

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

UNIVERSITE -SAAD DAHLEB- BLIDA 1

جامعة سعد دحلب -البليدة-

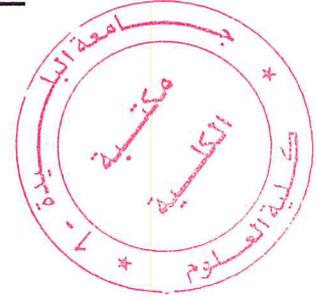


Faculté des Sciences

كلية العلوم

Département de Mathématiques

قسم الرياضيات



MEMOIRE DE PROJET DE FIN D'ETUDES

مذكرة نهاية التدرج

**Pour l'Obtention du diplôme
DE MASTER**

Option : Modélisation Stochastique et Statistique

**Thème : Mesure de la dépendance stochastique entre des
variables météorologiques par les copules bivariées
Application données météorologiques du centre DAR EL
BEIDA**

Présenté par :

BOURAINÉ ISLAM

IDJALLIDAINÉ SAMIRA

devant le jury composé

Mr. O.TAMI

Mr. M.BENDRAOUCHE

Mr. R.FRIHI

President

Examineur

Encadreur

Promotion -2015/ 2016-

Remerciements

En préambule à ce mémoire nous remercions *ALLAH* qui nous aide et nous donne la patience et le courage durant ces longues années d'étude.

Nous souhaitons adresser nos remerciements les plus sincères aux personnes qui nous ont apportés leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu'à la réussite de cette formidable année universitaire.

Ces remerciements vont tout d'abord à notre encadreur *R.F.R.F.H.F* pour ses précieux conseils et son orientation ficelée tout au long de notre recherche.

On n'oublie pas nos parents pour leur contribution, leur soutien et leur patience.

Enfin, nous adressons nos plus sincères remerciements à tous nos proches et amis, qui nous ont toujours encouragées au cours de la réalisation de ce mémoire.

Merci à toutes et à tous.

DEDICACE

Je dédie ce mémoire à...

A mon très cher père

*Aucune dédicace ne saurait exprimé l'amour, l'estime,
le respect, et le dévouement que j'ai toujours eu pour toi.*

A ma très chère mère

*Je te dédie ce travail en témoignage de mon profond
amour, puisse*

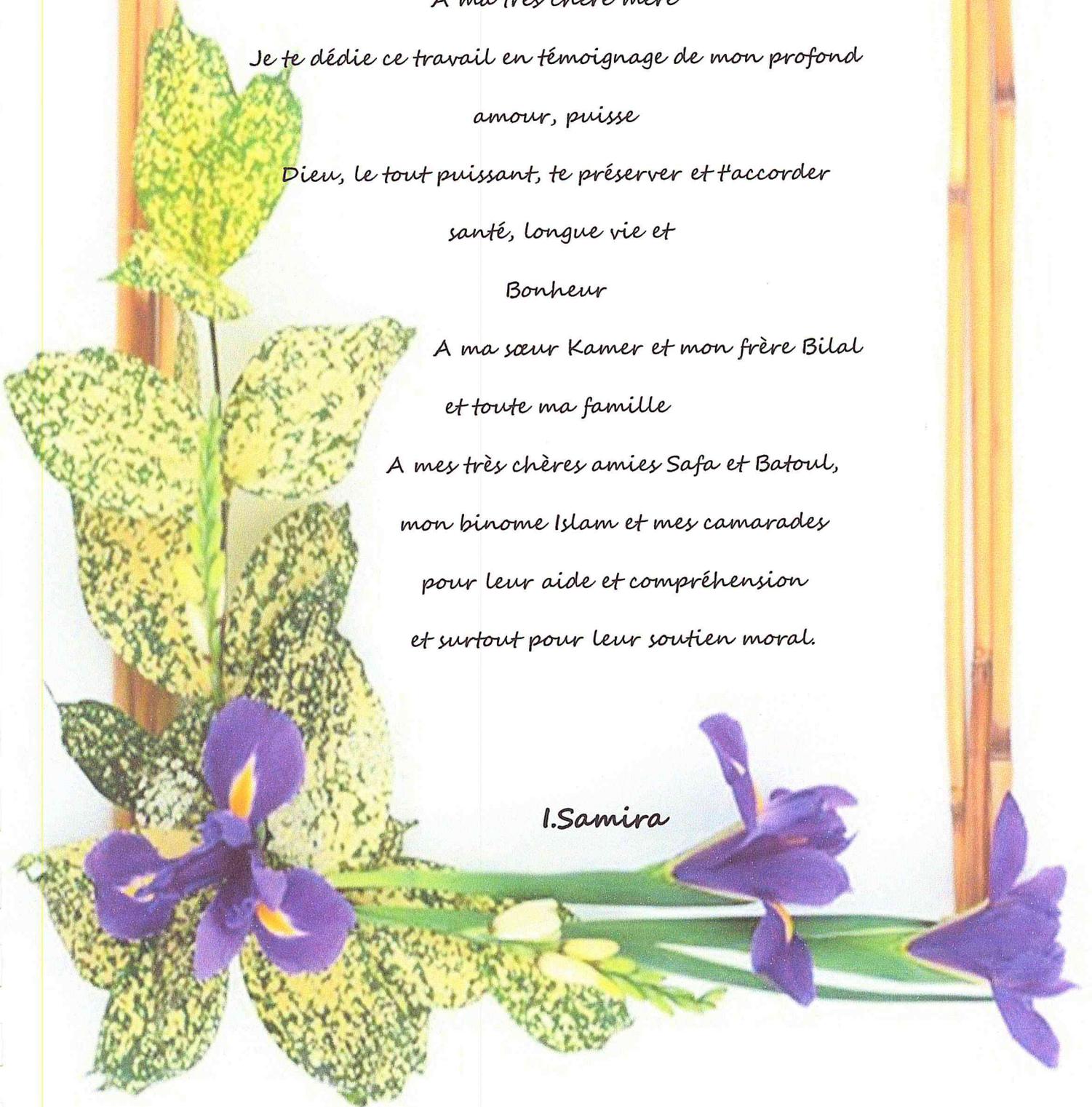
*Dieu, le tout puissant, te préserver et t'accorder
santé, longue vie et*

Bonheur

*A ma sœur Kamer et mon frère Bilal
et toute ma famille*

*A mes très chères amies Safa et Batoul,
mon binome Islam et mes camarades
pour leur aide et compréhension
et surtout pour leur soutien moral.*

I.Samira



Je dédie ce travail à :

Mes très chers parents qui m'ont soutenu tout au long de mon cursus d'étude, à mon très cher frère qui m'a encouragé et supporté surtout dans les moments difficiles. A tous les membres de ma famille, mon binôme Samira qui a accepté de travailler avec moi dans un climat de sérieux et de ponctualité et à toutes les personnes qui me sont chères.

B.ISLAM

ملخص

تعتبر الرابطة وسيلة مهمة لنمذجة التبعية بين عدة متغيرات عشوائية تم تقديمه من طرف سكلار 1959 لحل مشكلة في الاحتمالات تم طرحه من طرف موريس فريشي لقد اصبحت الرابطة اداة مهمة لإدراك عدة مجالات تطبيقية كا الأرصاد الجوية والهيدرولوجية و العلوم الاكتوارية والمالية. يعود السبب الرئيسي للاهتمام بها انها تعطيني عبارات بسيطة لتعبير على الارتباط الذي يجمع هامشية قانون متعددة الأبعاد و با الضبط ثنائي الأبعاد.

في هذه المذكرة قمنا بتعريف الرابطة و ذكر خصائصه و مختلف انواعه كما قمنا بتقديم مختلف طرق التقدير الحدودية و الغير حدودية و قمنا في النهاية بتطبيق الرابطة في مجال الارصاد الجوية

Résumé

Les copules représentent un outil innovant pour modéliser la structure de dépendance de plusieurs variables aléatoires. Introduit par Sklar 1959 pour résoudre un problème de probabilité énoncé par Maurice Fréchet, les copules deviennent essentielles à l'appréhension de nombreux domaines d'application tels que la météorologie, l'hydrologie, les sciences actuarielles et la finance.

Leur grand intérêt est qu'elles fournissent des expressions relativement simples des structures des dépendances liant les marginales d'une loi multidimensionnelle. Plus précisément, pour le cas bidimensionnel.

Dans ce mémoire nous avons commencé par les définitions et les propriétés liées aux copules ainsi que les modèles paramétriques des copules. Ensuite nous présentons les différentes méthodes d'estimation : paramétriques et non-paramétriques et nous terminons par une application des copules en météorologie.

Abstract

The copula are an innovative tool for the modelisation of the dependence of many random variables introduced by Sklar 1959 for the resolution of a probability problem enunciated by Maurice Fréchet the copulas becomes necessary for the apprehension of lot of areas like metrology, hydrology, actuarial sciences and finance.

The big interesst is that they provide simple expression of dependence bound of the marginals of multidimensional law precisely two-dimensional case.

In this memoir we have started with the definitions and properties related to copula models and parametric copula. Then we present the different estimation methods: parametric and non- parametric and we end with an application of copula in meteorology.

Table des matières

Remerciement

Dédicace

Résumé

Table des matière

Liste des tableaux

Listes des figures

Introduction générale	1
1. La notion de copule et ses propriétés	5
1.1 Les copules.....	6
1.1.1 Définitions	6
1.1.2 Borne de Fréchet et relation d'ordre partiel sur l'ensemble des copules.....	9
1.1.3 La densité d'une copule.....	11
1.2 Mesure de dépendance	11
1.2.1 Corrélation de Pearson.....	11
1.2.2 Tau de Kendall et rho de Spearman	13
1.2.3 Dépendance de queue.....	15
2. Les copules paramétriques.....	18
2.1 Les copules elliptiques	19
2.1.1 La copule gaussienne	20
2.1.1.1 Le rho de Spearman	23
2.1.2 La copule de Student	23
2.2 Copule archimédienne	27
2.2.1 Copule de Clayton	28
2.2.2 Copule de Frank	30
2.2.3 Copule de Gumbel	32

3. Estimation des copules	34
3.1 Estimation paramétrique	35
3.1.1 Méthode des moments	35
3.1.2 Méthode du Maximum de vraisemblance	36
3.2 Estimation non paramétrique	37
3.2.1 Copule empirique	37
3.2.2 Procédure de Genest et Rivest	38
4. Applications	40
4.1 Description de l'échantillon	41
4.2 Représentation graphique des séries météorologiques	42
4.3 Série explicative	44
4.4 Ajustement des lois	44
4.4.1 Ajustement de la précipitation.....	44
4.4.2 Ajustement de la température.....	45
4.4.3 Ajustement de l'humidité	46
4.4.4 Ajustement de vitesse de vent	47
4.5 mesure des coefficients	48
4.6 Exemple de calcul de la Copule empirique	49
4.7 Ajustement des copules	50
4.7.1 Copule bivariée Précipitation-Température.....	50
4.7.2 Copule bivariée Précipitation-Humidité	51
4.7.3 Copule bivariée Précipitation-Vitesse de vent	53
4.7.4 Copule bivariée Température-Humidité	54
4.7.5 Copule bivariée Température-Vitesse de vent	56
4.7.6 Copule bivariée Humidité-Vitesse de vent	57

Conclusion

Annexe

Bibliographie

Liste des tableaux

2.1	Caractéristiques des copules elliptiques.	26
2.2	Caractéristiques des copules archimédiennes.	33
4.1	Tableau résume valeurs descriptives des séries étudié.	44
4.2	tableau représente le tableau de coefficient48	48
4.3	Tableau représente la copule empirique49	49

Liste des figures

2.1	Représentation de la copule Gaussienne.	21
2.2	Densité de la copule Gaussienne avec $\rho = 0.5$	22
4.3	Contour plot de la Copule Gaussienne du paramètre $\rho = 0.5$.	22
2.4	Représentation de la copule de student	24
2.5	Densité de la Copule de Student avec $\rho = 0.5$ et $\nu = 1$	24
2.6	Contour plot de la Copule de student avec $\rho = 0.5$ et $\nu = 8$	25
2.7	Densité de la copule de Clayton ($\theta = 2.582$)	29
2.8	Densité de la copule de Frank $\theta = 7.901$, le tau de Kendall et rho de Sperman correspondants sont : $\tau = 0.5989, \rho = 0.8$	31
2.9	Densité de la copule de Gumbel $\vartheta = 1.5$	32
4.1	Série de la Précipitation	42
4.2	Série de la Temperature	42
4.3	Série de l'Humidité	43
4.4	Série Vitesse de la Vent	43
4.5	Histogramme de precipitation	44
4.6	Fonction de répartition de la precipitation saisonière	44
4.7	Histogramme de la température	45
4.8	Fonction de répartition de la température	45
4.9	Histogramme de l'humidité	46
4.10	Fonction de repartition de l'humidité	46
4.11	Histogramme de la vitesse du vent.	47
4.12	Fonction de répartition de la vitesse du vent.	47
4.13	Série de pluie.	50
4.14	densité de la copule de Frank avec $\theta = 5.8$	50
4.15	Fonction de répartition de la copule de Frank avec $\theta = 5.8$	51

4.16 Précipitation- Humidité	51
4.17 densité de la copule de Frank avec $\theta = 3.37$	52
4.18 Fonction de répartition de la copule de Frank avec $\theta = 3.37$	52
4.19 Précipitation -Vitesse de Vent	53
4.20 densité de la copule Normale avec $\rho = 0.09$	53
4.21 Fonction de répartition de la copule Normale avec $\rho = 0.09$	54
4.22 Température -Humidité	54
4.23 densité de la copule de Frank avec $\theta = 4.54$	55
2.24 Fonction de répartition de la copule de Frank avec $\theta = 4.54$	55
4.25 Température- Vitesse de Vent	56
4.26 densité de la copule de Clayton avec $\theta = 0.159$	56
4.27 Fonction de répartition de la copule de Clayton avec $\theta = 0.159$	57
4.28 Humidité Vitesse de Vent	57
4.29 densité de la copule de Student avec $\rho = -0.0039$	58
4.30 Fonction de répartition de la copule de Student avec $\rho = -0.0039$	58

Introduction générale

La mesure de la dépendance entre deux ou plusieurs variables aléatoires est une pratique largement répandue par les statisticiens. Un riche ensemble de mesures de dépendance entre les variables aléatoires a été proposé comme le coefficient de corrélation de Pearson, le tau de Kendall et le rho de Spearman. Bien que ces mesures sont simples à calculer et peuvent être facilement interprétées, elles ne sont pas en mesure de détecter toutes les formes de dépendances. Donc il était indéniable de trouver un autre moyen pour résoudre ce problème. En effet, la fonction copule à l'avantage de modéliser complètement la dépendance entre les variables.

Les copules sont un phénomène relativement récent qui trouve sa source à la fin des années 50 dans des recherches portant initialement sur les tables de contingence. Au début, il était difficile de trouver des traces de la notion copule dans la littérature statistique. Mais à partir des années 70 et avec le développement de la théorie des processus empiriques, d'autres auteurs ont redécouvert le concept des fonctions copules sous d'autres appellations en établissant, de manière originale certaines de leurs propriétés.

Le terme copule vient du mot latin "copulae", qui signifie au sens figuré, lien, alliance, liaison ou union. Cette notion apparaît sous d'autres appellations dans certains travaux de Fréchet sur les espaces métriques probabilisés. L'article «Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données» de Maurice Fréchet, publié en 1951, constitue un bon point de départ. Abe Sklar, dans son texte « Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges », publié en 1959, a cependant été le premier à formuler rigoureusement le concept de copule. Un certain consensus émerge de la littérature scientifique pour attribuer la paternité de ce concept à Sklar. Le théorème de Sklar est d'ailleurs fortement utilisé au sein de la

littérature puisqu'il permet d'expliquer la relation entre une copule et un vecteur de variables aléatoires.

En effet, la théorie des copules permet une décomposition de la loi multidimensionnelle en ses marginales univariées et en une fonction de dépendance, rendant possibles des extensions naturelles de certains résultats obtenus dans le cas univarié au cas multivarié.

D'une façon explicite, une copule met en évidence la relation de dépendance entre deux ou plusieurs variables aléatoires par la relation :

$$F(X_1, X_2) = C(F_1(X_1), F_2(X_2)) \quad X_1, X_2 \in \mathbb{R}$$

Dans cette expression, F est la fonction de répartition conjointe des variables aléatoires X_1 et X_2 . On peut changer les fonctions de répartition marginales F_1 et F_2 , à volonté tout en conservant la structure de dépendance (la copule C) intacte. Les fonctions de répartition marginales F_1 et F_2 pourraient être de loi différentes. Ceci est un premier atout pour les statisticiens, puisque les copules leur autorisent une sélection plus étendue des fonctions de répartition conjointes et ce indépendamment des différentes lois marginales considérées. Grâce à cette flexibilité, la théorie des copules trouve des applications dans de nombreux domaines comme l'hydrologie (Salvadori, De Michele, Kottegodda et Rosso [2007]), les sciences actuarielles (Frees et Valdes [1998]) et en finance (Cherubini, Vecchiato et Lucciano [2004], Mc-Neil, Frey et Embrechts [2005]).

Pourquoi la copule et non le coefficient de corrélation ?

