté** (*directed graph or digraph*) (figure 1.2). Dans la suite, sauf mention contraire explicite, tous les graphes que nous considérerons seront simples et non orientés.

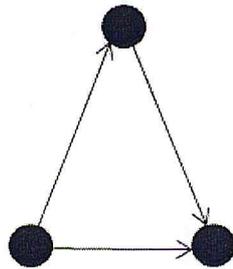


Figure 1.2 *Un exemple de graphe orienté.*

1.1.2 Complémentaire

Quand on recherche les propriétés d'un graphe, il est parfois plus simple d'étudier son complémentaire.

Définition 1.3 Le **complémentaire** (*complement*) d'un graphe $G = (V, E)$ est le graphe noté $\bar{G} = (V, \bar{E})$ défini par :

- l'arête $uv (u \neq v) \in \bar{E}$ si et seulement $uv \notin E$.

Voir la figure 1.3, pour l'exemple de deux graphes, l'un est le complémentaire de l'autre.



Figure 1.3 Un graphe et son complémentaire.

1.1.3 Voisinage et degré

Deux sommets v et w formant les extrémités d'une même arête sont dit **adjacents** (*adjacent vertices*) ou **voisins** (*neighbors*). On définit alors le **voisinage** d'un sommet.

Définition 1.4

- Le **voisinage ouvert** (*open neighborhood*) d'un sommet v , noté $N(v)$, est l'ensemble des sommets qui lui sont adjacents.
- Le **voisinage fermé** (*closed neighborhood*) d'un sommet v , noté $N[v]$, est égal à $N(v) \cup \{v\}$.

Un sommet n'ayant aucun voisin est qualifié d'**isolé** (*isolated vertex*).

Nous définissons également le voisinage d'un **ensemble** de sommets.

Définition 1.5 Le voisinage *ouvert* (resp *fermé*) d'un ensemble de sommets S , noté $N(S)$ (resp $N[S]$) est l'ensemble $N(S) = \bigcup_{v \in S} N(v)$ (resp $N[S] = N(S) \cup S$).

Définition 1.6 Le **degré** (*degree*) d'un sommet v , noté $d(v)$, est égal à $|N(v)|$, i.e. le nombre de ses voisins.

Le **plus petit degré** d'un sommet d'un graphe G est noté $\delta(G)$ et le **plus grand degré** est noté $\Delta(G)$.

1.1.4 Connexité

La connexité d'un graphe est une mesure importante de sa robustesse quand on le considère comme un réseau (réseau de transport, réseau informatique, etc.).

Définition 1.7 Un graphe est **connexe** (*connected*) si pour toute paire de sommets il est possible de passer de l'un à l'autre par une suite de sommets adjacents.

La connexité définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des sommets, et chacune des classes d'équivalence est appelée **composante connexe** (*connected component*) du graphe. Autrement dit, un graphe est connexe si et seulement s'il ne contient qu'une seule composante connexe. Intuitivement, le nombre de composantes connexes correspond au nombre de « morceaux » du graphe quand on le dessine.

Proposition 1.2 Pour tout graphe G , G est connexe ou \bar{G} est connexe.

1.1.5 Graphes particuliers

Certains graphes, interviennent si souvent que les chercheurs leur ont attribué un nom ou une notation spéciale. Ce sont notamment les graphes suivants : graphe complet, cycle et chaîne.

Définition 1.8 Le **graphe complet** (*Complete graph*) d'ordre n , noté K_n , est le graphe où chaque sommet est adjacent aux $n-1$ autres sommets.

Définition 1.9 Un **graphe biparti** (*bipartite graph*) est un graphe dont on peut partitionner l'ensemble des sommets en deux ensembles A et B non vides tels que toute arête a une extrémité dans A et l'autre dans B . On note alors $G = (A, B, E)$.

Définition 1.10 Un **graphe biparti complet** est un graphe biparti $G = (A, B, E)$ où tout sommet de A est adjacent à tout sommet de B . On le note $K_{i,j}$, où $i = |A|$ et $j = |B|$.

Définition 1.11 Le **cycle** (*cycle*) d'ordre n , noté C_n , est le graphe connexe dont tous les sommets sont de degré 2.

Définition 1.12 La **chaîne** (*path*) d'ordre n , noté P_n , est le graphe connexe dont tous les sommets sont de degré 2, sauf les deux extrémités de la chaîne qui sont de degré 1.

La longueur d'un cycle ou d'une chaîne est le nombre d'arêtes qu'il/elle contient.

Définition 1.13 Un graphe est **régulier** si tous ses sommets sont de même degré.

Un graphe régulier de même degré k est dit k -régulier. Voir figure 1.4 pour des exemples de graphes complet, bipartie complet, cycle et chaîne. Les graphes K_5 et C_5 sont également des graphes 4-régulier et 2-régulier.

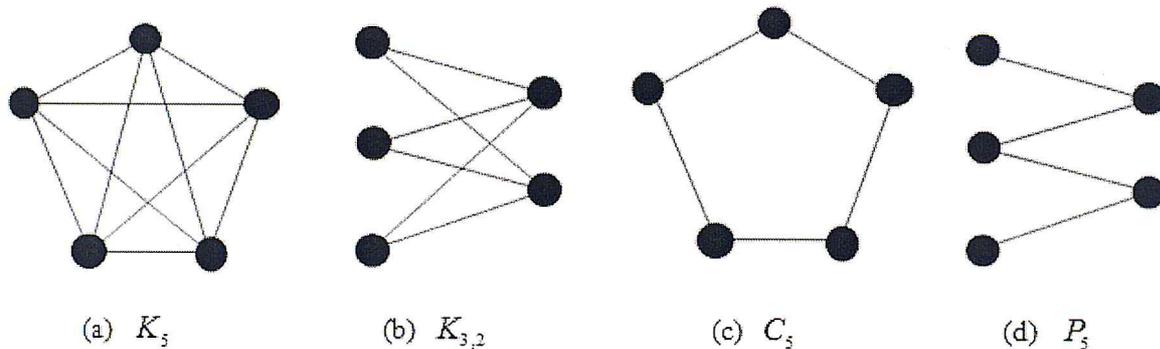


Figure 1.4 Quelques graphes particuliers.

1.1.6 Sous-graphes

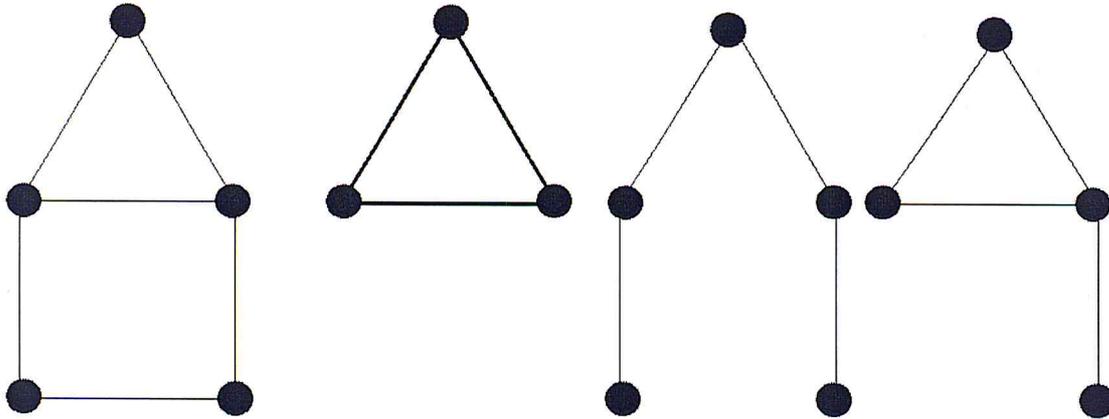
Nous donnons les définitions d'un sous-graphe, graphe partiel et sous graphe induit, d'un graphe $G = (V, E)$ à partir des sous-ensembles de V et E .

Définition 1.14 Un graphe $G' = (V', E')$ est un **sous-graphe** (*subgraph*) de $G = (V, E)$ si $V' \subseteq V$ et $E' \subseteq E$; G est alors un **sur-graphe** (*super graph*) de G' .

Définition 1.15 Un graphe $G' = (V', E')$ est un sous-graphe **couvrant** (ou **graphe partiel**) (*spanning subgraph*) de $G = (V, E)$ si $V' = V$ et $E' \subseteq E$.

Définition 1.16 Le sous-graphe de $G = (V, E)$ **induit** par $V' \subseteq V$ (*induced subgraph*), noté $G[V']$, est le sous-graphe ayant pour ensemble de sommets V' et pour ensemble d'arêtes toutes les arêtes ayant leurs deux extrémités dans V' .

Pour une illustration, voir la figure 1.5.



(a) Un graphe G . (b) Sous graphe. (c) graphe partiel. (d) sous graphe induit.

Figure 1.5 Un graphe G , sous graphe, graphe partiel et sous graphe induit.

1.1.7 Sous graphe induit interdit

La notion de graphe induit nous permet de définir de nouvelles classes de graphes.

Définition 1.17 Étant donnée une famille de graphes F , un graphe G est dit **sans F** , (F -free) s'il ne contient pas de F , comme sous-graphe induit.

Par exemple, les arbres sont des graphes sans cycle, les graphes triangulés sont des graphes sans cycle d'ordre supérieure à 3, les graphes sans P_4 sont des graphes qui ne contiennent pas un P_4 comme sous graphe induit.

1.1.8 Stables, cliques

Nous présentons ici les notions de stable et de clique.

Définition 1.18

- Un **stable** (*stable set* ou *independent set*) est un ensemble de sommets deux à deux non adjacents.
- Une **clique** (*clique*) est un ensemble de sommets deux à deux adjacents.

Pour un exemple de graphe avec un stable et une clique voir figure 1.6.

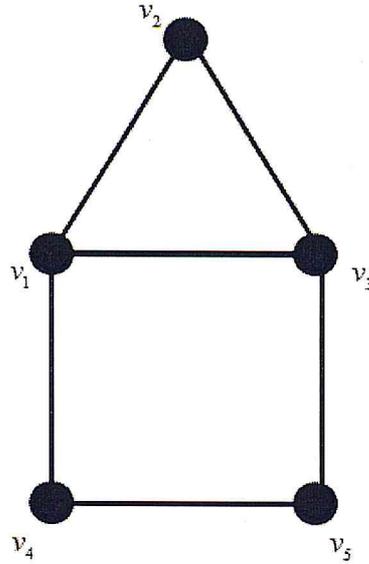


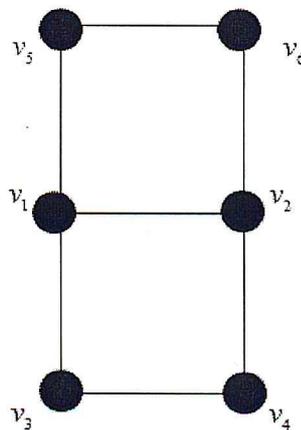
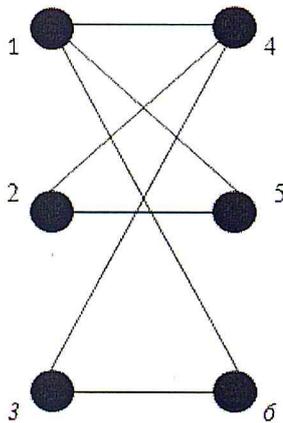
Figure 1.6 Un stable $\{v_2, v_4\}$ et une clique $\{v_1, v_2, v_3\}$.

1.1.9 Isomorphisme de graphes

Intuitivement, deux graphes sont isomorphes s'ils ont la même «structure», i.e. s'il est possible de déplacer les sommets de l'un pour qu'il soit la copie conforme de l'autre (au nom des sommets près).

Définition 1.19 Deux graphes $G = (V_G, E_G)$ et $H = (V_H, E_H)$ sont **isomorphes** (*isomorphic*) s'il existe une bijection $f: V_G \rightarrow V_H$ telle que $\forall u, v \in V_G$, u et v sont adjacents dans G si et seulement si $f(u)$ et $f(v)$ sont adjacents dans H . On note alors $G \cong H$.

La figure 1.7 illustre cette définition.



$$f(1) = v_1$$

$$f(2) = v_4$$

$$f(3) = v_6$$

$$f(4) = v_2$$

$$f(5) = v_3$$

$$f(6) = v_5$$

Figure 1.7 Deux graphes isomorphes et la bijection explicitée.

1.1.10 Arbres et forêts

Définition 1.20

- Un **arbre** (*tree*) est un graphe connexe sans cycle.
- Une **forêt** (*forest*) est un graphe sans cycle.

Autrement dit, une forêt est un graphe dont toute composante connexe est un arbre. Dans la figure 1.8, nous donnons 5 arbres constituant une forêt.