Modéliser la dépendance par des indicateurs statistiques est une chose, la modéliser à l'aide d'une fonction de dépendance en est une autre. Ce qui est le cas de la fonction copule qui répond à cet objectif. Cela explique le choix de la copule pour modéliser la dépendance et non le coefficient de corrélation, une mesure souvent utilisée par les praticiens car cette dernière possède plusieurs limites telles que :

- Le coefficient de corrélation n'est pas défini si les moments d'ordre deux des variables aléatoires ne sont pas finis. Ce n'est pas une mesure appropriée de la dépendance pour les distributions à queues lourdes où les variances peuvent être infinies.

– Le coefficient de corrélation et sa portée de caractérisation ne fonctionnent que pour les variables gaussiennes, pour lesquelles corrélation et dépendance recouvrent la même réalité.

– La corrélation est une mesure de dépendance qui ne peut pas nous indiquer tout ce que nous voudrions savoir sur la structure de la dépendance.

La copule est un outil relativement innovant de modélisation de la structure de dépendance de plusieurs variables aléatoires. La connaissance de cet outil statistique est essentielle à l'appréhension de nombreux domaines d'application de la finance quantitative : mesure du risque multiple de crédit, évaluation de produits de crédits structurés, réplique de la performance des hedge funds (fonds de couverture), mesure du risque multiple de marché, gestion de portefeuille à l'aide de simulations Monte Carlo, etc. Ainsi, à chaque fois qu'il est nécessaire de modéliser une structure de dépendance de plusieurs variables aléatoires, nous pouvons faire appel aux copules. La relation entre la distribution conjointe et la copule nous permet d'étudier la structure de dépendance entre (X, Y) séparément de leurs marginales.

– La copule est une fonction qui modélise les propriétés des structures de dépendance telles que la forme et l'intensité.

– La copule est capable de mesurer la dépendance pour les distributions à queues lourdes.

– Elles permettent de construire des modèles de distributions multidimensionnelles.

– Les copules permettent d'élaborer des modèles non gaussiens, c'est à dire qu'avec une copule, on peut construire par exemple une distribution avec une marginale gaussienne et une autre uniforme.

Ce mémoire est réparti comme suit :

Une introduction générale où nous présentons les grandes lignes de ce travail, nous fournissons un exposé de synthèse sur ce sujet. On commence par donner un historique des copules et expliquer le choix de la copule pour modéliser la structure de dépendance, ensuite nous rappelons le contenu des chapitres suivants et la contribution de ce travail.

Dans le premier chapitre, nous présentons la notion des copules et ses propriétés.

La dépendance entre les variables aléatoire est parfaitement décrite par leur distribution conjointe. Nous pouvons cependant distinguer les comportements des distributions marginales de la structure de dépendance ; la copule est l'outil permettant d'extraire la structure de dépendance d'une distribution conjointe et ainsi de séparer la dépendance et le comportement marginal.

Dans ce premier chapitre, nous introduisons quelques définitions de base qui nous permettront de décrire le concept de copule. Nous présentons les propriétés les plus importantes de la fonction de copule et son rôle dans l'étude de la dépendance des variables aléatoires. Pour faciliter la tâche nous nous intéressons plus particulièrement à l'étude des copules bivariées.

1.1 Les copules

1.1.1 Définitions

Définition 1.1 Une copule (ou n-copule) C est la fonction de répartition jointe d'un vecteur aléatoire $U = (U_1, \dots, U_n)$ de \mathbb{R}^n dont les marginales U_1, \dots, U_n sont uniformes $U[0; 1]$:

$$C(u_1, \dots, u_n) = P(U_1 \leq u_1, \dots, U_n \leq u_n), \quad u_1, \dots, u_n \in [0, 1] \quad (1.1)$$

Définition 1.2 Une copule bivariée est une fonction $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ qui vérifie les conditions suivantes :

1. $C(u, 0) = C(0, u) = 0, \forall u \in [0, 1]$.on dit que C est attachée ;
2. $C(u, 1) = C(1, u) = u, \forall u \in [0, 1]$ Les marges des distributions sont des marges uniformes ;
3. C est 2-croissante : $C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0$

$$\forall (u_1, u_2) \in [0, 1]^2, (v_1, v_2) \in [0, 1]^2 \text{ tel que } u_1 \leq u_2 \text{ et } v_1 \leq v_2$$

Nous pouvons maintenant passer au fameux théorème de Sklar. La grande majorité de la théorie des copules repose sur ce théorème qui permet de représenter toute fonction de répartition à l'aide d'une copule.

Théorème 1.1 (Sklar 1959)

Soit F une fonction de répartition n -variée (F est la fonction de répartition de $X = (X_1, \dots, X_n)$) dont les marginales F_1, \dots, F_n sont continues (F_1, F_2, \dots, F_n sont les fonctions de répartition de X_1, X_2, \dots, X_n). Alors il existe une unique copule C telle que:

$$F(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_i(x_i), \dots, F_n(x_n)) \quad (1.2)$$

Preuve :

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) &= P(X_1 \leq x_1, \dots, X_i \leq x_i, \dots, X_n \leq x_n) \\ &= P(F_1(X_1) \leq F_1(x_1), \dots, F_i(X_i) \leq F_i(x_i), \dots, F_n(X_n) \leq F_n(x_n)) \\ &= C(F_1(x_1), \dots, F_i(x_i), \dots, F_n(x_n)) \end{aligned}$$

Remarque 1 : On conclure que la fonction de répartition multivariée contient toute l'information sur le vecteur aléatoire qu'elle caractérise, cela signifie que la copule contient toute l'information sur la dépendance qui existe entre les composantes du vecteur aléatoire.

Remarque 2 : Puisque le théorème ne requiert pas des marginales qu'elles soient identiques, ou même qu'elles appartiennent à la même famille, il est possible de construire des fonctions de répartition multivariées simplement en sélectionnant des fonctions de répartition marginales continues (par exemple Lognormale, Pareto, Weibull et Gamma) ainsi qu'une copule pour les lier.

Remarque 3 : Les phénomènes aléatoires multivariés peuvent se scinder en deux parties : l'étude, dans un premier temps, des comportements individuels au travers de l'étude des marginales, puis l'étude de la forme de dépendance existante entre ces comportements individuels qui est l'étude de la copule.

Dans le cas de marginales continues, on peut extraire l'unique copule associée à F comme le montre le corollaire suivant.

Corollaire 1.1 Soit F une fonction de répartition conjointe avec les marginales F_1, F_2 .

Soient F_1^{-1}, F_2^{-1} les fonctions inverses généralisées de F_1, F_2 c'est-à-dire :

$$F_j^{-1}(u) = \inf \{x; F_j(x) \geq u\}, u \in [0,1]$$

Alors pour tout $(u_1, u_2) \in [0,1]^2$, on a :

$$C(u_1, u_2) = F(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2)). \quad (1.3)$$

Preuve : supposons que F_1 et F_2 sont continues, alors $F_1(x_1)$ et $F_2(x_2)$ sont uniformes sur $[0,1]$ et par la suite.

$$\begin{aligned} C(u_1, u_2) &= P(F_1(X_1) \leq u_1, F_2(X_2) \leq u_2) \\ &= P(X_1 \leq F_1^{-1}(u_1), X_2 \leq F_2^{-1}(u_2)) \\ &= F(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2)) \end{aligned}$$

Proposition 1.1 Soit F une fonction réelle croissante et continue à droite, d'inverse généralisé F^{-1}

1- La fonction F^{-1} est croissante et continue à gauche. De plus $\forall x \in \mathbb{R}, p \in [0,1[$

$$F(x) \geq p \Leftrightarrow x \geq F^{-1}(p)$$

2- Soit X une variable aléatoire à valeur dans \mathbb{R} de fonction de répartition F . Si F est continue, alors $F(X)$ est de loi uniforme sur $[0,1]$

Corollaire 1.2 (inversion de Sklar) :

Soient H la fonction de répartition conjointe absolument continue, C une copule, et F et G deux fonctions de répartition marginales; supposons que F et G sont continues $\forall u, v \in [0,1] \times [0,1]$ on a:

$$C(u, v) = H(F^{-1}(u), G^{-1}(v)) \quad (1.4)$$

Le théorème de Sklar peut être utilisé pour construire les fonctions copules à partir de la distribution bidimensionnelle. Considérons par exemple les distributions bivariées suivantes :

Exemple 1.1 (distribution bivariée de Gumbel)

Soit H_θ une fonction de distribution donnée par

$$H_\theta(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-(x+y+\theta xy)} & \text{si } x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.5)$$

Où θ est un paramètre dans $[0,1]$. Les marginales F et G sont des exponentielles, leurs fonctions inverses sont $F^{-1}(u) = -\ln(1-u)$, $G^{-1}(v) = -\ln(1-v)$ respectivement, pour $u, v \in [0,1]$. On en déduit que la copule correspondante est

$$C_\theta(u, v) = u + v - 1 + (1-u)(1-v)e^{-\theta \ln(1-u)\ln(1-v)} \quad (1.6)$$

1.1.2 Bornes de Fréchet et relation d'ordre partiel sur l'ensemble des copules :

Parmi l'ensemble des copules, trois sont d'une nature particulière : C^-, C^\perp, C^+ qui sont respectivement les copules exprimant la contre-comonotonie, l'indépendance et la comonotonie.

La contre-comonotonie est la forme extrême de dépendance négative, l'indépendance est l'absence de dépendance et la comonotonie est la forme extrême de dépendance positive :

$$C^-(u_1, \dots, u_n) = \max(\sum_{i=1}^n u_i - n + 1, 0) \quad (1.7)$$

$$C^\perp(u_1, \dots, u_n) = \prod_{i=1}^n u_i \quad (1.8)$$

$$C^+(u_1, \dots, u_n) = \min(u_1, \dots, u_n) \quad \text{Où } u_1, \dots, u_n \in [0,1] \quad (1.9)$$

Remarque : C^\perp et C^+ sont des copules quelle que soit la dimension n , mais C^- n'est une copule que dans le cas bivarié. Néanmoins C^- est quelle que soit la dimension n (n supérieur à deux) la meilleure borne ponctuelle.

Exemple 1.2 Considérons un vecteur aléatoire gaussien

$Z = (X, Y)$ de corrélation ρ .

$C_{XY} = C^-$ correspond au cas :

$$X = -Y$$

Et $C_{XY} = C^+$ correspond au cas :

$$X = Y$$

Définition 1.3 (Nelsen [1998]) [8]

Une copule C_1 est dite plus petite qu'une copule C_2 si $\forall (u_1, \dots, u_n) \in [0,1]^n$,
 $C_1(u_1, \dots, u_n) \leq C_2(u_1, \dots, u_n)$

On note $C_1 < C_2$

$<$: Est appelé ordre de concordance, et est lié à la dominance stochastique d'ordre 1 sur les fonctions de répartition.

On peut remarquer que la relation $C^- < C < C^+$ reste valide pour toute copule C .

En s'appuyant sur cette définition, nous dirons qu'une copule C traduit :

- Une forme de dépendance positive si $C^\perp < C < C^+$
- Une forme de dépendance négative si $C^- < C < C^\perp$

Il est important de noter que $<$ est une relation d'ordre partiel. Il existe donc des copules qui traduisent une structure de dépendance qui n'est ni positive, ni négative. Cette définition nous fournit un premier outil, théorique, pour introduire un élément de comparaison entre copule. Nous avons ainsi pu constater qu'il existait des formes extrêmes de dépendance que nous avons caractérisées.

1.1.3 La densité d'une copule :

Supposons que les distributions marginales F_1, F_2 et la copule C sont différentiables, alors la densité jointe notée f de la variable aléatoire $X = (X_1, X_2)$ prend la forme suivante :

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2) C(F_1(x_1), F_2(x_2))$$

Où, pour $1 \leq k \leq 2$, f_k est la densité de probabilité de X_k , et c est la densité de la copule C définie par :

$$c = \frac{\partial^2 C(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2} \quad (1.10)$$

Les copules représentent un moyen d'extraire la structure de dépendance de la distribution jointe et de la séparer des comportements marginaux. Donc, il est possible de caractériser la densité d'une copule entièrement par la densité jointe et les densités marginales.

1.2 Mesures de dépendance Il existe de nombreuses approches pour décrire et mesurer la dépendance entre variables aléatoires conjointement distribuées. Souvent, on utilise le coefficient de corrélation linéaire de Pearson décrit dans la section suivante.

1.2.1 Corrélation de Pearson :

Définition 1.4 Soient X et Y deux variables aléatoires de variances finies. La corrélation de Pearson entre les variables X et Y est donnée par :

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var}(X)\text{var}(Y)}} \quad (1.11)$$

où $\text{Cov}(X, Y) = E(X.Y) - E(X)E(Y)$ est la covariance entre X et Y .

Il s'agit d'un coefficient de corrélation linéaire permettant de mesurer seulement la dépendance linéaire. Il peut être utilisé pour certaines distributions de variables aléatoires comme la loi normale. Pour d'autres distributions, le coefficient de corrélation linéaire offre une interprétation limitée.

Une corrélation nulle n'est pas toujours équivalente à l'indépendance. Par exemple, considérons $X \sim N(0,1)$ et $Y = X^2$, alors

$$\text{cov}(X, Y) = E(X \cdot X^2) - E(X)E(X^2) = E(X^3) - E(X)E(X^2) = 0$$

Donc $\rho(X, Y) = 0$. Bien que X et Y sont des variables aléatoires liées, elles ont une corrélation nulle.

La corrélation linéaire est invariante par transformation linéaire, mais pas pour toutes les transformations croissantes, par exemple $\log(X)$ et $\log(Y)$ ont une corrélation différente de celle entre X et Y .

Supposons que nous avons un échantillon $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, la version empirique du coefficient de corrélation de Pearson est donnée par :

$$\rho_n(X, Y) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{(n-1)s_x s_y}$$

où \bar{x} et \bar{y} sont les moyennes de l'échantillon de X et de Y , s_x et s_y sont les écarts-types de l'échantillon de X et de Y tels que :

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

$$s_y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$$

La corrélation de Pearson peut être exprimée en fonction des copules comme l'indique la proposition suivante :

Proposition 1.2 Si C désigne la copule des variables X et Y , la corrélation de Pearson $\rho(X, Y)$ a pour expression :

$$\rho(X, Y) = \frac{1}{\sqrt{\text{var}(X)\text{var}(Y)}} \int_0^1 \int_0^1 (C(u, v) - uv) dF_1^{-1}(u) dF_2^{-1}(v) \quad (1.13)$$

Preuve : En effet,

$$\begin{aligned} \rho(X, Y) &= \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var}(X)\text{var}(Y)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\text{var}(X)\text{var}(Y)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [H(x, y) - F(x)G(y)] dx dy \end{aligned}$$

où H est la distribution jointe de X et Y . On applique le changement de variable suivant :

$u = F(x)$ et $v = G(y)$, on démontre le résultat de la proposition.

On remarque que la copule ne permet pas de déduire le coefficient de corrélation. En effet, les distributions marginales sont nécessaires.

1.2.2 Tau de Kendall et rho de Spearman : Le tau de Kendall et le rho de Spearman sont deux mesures de concordance bien connues en statistique. Elles donnent une mesure de la corrélation entre les rangs des observations, à la différence du coefficient de corrélation linéaire qui lui mesure la corrélation entre les valeurs des observations. Elles offrent par ailleurs l'avantage de s'exprimer simplement en fonction de la copule associée au couple de variables aléatoires.

Pour introduire le tau de Kendall et le rho de Spearman, on considère d'abord la notion de concordance présentée dans la définition suivante.

Définition 1.5 Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) deux réalisations d'un vecteur aléatoire continu (X, Y) , alors (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont dites concordantes si

$(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) > 0$ et discordantes $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) < 0$.

Théorème 1.2

Soit κ une mesure de concordance pour des variables aléatoires continues X et Y .

1. si Y est une fonction croissante de X , alors $\kappa < X, Y > = 1$;
2. si Y est une fonction décroissante de X , alors $\kappa < X, Y > = -1$;
3. si α et β sont des fonctions strictement croissantes, alors $\kappa < \alpha(X), \beta(Y) > = \kappa < X, Y >$

1.2.2.1 Tau de Kendall

Définition 1.6 Soient (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) deux vecteurs aléatoires continus i.i.d de fonction de répartition conjointe H et de fonction marginales F (pour X_1 et X_2) et G (pour Y_1 et Y_2). Le tau de Kendall noté τ est défini par :

$$\tau = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0].$$

Le tau de Kendall possède les propriétés suivantes :

- Le tau de Kendall est symétrique, c'est-à-dire : $\tau(X, Y) = \tau(Y, X)$
- $-1 \leq \tau \leq +1$
- Si X et Y sont indépendantes alors $\tau = 0$
- Si a et b sont des fonctions strictement croissantes, alors $\tau(a(X), b(y)) = \tau(X, Y)$

Remarque : Lorsque $\tau = 0$ X et Y ne sont pas forcément indépendantes

Proposition 1.3 Soit (X, Y) un vecteur aléatoire continu de copule C . Le tau de Kendall $\tau(X, Y)$ a pour expression

$$\tau(X, Y) = 4P\{X \geq X', Y \geq Y'\} - 1$$

Preuve

$$\begin{aligned}
 \tau(X, Y) &= \mathbb{P}\{(X - X')(Y - Y') \geq 0\} - \mathbb{P}\{(X - X')(Y - Y') < 0\} \\
 &= 2\mathbb{P}\{(X - X')(Y - Y') \geq 0\} - 1 \\
 &= 2\mathbb{P}\{(X - X') \geq 0, (Y - Y') \geq 0\} + 2\mathbb{P}\{(X - X') < 0, (Y - Y') < 0\} - 1 \\
 &= 4\mathbb{P}\{X \geq X', Y \geq Y'\} - 1
 \end{aligned}$$

1.2.2.2 Rho de Spearman

Définition 1.7 Soient (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) et (X_3, Y_3) trois vecteurs aléatoires indépendants de même loi H . Le coefficient de corrélation de Spearman est défini par :

$$\rho_s = 3([P(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0] - [P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0)]) \quad (1.13)$$

Les propriétés du ρ_s sont les suivants :

- $-1 \leq \rho_s \leq +1$
- Si X et Y sont indépendantes alors $\rho_s = 0$
- Si a et b sont des fonctions strictement croissantes, alors

$$\rho_s(a(X), b(Y)) = \rho_s(X, Y)$$

Remarque : Le rho de Spearman s'écrit aussi en fonction du coefficient ρ de corrélation linéaire de Pearson : $\rho_s(X, Y) = \rho(F_x(X), F_y(Y))$ où F_x et F_y sont les fonctions de répartition respectives de X et Y .

1.2.3 Dépendance de queue Contrairement au Tau de Kendall ou au Rho de Spearman, la dépendance de queue est donc une mesure asymptotique de dépendance entre variables aléatoires. Plus particulièrement on peut différencier la dépendance de queue supérieure qui mesure la dépendance asymptotique dans le quadrant supérieur droit (réalisations conjointement élevées), et la dépendance de queue inférieure qui mesure la

dépendance asymptotique dans le quadrant inférieur gauche (réalisations conjointement faibles).

Définition 1.8 Le coefficient de dépendance de queue supérieure "upper tail dependence coefficient" d'un vecteur aléatoire (X, Y) est défini par :

$$\lambda_U(x, y) = \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} P(X > F_x^{-1}(\alpha) | Y > F_y^{-1}(\alpha))$$

Le coefficient de dépendance de queue inférieure "lower tail dependence coefficient" d'un vecteur aléatoire (X, Y) est définie par :

$$\lambda_L(x, y) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} P(X < F_x^{-1}(\alpha) | Y < F_y^{-1}(\alpha))$$

De sorte que $\lambda_U, \lambda_L \in [0, 1]$.

On dit que X et Y sont asymptotiquement dépendantes au niveau supérieur de la queue de distribution si $\lambda_U \in]0, 1]$. Si $\lambda_U = 0$ on dit que X et Y sont asymptotiquement indépendantes au niveau supérieur de la queue de distribution.

On peut exprimer λ_U et λ_L à l'aide de la copule C de (X, Y) tels que décrit dans la proposition suivante.

Proposition 1.4

Etant donné deux variables aléatoires X et Y de copule $C(X, Y)$, on a :

$$\lambda_L(X, Y) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{C(u, u)}{u} \quad (1.15)$$

$$\lambda_U(X, Y) = \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u} \quad (1.16)$$

Preuve

En effet, par définition, on a :

$$\lambda_L(X, Y) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} P(X < F_x^{-1}(\alpha) | Y < F_y^{-1}(\alpha)) = \frac{P(X < F_x^{-1}(\alpha), Y < F_y^{-1}(\alpha))}{P(Y < F_y^{-1}(\alpha))}$$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{C(\alpha, \alpha)}{\alpha}$$

De même on peut écrire :

$$\begin{aligned} \lambda_U(X, Y) &= \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} P(X > F_x^{-1}(\alpha) | Y > F_y^{-1}(\alpha)) \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \frac{P(X > F_x^{-1}(\alpha), Y > F_y^{-1}(\alpha))}{P(Y > F_y^{-1}(\alpha))} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \frac{1 - P(X \leq F_x^{-1}(\alpha) \text{ ou } Y \leq F_y^{-1}(\alpha))}{1 - P(Y \leq F_y^{-1}(\alpha))} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \frac{1 - (P(X \leq F_x^{-1}(\alpha)) + P(Y \leq F_y^{-1}(\alpha)) - P(X \leq F_x^{-1}(\alpha) \text{ et } Y \leq F_y^{-1}(\alpha)))}{1 - P(Y \leq F_y^{-1}(\alpha))} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \frac{1 - (\alpha + \alpha - C(\alpha, \alpha))}{1 - \alpha} \end{aligned}$$

Exemples 1.3

Pour la copule C^+ nous obtenons

$$\begin{aligned} \lambda_U &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + \min(u, u)}{1 - u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + u}{1 - u} = 1 \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \lambda_L &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\min(u, u)}{u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{u}{u} = 1 \end{aligned}$$

Chapitre 2

Les copules paramétriques

Il existe plusieurs méthodes pour la construction des copules qu'on peut trouver dans la littérature. Dans ce chapitre, nous allons présenter quelques méthodes et étudier quelques copules paramétriques les plus utilisés ainsi que leur propriétés, c'est-à-dire des fonctions qui dépendent d'un ou de plusieurs paramètres.

2.1 Les copules elliptiques

Les copules elliptiques sont définies à partir des lois elliptiques. Dans ce qui suit, nous donnons quelques définitions de la distribution elliptique ainsi que deux exemples classiques de cette famille de copule : la copule Gaussienne et la copule de Student.

Définition 2.1 Un vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_d)$ est de distribution elliptique s'il admet la représentation suivante :

$$X = \mu + RAU \quad (2.1)$$

Où :

- $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d) \in \mathbb{R}^d$.
- U est un vecteur aléatoire uniforme sur la sphère unité de \mathbb{R}^d .
- R est un vecteur aléatoire indépendant de U .
- A est une matrice de dimension $d \times d$ telle que $\Sigma = AA^T$ est non singulière.

Définition 2.2 La fonction de densité d'une distribution elliptique (si elle existe) est donnée par :

$$f(x) = |\Sigma|^{-1/2} g((x - \mu)^T(x - \mu)) \quad (2.2)$$

où g est une fonction définie de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} , dite génératrice de densité, uniquement déterminée par la fonction de distribution de R .

Exemple 2.1

La fonction,

$$g(t) = C \exp\left(-\frac{t}{2}\right)$$

Génère la fonction de distribution normale multivariée et $g(t) = C\left(1 + \frac{t}{m}\right)^{-(d+m)/2}$

Génère la fonction de distribution de student multivariée, avec C une constante de normalisation et $m \in \mathbb{N}$.

Les copules elliptiques sont définies à partir des familles des lois elliptiques. On en considère ici deux cas particuliers, la copule gaussienne et la copule de Student.

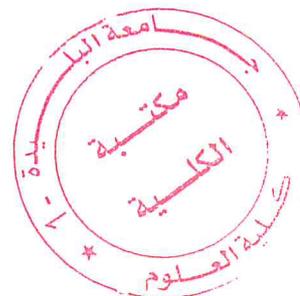
2.1.1 La copule gaussienne

Définition 2.3 La copule Gaussienne bidimensionnelle, aussi appelée copule normale, est définie de la façon suivante :

$$C(u_1, u_2; \rho) = \phi_\rho(\phi^{-1}(u_1), \phi^{-1}(u_2)) \quad (2.3)$$

Où ρ est le coefficient de corrélation et ϕ_ρ représente la distribution normale bidimensionnelle centrée dont la matrice de corrélation est égale à $\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$.

L'importance de cette copule réside dans le fait qu'elle est sous-jacente à la distribution normale multidimensionnelle. En effet, modéliser la structure de dépendance d'un échantillon par une copule gaussienne est cohérent avec la mesure de cette dépendance par le coefficient de corrélation linéaire. Cependant lorsque l'on souhaite modéliser une dépendance non linéaire ou entre événements extrêmes, on va faire appel à d'autres copules que nous explicitons par la suite.



En dérivant la formule définissant la copule Gaussienne, on peut extraire la densité de la copule Gaussienne bidimensionnelle qui s'écrit :

$$c(u_1, u_2; \rho) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(\frac{x_1^2+x_2^2-2\rho x_1 x_2}{2(1-\rho^2)} + \frac{x_1^2+x_2^2}{2}\right) \quad (2.4)$$

Avec $x_1 = \Phi^{-1}(u_1)$ et $x_2 = \Phi^{-1}(u_2)$

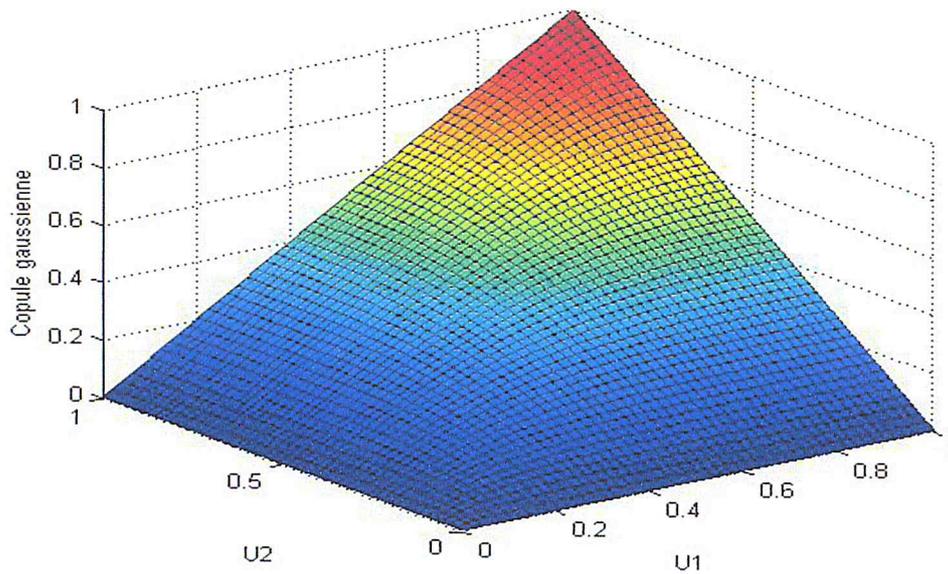


FIG. 2.1 – Représentation de la copule Gaussienne.

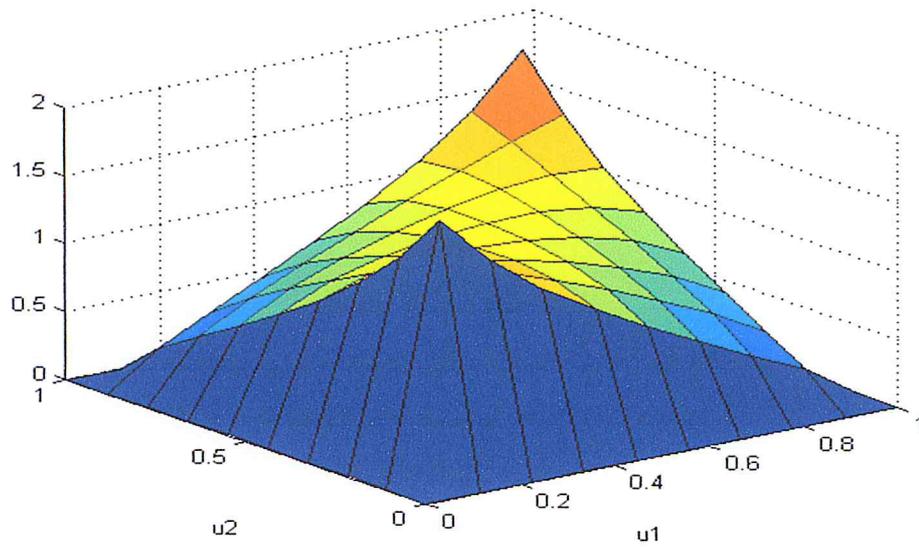


FIG. 2.2 – Densité de la copule Gaussienne avec $\rho = 0.5$.

Remarque : La copule gaussienne est symétrique

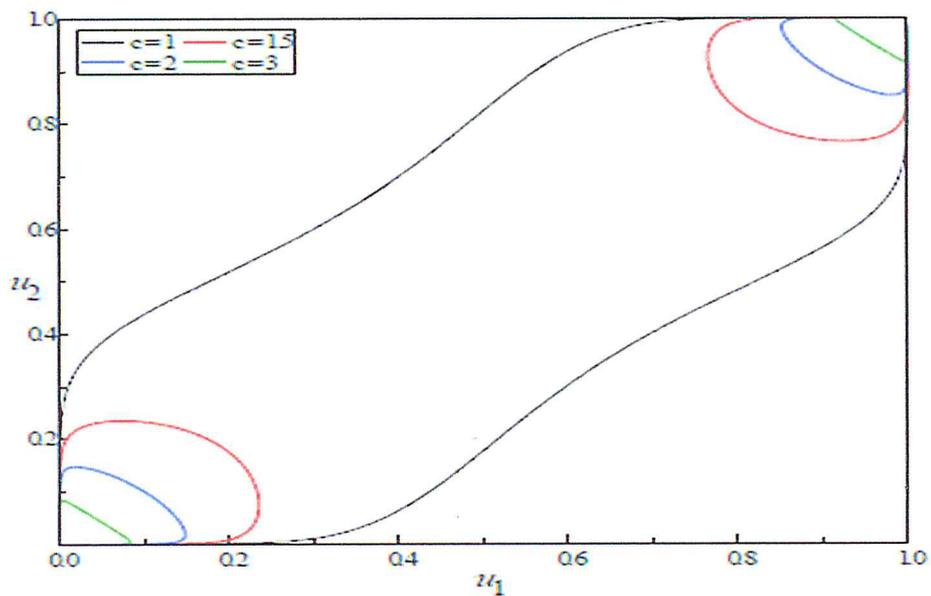


FIG. 2.3 – Contour plot de la Copule Gaussienne du paramètre $\rho = 0.5$

2.1.1.1 Rho de Spearman :

Théorème 2.1 Soit (X_1, \dots, X_n) un vecteur aléatoire d'une copule Gaussienne C , alors pour tout i et j dans $\{1, \dots, n\}$, le rho de Spearman est donné par

$$\rho_{S_{i,j}} = \frac{6}{\pi} \arcsin \frac{\rho_{i,j}}{2} \quad (2.6)$$

Avec $\rho_{i,j}$ est le coefficient de corrélation linéaire entre X_i et X_j .

2.1.2 La copule de student : Comme pour la copule Normale, la copule t (ou la copule Student) est la fonction de dépendance associée à la distribution t multidimensionnelle.

Définition 2.4 La copule Student bidimensionnelle est définie de la façon suivante :

$$C(u_1, u_2; \rho, \nu) = T_{\rho, \nu}(T_{\nu}^{-1}(u_1), T_{\nu}^{-1}(u_2)) \quad (2.7)$$

Avec ρ est le coefficient de corrélation et $T_{\rho, \nu}$ est la distribution de Student bidimensionnelle standard de matrice de corrélation fonction de ρ et de degré de liberté ν .