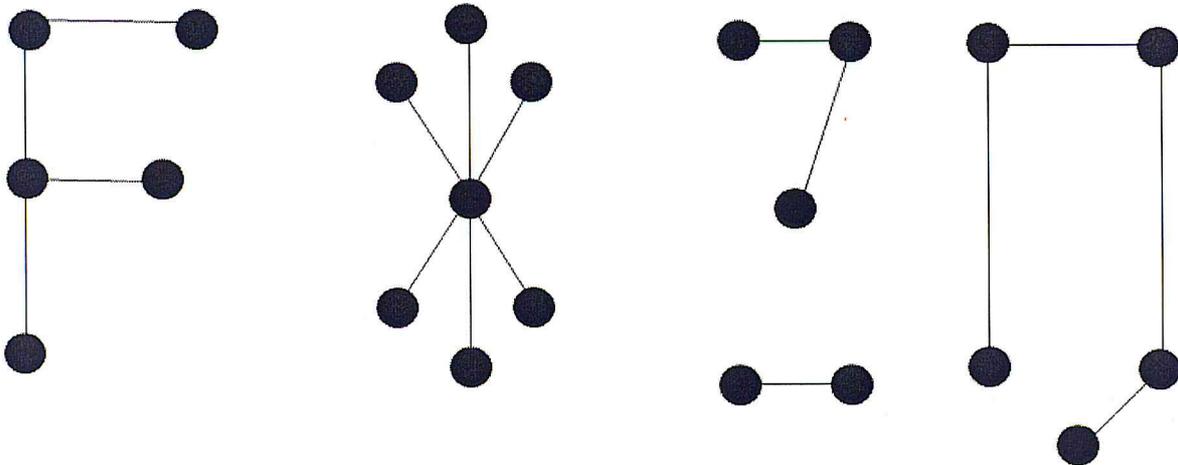


Figure 1.8 Exemples d'arbres.

Un sommet de degré 1 dans un arbre est appelé **sommet pendent** (*pendent vertex*) ou **feuille** (*leaf*), et son voisin est appelé **sommet support** (*support vertex or stem*).

1.1.11 Produit Cartésien

Définition 1.21 Le **produit Cartésien** (*Cartesian product*) de deux graphes $G = (V, E)$ et $H = (V', E')$ est le graphe représenté par $G \square H$, avec $V(G \square H) = V(G) \times V(H)$ (où \times désigne le produit cartésien d'ensembles) et $((u, u'), (v, v')) \in E(G \square H)$ si et seulement si $u = v$ et $u'v' \in E'$ ou $u' = v'$ et $uv \in E$.

Dans la figure 1.9 nous donnons un exemple de produit cartésien $K_4 \square K_2$.

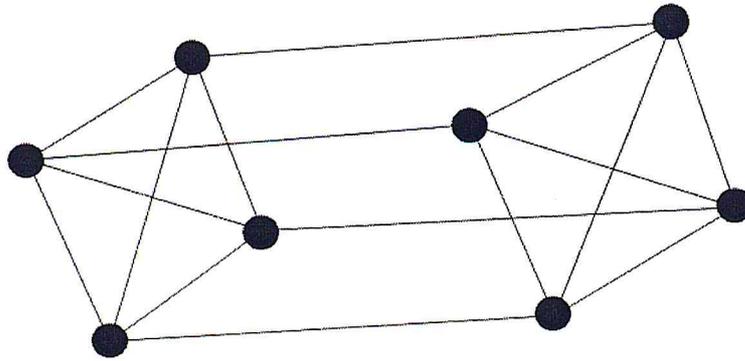


Figure 1.9 Le produit Cartésien $K_4 \square K_2$.

1.1.12 Grille

Définition 1.22 Une **grille** (*grid*) est le produit Cartésien de deux chaînes.

Pour un exemple de grille voir la figure 1.10.

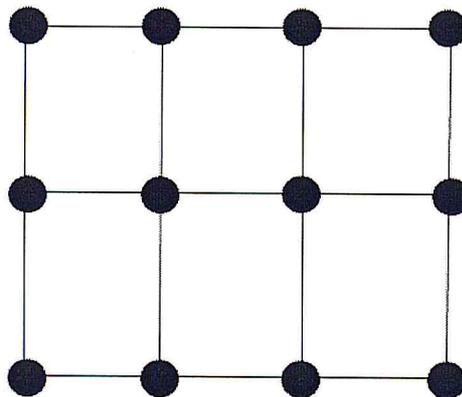


Figure 1.10 Une grille $P_3 \square P_4$.

1.1.13 Circonférence d'un graphe

Définition 1.23 La **maille** (*girth*) d'un graphe G est la longueur d'un plus court cycle de G .

1.1.14 Graphe scindé

Définition 1.24 Un graphe **scindé** (*split graph*) est un graphe dont l'ensemble des sommets peut être partitionné en une clique et un stable.

Deuxième Partie

1.2 Paramètres de graphes

Deux graphes isomorphes ont des propriétés communes. Ces propriétés sont appelées *invariants* de graphes.

Définition 1.25 Un **invariant** (*invariant*) de graphe est une propriété stable par isomorphisme.

Le nombre de sommets et d'arêtes sont deux invariants de base d'un graphe. Avant de donner les définitions de quelques invariants de graphes utilisés dans ce mémoire, nous allons définir les notions de minimalité et maximalité.

Définition 1.26

- Un ensemble (de sommets, d'arêtes. . .) est **minimal** (resp. **maximal**) pour une propriété P s'il ne contient (resp. n'est contenu dans) aucun ensemble vérifiant la propriété P .
- Un ensemble (de sommets, d'arêtes. . .) est **minimum** (resp. **maximum**) pour une propriété P s'il est de cardinalité minimale (resp. maximale) pour la propriété P .

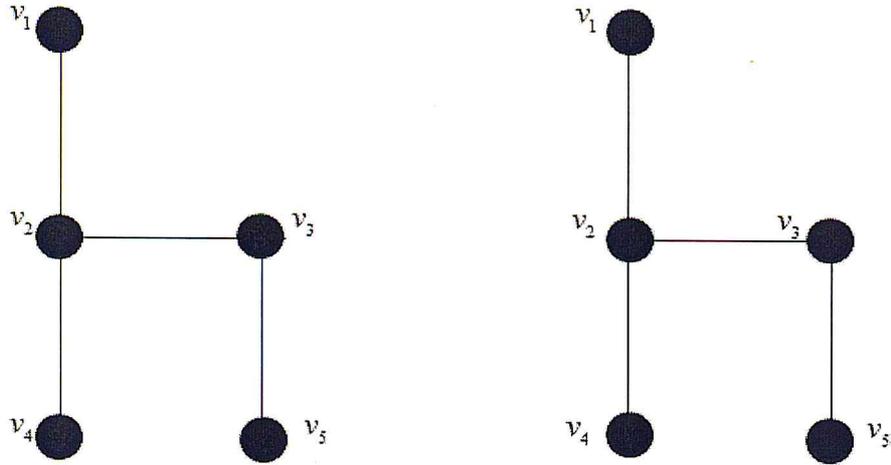
Il est facile de voir qu'un ensemble maximum (resp. minimum) est aussi maximal (resp. minimal), mais un ensemble maximal (resp. minimal) n'est pas nécessairement maximum (resp. minimum).

1.2.1 Nombres de Stabilité et clique

Rappelons qu'un sous-ensemble $S \subseteq V$ de G est un stable (resp. une clique) si les sommets de S sont non adjacents (resp. adjacents) deux à deux.

Définition 1.27 La cardinalité maximum d'un stable de G est appelé **le nombre de stabilité**, noté $\beta(G)$.

Le stable $\{v_2, v_5\}$ sur la figure 1.11(a) est maximal (il est en effet impossible d'ajouter à ce stable un autre sommet pour former un stable de cardinalité supérieure), mais il n'est pas maximum (puisque'il est possible de trouver un autre stable, de cardinalité supérieure (fig.1.11(b))). Alors $\beta(G) = 3$.



(a) Un stable maximal $\{v_2, v_5\}$

(b) Un stable maximum $\{v_1, v_4, v_5\}$

Figure 1.11 Un stable maximal et un stable maximum.

Définition 1.28 La cardinalité minimum d'un stable maximal de G est appelé **le nombre de domination stable**, noté $i(G)$.

Dans le graphe G de la figure précédente, $i(G) = 2$.

Définition 1.29 La cardinalité maximum d'une clique de G est appelé **le nombre de clique maximum**. Il est noté par $\omega(G)$.

Pour un exemple de clique de cardinalité maximum, voir la figure 1.12.

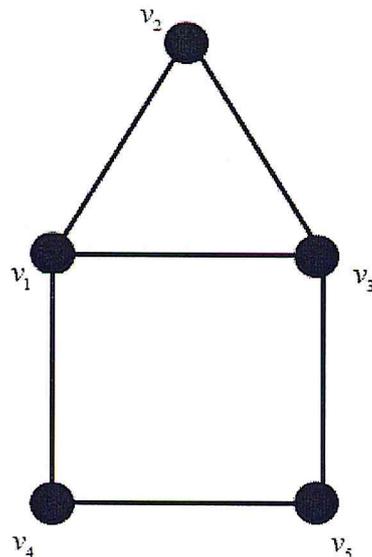


Figure 1.12 Une clique $\{v_1, v_2, v_3\}$ d'un graphe G avec $\omega(G) = 3$.

Les stables et les cliques interviennent dans de très nombreux problèmes pratiques. Pour la plupart de ces problèmes, nous modélisons la situation à l'aide d'un graphe, et la solution consiste à déterminer le plus grand stable ou la plus grande clique du graphe: nous parlons alors de stable ou clique maximum.

Exemple pratique 1.1 Deux amis se rendent pour une semaine dans un centre de vacances proposant diverses activités de loisir et sportives. Afin de satisfaire l'ensemble de la clientèle, certaines activités ont lieu en même temps, et il n'est donc pas possible de participer à toutes. Soucieux de rentabiliser leur séjour, Les deux amis désirent participer à un maximum d'activités.

La théorie des graphes est un excellent moyen de modéliser cette situation : on associe à chaque activité un sommet du graphe, et on relie deux sommets si les activités correspondantes sont « incompatibles », c'est-à-dire s'il est impossible de participer aux deux, pour des contraintes d'horaires. Il est alors facile de voir qu'un ensemble activités « compatibles » constitue un stable. Ainsi, le problème des deux amis se ramène à la recherche d'un stable maximum dans un graphe.

Évidemment, comme une clique dans un graphe G est un stable dans son complémentaire \bar{G} et réciproquement, ce problème revient à chercher un stable maximum dans \bar{G} . Rappelons que la cardinalité d'une clique maximum de G est notée $\omega(G)$ et qu'on a donc $\omega(G) = \alpha(\bar{G})$.

Exemple pratique 1.2 Plutôt que d'établir le graphe d'incompatibilité des activités comme ci-dessus, Les deux amis peuvent préférer le graphe de « compatibilité » des activités autrement dit, ils choisissent de relier deux sommets si et seulement s'ils correspondent à deux activités n'ayant pas lieu en même temps. Leur problème se ramène alors à celui de la clique maximum.

1.2.2 Couplage

Définition 1.30 Un **couplage** dans un graphe G est un ensemble d'arêtes indépendantes.

Définition 1.31 la cardinalité maximum d'un couplage de G est appelé **le nombre de couplage supérieure**, noté $\alpha(G)$.

Dans la figure 1.13 nous donnons l'exemple d'un graphe et son couplage maximum.

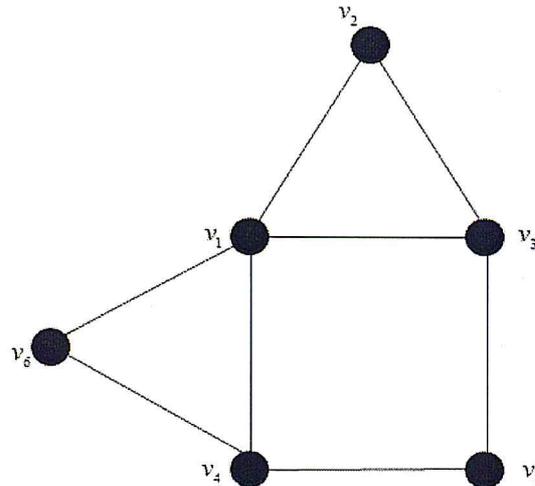


Figure 1.13 Un couplage $\{v_1v_6, v_2v_3, v_4v_5\}$ d'un graphe G avec $\alpha(G) = 3$.