Dans le cas où le coefficient de corrélation est différent de ± 1 , la copule Student présente des dépendances de queue à droite et à gauche (car la dépendance extrême est définie pour $\rho \neq -1$)

La densité de la copule Student s'écrit sous la forme suivante :

$$C(u_1, u_2; \rho, \nu) = \frac{\nu}{2\sqrt{1-\rho^2}} \frac{\Gamma(\nu/2)^2}{\Gamma(\nu+1/2)^2} \frac{(1 + \frac{x_1^2 + x_2^2 - 2\rho x_1 x_2}{\nu(1-\rho^2)})^{-\frac{\nu+2}{2}}}{\left[\left(1 + \frac{x_1^2}{\nu}\right) \left(1 + \frac{x_2^2}{\nu}\right) \right]^{-\frac{\nu+1}{2}}} \quad (2.8)$$

Avec $x_1 = T_{\nu}^{-1}(u_1)$ et $x_2 = T_{\nu}^{-1}(u_2)$, $\nu > 0$ et $\rho \in (-1, 1)$

La copule Student (t-copula) est extraite de la même manière que la copule Gaussienne mais cette fois-ci à partir de la distribution de Student bidimensionnelle

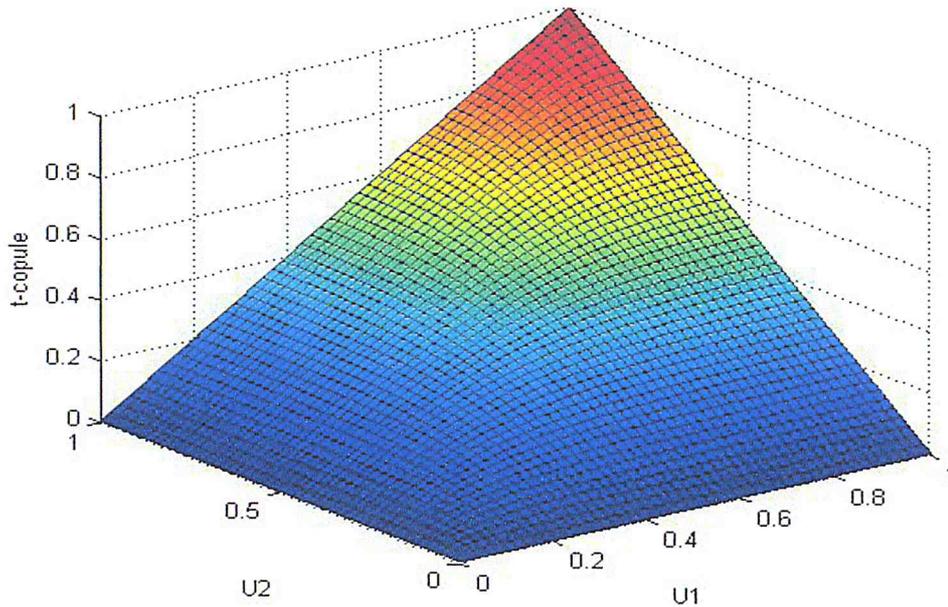


FIG. 2.4 – Représentation de la copule de student

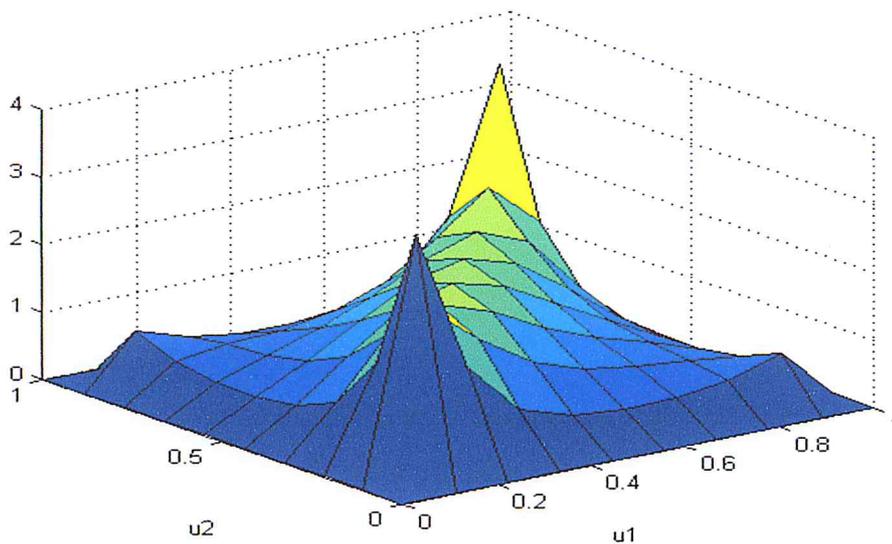


FIG. 2.5 – Densité de la Copule de Student avec $\rho = 0.5$ et $v = 1$

Remarque : La copule de student est symétrique

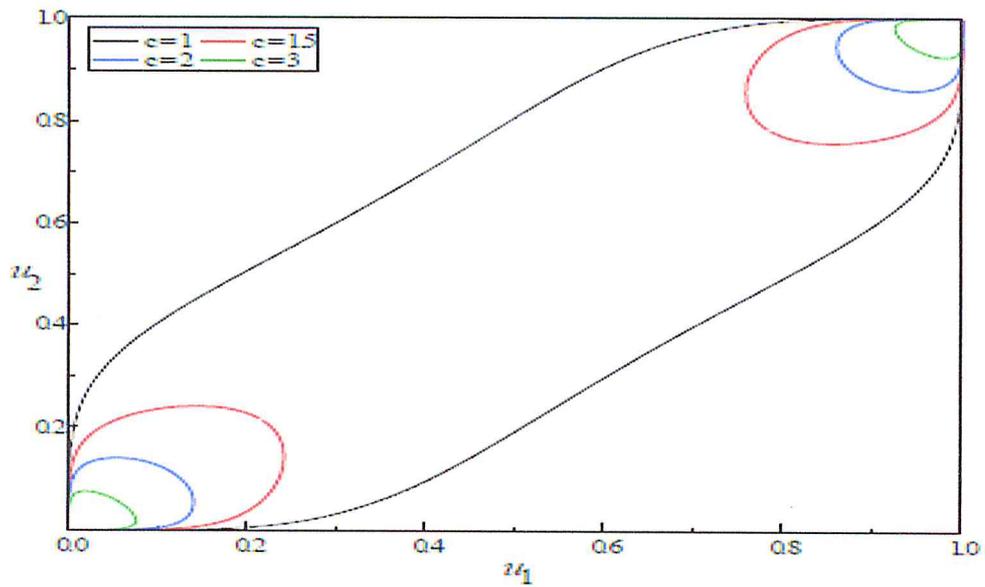


FIG. 2.6 – Contour plot de la Copule de student avec $\rho = 0.5$ et $\nu = 8$

Théorème 2.2 Soit (X_1, \dots, X_n) un vecteur aléatoire d'une copule elliptique (Gaussien ou Student) C , alors pour tout i et j dans $\{1, \dots, n\}$, le tau de Kendall est donné par

$$\tau_{X_i, X_j} = \frac{2}{\pi} \arcsin \rho_{i,j} \quad (2.5)$$

Avec $\rho_{i,j}$ est le coefficient de corrélation linéaire entre X_i et X_j .

Montrons maintenant que le tau de Kendall de la copule elliptique est égal à $\frac{2}{\pi} \arcsin(\rho)$ En effet,

$$\begin{aligned} \tau(X, Y) &= 4P\{X \geq X', Y \geq Y'\} - 1 \\ &= \frac{1}{\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \int_0^\infty \int_0^\infty \exp\left\{\frac{-1}{4(1-\rho^2)}\left(\frac{u^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho uv}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{v^2}{\sigma_2^2}\right)\right\} dudv - 1 \end{aligned}$$

On pose : $\left\{s = \frac{u/\sigma_1 - \rho v/\sigma_2}{\sqrt{1-\rho^2}}, t = \frac{v}{\sigma_2}, dudv = \sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2} dsdt\right\}$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\rho t}^\infty \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{4}(s^2 + t^2)\right\} dsdt - 1$$

on pose : $\{s = r \cos \theta, t = r \sin \theta, dsdt = r dr d\theta\}$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2 + \arctan(\rho/\sqrt{1-\rho^2})} \int_0^\infty r \exp\left\{-\frac{r^2}{4}\right\} dr d\theta - 1$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)\right) - 1$$

$$= \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi} \arcsin(\rho)$$

Le tableau ci-dessus donne les caractéristiques principales de la copule Gaussienne et de la copule de Student. La modélisation de la dépendance des copules elliptique est symétrique.

Tableau 2.1 – Caractéristiques des copules elliptiques

Copule elliptique	Paramètres	Tau de Kendall	Dépendance extrême
Gaussienne	$\rho \in [-1,1]$	$\frac{2}{\pi} \arcsin(\rho)$	0
Student	$\rho \in [-1,1], \nu \geq 1$	$\frac{2}{\pi} \arcsin(\rho)$	$2t_{\nu+1}\left(-\sqrt{\nu+1} \sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}\right)$

On note que $2t_{\nu+1}(-\sqrt{\nu+1}\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}})$ représente la dépendance de queue supérieure pour la copule de Student. À l'inverse la copule Gaussienne ne représente aucune dépendance de queue.

2.2 Copules Archimédiennes :

Les copules archimédiennes sont indiscutablement associées au statisticien canadien Christian Genest .Il est le premier à avoir adopté une analyse statistique de ces fonctions copules.Ses nombreuses publications ont largement contribué à les faire connaître. En effet, contrairement aux copules gaussiennes et aux copules de Student, les copules archimédiennes ont le grand avantage de décrire des structures de dépendance très diverses dont notamment les dépendances dites asymétriques, où les coefficients de queue inférieure et de queue supérieure sont différents. La classe de copules archimédiennes est une classe importante .Il ya plusieurs raisons qui justifient leurs utilisations, entre autres :

1. Grande variété de familles paramétriques.
2. Les propriétés particulières et intéressantes que cette classe possède.
3. La facilité avec laquelle peuvent être construites et simulées.
4. La grande variété des différentes structures de dépendance.

2.2.1 Définitions

Définition 2.5 Une copule est dite Archimédienne avec fonction génératrice φ si elle s'exprime sous la forme suivante :

$$C(u_1, u_2) = \begin{cases} \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \varphi(u_2)) & \text{si } \varphi(u_1) + \varphi(u_2) \leq \varphi(0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.9)$$

Avec φ vérifiant : $\varphi(1) = 0$, $\varphi'(u) < 0$ et $\varphi''(u) > 0$ pour tout $0 \leq u \leq 1$.

Par la suite nous présentons les trois familles de copules Archimédiennes les plus utilisées en pratique. Cela concerne la copule de Clayton, la copule de Frank et celle de Gumbel.

2.2.1. Copule de Clayton :

Définition 2.6 La copule de Clayton, connue aussi sous les noms : copule de Cook-Johnson ou de Kimeldorf-Sampson, est une copule archimédienne dont le générateur est défini, pour $\theta > 0$ et pour $u \in]0,1]$, par :

$$\varphi(u) = \theta^{-1}(u^{-\theta} - 1) \quad (2.10)$$

La copule de Clayton bidimensionnelle s'écrit donc sous la forme :

$$C(u_1, u_2; \theta) = (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-1/\theta} \quad (2.11)$$

Cette copule est différentiable et sa densité est donnée par :

$$\begin{aligned} C(u_1, u_2; \theta) &= \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{\partial C(u_1, u_2; \theta)}{\partial u_1} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial u_2} \left[\frac{-1}{\theta} (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{\frac{-1}{\theta}-1} (-\theta u_1^{-\theta-1}) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial u_2} \left[(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{\frac{-1-\theta}{\theta}} (u_1^{-\theta-1}) \right] \\ &= \frac{-1-\theta}{\theta} \left[(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{\frac{-1-\theta}{\theta}-1} (-\theta u_2^{-\theta-1}) (u_1^{-\theta-1}) \right] \\ &= (\theta + 1)(u_1 u_2)^{-\theta-1} (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{\frac{-1}{\theta}-2} \end{aligned}$$

La copule de Clayton présente une dépendance asymptotique à gauche (sur les petites valeurs) ce qui n'est pas le cas de la copule gaussienne.

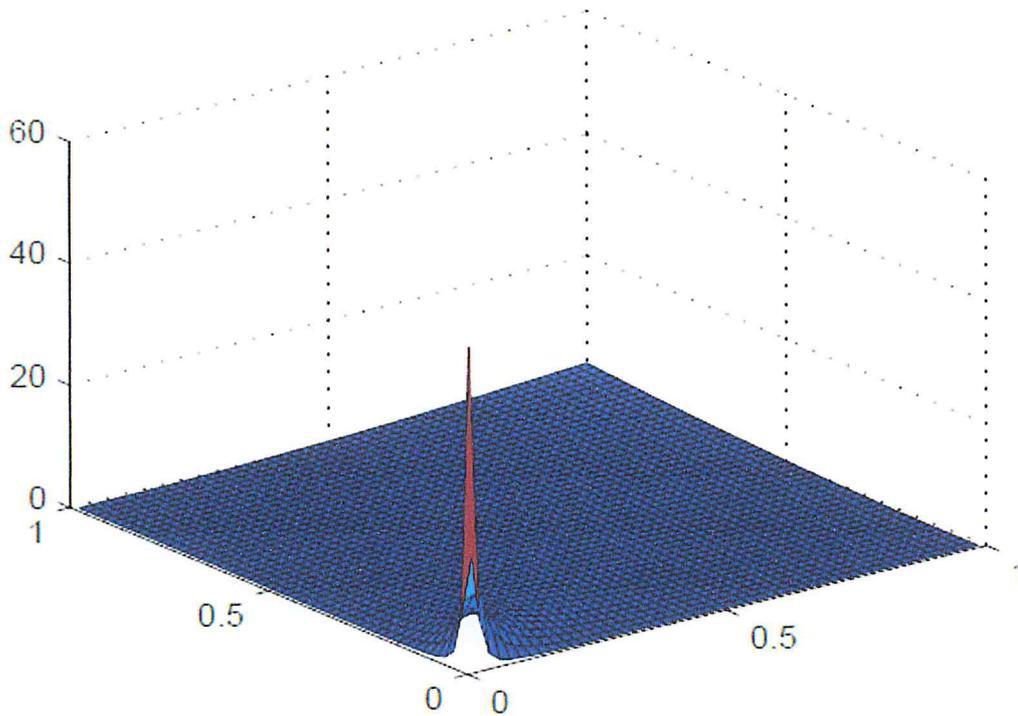


FIG. 2.7 – Densité de la copule de Clayton ($\theta= 2.582$)

En utilisant la règle de l'Hôpital, nous en déduisons que :

$$\begin{aligned}\lambda_U &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u(2u^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}}{1 - u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{-2 + 2(2u^{-\theta} - 1)^{-1/\theta} - 1u^{-\theta-1}}{-1} \\ &= 0\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}\lambda_L &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{(2u^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}}{u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0^+} (2 - u^\theta)^{-1/\theta} \\ &= 2^{-1/\theta}\end{aligned}$$

La copule de Clayton possède donc une dépendance de queue inférieure mais pas une dépendance de queue supérieure.

D'après la formule

$$\tau_c = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt \quad (2.12)$$

Où C est une copule Archimédienne générée par φ , nous pouvons calculer le tau de Kendall pour la copule de Clayton.

On a :

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} &= \frac{t^{\theta+1} - t}{\theta} \\ \tau_\theta &= 1 + 4 \int_0^1 \frac{t^{\theta+1} - t}{\theta} dt \\ &= 1 + \frac{4}{\theta} \left(\frac{1}{\theta+2} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{\theta}{\theta+2} \end{aligned}$$

2.2.2. Copule de Frank

Dans la définition suivante, la copule de Frank, permet une modélisation symétrique comme dans le cas des copules elliptiques.

Définition 2.7 Le générateur de cette copule Archimédienne est donné par :

$$\varphi(u) = -\ln \left(\frac{\exp^{-\theta u} - 1}{\exp^{-\theta} - 1} \right) \quad (2.13)$$

Où $\theta \neq 0$ et $u \in]0,1]$. La copule de Frank bidimensionnelle s'écrit donc sous la forme :

$$C(u_1, u_2; \theta) = -\frac{1}{\theta} \ln \left(1 + \frac{(\exp^{-\theta u_1} - 1)(\exp^{-\theta u_2} - 1)}{(\exp^{-\theta} - 1)} \right) \quad (2.14)$$

La densité de la copule de Frank est égale à :

$$\begin{aligned} c(u_1, u_2; \theta) &= \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{\partial C(u_1, u_2; \theta)}{\partial u_1} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial u_2} \left[\frac{-1}{\theta} \left(\frac{-\theta \exp^{-\theta u_1} (\exp^{-\theta u_2} - 1)}{(\exp^{-\theta} - 1) + (\exp^{-\theta u_1} - 1)(\exp^{-\theta u_2} - 1)} \right) \right] \\ &= \frac{\theta (1 - \exp^{-\theta}) \exp^{-\theta(u_1 + u_2)}}{[(1 - \exp^{-\theta}) - (\exp^{-\theta u_1} - 1)(\exp^{-\theta u_2} - 1)]^2} \end{aligned}$$

Le tau de Kendall correspondant à la copule de Frank est donné par la formule suivante

$$\tau_\theta = 1 - \frac{4}{\theta} (1 - D_1(\theta)),$$

Où $D_k(x)$ est la fonction de Debye donnée par :

$$D_k(x) = \frac{k}{x^k} \int_0^x \frac{t^k}{\exp t - 1} dt \quad \forall k \geq 0$$

Remarque : La copule de Frank ne possède pas de dépendance dans les extrêmes.

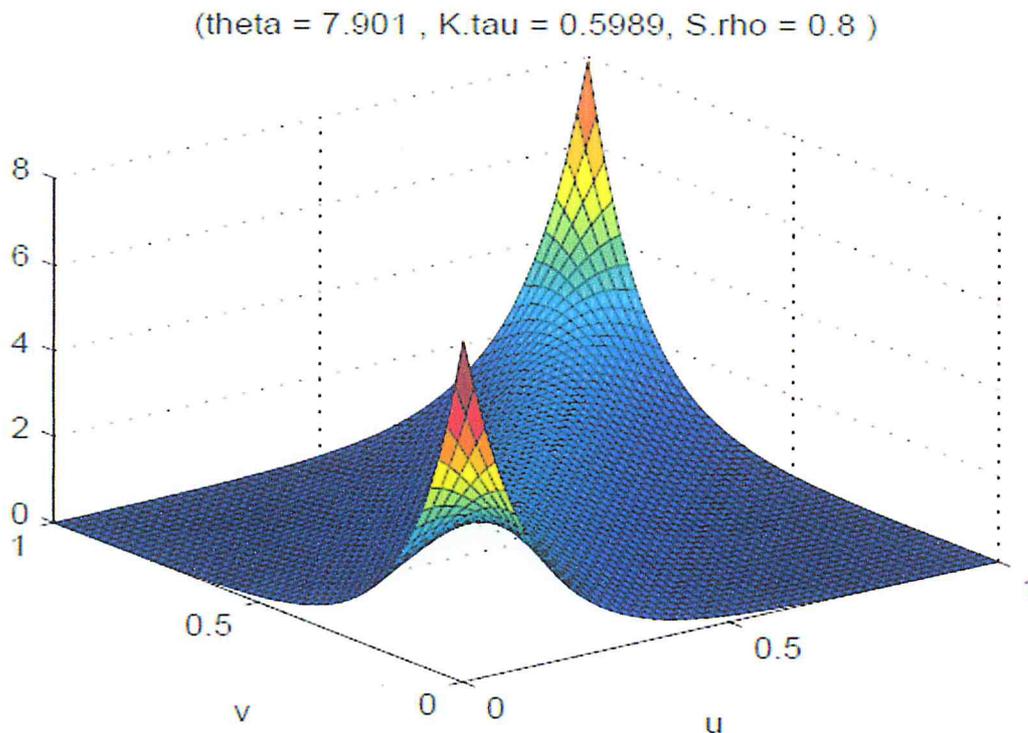


FIG. 2.8 – Densité de la copule de Frank $\theta = 7.901$, le tau de Kendall et rho de Spearman correspondants sont : $\tau = 0.5989, \rho = 0.8$.

2.2.3. Copule de Gumbel

La copule de Gumbel est plus adéquate aux données qui représentent une forte dépendance à droite et une faible à gauche

Définition 2.8 La copule de Gumbel appartient à la famille des copules Archimédiennes et son générateur est :

$$\varphi(u) = -(\ln(u))^\theta \quad (2.16)$$

avec $\theta > 1$ et $u \in]0,1]$. La copule de Gumbel s'écrit donc sous la forme :

$$C(u_1, u_2) = \exp(-(\tilde{u}_1^\theta + \tilde{u}_2^\theta)^{1/\theta}) \quad (2.17)$$

Où $\tilde{u} = -\ln u$.

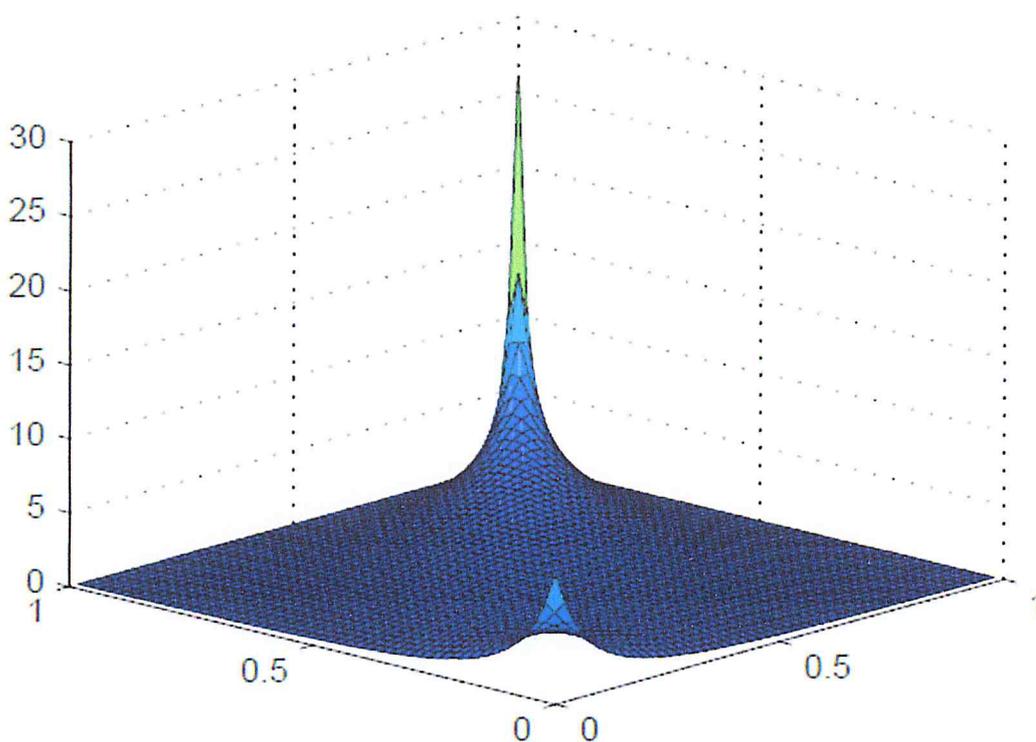


FIG. 2.9 – Densité de la copule de Gumbel $\theta = 1.5$

En utilisant la règle de l'Hôpital, nous en déduisons que :

$$\begin{aligned} \lambda_U &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + u^{2^{1/\theta}}}{1 - u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{-2 + 2^{1/\theta} u^{2^{1/\theta} - 1}}{-1} = 2 - 2^{1/\theta} \end{aligned}$$

Et

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{2^{1/\theta}}{u} = 0$$

La copule de Gumbel possède donc une dépendance de queue supérieure mais pas une dépendance de queue inférieure.

Le tau de Kendall de la copule de Gumbel s'écrit :

$$\begin{aligned} \tau_\theta &= 1 + 4 \int_0^1 \frac{t \ln t}{\theta} dt \\ &= 1 + \frac{4}{\theta} \left(\left[\frac{t^2}{2} \ln t \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{2} dt \right) \\ &= 1 - \frac{1}{\theta} \end{aligned}$$

Dans le tableau 2.2, nous donnons quelques propriétés de ces copules Archimédiennes bidimensionnelles

Tableau 2.2 – caractéristique des copules archimédienne

Copule archimédienne	Générateur	Copule bidimensionnelle	Tau de Kendall	Dépendance extrême
Clayton ($\theta > 0$)	$u^{-\theta} - 1$	$(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}$	$\frac{\theta}{\theta + 2}$	$(\frac{-1}{2^\theta}, 0)$
Gumbel ($\theta \geq 1$)	$(-\ln(u))^\theta$	$\exp(-(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta})^{1/\theta})$	$1 - \frac{1}{\theta}$	$(0, 2 - \frac{1}{2^\theta})$
Frank ($\theta \neq 0$)	$-\ln \frac{e^{-\theta u} - 1}{e^{-\theta} - 1}$	$-\frac{1}{\theta} \ln \left(1 + \frac{(e^{-\theta u_1} - 1)(e^{-\theta u_2} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right)$	$(1 - \frac{4}{\theta} + 4 \frac{D_1(\theta)}{\theta})$	$(0, 0)$

Chapitre 3

Estimation des copules

Bien que la fonction copule a l'avantage de modéliser complètement la dépendance entre les variables, elle reste inconnue en pratique, d'où le besoin de l'estimer. Dans ce chapitre, nous allons présenter quelques méthodes d'estimation de copules. Il existe plusieurs approches bien connues pour l'estimation d'une copule. Elles sont divisées en approches paramétriques et non-paramétriques que nous allons les présenter dans ce qui ce suit.

3.1 Estimation paramétrique

Lorsqu'il s'agit d'une estimation paramétrique d'une copule, on impose un modèle paramétrique pour la copule et pour les distributions marginales. Pour estimer ces paramètres il existe différentes méthodes. Dans cette section, on présente la méthode des moments et la méthode du maximum de vraisemblance.

3.1.1 Méthode des moments

Définition 3.1 Cette méthode est notamment utilisée pour les mesures de dépendance ; l'estimateur des moments de la mesure de dépendance considérée est alors simplement obtenu en égalant l'expression paramétrique (analytique) de la mesure avec un estimateur non paramétrique de cette même mesure. L'estimateur déterminé par cette méthode n'est pas robuste.

Dans la pratique et pour simplifier les calculs, le tau de Kendall constitue le plus souvent l'estimateur du paramètre de la copule.

Dans le cas général, on a l'estimateur non paramétrique du tau de Kendall donné par :

$$\hat{\tau} = \frac{c-d}{c+d}$$

Avec c et d le nombre de paires concordantes et discordantes respectivement dans l'échantillon.

Donc pour une copule de Gumbel l'expression $\tau = 1 - \frac{1}{\theta}$ conduit à l'estimateur des moments $\hat{\theta} = \frac{1}{1-\hat{\tau}}$

Nous pouvons généraliser cette méthode à d'autres fonctions copules et d'autres mesures de dépendance. Considérons par exemple les mesures de concordance $k \in \mathcal{C}$.

Dans le cas d'une copule paramétrique, nous notons $k(\theta) := k \langle \mathbb{C}_\theta \rangle$. L'estimateur des moments revient alors à résoudre l'équation suivante :

$$k(\theta) = \hat{k}$$

Où \hat{k} est l'estimateur non paramétrique. Nous notons $\hat{\theta}(\hat{k})$ la solution.

3.1.2 Méthode du Maximum de vraisemblance

Si la copule appartient à une famille paramétrique de copules, il est fréquent d'utiliser la méthode du maximum de vraisemblance pour obtenir l'estimation des paramètres

Soit l'échantillon $\{X_1^t, \dots, X_n^t\}_{t=1}^T$ de fonction de répartition multivariée $H(x; \theta)$ qui dépend du vecteur des paramètres $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$ le théorème de Sklar nous donne

$$H(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$$

$$f(x_1, \dots, x_n) = c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$$

$$c(u_1, \dots, u_n) = \frac{\partial^n C(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_1 \dots \partial u_n}$$

Désigne la densité de la copule d-dimensionnelle $C(u_1, \dots, u_n; \theta)$ et f_i sont les densités des fonctions de répartition marginales F_i

La fonction log-vraisemblance $L(x; \theta) = \sum_{t=1}^T \ln f(x_1^t, \dots, x_n^t)$ de l'échantillon est donnée par :

$$L(x, \theta) = \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(x_1^t; \theta), \dots, F_n(x_n^t; \theta)) + \sum_{t=1}^T \ln f_1(x_1^t; \theta) + \dots + \sum_{t=1}^T \ln f_n(x_n^t; \theta) \quad (3.1)$$

L'estimateur de maximum de vraisemblance de est donnée par

$$\hat{\theta}_{MLE} = \arg \max L(x, \theta) \quad (3.2)$$

On peut montrer dans les conditions de régularité que l'estimateur existe qu'il est consistant, asymptotiquement efficace et vérifie la propriété de la normalité asymptotique.

Nous avons :

$$\sqrt{T}(\hat{\theta}_{MLE} - \theta_0) \rightarrow \mathcal{N}(0, \mathfrak{I}^{-1}(\theta_0)) \quad (3.3)$$

Avec $\mathfrak{I}(\theta_0)$ est l'information usuelle de Fisher et θ_0 la vraie valeur.

3.2 Estimation non-paramétrique

Si le modèle paramétrique de la copule est mal spécifié, l'approche paramétrique conduit généralement à un mauvais ajustement aux données. Dans ce cas les méthodes d'estimation non paramétriques peuvent être une bonne alternative.

3.2.1 Copule empirique

Définition 3.2 soit $\{x_1^t, \dots, x_n^t\}_{t=1}^T$ un échantillon d'un vecteur aléatoire X de dimension n , la fonction de répartition empirique est donnée par :

$$F_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \mathbb{1}_{(X_i^1 < x^1, \dots, X_i^n < x^n)} \quad (3.4)$$

Où $\mathbb{1}$ est la fonction indicatrice.

La notion de copule empirique a été introduite pour la première fois par Deheuvels (1979), qui est connue sous le nom « Fonction de dépendance empirique ».

Définition 3.3 : Soit $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^n$ un échantillon de taille n d'un couple de variables aléatoires. La copule empirique est la fonction \hat{C} définie par

$$\hat{C}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = \frac{\text{Nombre des paires } (x, y) \text{ dans l'échantillon tels que } x \leq x_{(i)} \text{ et } y \leq y_{(j)}}{n} \quad (3.5)$$

Où $x_{(i)}$ et $y_{(j)}$ Représentant les statistiques d'ordre associées à l'échantillon.

La fonction densité empirique de la copule C notée \hat{c} est donnée par

$$\hat{c}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } (x_{(i)}, y_{(j)}) \text{ est un élément de l'échantillon;} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.6)$$

Elle est parfois appelée « empirical copula frequency » ; il existe une relation entre \hat{C} et \hat{c} donnée par :

$$\hat{C}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = \sum_{p=1}^i \sum_{q=1}^j \hat{c}\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right) \quad (3.7)$$

Et

$$\hat{c}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = \hat{C}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) - \hat{C}\left(\frac{i-1}{n}, \frac{j}{n}\right) - \hat{C}\left(\frac{i}{n}, \frac{j-1}{n}\right) + \hat{C}\left(\frac{i-1}{n}, \frac{j-1}{n}\right) \quad (3.8)$$

3.2.2 Procédure de Genest et Rivest

La méthode suivante a été proposée par Christian Genest et Louis-Paul Rivest (1993), pour sélectionner une copule appartenant à la famille Archimédienne. Cette méthodologie se base directement sur le générateur de la copule.

Soit X un vecteur de n variables aléatoires, C est la copule associée au générateur φ et K la fonction définie par :

$$K(u) = P\{C(u, v) \leq u\} \quad (3.9)$$

Nous pouvons calculer pour une copule Archimédienne la quantité suivante

$$k(u) = u - \frac{\varphi(u)}{\varphi'(u)} \quad (3.10)$$

Un estimateur non paramétrique de K est alors donné par :

$$\widehat{K}(u) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T 1_{\vartheta_t \leq u} \quad (3.11)$$

Où

$$\vartheta_t = \frac{1}{T-1} \sum_{j=1}^T 1_{\{x_j^1 < x_t^1, x_j^2 < x_t^2\}} \quad (3.12)$$

Remarque : La fonction K est liée au tau de Kendall du fait que :

$$\tau = 4 \int_0^1 (1 - K(u)) du - 1$$

Chapitre 4

Application

Introduction

L'office national de la météorologie (ONM) crée par ordonnance L'ONM sous la tutelle du ministère de transport et son siège se situe à Alger.

Il est devenu établissement publique à caractère industriel et commercial à vocation scientifique et technique par décret.

Il se compose de quatre unités fonctionnelles et de quatre départements techniques parmi ces unités le centre national des prévisions météorologiques qui est chargé de l'analyse et de la prévision, météorologies à l'échelle national et internationale ainsi que de l'assistance aux usagers en temps réel.

Il est également chargé de contribuer au développement de la prévision numérique du temps.

4.1 Description de l'échantillon

Les échantillons utilisés dans l'étude sont les Précipitations, l'Humidité, la Température et la Vitesse de Vent Journalières de la zone nord centre de l'Algérie à partir de l'année 1952 jusqu' à l'année 2005.