Un couplage est dit **parfait** dans G si $\alpha(G) = \frac{n}{2}$. Dans la figure 1.13, le couplage $\{v_1v_6, v_2v_3, v_4v_5\}$ est parfait, en effet $\alpha = 3 = \frac{6}{2}$. Il est à noter qu'un couplage parfait peut ne pas exister pour tout graphe (voir figure 1.14).

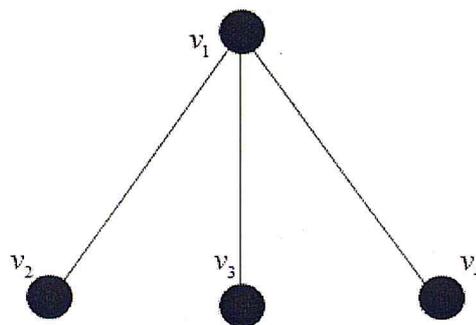


Figure 1.14 Un graphe n'ayant pas un couplage parfait.

1.2.3 Partition en cliques

Définition 1.32 Une **partition en clique** (*clique covering*) d'un graphe G est une partition de l'ensemble des sommets en cliques.

Définition 1.33 La cardinalité minimum d'une couverture en clique est appelé le **nombre de partition en clique**, noté $\theta(G)$.

Le graphe de la figure 1.15 peut être partitionné en trois cliques $\{v_1, v_3\}$, $\{v_2, v_4\}$ et $\{v_5, v_6, v_7\}$. Et $\theta(G) = 3$.

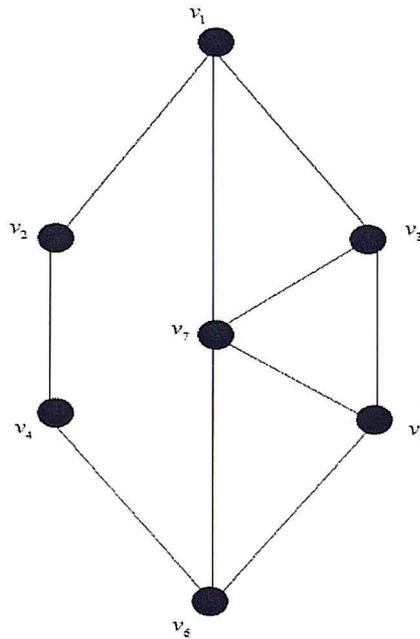


Figure 1.15 Un graphe G avec $\theta(G) = 3$.

1.3 La Domination dans les graphes

La domination prend part dans de nombreux problèmes concrets également. Pour la plupart de ces problèmes, nous modélisons la situation à l'aide d'un graphe, et la solution consiste à déterminer le plus petit dominant du graphe: nous parlons alors de dominant minimum. Par exemple couvrir tous les ronds-points d'une ville en installant le minimum de policiers.

1.3.1 Histoire

En théorie des graphes, la domination est utilisée pour modéliser plusieurs problèmes de localisation. Des exemples existent dans la littérature, le plus classique est le problème du jeu d'échecs présenté en 1862 par Jaenisch, comme suit : Trouver le nombre minimum de reines à placer sur l'échiquier de telle manière que chaque case soit occupée par une reine ou bien occupée par l'une des reines en un seul mouvement.

Nous dirons qu'un sommet se domine et domine tous ses voisins. Le concept de la domination a été introduit dans le papier de Hedetniemi et Laskar. En termes de graphes, le problème de l'échiquier est modélisé en la recherche d'un ensemble dominant minimum d'un graphe. En effet, chaque case de l'échiquier est représentée par un sommet du graphe et deux sommets sont liés si une reine peut se déplacer entre les cases correspondantes de l'échiquier. Ainsi, déterminer le nombre de reines minimum revient à déterminer le cardinal minimum d'un ensemble dominant du graphe. Ce problème reste ouvert jusqu'à présent pour un graphe correspondant à un échiquier arbitraire.

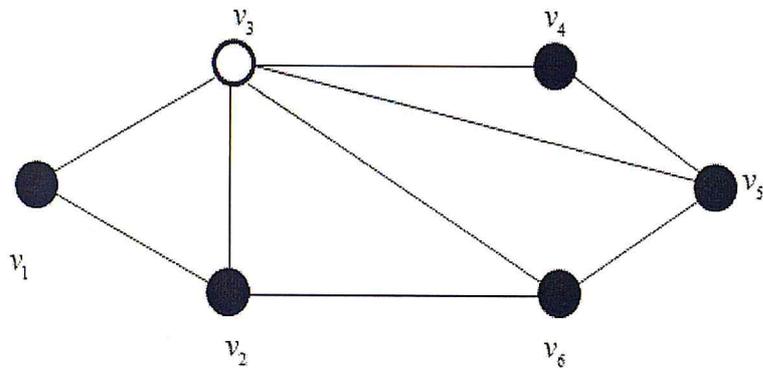
1.3.2 Ensemble dominant et nombre de domination γ

Définition 1.34 Un ensemble $S \subseteq V$ dans un graphe $G = (V, E)$ est un **ensemble dominant** si tout sommet qui n'est pas dans S est adjacent à au moins un sommet de S , i.e. $N[S] = V$.

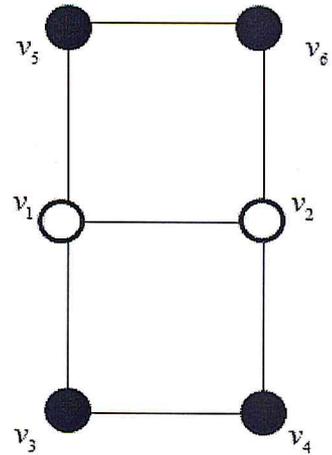
Définition 1.35 La cardinalité minimum d'un ensemble dominant est appelé **le nombre de domination** de G , noté $\gamma(G)$.

Pour un graphe G un ensemble S est dit $\gamma(G)$ -ensemble où γ -ensemble s'il n'y a pas d'ambiguïté si S est un dominant et $|S| = \gamma(G)$. Il en sera similairement pour tous les autres paramètres.

Dans le graphe (a) de la figure 1.16, l'ensemble $\{v_2, v_4\}$ est un dominant minimal non minimum, et l'ensemble $\{v_3\}$ est un dominant minimum, en effet le sommet v_3 est adjacent à tous les sommets de G . D'où $\gamma(G) = 1$. Dans le graphe (b) de la figure 1.16, l'ensemble $\{v_1, v_2\}$ est un dominant minimum.



(a) Un graphe G avec $\gamma(G)=1$.



(b) Un graphe G avec $\gamma(G)=2$.

Figure 1.16 Deux graphes et leurs γ -ensembles de G .

1.4. Quelques variantes de la domination

En raison de la large variété des problèmes liés à la domination, nous allons nous restreindre ici uniquement aux types de domination qui seront utilisés dans la suite du mémoire.

1.4.1 Domination totale

Nous commençons par la définition d'un ensemble dominant total.

Définition 1.36 Un ensemble $S \subseteq V$ dans un graphe sans sommets isolés $G = (V, E)$ est un ensemble **dominant total** si chaque sommet dans V est adjacent à un sommet de S , i.e $N(S) = V$.

En d'autres termes, un ensemble dominant total $S \subseteq V$ est un ensemble dominant tel que, $G[S]$ est sans sommet isolé.

Définition 1.37 La cardinalité minimum d'un ensemble dominant total est appelé le **nombre de domination totale** de G , noté $\gamma_t(G)$.

Dans la figure 1.17, l'ensemble $\{v_1, v_2, v_3\}$ est un dominant total minimum, donc $\gamma_t(G) = 3$.

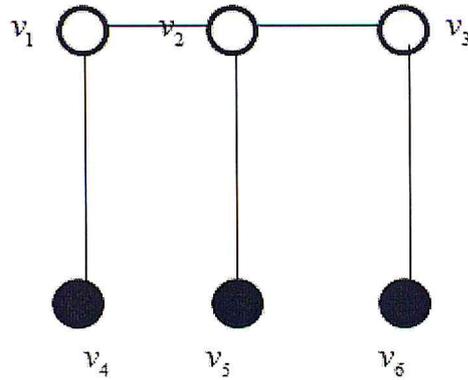


Figure 1.17 Un graphe G avec $\gamma_i(G) = 3$.

Une conséquence immédiate des définitions des nombres de domination et domination totale, est que pour tout graphe G sans sommets isolés, $\gamma_i(G) \geq \gamma(G)$.

1.4.2 Domination connexe

Nous présentons la définition d'un ensemble dominant connexe et son nombre de domination connexe dans un graphe G .

Définition 1.38 Un ensemble $S \subseteq V$ dans un graphe connexe $G = (V, E)$ est un ensemble **dominant connexe** si S est un dominant et le sous-graphe $G[S]$ induit par l'ensemble S est connexe.

Définition 1.39 La cardinalité minimum d'un ensemble dominant connexe est appelé le **nombre de domination connexe** de G , noté $\gamma_c(G)$.

Dans la figure 1.18, l'ensemble $S = \{v_1, v_2, v_3, v_6\}$ est un dominant connexe minimum car $G[S]$ est un graphe connexe et tous les sommets de $V \setminus S$ sont adjacents à un sommet de S .

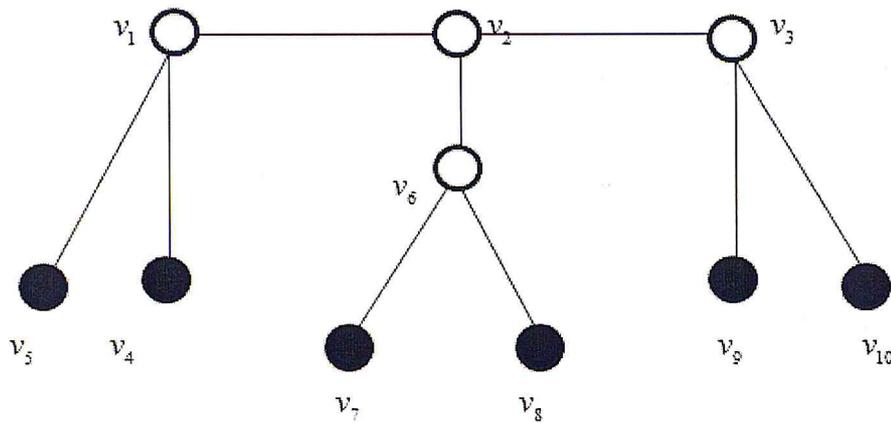


Figure 1.18 Un graphe G avec $\gamma_c(G) = 4$.

1.4.3 Domination couplée

La domination couplée a été introduite par W.Haynes en 1998.

Définition 1.40 Un ensemble $S \subseteq V$ dans un graphe $G = (V, E)$ est un ensemble **dominant couplé** si S est un dominant et le sous graphe $G[S]$ induit par S possède un couplage parfait.

Définition 1.41 La cardinalité minimum d'un ensemble dominant couplé est appelé le **nombre de domination couplée** de G , noté $\gamma_{pr}(G)$.

Dans la figure 1.19, l'ensemble $S = \{v_1, v_2\}$ est un dominant couplé de cardinalité minimum, en effet il est un dominant de G et le sous graphe induit par S possède un couplage parfait.

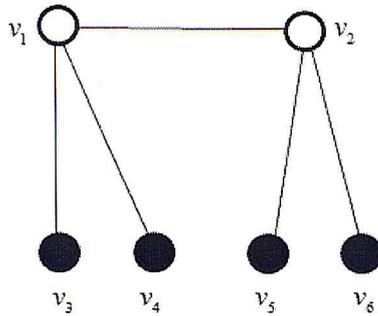


Figure 1.19 Un graphe G avec $\gamma_{pr}(G) = 2$.

1.4.4 Domination doublement connexe

Nous terminons avec la définition d'un ensemble dominant doublement connexe et son nombre de domination doublement connexe.

Définition 1.42 Un ensemble dominant connexe $S \subseteq V$ dans un graphe connexe $G = (V, E)$ est un ensemble **dominant doublement connexe** si le sous-graphe $G[V(G) \setminus S]$ induit par $V(G) \setminus S$ est connexe.

Définition 1.43 La cardinalité minimum d'un ensemble dominant doublement connexe est appelé le **nombre de domination doublement connexe** de G , noté $\gamma_{cc}(G)$.

Dans la figure 1.20, l'ensemble $S = \{v_3, v_4, v_5, v_6\}$ est un γ_{cc} -ensemble de G , en effet le sous graphe $\{v_1, v_2\}$ induit par $V \setminus S$ est un graphe connexe.

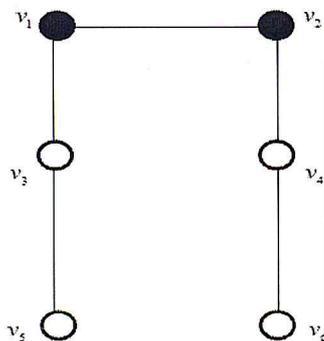


Figure 1.20 Un graphe G avec $\gamma_{cc}(G) = 4$.