4.2 Représentation graphique des séries météorologiques

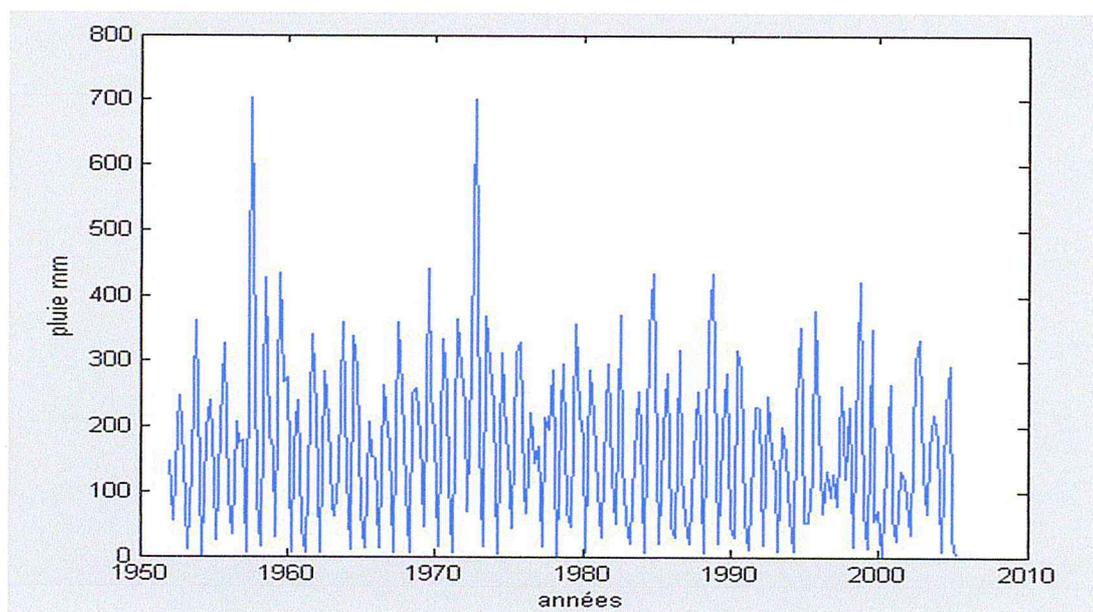


Figure 4.1 : Série de la Précipitation saisonnière

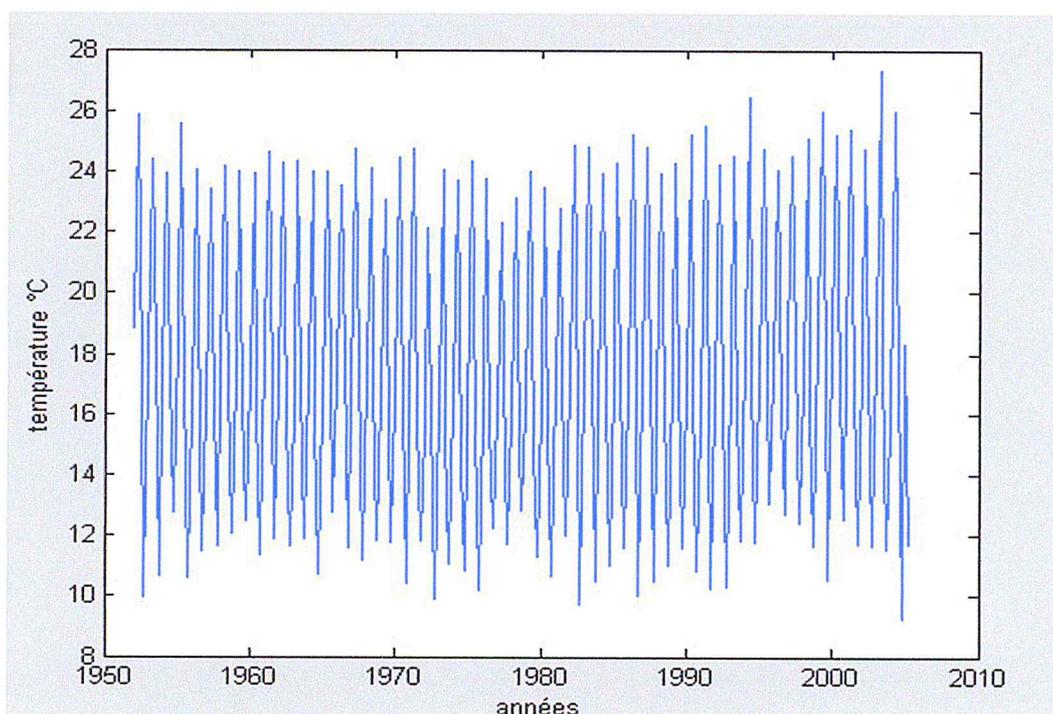


Figure 4.2 : Série de la Temperature saisonnière

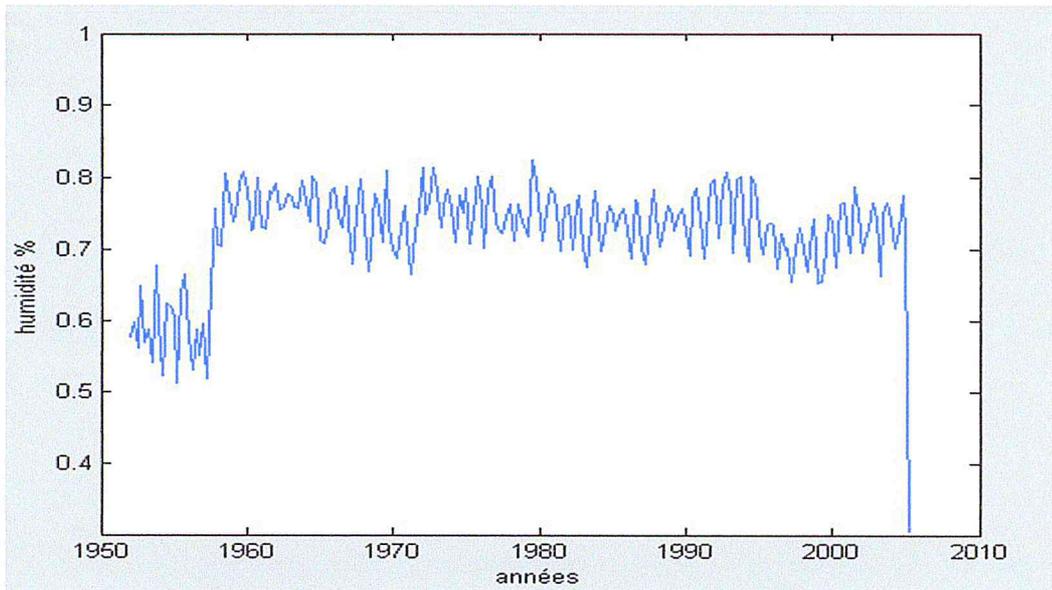


Figure 4.3 : Série de l'Humidité saisonnière

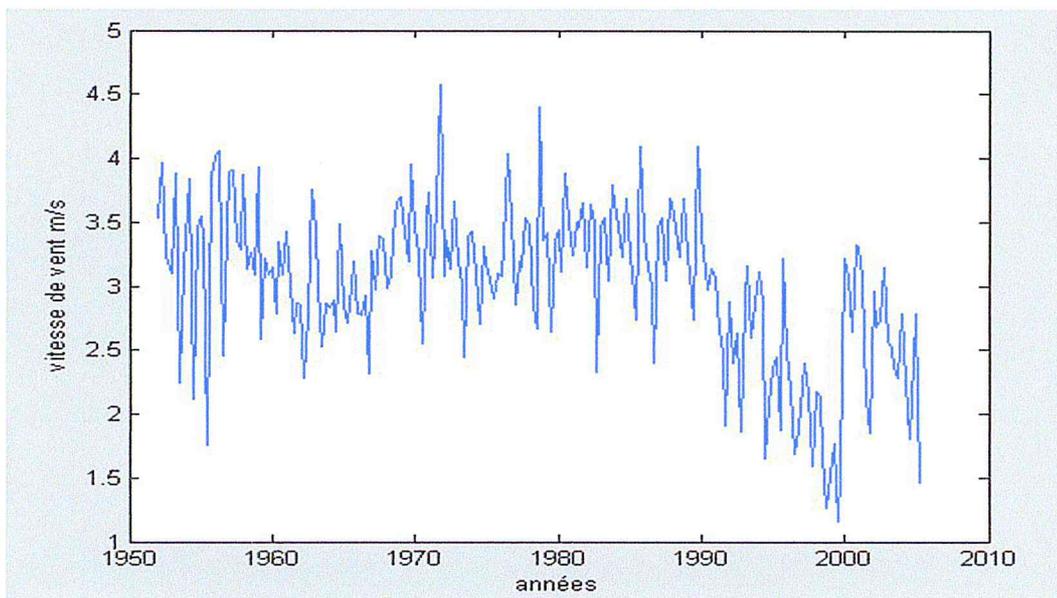


Figure 4.4 : Série Vitesse du Vent saisonnière

4.3 Résumé descriptif

4.1 Le tableau ci-dessous résume les valeurs descriptives des séries étudié

Var \ stat	Taille	Max	Min	Moyenne	Var	Ecart-type	Asymétrie	Aplatissement
Précipitation	214	702	0.9	169.11	16527.28	128.558	0.811	1.199
Température	214	27.335	9.321	17.318	22.509	4.744	0.334	-0.902
Humidité	214	0.824	0.302	0.725	0.005	0.068	-2.039	7.103
Vit. Vent	214	4.578	1.154	3.009	0.382	0.618	-0.569	0.232

4.4 Ajustement des lois

4.4.1 Ajustement de la précipitation

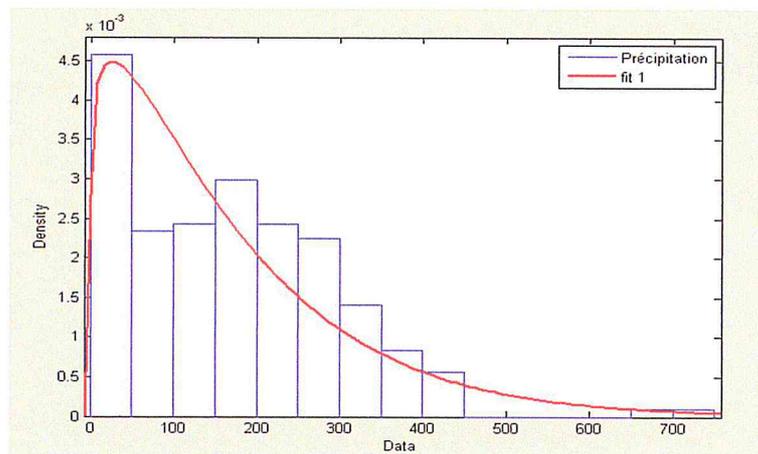


Figure 4.5 : Histogramme des précipitations

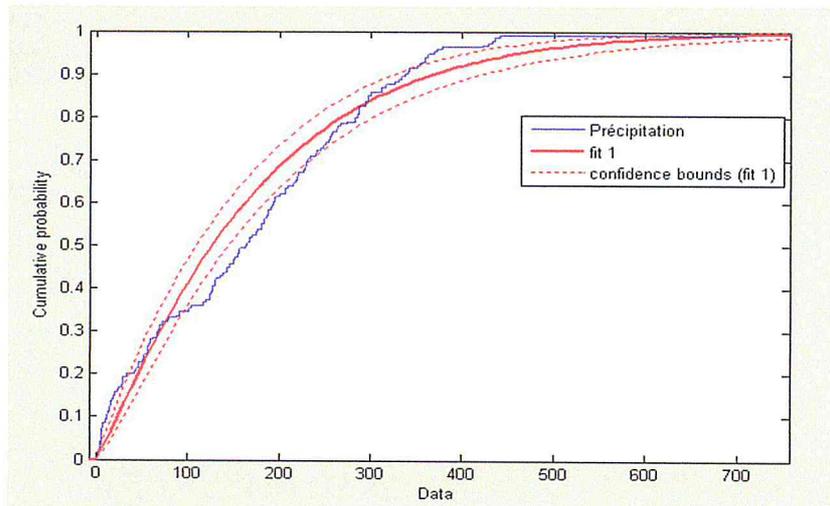


Figure 4.6 : Fonction de répartition de la précipitation saisonnière

Les figures 4.5 et 4.6 montrent que le meilleur ajustement des précipitations saisonnières est la loi de Weibul.

Les 2 graphes discontinus représentent les bornes de l'intervalle de confiance

4.4.2 Ajustement de la température

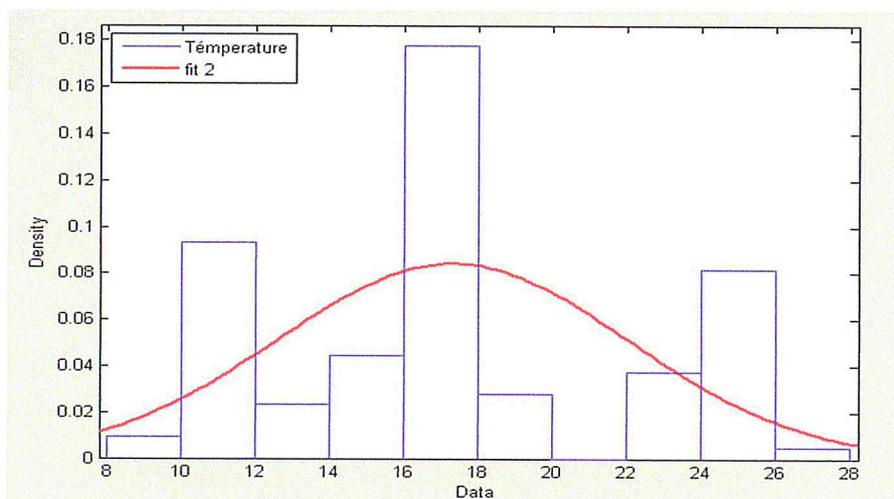


Figure 4.7 : Histogramme de la température

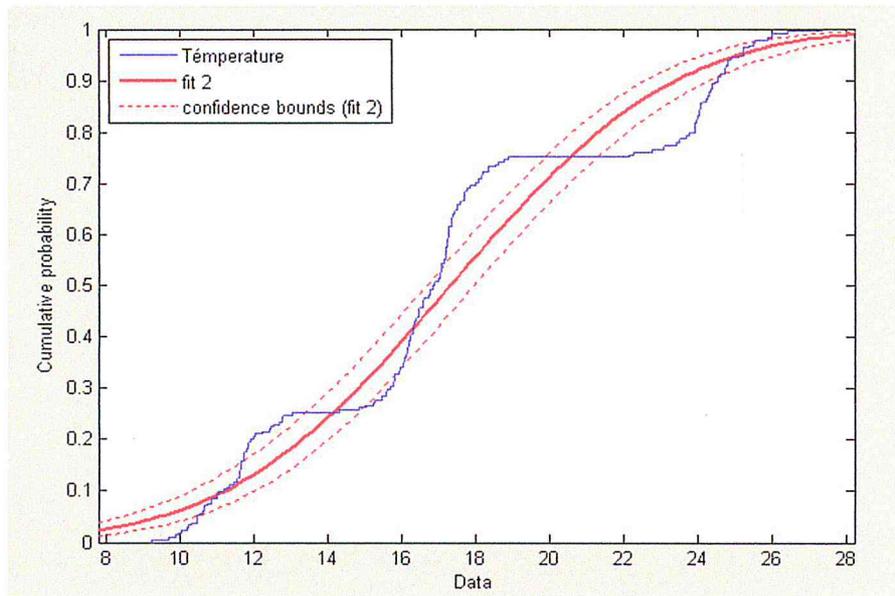


Figure 4.8 : Fonction de répartition de la température

Les figures 4.7 et 4.8 montrent que la loi Normale ajuste bien la température.

Les 2 graphes discontinus représentent les bornes de l'intervalle de confiance .

4.4.3 Ajustement de l'humidité

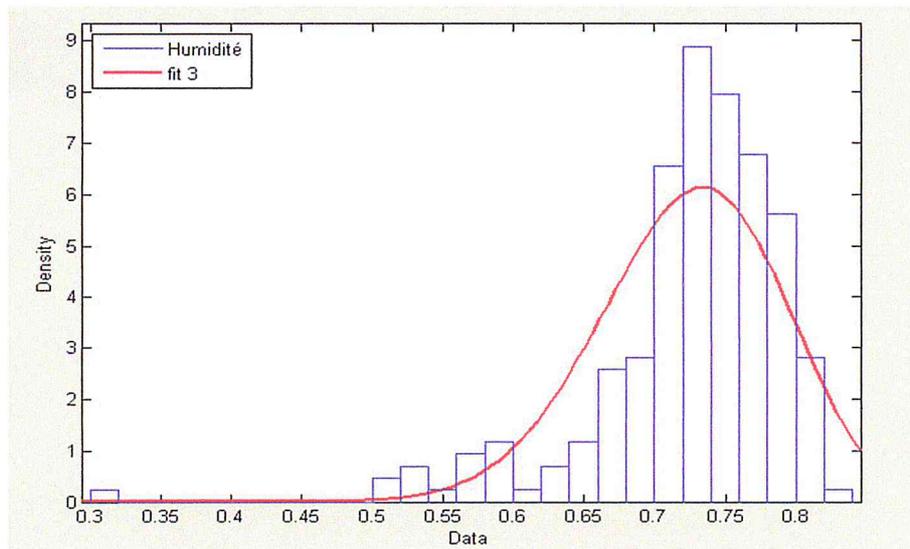


Figure 4.9 : Histogramme de l'humidité

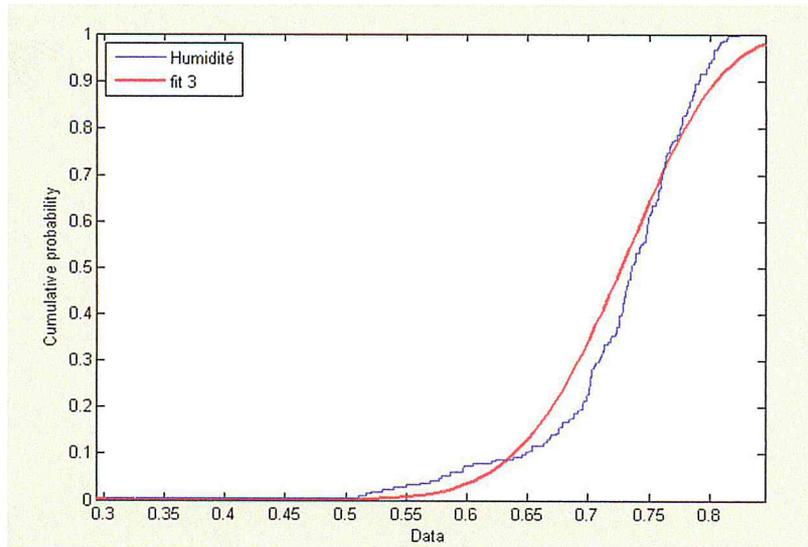


Figure 4.10 : Fonction de repartition de l'humidité

Les figures 4.9 et 4.10 montrent que la loi Béta ajuste bien l'humidité moyenne saisonnière.