Chapitre 2

Domination sécurisée et domination totale sécurisée

Dans ce chapitre, nous parlerons de la domination sécurisée et la domination totale sécurisée. Nous donnons des exemples pratiques. Nous terminons le chapitre avec quelques variantes de la domination sécurisée, à savoir la domination connexe sécurisée et doublement connexe sécurisée.

Supposons que nous utilisons des gardiens pour protéger un graphe contre une attaque extérieure sur un de ses sommets. Au plus un gardien est utilisé à chaque sommet pour défendre le graphe contre une attaque. Un gardien peut défendre le sommet où il est situé ou se déplacer pour défendre un sommet voisin.

L'ensemble des sommets avec gardien doit constituer un ensemble dominant du graphe avant et après le déplacement. Cette stratégie de protection est appelée la domination sécurisée. Lorsqu'on veut qu'un gardien doit protéger également un autre gardien, nous parlons alors de la domination totale sécurisée. A noter que les gardiens forment avant et après une attaque, un ensemble dominant total.

2.1. Domination sécurisée

La domination sécurisée a été introduite par Cokayne en 2005.

Définition 2.1 Un ensemble dominant $X \subseteq V$ est un ensemble **dominant sécurisé** dans un graphe $G = (V, E)$ si pour chaque sommet $u \in V \setminus X$ il existe un sommet $v \in X$ adjacent à u tel que $(X - \{v\}) \cup \{u\}$ est un ensemble dominant.

Nous dirons alors que v **protège** u et u est **protégé par** v . Le terme **défend** est parfois utilisé dans la littérature au lieu de **protège**.

Définition 2.2 La cardinalité minimum d'un ensemble dominant sécurisé d'un graphe G est appelé le **nombre de domination sécurisée** de G , noté $\gamma_s(G)$.

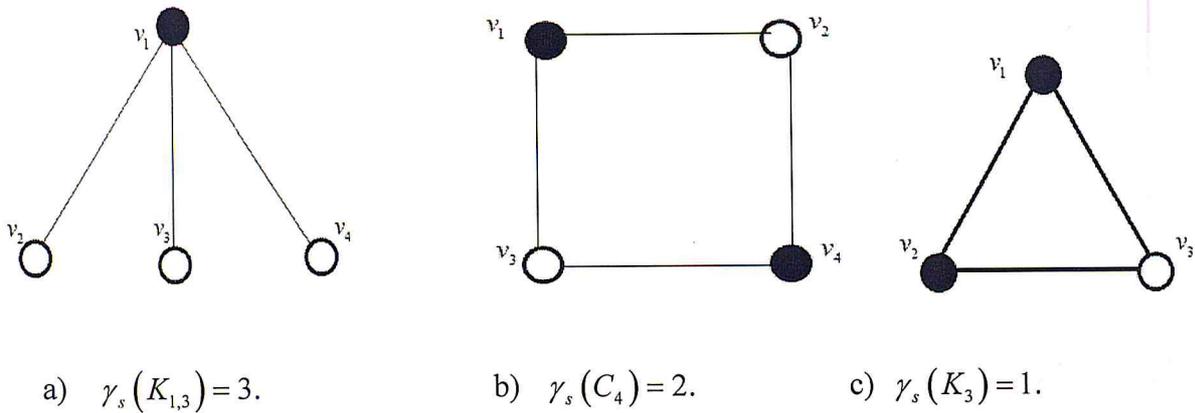


Figure 2.1 Quelques graphes avec leurs nombres de domination sécurisée.

Dans le graphe de la figure 2.2, l'ensemble $X_1 = \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$ est un ensemble dominant sécurisé mais il n'est pas minimum. Par contre l'ensemble $X_2 = \{v_2, v_4, v_5\}$ est minimum. En effet, pour $v_3 \in V \setminus X$, il existe le sommet $v_2 \in X$ tel que $(X - \{v_2\}) \cup \{v_3\}$ est un ensemble dominant, et pour $v_1 \in V \setminus X$, il existe le sommet $v_4 \in X$ tel que $(X - \{v_4\}) \cup \{v_1\}$ est un dominant, d'où $\gamma_s(G) = 3$.

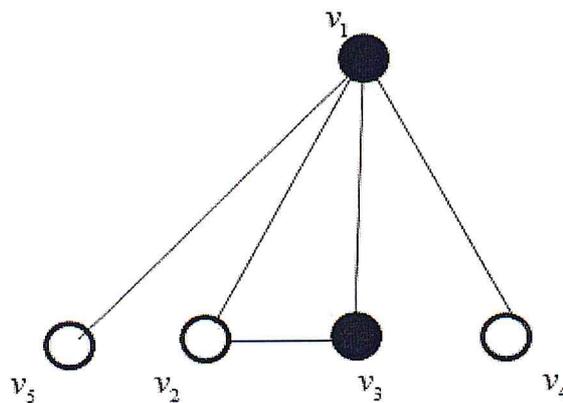


Figure 2.2 Un graphe G avec $\gamma_s(G) = 3$.

Exemple pratique 2.1 Dans une situation de guerre, soit à protéger un village contre des attaques extérieures. Une stratégie de protection consiste à mettre des soldats dans les croisements principaux. A cause du manque d'effectif, nous cherchons à utiliser le minimum de soldats possible. Deux croisements sont considérés comme voisins si l'un est accessible rapidement depuis l'autre. Un soldat est supposé défendre son croisement, ainsi que tout croisement voisin. S'il y a une attaque contre un croisement sans surveillance, un gardien peut

se déplacer vers ce croisement pour faire face au danger, tout en gardant un œil sur son croisement précédent. Voir la figure 2.3 (a) pour une illustration.

Nous pouvons modéliser la situation par un graphe dont les sommets représentent les croisements du village et deux sommets sont liés par une arête si leurs croisements respectifs sont voisins. Alors, notre problème est de trouver un ensemble dominant sécurisé minimum, voir la figure 2.3 (b) pour une illustration du graphe.

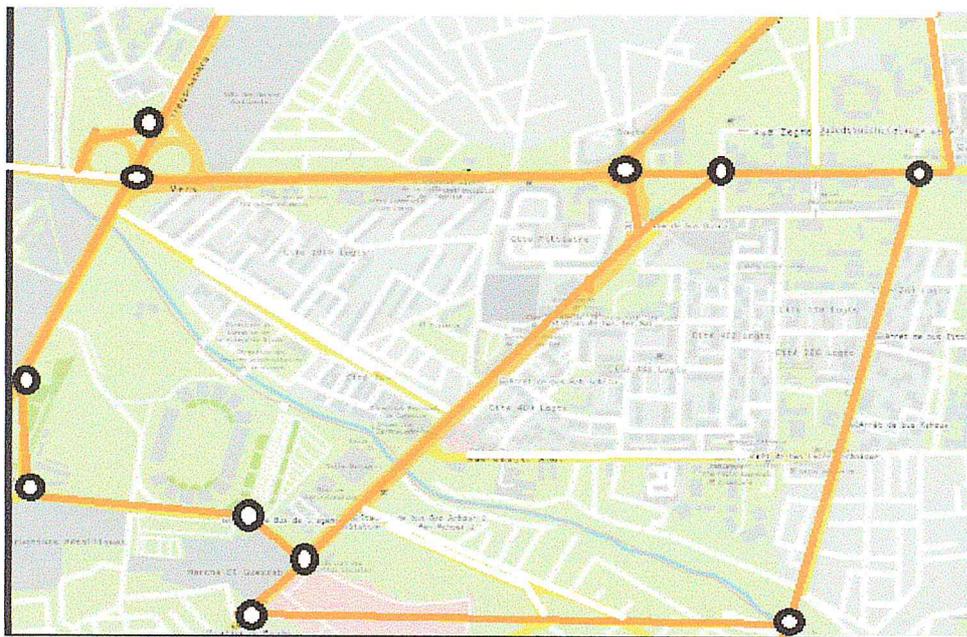


Figure 2.3 (a) Le village de l'exemple 2.1.

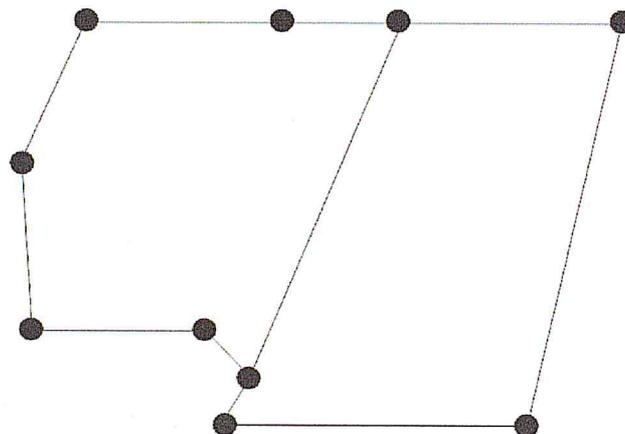


Figure 2.3 (b) le graphe qui représente le village.

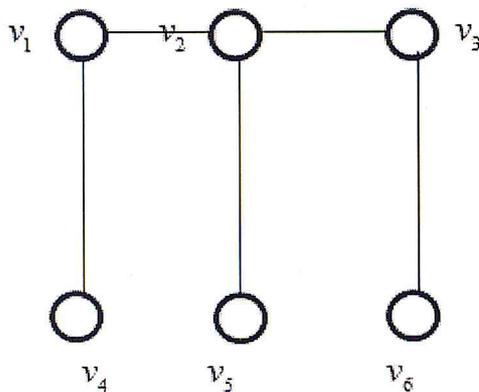
2.2 Domination totale sécurisée

Une variante importante de la domination sécurisée appelée la domination totale sécurisée a été introduite.

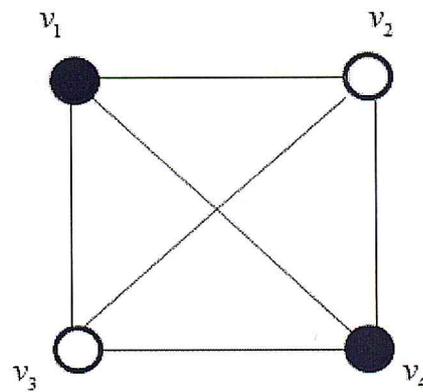
Définition 2.3 Un ensemble dominant total $X \subseteq V$ est un **dominant total sécurisé** dans un graphe $G = (V, E)$ si pour tout $u \in V \setminus X$, il existe un $v \in X$ adjacents à u telle que $(S \setminus \{v\}) \cup \{u\}$ est un dominant total.

Definition 2.4 La cardinalité minimum d'un ensemble dominant total sécurisé d'un graphe G est appelé **le nombre de domination totale sécurisée** de G , noté $\gamma_{st}(G)$.

Un γ_{st} -ensemble d'un graphe G est défini pour tout graphe sans sommet isolé. Dans le graphe (a) de la figure 2.4 l'ensemble $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ est un γ_{st} -ensemble de G , dans le graphe (b) l'ensemble $\{v_2, v_3\}$ est un γ_{st} -ensemble de G , en effet pour $v_1 \in V \setminus X$, il existe le sommet $v_2 \in X$ tel que $(X \setminus \{v_2\}) \cup \{v_1\}$ est un dominant total et pour $v_4 \in V \setminus X$ il existe le sommet $v_3 \in X$ tel que $(X \setminus \{v_3\}) \cup \{v_4\}$ est un dominant total.



a) $\gamma_{st}(G) = 6$.



b) $\gamma_{st}(G) = 2$.

Figure 2.4 deux graphes avec leurs nombres de domination totale sécurisée.

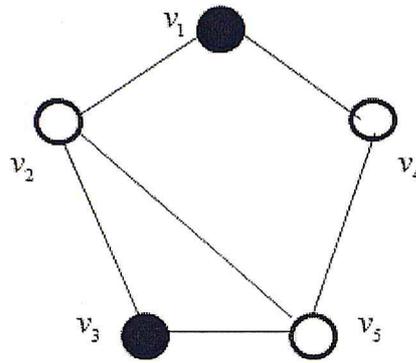


Figure 2.5 Un graphe G avec un $\gamma_{st}(G) = 3$.

Dans la figure ci-dessus, l'ensemble $\{v_2, v_4, v_5\}$ est un γ_{st} -ensemble de G .

Exemple pratique 2.2 Nous reprenons l'exemple précédent, nous supposons en plus des conditions précédentes que tout soldat doit être protégé par un autre soldat. Par exemple, dans le cas où un soldat peut s'en dormir. Alors, nous cherchons un γ_{st} -ensemble.

2.3 Variantes de la domination sécurisée

Nous présentons dans cette partie deux nouvelles variantes de la domination sécurisée à savoir la domination connexe sécurisée et doublement connexe sécurisée.

2.3.1 Domination connexe sécurisée

La domination connexe sécurisée a été étudiée par Cabaro en 2014 dans [1].

Définition 2.5 Un ensemble dominant connexe $u \in V \setminus X$ dans un graphe $G = (V, E)$ est un ensemble **dominant connexe sécurisé** si pour chaque $u \in V \setminus S$, il existe $v \in S$ adjacent à u tel que l'ensemble $(S \setminus \{v\}) \cup \{u\}$ est un ensemble dominant connexe.

Définition 2.6 La cardinalité minimum d'un ensemble dominant connexe sécurisé d'un graphe G est appelé **le nombre de domination connexe sécurisée** de G , noté $\gamma_{sc}(G)$.

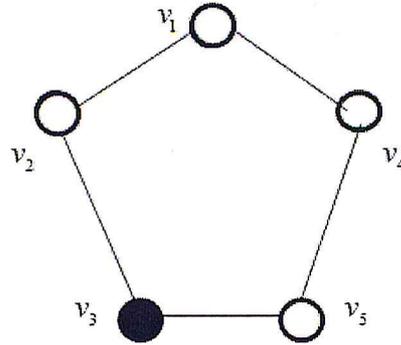


Figure 2.6 Un graphe G avec $\gamma_{sc}(G) = 4$.

2.3.2 Domination doublement connexe sécurisée

En 2014, Arriola *et al.* [2] ont introduit un nouveau paramètre de domination appelé la domination doublement connexe sécurisée pour plus de détail voir [2].

Définition 2.7 (Arriola *et al.* [2]) Un ensemble $u \in V \setminus X$ dans un graphe connexe $G = (V, E)$ est un ensemble **dominant doublement connexe sécurisé**, si $X = V$ ou si pour chaque $u \in V \setminus X$, il existe $v \in X$ adjacent à u tel que $(X \setminus \{v\}) \cup \{u\}$ est un ensemble dominant doublement connexe.

Définition 2.8 La cardinalité minimum d'un ensemble dominant doublement connexe sécurisé d'un graphe G est appelé **le nombre de domination doublement connexe sécurisé** de G , noté $\gamma_{scc}(G)$.

Dans la figure 2.7, l'ensemble $X = \{v_2\}$ est un γ_{scc} -ensemble de G , car pour le sommet $v_4 \in V \setminus X$, il existe le sommet $v_2 \in X$ tel que $(X \setminus \{v_2\}) \cup \{v_4\}$ est un ensemble dominant doublement connexe, en effet le sous graphe $\{v_1, v_2, v_3\}$ induit par $V \setminus X$ est connexe. Pour le sommet $v_1 \in V \setminus X$, il existe le sommet $v_2 \in X$ tel que $(X \setminus \{v_2\}) \cup \{v_1\}$ est un ensemble dominant doublement connexe, en effet le sous graphe $\{v_2, v_3, v_4\}$ induit par $V \setminus X$ est connexe.

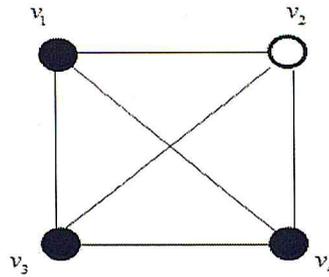


Figure 2.7 Un graphe G avec $\gamma_{scc}(G) = 1$.

2.4 Autres concepts de la domination avec sécurité

Nous donnons maintenant des définitions de quelques invariants de la domination avec sécurité, la domination Co-sécurisé et I -mouvable, où l'intérêt est porté sur les sommets à l'intérieur de l'ensemble. Nous allons donner des exemples d'illustration et présenter des bornes.

2.4.1 Domination I -mouvable

La domination I -mouvable a été largement étudiée par Blair *et al.* dans [4].

Définition 2.9 Un ensemble dominant $u \in V \setminus X$ dans un graphe $G = (V, E)$ est un ensemble de **domination I -mouvable**, si pour chaque $v \in X$ au moins une des deux conditions suivantes est vérifiée :

1. $X - \{v\}$ est un ensemble dominant, ou
2. il existe un sommet u adjacent à v tel que $(X \setminus \{v\}) \cup \{u\}$ est un ensemble dominant.

Définition 2.10 La cardinalité minimum d'un ensemble dominant I -mouvable d'un graphe G est appelé **le nombre de domination 1-mouvable** de G , noté $\gamma_m^1(G)$.

Dans la figure 2.8, l'ensemble $X = \{v_2, v_3\}$ est un γ_m^1 -ensemble de G , car pour le sommet $v_2 \in X$, il existe le sommet $v_4 \in V \setminus X$ tel que $(X \setminus \{v_2\}) \cup \{v_4\}$ est un ensemble dominant et pour le sommet $v_3 \in V \setminus X$, il existe le sommet $v_3 \in X$ tel que $(X \setminus \{v_3\}) \cup \{v_1\}$ est un ensemble dominant doublement connexe, en effet le sous graphe $\{v_3, v_4\}$ induit par $V \setminus X$ est connexe.

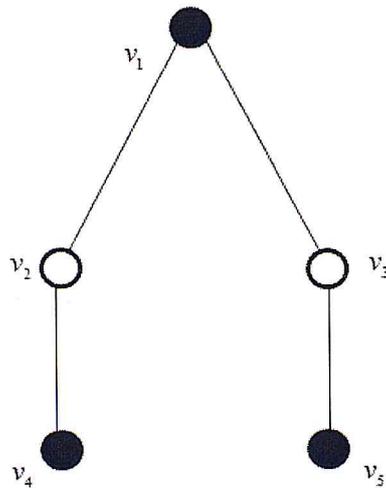


Figure 2.8 Un graphe G avec $\gamma_m^1(G) = 2$.

2.4.2 Domination Co-sécurisé

En 2014, la domination Co-sécurisée a été introduite par Arumugam et Manrique [5]. Nous nous intéressons dans ce mémoire aux résultats en relation avec la domination sécurisée.

Définition 2.11 Un ensemble dominant $u \in V \setminus X$ dans un graphe $G = (V, E)$ est un ensemble **dominant Co-sécurisé**, si pour chaque $u \in X$ il existe un sommet $v \in V \setminus X$ adjacent à u tel que $(X \setminus \{u\}) \cup \{v\}$ est un ensemble dominant de G .

Définition 2.12 La cardinalité minimum d'un ensemble dominant co-sécurisé d'un graphe G est appelé le **nombre de domination Co-sécurisée** de G , noté $\gamma_{cs}(G)$.

Un γ_{cs} -ensemble d'un graphe G est définie pour tout graphe sans sommet isolé.

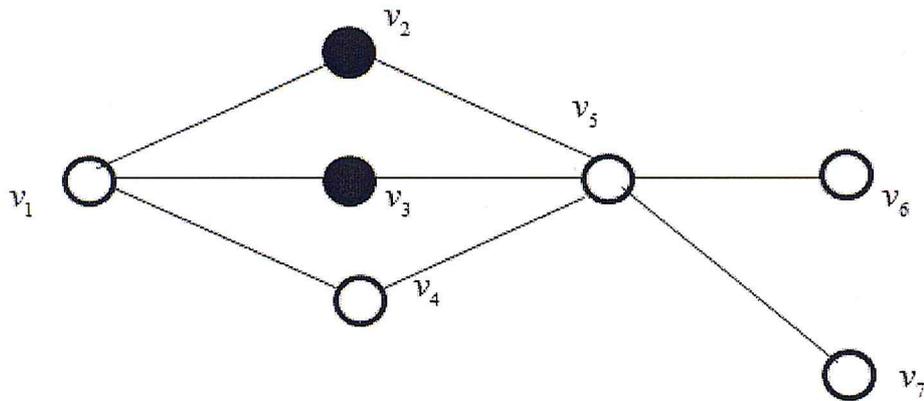


Figure 2.9 Un graphe G avec $\gamma_{cs}(G) = 5$.

Arumugam *et al.* ont étudié la relation entre le nombre γ_{cs} et γ_s . Ils ont présenté deux bornes supérieures liant le nombre de la domination Co-sécurisée et la domination sécurisée.

Théorème 2.1 (Arumugam *et al.* [5]) Soit un graphe G avec $\delta(G) \geq 2$. Alors, $\gamma_{cs}(G) \leq \gamma_s(G)$.

Théorème 2.2 (Arumugam *et al.* [5]) Soit un graphe $G = (V, E)$, si X est un γ_s -ensemble de G tel que $V \setminus X$ est un ensemble dominant de G . Alors, $\gamma_{cs}(G) \leq \gamma_s(G)$.

Problème 2.1 (Arumugam *et al.* [5]) Caractériser des graphes G tel que $\gamma_s(G) = \gamma_{cs}(G)$.

Chapitre 3

Résultats sur la domination sécurisée et totale sécurisée

Nous nous intéresserons dans ce chapitre aux résultats existant dans la littérature concernant la domination sécurisée et totale sécurisée. Nous rappelons également les questions ouvertes qui restent posées.

Dans la première partie, nous donnerons les relations entre γ_s et γ_{st} . Dans la deuxième partie, nous présenterons les relations liant γ_s et γ_{st} en fonction des paramètres structurels du graphe qui sont l'ordre, les degrés minimum et maximum. Dans la troisième partie, nous nous intéresserons à des classes particulières de graphes, à savoir les arbres, les graphes complets, les chaînes, etc.. Ensuite, dans la quatrième partie, nous étudions les résultats liants γ_s et γ_{st} à d'autres paramètres de graphe.

Nous commençons par quelques définitions utiles. Soient un graphe $G = (V, E)$ et $X \subset V$.

Définition 3.1 Le voisinage privé de $x \in X$ relatif à X , noté $pn(x, X)$ est défini par

$$pn(x, X) = N[x] - N[X - \{x\}].$$

Les sommets dans $pn(x, X)$ sont appelés **les voisins privés de x** .

Définition 3.2 Le voisinage privé extérieur de $x \in X$ relatif à X , noté $epn(x, X)$ et défini par $epn(x, X) = pn(x, X) - \{x\}$.

Les sommets dans $epn(x, X)$ sont appelés **les voisins privés extérieurs de x** .

Définition 3.3 le voisinage privé intérieur de $x \in X$ relatif à X , noté $ipn(x, X)$ est défini comme suit $ipn(x, X) = \{w \in X : N(w) \cap X = \{x\}\}$.

Les sommets dans $ipn(x, X)$ sont appelés **les voisins privés intérieurs de x** .

3.1 Relation entre γ_s et γ_{st} et caractérisation des γ_s et γ_{st} -ensembles

3.1.1 Bornes pour γ_{st} en fonction de γ_s

Un ensemble dominant total sécurisé est un ensemble dominant total, pour tout graphe G sans sommet isolé, nous avons

$$\gamma_s(G) \leq \gamma_{st}(G).$$

Cependant si $\delta(G) = 1$, ces deux paramètres ne sont jamais égaux.

Proposition 3.1 (Klostermeyer *et al.* [20]) Soit $G = (V, E)$ un graphe avec $\delta(G) = 1$. Alors, $\gamma_s(G) < \gamma_{st}(G)$.

Pour les autres graphes, nous avons le théorème suivant.

Théorème 3.1 (Klostermeyer *et al.* [20]) Soit $G = (V, E)$ un graphe avec $\delta(G) \geq 2$. Alors, $\gamma_s(G) \leq \gamma_{st}(G) \leq 2\gamma_s(G)$ et les deux bornes sont atteintes.

3.1.2. Caractérisation des γ_s, γ_{st} -ensembles

Le résultat suivant donne une caractérisation importante des ensembles dominants sécurisés.

Proposition 3.2 (Cockayne *et al.* [6]) Soit $G = (V, E)$ un graphe et X un ensemble dominant. Alors, un sommet $v \in X$ défend $u \in V \setminus X$ si et seulement si $G[vpe(v, X) \cup \{u, v\}]$ est complet.

Corollaire 3.1 (Cockayne *et al.* [6]) Soit $G = (V, E)$ un graphe et $X \subset V$. Alors, X est un ensemble dominant sécurisé de G si et seulement si pour tout $u \in V \setminus X$, il existe un $v \in X$ tel que $G[vpe(v, X) \cup \{u, v\}]$ est complet.

Cockayne *et al.* ont aussi caractérisé quand est-ce qu'un ensemble dominant sécurisé est minimal, (voir [6] théorème 4).

Par ailleurs, Benecke *et al.* ont donné une caractérisation d'un ensemble dominant total sécurisé.