4.4.4 Ajustement de la vitesse de vent

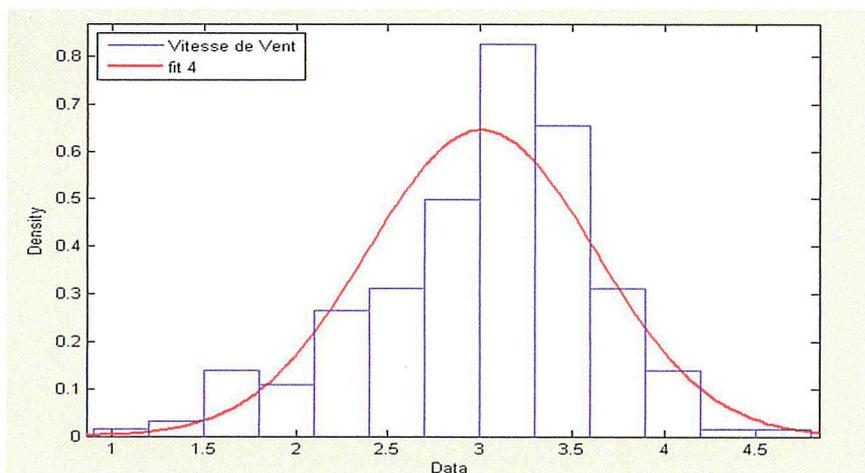


Figure 4.11 : Histogramme de la vitesse du vent

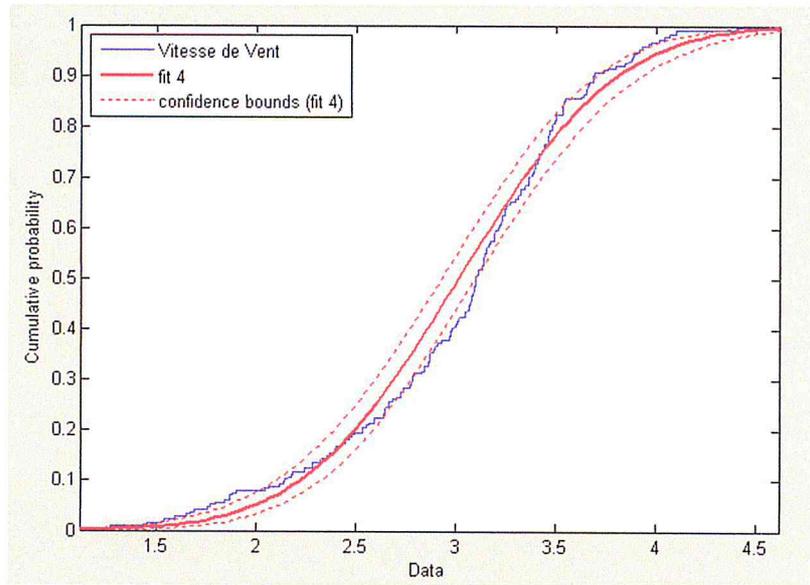


Figure 4.12 : Fonction de répartition de la vitesse du vent

Figures 4.11 et 4.12 montrent que le meilleur ajustement de la vitesse du vent moyenne saisonnière est la loi Normale.

Les 2 graphes discontinus représentent les bornes de l'intervalle de confiance

4.5 Mesure des coefficients :

Le tableau ci-dessous donne les coefficients de Spearman, Pearson et Kendall

4.2 Tableau représente le tableau de coefficient

	Corrélation de Pearson	Tau de Kendall	Rho de Spearman
Précipitation-Température	-0.68	-0.504	-0.705
Précipitation-Humidité	0.3848	0.367	0.528
Précipitation- Vitesse de Vent	0.0885	0.065	0.098
Température- Humidité	-0.384	-0.426	-0.59
Température-Vitesse de Vent	-0.021	-0.073	-0.102
Humidité-Vitesse de Vent	-0.0038	-0.023	-0.032

4.6 Exemple de calcul de la Copule empirique :

D'après la formule (3.5) du chapitre 3, nous avons calculé les valeurs de la copule empirique

$$\hat{C}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = \frac{\text{Nombre des paires } (x, y) \text{ dans l'échantillon tels que } x \leq x_{(i)} \text{ et } y \leq y_{(j)}}{n}$$

A travers l'exemple suivant

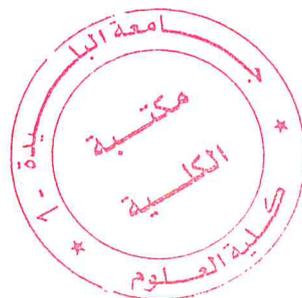
$$\hat{C}\left(\frac{107}{214}, \frac{107}{214}\right) = P[X < x_{107}, Y < y_{107}] \text{ Où } 107 \text{ correspond à la position des paramètres (précipitation,}$$

température, vitesse de vent, humidité) dans les séries ordonnées.

$$107 \rightarrow 163.7mm; \quad 107 \rightarrow 16.85^{\circ}; \quad 107 \rightarrow 73\%; \quad 107 \rightarrow 3.09m/s$$

4.3 Tableau représente la copule empirique

	$\hat{C}\left(\frac{107}{214}, \frac{107}{214}\right)$
Précipitation-Température	$\frac{24}{214}$
Précipitation-Humidité	$\frac{83}{214}$
Précipitation-Vitesse de Vent	$\frac{63}{214}$
Température-Humidité	$\frac{37}{214}$
Température-Vitesse de Vent	$\frac{49}{214}$
Humidité -Vitesse de Vent	$\frac{61}{214}$



4.7 Ajustement des copules :

4.7.1 Copule bivariée Précipitation-Température

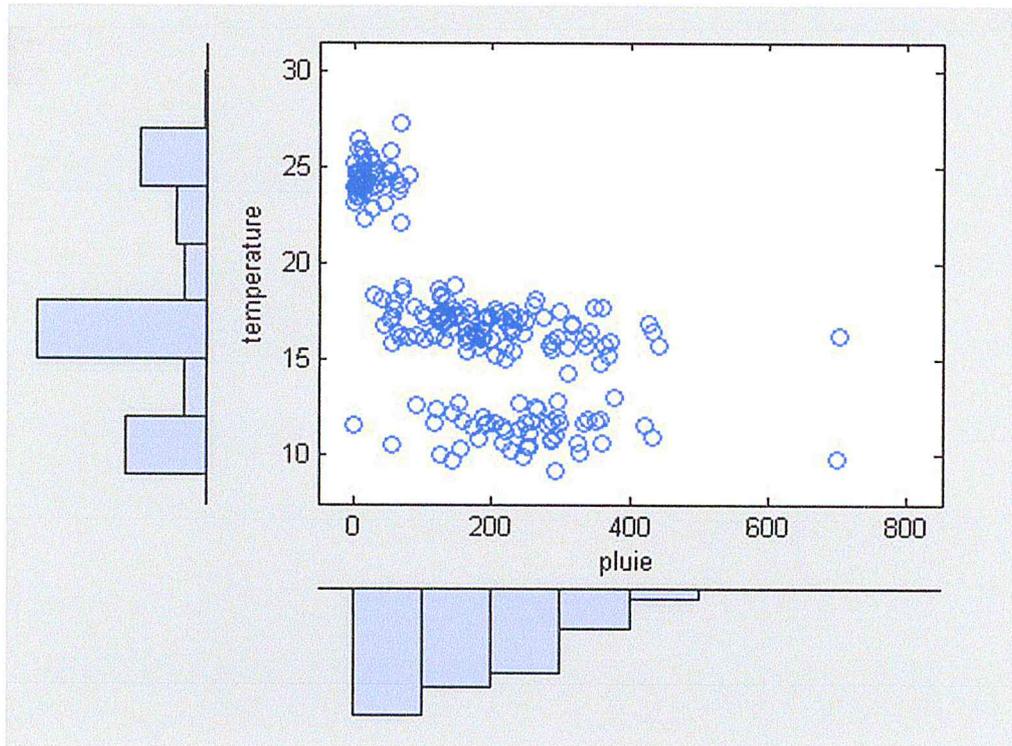


Figure 4.13 : Précipitation - Température

L'ajustement graphique nous montre une corrélation négative

La meilleure copule est la copule de Frank avec $\theta = 5.8$ (voir annexe 1)

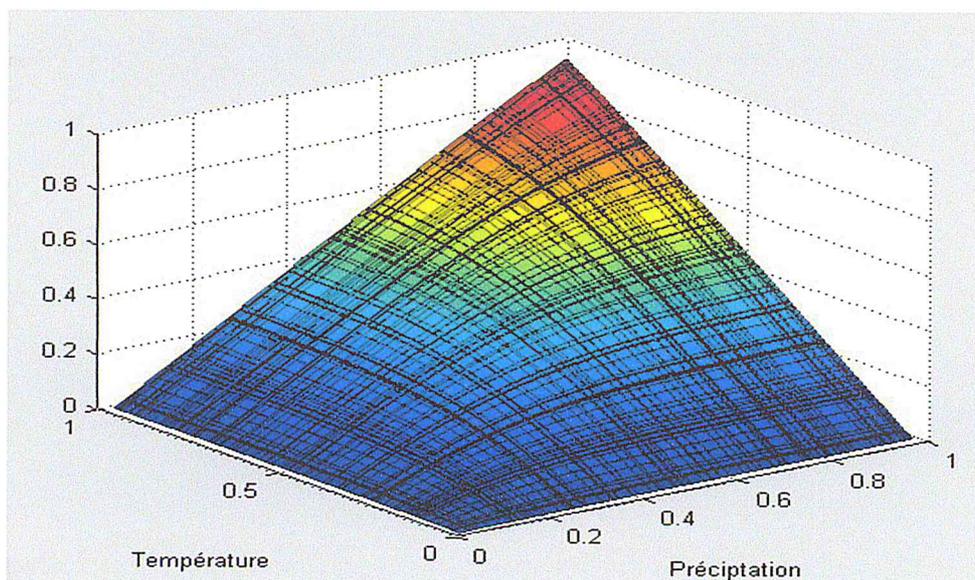


Figure 4.14 : densité de la copule de Frank avec $\theta = 5.8$

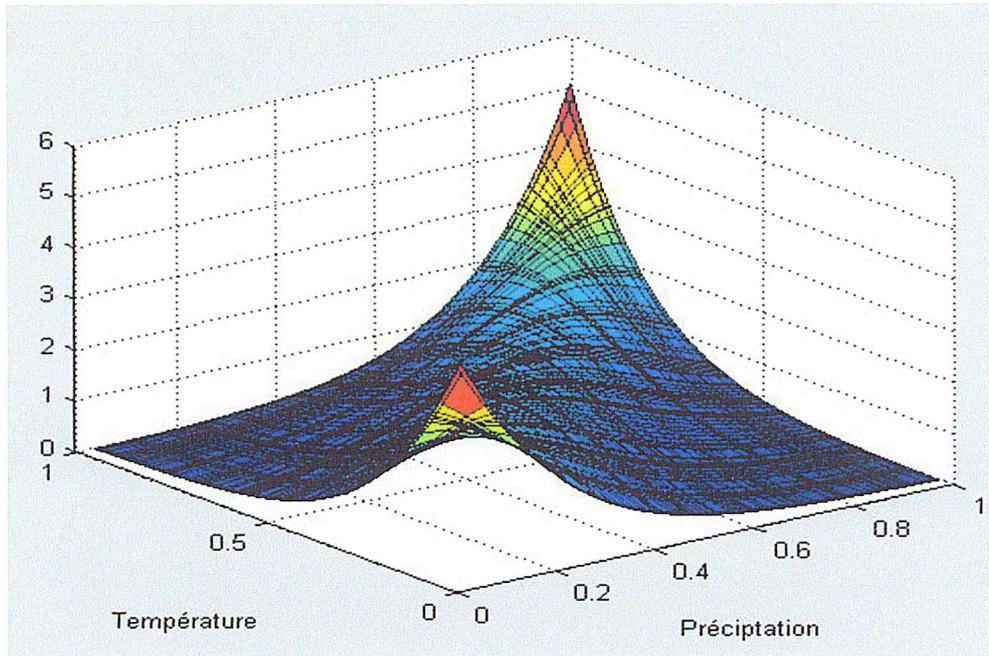


Figure 4.15 : Fonction de répartition de la copule de Frank avec $\theta = 5.8$

4.7.2 Copule bivariée Précipitation-Humidité

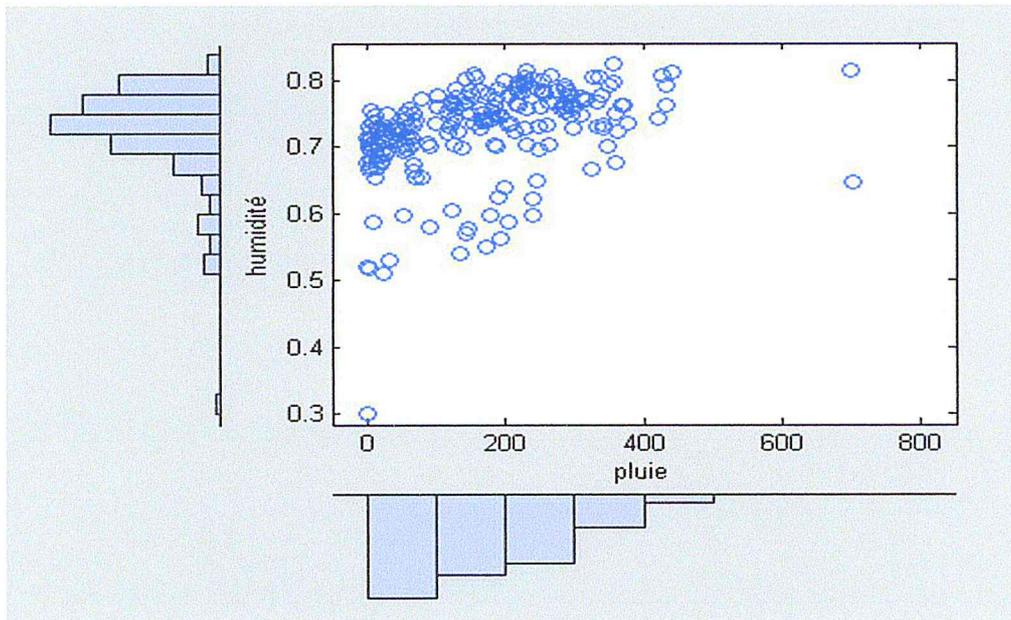


Figure 4.16 : Précipitation- Humidité

L'ajustement graphique nous montre une corrélation positive

La meilleure copule est la copule de Frank avec $\theta = 3.37$ (voir annexe 2)