Proposition 3.3 (Benecke *et al.* [12]) Soit $G=(V,E)$ un graphe et $Z \subseteq V$ un sous ensemble de G telque $G[Z]$ est sans sommet isolé. Alors, un sommet $z \in Z$ protège totalement $u \in V \setminus Z$ si et seulement si :

- $vpe(z,Z) = \emptyset$ (1) et

- $\{z\} \cup vpi(z,Z) \subseteq N(u)$(2)

L'ensemble Z est un ensemble dominant total sécurisé de G si et seulement si (1) est vérifiée pour tout $z \in Z$ et pour tout $u \in V \setminus Z$, il existe $z \in Z$ telle que (2) est vérifiée.

3.1.3 Domination totale sécurisée et domination totale

C'est évident que pour tout graphe G sans sommet isolé, $\gamma_t(G) \leq \gamma_{st}(G)$. Klostermeyer *et al.* ont donné une caractérisation des graphes pour lesquels, on a $\gamma_t(G) = \gamma_{st}(G)$. Pour $n \geq 1$, soit $J_{2,n}$ le graphe obtenue à partir du graphe $K_{2,n}$ en reliant les deux sommets de degré n (ou deux sommets non adjacents de C_4 si $n = 2$).

Théorème 3.2 (Klostermeyer *et al.* [20]) Soit $G=(V,E)$ un graphe connexe. Alors, les trois propositions suivantes sont équivalentes :

- $\gamma_t(G) = \gamma_{st}(G)$

- $\gamma_{st}(G) = 2$

- $G = K_2$ ou $J_{2,n}$ est un sous graphe couvrant de G pour $n \geq 1$.

3.1.4 Caractérisation d'un arbre T pour lequel $\gamma(T) = \gamma_s(T)$

La notion d'excellence dans les graphes a permis à Mynhardt *et al.* de caractériser les arbres dont les nombres de domination et de domination sécurisée sont égaux.

Définition 3.4 (Mynhardt *et al.* [18]) Un graphe G est dit γ -excellent si chaque sommet de G appartient à au moins un ensemble dominant minimum de G .

Quelques propriétés utiles des arbres γ -excellent ont été utilisées dans la caractérisation des arbres T avec $\gamma(T) = \gamma_s(T)$. Mynhardt *et al.* ont construit une classe, notée par S , d'arbres à partir d'une chaîne P_4 en utilisant six opérations.

Théorème 3.3 (Mynhardt *et al.* [18]) Soit $T = (V, E)$ un arbre. Alors, $\gamma(T) = \gamma_s(T)$ si et seulement si $T \in \{K_1, K_2\} \cup S$.

3.2 γ_s et γ_{st} en fonction des paramètres du graphe

3.2.1 γ_s et γ_{st} en fonction de l'ordre du graphe

Cockayne *et al.* ont donné une borne supérieure pour γ_s en fonction de l'ordre du graphe.

Théorème 3.4 (Cockayne *et al.* [13]) Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe d'ordre $n \geq 2$. Alors, $\gamma_s(G) \leq n - 1$.

Benecke *et al.* ont montré qu'il existe des graphes dont le seul ensemble dominant total sécurisé est l'ensemble de tous les sommets. Ces graphes ont été caractérisés par le résultat suivant. Désignons l'ensemble des feuilles du graphe G par L et l'ensemble des sommets supports par S .

Théorème 3.5 (Benecke *et al.* [12]) Soit $G = (V, E)$ un graphe sans sommet isolé. Alors, $\gamma_{st}(G) = n$ si et seulement si $V - (L \cup S)$ est un ensemble indépendant.

Cockayne *et al.* ont obtenu des bornes supérieures pour les graphes connexes sans griffe et sans C_5 en terme du degré minimum.

Corollaire 3.2 (Cockayne *et al.* [19]) Soit $G=(V, E)$ un graphe d'ordre n et de degré minimum $\delta(G)$. Alors,

$$\gamma_s(G) \leq \frac{3n}{\delta+3} \text{ si } G \text{ est sans griffe,}$$

$$\gamma_s(G) \leq \frac{2n}{\delta+2} \text{ si } G \text{ est sans } C_5.$$

D'autres résultats en fonction de n et Δ ont été obtenus par Cockayne *et al.*

Théorème 3.6 (Cockayne *et al.* [6][13]) Soit $G=(V, E)$ un graphe d'ordre n et de degré maximum $\Delta(G)$. Alors,

$$\gamma_s(G) \geq \frac{n(2\Delta-1)}{(\Delta^2+2\Delta-1)} \text{ si } G \text{ est sans triangle.} \quad [6]$$

$$\gamma_s(G) \geq \frac{n(2\Delta-3)}{(\Delta^2+2\Delta-5)} \text{ si } G \text{ est sans } K_4. \quad [6]$$

$$\gamma_s(G) \geq \frac{n(2\Delta-2t+5)}{(\Delta+1)^2-(t-1)(t-2)} \text{ si } G \text{ est sans } K_t \text{ et } 3 \leq t \leq \Delta+1. \quad [13]$$

Les bornes ci-dessus sont atteintes pour tout Δ .

Problème 3.1. Peut-on caractériser les graphes atteignant les bornes du théorème 3.6?

Burger *et al.* ont été les premiers à noter formellement que l'ajout d'arêtes à un graphe G n'augmente pas le nombre de domination sécurisé.

Observation 3.1 (Burger *et al.* [15]) Soit $G=(V, E)$ un graphe, et G_1, G_2, \dots, G_r sont des sous graphes disjoints du graphe G telle que tout sommet de G appartient à exactement un de ces sous graphes. Alors, $\gamma_s(G) \leq \sum_{i=1}^r \gamma_s(G_i)$.

Problème 3.2 Combien d'arêtes doivent être supprimés pour augmenter le nombre de domination sécurisé d'un graphe ?

L'observation 3.1 a contribué à établir le résultat important suivant.

Théorème 3.7 (Burger *et al.* [15]) Soit $G \neq C_5$ un graphe connexe d'ordre n avec $\delta(G) \geq 2$. Alors, $\gamma_s(G) \leq \frac{n}{2}$. En plus si $\gamma_s(G) = \frac{n}{2}$, alors G admet un couplage parfait.

Il reste un problème ouvert de caractériser les graphes qui permettent d'atteindre l'égalité dans la borne du Théorème 3.7.

Problème 3.3 (Burger *et al.* [15]) Caractériser les graphes connexes $G \neq C_5$ avec un degré minimum $\delta(G) \geq 2$ et d'ordre n satisfaisant $\gamma_s(G) = \frac{n}{2}$.

Corollaire 3.3 (Cockayne *et al.* [13]) Soit $G = (V, E)$ un graphe d'ordre n qui admet un couplage parfait. Alors, $\gamma_s(G) \leq \frac{n}{2}$.

-Si G est connexe et sans griffe alors, $\gamma_s(G) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.

Burger *et al.* ont construit une famille ξ à partir de cinq copies de C_4 et un C_6 vérifiant l'égalité du corollaire 3.3.

Proposition 3.4 (Burger *et al.* [15]) Soit $G \in \xi$ un graphe d'ordre n . Alors, G est connexe avec $\delta(G) \geq 2$ et $\gamma_s(G) = \frac{n}{2}$.

3.2.2 La domination sécurisée dans les arbres

La domination sécurisée dans les arbres a été étudié par Cockayne *et al.* la borne suivante a été établie en fonction du degré maximum.

Théorème 3.8 (Cockayne[17]) Soit $T = (V, E)$ un arbre d'ordre n et de degré maximum $\Delta(T) \geq 3$. Alors,

$$\gamma_s(T) \geq \frac{(\Delta n + \Delta - 1)}{(3\Delta - 1)}.$$

Dans [17], l'auteur construit un arbre pour lequel la borne est atteinte.

Théorème 3.9 (Arumugam *et al.* [5]) Soit $T = (V, E)$ un arbre d'ordre $n \geq 3$ avec k feuilles. Alors, $\left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil \leq \gamma_s(T) \leq \left\lfloor \frac{n+k-1}{2} \right\rfloor$.

Les deux bornes sont atteintes pour un P_3 .

3.3 γ_s et γ_{st} pour des graphes particuliers

Dans cette section, nous allons présenter les résultats pour des classes particulières de graphes.

Cockayne *et al.* ont déterminé le nombre de domination sécurisé et total sécurisé pour les chaînes et les cycles.

Proposition 3.5 ([6, 21])

$$\begin{aligned} \gamma_s(P_n) &= \left\lceil \frac{3n}{7} \right\rceil \quad \forall n \geq 1. & ; & \quad \gamma_{st}(P_n) = \left\lceil \frac{5(n-2)}{7} \right\rceil + 2 \quad \forall n \geq 1. \\ \gamma_s(C_n) &= \left\lceil \frac{3n}{7} \right\rceil \text{ pour } n \geq 4. & ; & \quad \gamma_{st}(C_n) = \left\lceil \frac{5n}{7} \right\rceil \quad \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

Ils ont donné la valeur exacte pour les graphes complets.

Proposition 3.6 ([6,21]) Soit K_n un graphe complet d'ordre n . Alors,

$$\gamma_s(K_n) = 1. \quad \gamma_{st}(K_n) = 2.$$

Ils ont également trouvé les nombres de domination sécurisé et total sécurisé pour les graphes bipartis complets et multipartis complets.

Proposition 3.7 ([6][21]) Soit p et q deux entiers naturels telle que $p \leq q$. Alors,

$$\gamma_s(K_{p,q}) = \begin{cases} q & p=1 \\ 2 & p=2 \\ 3 & p=3 \\ 4 & p \geq 4 \end{cases} ; \quad \gamma_{st}(K_{p,q}) = \begin{cases} q+1 & \text{si } p=1 \\ 3 & \text{si } p=2 \\ 4 & \text{si } p \geq 3 \end{cases}$$

Proposition 3.8 ([6][21]) Soit K_{p_1, \dots, p_t} un graphe multipartite complet telle que $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_t$ et $t \geq 3$. Alors,

$$\gamma_s(K_{p_1, \dots, p_t}) = \begin{cases} 2 & p_1 = 1, p_2 \leq 2 \\ 2 & p_1 = 2 \\ 3 & \text{sinon} \end{cases} ; \quad \gamma_{st}(K_{p_1, p_2, \dots, p_t}) = \begin{cases} 2 & \text{si } p_1 = p_2 = 1 \\ 3 & \text{sinon} \end{cases}$$

Castillano et *al.* se sont intéressés aux graphes obtenues en joignant un graphe arbitraire G et un graphe complet.

Théorème 3.10 (Castillano et al. [16]) Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$. Alors,

$\gamma_s(G) = 2$ si et seulement si G est non complète et il existe des sommets distincts x et y qui domine G et satisfaisant l'une des conditions suivantes:

- $N(x) \setminus \{y\} = N(y) \setminus \{x\} = V \setminus \{x, y\}$

- $G[N(x) \setminus N[y]]$ et $G[N(y) \setminus N[x]]$ sont complets et pour chaque $u \in N(x) \cap N(y)$ ni $G[N(x) \setminus N[y] \cup \{u\}]$ ou $G[N(y) \setminus N[x] \cup \{u\}]$ sont complets.

- $N(x) \setminus \{y\} = V \setminus \{x, y\}$, $N(x) \setminus N[y] \neq \emptyset$ et $G[N(x) \setminus N[y]]$ est un complet.

Corollaire 3.4 (Castillano et al. [16]) Soit $G = (V, E)$ un graphe non complet.

Alors, $\gamma_s(G + K_n) = 2$ pour tout entier naturel $n \geq 2$.

Corollaire 3.5 (Castillano *et al.* [16]) Soit $G=(V,E)$ un graphe non-complet. Alors, $\gamma_s(G+K_1)=2$ si et seulement si une des conditions suivantes est satisfaite

(i) $\gamma(G)=1$.

(ii) $\gamma_s(G)=2$.

(iii) Il existe $b \in V(G)$ de telle que $G[V(G) \setminus N[b]]$ est complet.

Une borne supérieure a également été trouvée par Cockayne *et al.* pour le nombre de domination sécurisé pour les grilles.

Proposition 3.9 (Cockayne *et al.* [6]) Soit p et q deux entiers naturels. Alors,

$$\gamma_s(P_p \square P_q) \leq \left\lceil \frac{pq}{3} \right\rceil + 2. \quad ; \quad \gamma_s(P_p \square P_q) \leq \left\lceil \frac{pq}{3} \right\rceil \text{ pour } p, q \geq 3.$$

Le résultat suivant repose sur le fait que le produit cartésien $C_p \square C_q$ a un degré maximum 4 et il est sans triangle, c'est une conséquence immédiate du théorème 3.6 (première borne).

Corollaire 3.6 (Cockayne *et al.* [6]) Soit p et q deux entiers naturels. Alors,

$$\gamma_s(C_p \square C_q) \geq \left\lceil \frac{7pq}{23} \right\rceil.$$

3.4 Relations de la domination sécurisée et totale sécurisée avec d'autres paramètres

3.4.1 Domination sécurisée et couplage

Cockayne *et al.* ont été en mesure de relier le nombre de domination sécurisé γ_s à α en établissant le résultat suivant.

Proposition 3.10 (Cockayne *et al.* [13]) Soit $G=(V,E)$ un graphe d'ordre n . Alors,

$$\gamma_s(G) \leq n - \alpha(G).$$

La borne est atteinte pour les P_5 par exemple.

3.4.2 Domination sécurisée et Indépendance

La relation entre γ_s et β le nombre d'indépendance a été étudiée dans [20, 13,14]. Résumons les résultats obtenus dans un tableau.

Résultat	Auteurs
$\gamma_s(G) \leq 2\beta(G)$	Klostermeyer <i>et al.</i> [20]
$\gamma_s(G) \leq \gamma(G) + \beta(G) - 1$	Boumediene <i>et al.</i> [14]
$\gamma_s(G) \leq \beta(G)$, sans C_5 , arbre	Cockayne <i>et al.</i> [13]
$\gamma_s(G) \leq \frac{3}{2}\beta(G)$, si G est sans griffe et triangle	Cockayne <i>et al.</i> , Boumediene <i>et al.</i> [13,14]
$\gamma_s(T) > \frac{1}{2}\beta(T)$, T un arbre	Boumediene <i>et al.</i> [14]
$\gamma_s(T) \geq i(T)$, T un arbre	Boumediene <i>et al.</i> [14]

Proposition 3.11 (Klostermeyer *et al.* [20]) Soit $G = (V, E)$ un graphe d'ordre n . Alors,
 $\gamma_s(G) \leq 2\beta(G)$.

La preuve est facile, il suffit de prendre un β -ensemble d'un graphe G que l'on note par X on a alors $\forall x \in X, G[epn(x, X)]$ est un complet, il suffit de prendre un seul privé de chaque sommet x dans X pour avoir un $\gamma_s(G) \leq 2\beta(G)$.

En 2015, cette borne a été améliorée par Chellali et Boumediene dans le théorème suivant.

Théorème 3.11 (Boumediene *et al.* [14]) Soit $G = (V, E)$ un graphe. Alors,
 $\gamma_s(G) \leq \gamma(G) + \beta(G) - 1$.

Et cette nouvelle borne est atteinte pour les C_5 et les graphes complets d'ordre au moins 2.

Cockayne *et al.* et Boumediene *et al.* ont prouvé aussi que pour les graphes G sans C_5 et les graphes connexes avec circonférence au moins six, la borne $\gamma_s(G) \leq 2\beta(G)$ peut être amélioré comme suit.

Théorème 3.12 (Cockayne *et al.* [13]) Soit $G = (V, E)$ un graphe sans griffe et sans C_5 . Alors, $\gamma_s(G) \leq \beta(G)$.

Théorème 3.13 (Boumediene *et al.* [14]) Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe de maille $g(G) \geq 6$. Alors, $\gamma_s(G) \leq \beta(G)$.

Corollaire 3.7 Soit $T = (V, E)$ un arbre. Alors, $\gamma_s(T) \leq \beta(T)$.

Mynhardt a conjecturé que pour tout graphe G , $\gamma_s(G) \leq \frac{3}{2}\beta(G)$. Cette conjecture a été démontrée pour les graphes sans griffe et sans triangles.

Théorème 3.14 (Cockayne *et al.* [13]) Soit $G = (V, E)$ un graphe sans griffe. Alors, $\gamma_s(G) \leq \frac{3}{2}\beta(G)$.

Théorème 3.15 (Boumediene *et al.* [14]) Soit $G = (V, E)$ un graphe sans triangle. Alors, $\gamma_s(G) \leq \frac{3}{2}\beta(G)$.

Problème 3.4 Est-il vrai que $\gamma_s(G) \leq \frac{3}{2}\beta(G)$ pour les graphes G ayant des triangles?

Boumediene *et al.* ont trouvé une borne pour les γ_s -ensembles dans les arbres.

Proposition 3.12 (Boumediene *et al.* [14]) Soit $T = (V, E)$ un arbre. Alors, $\gamma_s(T) > \frac{1}{2}\beta(T)$.

Une autre borne supérieure pour γ_s en terme du nombre de domination stable i .

Proposition 3.13 (Boumediene et al. [14]) Soit $T = (V, E)$ un arbre. Alors, $\gamma_s(T) \geq i(T)$

La borne est atteinte.

3.4.3 Domination totale sécurisée et Indépendance

Le corollaire suivant est déduit de la Proposition 3.13 et le Théorème 3.1.

Corollaire 3.8 (Klostermeyer et al. [20]) Soit $G = (V, E)$ un graphe avec $\delta(G) \geq 2$.

Alors, $\gamma_{st}(G) \leq 4\beta(G)$.

A partir des deux théorèmes 3.13 et 3.1, nous obtenons.

Corollaire 3.9 (Klostermeyer et al. [20]) Soit $\delta(G) \geq 2$ un graphe sans griffe

avec $\delta(G) \geq 2$. Alors, $\gamma_{st}(G) \leq 3\beta(G)$.

Klostermeyer et al. ont abouti à amélioration de cette dernière borne.

Théorème 3.16 (Klostermeyer et al. [20]) Soit $\delta(G) \geq 2$ un graphe sans sommets

isolé. Alors, $\gamma_{st}(G) \leq 3\beta(G) - 1$.

Pour $\beta = 2$, la borne est améliorée.

Théorème 3.17 (Klostermeyer et al. [20]) Soit $G = (V, E)$ un graphe sans sommet isolé

avec $\beta(G) = 2$. Alors, $\gamma_{st}(G) \leq 4$.

Problème 3.5 (Klostermeyer et al. [20]) Est-ce qu'il y a des graphes pour lesquels

$\gamma_{st}(G) = 3\beta(G) - 1$?

3.4.4 Domination totale sécurisée et partition en cliques

klostermeyer et al ont mentionné dans [20] qu'il est facile de voir que $\gamma_s(G) \leq \theta(G)$ pour tout graphe G . En effet, il suffit de former un ensemble de dominant sécurisé en prenant un

sommet arbitraire de chaque clique. La borne est atteinte pour plusieurs classes de graphe, par exemple les graphes complets et les étoiles.

Klostermeyer *et al.* ont donné une borne supérieure pour γ_{st} en fonction de θ .

Théorème 3.18 (Klostermeyer *et al.* [20]) Soit $\beta(G) = 2$ un graphe sans sommet isolé. Alors, $\gamma_{st}(G) \leq 2\theta(G)$ et cette borne est atteinte.

Problème 3.6 (Klostermeyer *et al.* [20]) Pour quelles classes de graphes la borne dans le théorème 3.18 peut être améliorée? Pour quelles classes de graphes la borne est proche de γ_{st} ?

Corollaire 3.10 (Klostermeyer *et al.* [20]) Soit $\beta(G) = 2$ un graphe. Alors, il existe un G avec $\gamma_{st}(G) \leq \theta(G) - c$ pour tout c constante réelle.

3.5 Complexité algorithmique du calcul de γ_s

Le problème de décision associé à la domination sécurisée a été démontré NP-complet pour les graphes bipartis et les graphes scindés par Boumediene *et al.* dans [14]. Ils ont considéré le problème de décision ci-dessous.

Problème de la domination sécurisée

Instance: Un graphe $G = (V, E)$ et un entier positif k .

Question : Est-ce que G possède un ensemble dominant sécurisé de cardinalité au plus k ?

Théorème 3.18 (Boumediene *et al.* [14]) Le problème de la domination sécurisée est NP-complet pour les graphes scindés et les graphes bipartis.

Burger *et al.* dans [9,10], ont décrit trois approches algorithmiques pour trouver le nombre de domination sécurisé dans un graphe. Ils ont donné deux algorithmes exacts pour trouver un γ_s -ensemble dans un graphe arbitraire, à savoir un algorithme de séparation et évaluation et un algorithme de séparation et réduction. Les deux sont de complexité exponentielle. Le troisième algorithme calcule γ_s pour les arbres en utilisant la programmation dynamique, il est de complexité linéaire.

Chapitre 4

Contribution en domination sécurisée

Dans ce chapitre nous allons présenter quelques résultats que nous avons obtenus pour la domination sécurisée et la domination totale sécurisée. Nous commençons par une caractérisation d'un graphe G pour lequel $\gamma_{st}(G) = \gamma_s(G) = 2$. Ensuite nous présentons une observation où nous montrons que l'ajout d'un ou plusieurs graphes K_1 à un graphe G n'augmente pas le nombre de domination sécurisée. Dans la troisième partie nous avons démontré que pour tout graphe G $\gamma_s(G) + \gamma_s(\bar{G}) \leq n + 1$, un résultat partiel est obtenu. Nous avons donné un exemple de graphe G montrant que $\gamma_{st}(G)$ ne peut être borné supérieurement par un multiple de $\gamma_s(G)$. Enfin, nous clôturons le chapitre en démontrant des bornes de γ_s pour certaines classes de graphes.

4.1 Caractérisation des graphes G tels que $\gamma_{st}(G) = \gamma_s(G) = 2$.

Rappelons que pour tout graphe G avec $\delta(G) \geq 2$, $\gamma_s(G) \leq \gamma_{st}(G) \leq 2\gamma_s(G)$. Nous avons obtenu une caractérisation partielle des graphes G avec $\gamma_{st}(G) = \gamma_s(G)$.

Proposition 4.1 Soit $G = (V, E)$ un graphe sans sommet isolé. Alors,

$\gamma_{st}(G) = \gamma_s(G) = 2$ si et seulement si G n'est pas complet et contient deux sommets universels.

Preuve

(\Rightarrow) Soient $G = (V, E)$ un graphe sans sommet isolé avec $\gamma_{st}(G) = \gamma_s(G) = 2$ et $X = \{x, y\}$ un γ_{st} -ensemble de G . D'après la caractérisation de la proposition 3.3, $xy \in E$ et $vpe(x, X) = vpe(y, X) = \emptyset$. Donc, tout sommet $u \in V \setminus X$ est adjacent aux deux

sommets de X . Par conséquent, G contient $J_{2,n}$ comme un graphe partiel. Supposons que G est un graphe complet. D'après la proposition 3.6, $\gamma_s(G) = 1$, contradiction.

(\Leftarrow) Maintenant, soit un graphe sans sommet isolé différent d'un complet et contenant un $J_{2,n}$ comme graphe partiel et soit $X = \{x, y\}$ un ensemble avec x, y les deux sommets de degré $n+1$. Utilisons la caractérisation de la proposition 3.3 pour montrer que X est un ensemble dominant total sécurisé. Il est facile de voir que $vpe(x, X) = vpe(y, X) = \emptyset \dots (1)$. Vérifions que tout sommet $u \in V \setminus X$ admet un sommet $z \in X$ tel que $\{z\} \cup vpi(z, X) \subseteq N(u)$, en effet on a $vpi(x, X) = \{y\}$ et $vpi(y, X) = \{x\}$, et puisque tout sommet $u \in V \setminus X$ est adjacent aux deux sommets de X , donc $\{x\} \cup ipn(x, X) \subseteq N(u)$ et $\{y\} \cup ipn(y, X) \subseteq N(u) \dots (2)$. De (1) et (2), X est un ensemble dominant total sécurisé, d'où $\gamma_s(G) \leq \gamma_{st}(G) \leq |X| = 2$. Puisque G n'est pas complet, alors $\gamma_s(G) = \gamma_{st}(G) = 2$.

□

4.2 Borne pour $\gamma_s(G)$

Nous appelons joint de deux graphes G et H , le graphe noté par $G+H$ obtenu en liant tout sommet de G à tout sommet de H

Le graphe $G + K_1$ est obtenu de G en ajoutant un sommet universel.

Lemme 4.1 Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe d'ordre n . Alors, $\gamma_s(G + K_1) \leq \gamma_s(G)$.

Preuve

Soit $G' = (V', E')$ le graphe obtenue à partir de G tel que $V' = V \cup \{x\}$, $E' = \{E \cup \{xy\}, \forall y \in V\}$ x est le sommet de K_1 et soit X un γ_s -ensemble de G . Dans le graphe $G' = (V', E')$, pour tout sommet $v \in X$ qui protégeait $u \in V \setminus X$ dans G le protège toujours dans G' . Et pour le sommet x il sera toujours protégé car $\forall v \in X$ on a la propriété du corolaire 3.1 qui est toujours vérifiée $G[(v, x) \cup vpe(x, X)]$ est un complet. Donc X est un dominant sécurisé de G' et alors $\gamma_s(G') \leq |X| = \gamma_s(G)$. D'où le résultat.

□

4.3 γ_s d'un graphe et son complémentaire

Dans cette section, nous nous intéressons à la relation entre le nombre de domination sécurisé d'un graphe et celui de son complémentaire. Notre motivation est le résultat suivant qui concerne la domination classique.

Théorème 4.1 (Jaeger *et al.* [3]) Soit $G = (V, E)$ un graphe d'ordre n . Alors,

$$\gamma(G) + \gamma(\bar{G}) \leq n + 1.$$

Nous avons essayé de démontrer le résultat pour γ_s .

Proposition 4.2 Soit $G = (V, E)$ un graphe d'ordre n connexe avec $2 \leq \delta(G) \leq \Delta(G) \leq n - 3$ tel que \bar{G} est sans composante isomorphe à un C_5 . Alors,

$$\gamma_s(G) + \gamma_s(\bar{G}) \leq n + 1.$$

Preuve

Soit $G = (V, E)$ un graphe d'ordre n connexe avec $2 \leq \delta(G) \leq \Delta(G) \leq n - 3$ tel que \bar{G} est sans composante isomorphe à un C_5 . Supposons que G est un C_5 alors $\gamma_s(C_5) = 3$ et puisque le complémentaire d'un C_5 est un C_5 donc $\gamma_s(C_5) + \gamma_s(C_5) = 6 \leq n + 1$.

Maintenant, supposons que $G \neq C_5$. D'après le théorème 3.7, $\gamma_s(G) \leq \frac{n}{2}$. Par ailleurs, puisque G ne contient pas un sommet de degré $n - 2$, ni un sommet de degré $n - 1$ alors $\delta(\bar{G}) \geq 2$. Nous distinguons deux cas :

Cas 1 : Si \bar{G} est connexe. Alors d'après le théorème 3.7, $\gamma_s(\bar{G}) \leq \frac{n}{2}$. Par conséquent,

$$\gamma_s(G) + \gamma_s(\bar{G}) \leq n/2 + n/2 \leq n + 1.$$

Cas 2 : Si \bar{G} n'est pas connexe. Soient $C_i, i = 1..k$, ses composantes connexes. Il est facile de vérifier les conditions du théorème 3.7 pour chacune des composantes.

Alors, $\gamma_s(C_i) \leq \frac{n_i}{2}, i = 1..k$, d'où $\gamma_s(\bar{G}) \leq \sum_{i=1}^k \gamma_s(C_i) \leq \frac{\sum_{i=1}^k n_i}{2} = \frac{n}{2}$. Par conséquent,

$$\gamma_s(G) + \gamma_s(\bar{G}) \leq n \leq n+1. \quad \square$$

Nous n'avons trouvé aucun graphe G vérifiant $\gamma_s(G) + \gamma_s(\bar{G}) > n+1$, nous pensons que l'inégalité reste valide pour tous les graphes.

Problème 4.1 Soit G un graphe d'ordre n . Montrer que $\gamma_s(G) + \gamma_s(\bar{G}) \leq n+1$.

4.4. Borner γ_{st} en fonction de γ_t

Rappelons que $\gamma_s(G) \leq \gamma_{st}(G) \leq 2\gamma_s(G)$, pour tout graphe G avec $\delta(G) \geq 2$. Par contre l'exemple de l'étoile $K_{1,n}$ montre qu'il est impossible de majorer $\gamma_{st}(G)$ par un multiple de $\gamma_t(G)$. En effet, un γ_t -ensemble de G doit contenir le sommet central et une feuille, i.e. $\gamma_t(K_{1,n}) = 2$. Par ailleurs, un γ_{st} -ensemble est unique et contient tous les sommets, i.e.

$$\gamma_{st}(K_{1,n}) = n+1. \text{ D'où } \frac{\gamma_{st}(K_{1,n})}{\gamma_t(K_{1,n})} = \frac{n+1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

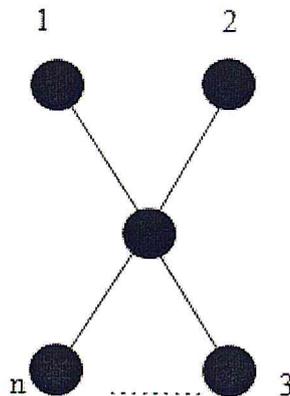


Figure 3.1 Une étoile $K_{1,n}$ avec $\gamma_t(K_{1,n}) = 2$ et $\gamma_{st}(K_{1,n}) = n+1$.

□

4.5 Autres bornes pour le nombre de domination sécurisée

Berge a borné le paramètre de domination classique en fonction de l'ordre de G et son degré maximum dans le résultat qui suit.

Théorème 4.2 (Berge [11]). Soit G est un graphe d'ordre n , et de degré maximum $\Delta(G)$.

$$\text{Alors, } \left\lceil \frac{n}{1+\Delta} \right\rceil \leq \gamma(G) \leq n - \Delta.$$

Nous avons vérifié ce théorème pour les graphes complets, les cycles et les chaînes.

Observation 4.1 Soit G un graphe complet, une chaîne ou un cycle d'ordre $n \geq 4$. Alors,

$$\left\lceil \frac{n}{1+\Delta} \right\rceil \leq \gamma_s(G) \leq n - \Delta.$$

Pour les graphes complets K_n , $\gamma_s(K_n) = 1$, le degré maximum égal à $n-1$ et les deux bornes sont égales à 1. D'où, le résultat est vérifié.

Pour les P_n et C_n , le degré maximum est égal à 2 et $\gamma_s(C_n) = \gamma_s(P_n) = \left\lceil \frac{3n}{7} \right\rceil$, pour $n \geq 4$. Ce

qui donne dans l'inégalité, $\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{3n}{7} \right\rceil \leq n-2$. Nous avons, $\frac{1}{3} \leq \frac{3}{7}$ donc $\frac{n}{3} \leq \frac{3n}{7}$ et alors

$$\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{3n}{7} \right\rceil. \text{ Pour la borne supérieure, Supposons } \frac{3n}{7} > n-2 \Rightarrow \frac{3n-7n}{7} + 2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{-4n}{7} + 2 > 0 \Rightarrow -4n > -14 \Rightarrow n < \frac{14}{4} = \frac{7}{2} \Rightarrow n < 4. \text{ Contradiction, alors } \left\lceil \frac{3n}{7} \right\rceil \leq n-2.$$

□

Problème 4.2 Peut-on caractériser d'autre classe de graphe pour lesquels ce théorème est valide?

Conclusion et perspectives

Au cours de ce mémoire, divers problèmes liés à la domination sécurisée ont été présentés. Notre travail a été motivé par le fait que peu de travaux sont réalisés sur ce sujet et aussi par le fait des nombreuses questions laissés ouvertes.

Nous avons présenté la domination sécurisée et totale sécurisée, les résultats de la littérature les plus intéressants ont été présentés. De nouveaux résultats ont été obtenus pour la domination sécurisée, similaires à des résultats trouvés dans la littérature concernant la domination classique.

Le travail réalisé dans ce mémoire ouvre plusieurs perspectives de recherche. Dans ce sens, nous citons ci-dessous les questions ouvertes de ce mémoire.

Problème 1. (Arumugam *et al.* [5]) Caractériser des graphes G tel que $\gamma_s(G) = \gamma_{cs}(G)$?

Problème 2. Combien d'arêtes doivent être supprimés pour augmenter le nombre de domination sécurisé d'un graphe ?

Problème 3. (Burger *et al.* [15]) Caractériser les graphes connexes $G \neq C_5$ avec un degré minimum $\delta(G) \geq 2$ et d'ordre n satisfaisant $\gamma_s(G) = \frac{n}{2}$?

Problème 4. (Mynhart *et al.* [19]) Est-il vrai que $\gamma_s(G) \leq \frac{3}{2}\beta(G)$ pour les graphes G ayant des triangles?

Problème 5. (Klostermeyer *et al.* [20]) Est-ce qu'il y a des graphes pour lesquels $\gamma_{st}(G) = 3\beta(G) - 1$?

Problème 6. (Klostermeyer *et al.* [20]) Pour quelles classes de graphes la borne $\gamma_{st}(G) \leq 2\theta(G)$ peut être améliorée? Pour quelles classes de graphes la borne est proche de γ_{st} ?

Problème 7. Soit $G = (V, E)$ un graphe d'ordre n . Montrer que $\gamma_s(G) + \gamma_s(\bar{G}) \leq n + 1$.

Problème 8. Peut-on caractériser d'autre classe de graphe pour lesquels ces deux bornes

sont vérifiées $\left\lceil \frac{n}{1+\Delta} \right\rceil \leq \gamma_s(G) \leq n - \Delta$?

Problème 9. Peut-on caractériser les graphes atteignant les bornes ci-dessous ?

$$\gamma_s(G) \geq \frac{n(2\Delta - 1)}{(\Delta^2 + 2\Delta - 1)} \text{ si } G \text{ est sans triangle.}$$

$$\gamma_s(G) \geq \frac{n(2\Delta - 3)}{(\Delta^2 + 2\Delta - 5)} \text{ si } G \text{ est sans } K_4.$$

$$\gamma_s(G) \geq \frac{n(2\Delta - 2t + 5)}{(\Delta + 1)^2 - (t - 1)(t - 2)} \text{ si } G \text{ est sans } K_t \text{ et } 3 \leq t \leq \Delta + 1.$$

Bibliographie

- [1] A. G. Cabaro, S. S. Canoy et I. S. Aniversario: "Secure Connected Domination in a Graph", *International Journal of Mathematical Analysis*, 8 (2014) 2065- 2074.
- [2] B. H. Arriola et S. R. Canoy: "Secure Doubly Connected Domination in Graphs", *Int. Journal of Math. Analysis*, 8 (2014) 1571-1580.
- [3] F. Jaeger et C. Payan: "Relations du type Nordhaus -Gaddum pour le nombre d'absorption d'un graphe simple", *C. R. Acad. Sci. Paris*, (1972) 728-730.
- [4] J. Blair, R. Gera et S. Horton: "Movable Dominating Sensor Sets in Network", *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 77 (2011).
- [5] S. Arumugam, K. Ebadi et M. Manrique: "Co-Secure and Secure Domination in Graphs", *Utilitas Mathematica*, 94 (2014).
- [6] E. J. Cockayne, P. J. P. Grobler, W. R. Gundlingh, J. Munganga et J. H. Van vuuren: "Protection of a graph", *Utilitas Math*, 67 (2005) 19-32.
- [9] A. P. Burger, A. P. De villiers et J. H. Van vuuren : "Two Algorithms for Secure Graph Domination" , *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 85 (2013) 321-339.
- [10] A. P. Burger, A. P. De villiers et J. H. Van vuuren : "A linear algorithm for secure domination in trees", *Discrete Applied Mathematics*, 171 (2014) 15-27.
- [11] C. Berge: "Theory of Graphs and its Applications", *Methuen, London*, 1962.
- [12] S. Benecke, E. J. Cockayne et C. M. Mynhardt : "Secure total domination in graphs", *Utilitas Math*, 74 (2007) 247-259.
- [13] E. J. Cockayne, O. Favaron et C. M. Mynhardt : "Secure domination, weak Roman domination and forbidden subgraphs", *Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications*, 39 (2003) 87-100.
- [14] H. Boumediene Merouane et M. Chellali: "On Secure Domination in Graphs", *Information Processing Letters*, 115 (2015) 786-790.
- [15] A. P. Burger, M. A. Henning et J. H. Van vuuren: "Vertex Covers and Secure Domination in Graphs", *Quaestiones Mathematicae*, 31 (2008) 163-171.
- [16] E. C. Castellano et R. A. Ugbinada: "Secure Domination in the Joins of Graphs", *Applied Mathematical Sciences*, 8 (2014) 5203-5211.
- [17] E. J. Cockayne: "Irredundance, secure domination and maximum degree in trees", *Discrete mathematics*, 307 (2007) 12-17.

- [18] C. M. Mynhardt, H. C. Swart et E. Ungerer: “Excellent Trees and Secure Domination”, *Utilitas Math*, 67 (2005) 255-267.
- [19] K. Mynhardt : 22nd Clemson mini-Conference, *University of Victoria, Canada 2007*.
- [20] W. F. Klostermeyer et C. M. Mynhardt: “Secure Domination And Secure Total Domination In Graphs”, *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 28 (2008) 267-284.
- [21] E. J. Cockayne, C. M. Mynhardt et S. Benecke: “Total Protection of a Graph”, *Utilitas Math*, (2005).
- [22] L. Euler: “Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis”, *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, 8 (1741) 128-140.