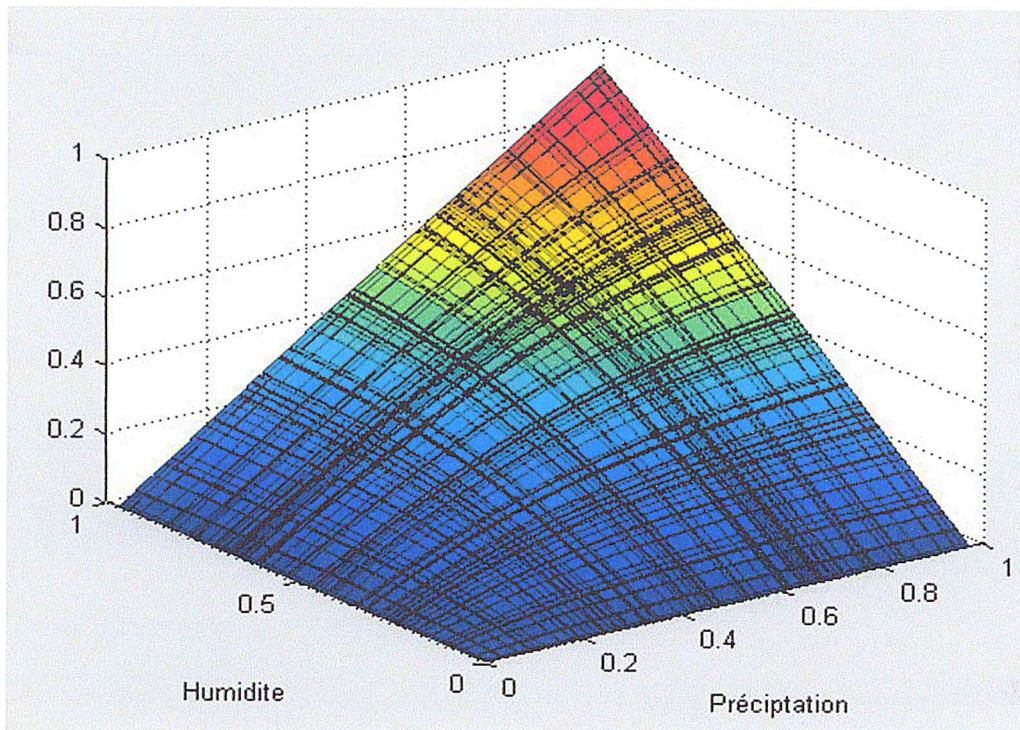


Figure 4.17 : densité de la copule de Frank avec $\theta = 3.37$

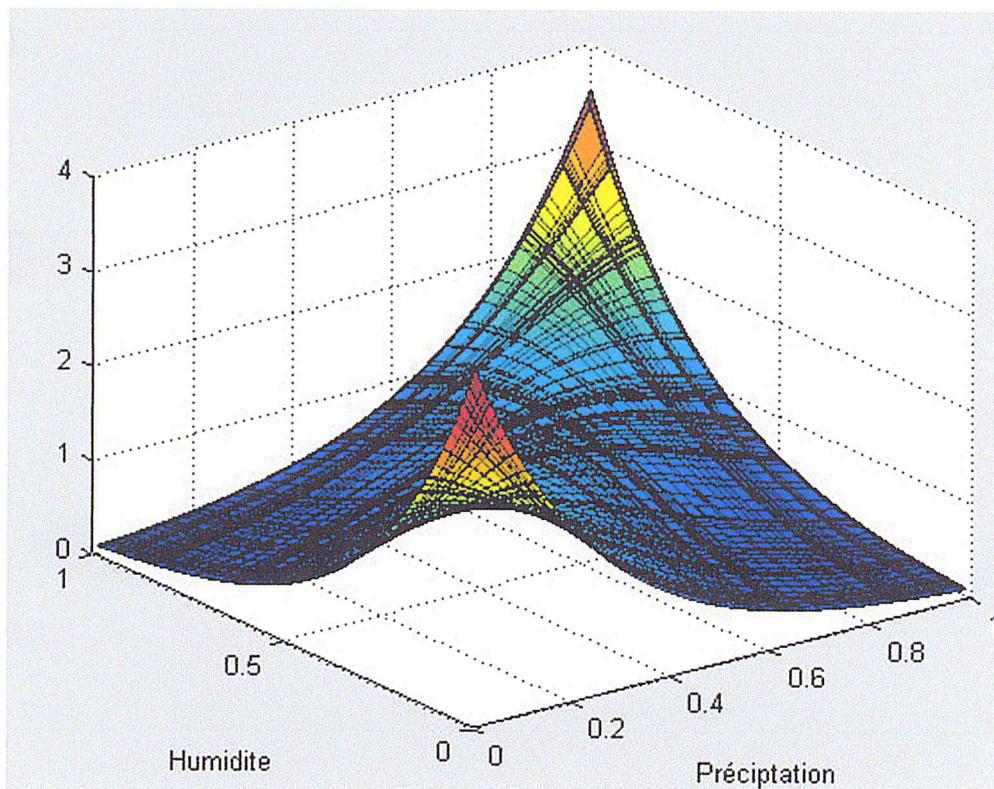


Figure 4.18 : Fonction de répartition de la copule de Frank avec $\theta = 3.37$

4.7.3 Copule bivariée Précipitation-Vitesse de vent

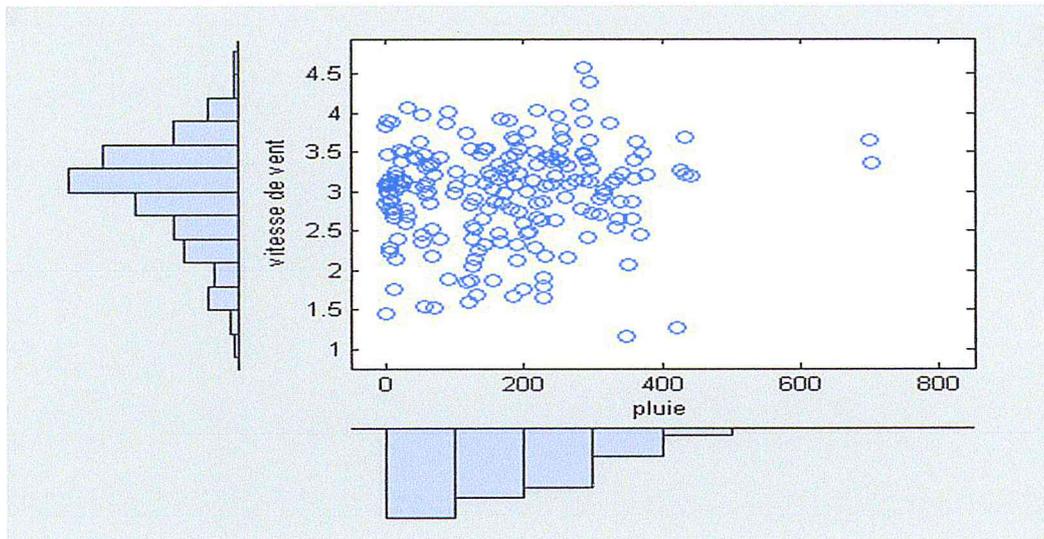


Figure 4.19 : Précipitation Vitesse de Vent

L'ajustement graphique nous montre une faible corrélation entre la pluie et la vitesse du vent, la meilleure copule est la copule Normale (Gaussienne) (voir annexe 3)

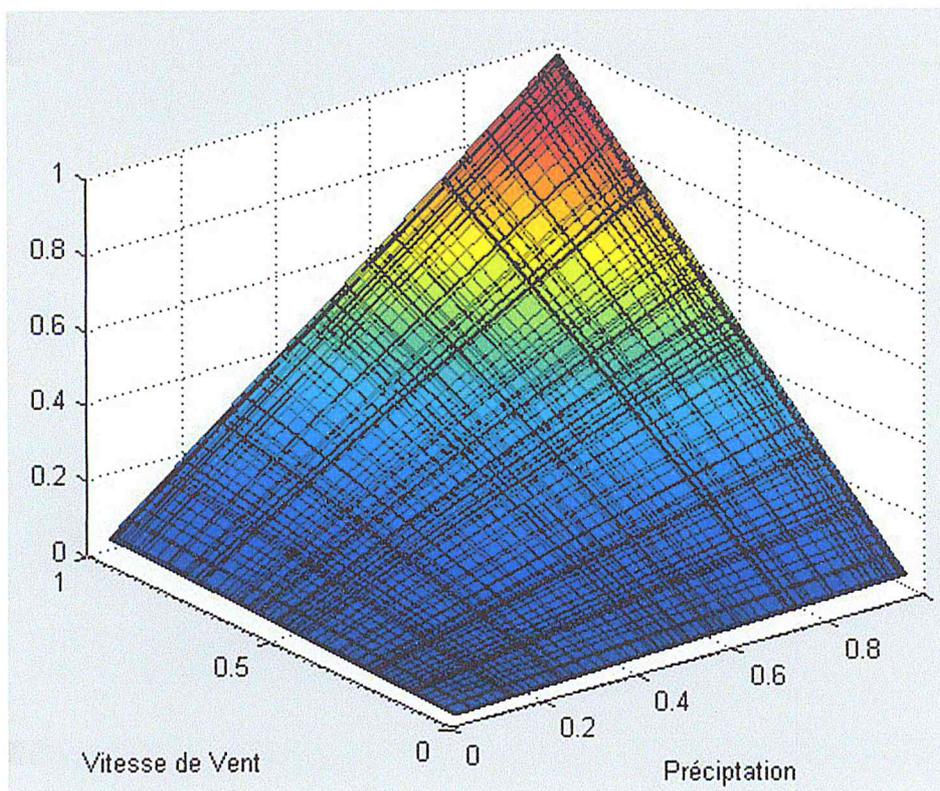


Figure 4.20 : densité de la copule Normale avec $\rho = 0.09$

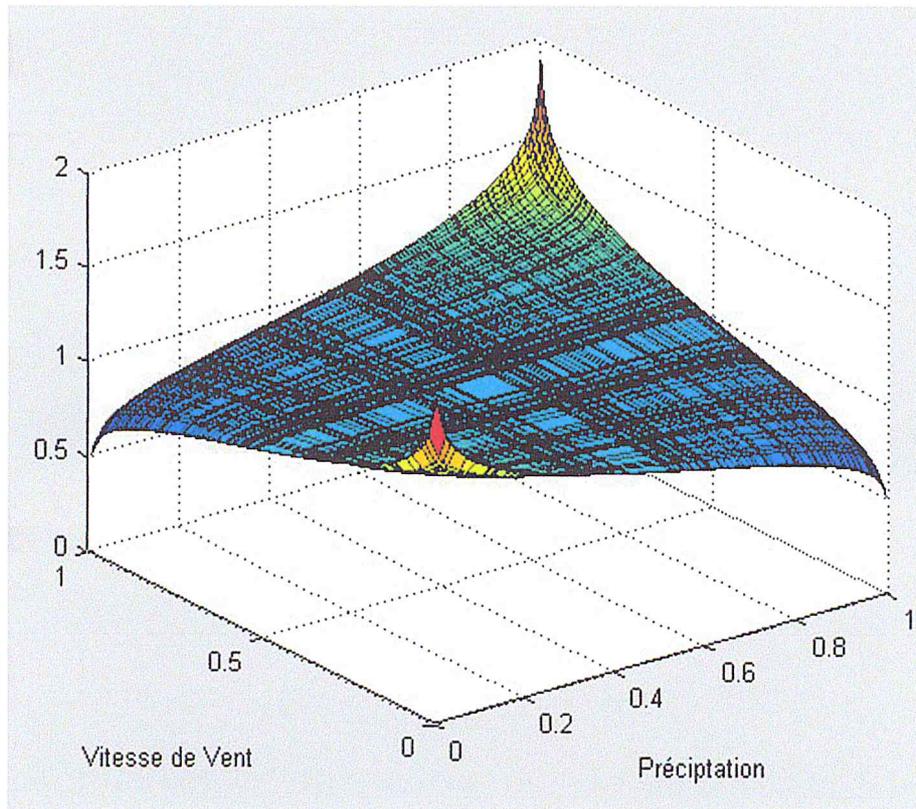


Figure 4.21 : Fonction de répartition de la copule Normale avec $\rho = 0.09$

4.7.4 Copule bivariée Température-Humidité

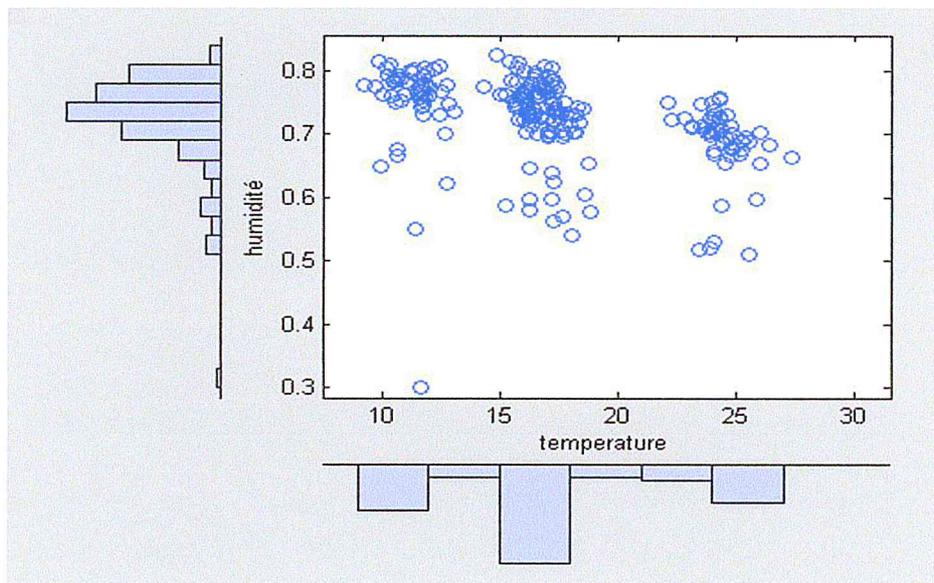


Figure 4.22 : Température Humidité

L'ajustement graphique nous montre une corrélation négative

La meilleure copule est la copule de Frank avec $\theta = 4.54$ (voir annexe 4)

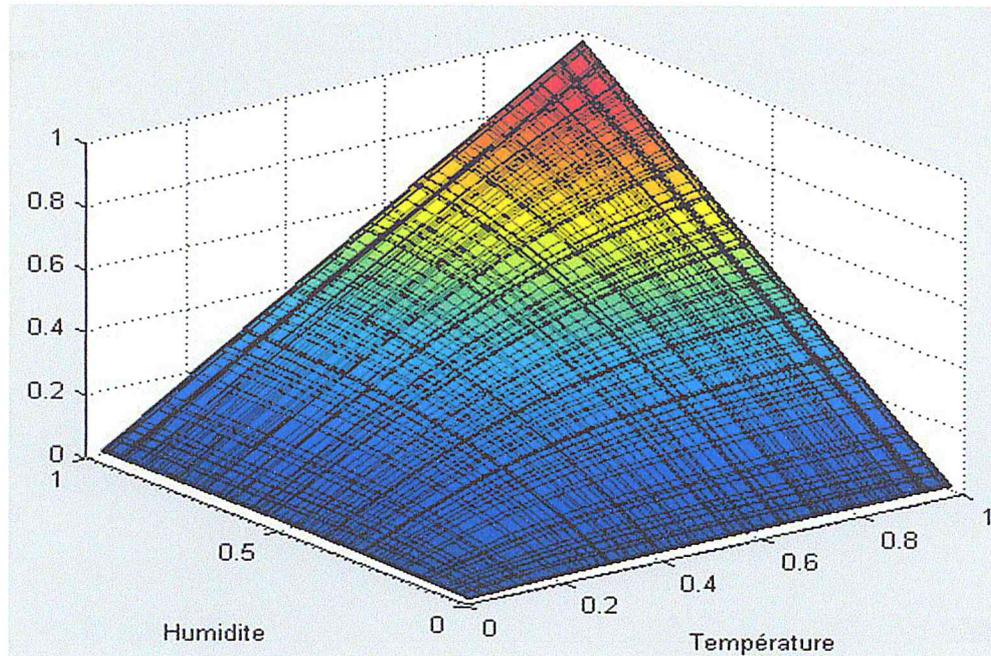


Figure 4.23 : densité de la copule de Frank avec $\theta = 4.54$

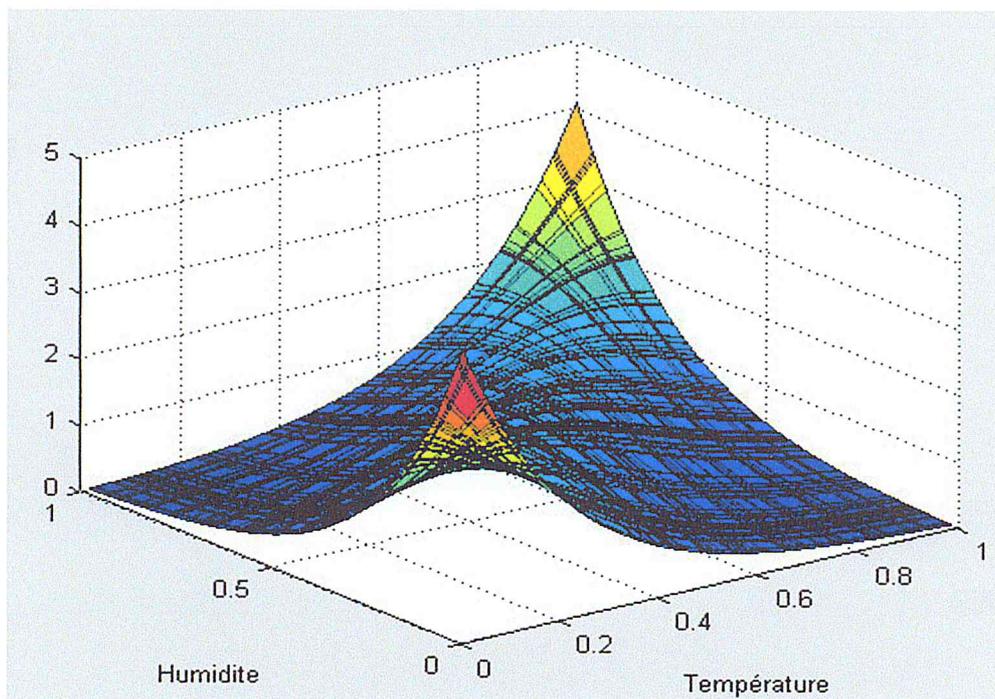


Figure 4.24 : Fonction de répartition de la copule de Frank avec $\theta = 4.54$

4.7.5 Copule bivariée Température-Vitesse du vent

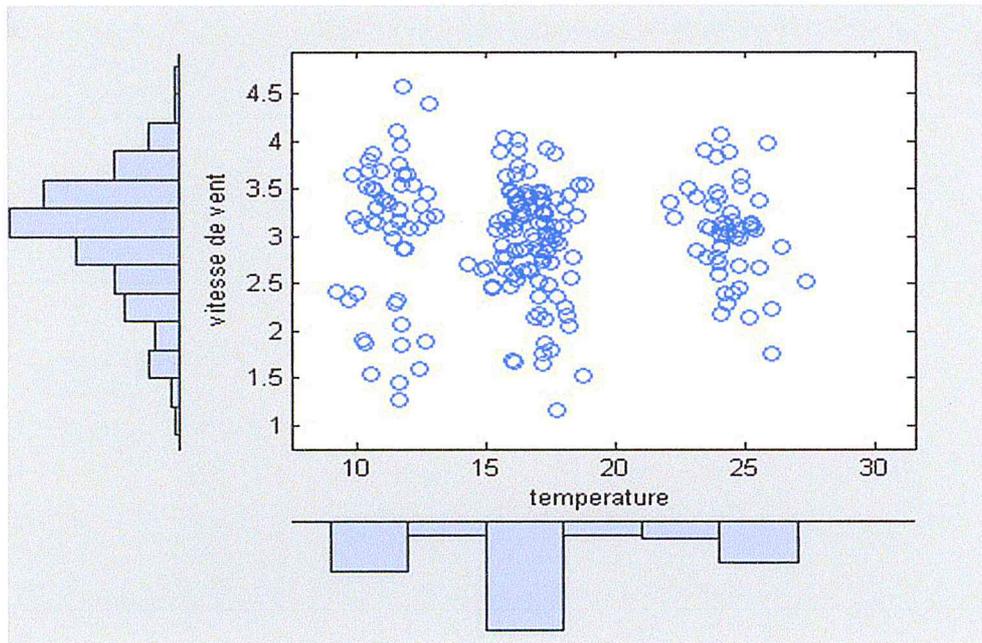


Figure 4.25 : Température Vitesse du Vent

L'ajustement graphique nous montre une faible corrélation entre la température et la vitesse de vent la meilleure copule est la copule Clayton avec $\theta = 0.159$ (voir annexe 5)

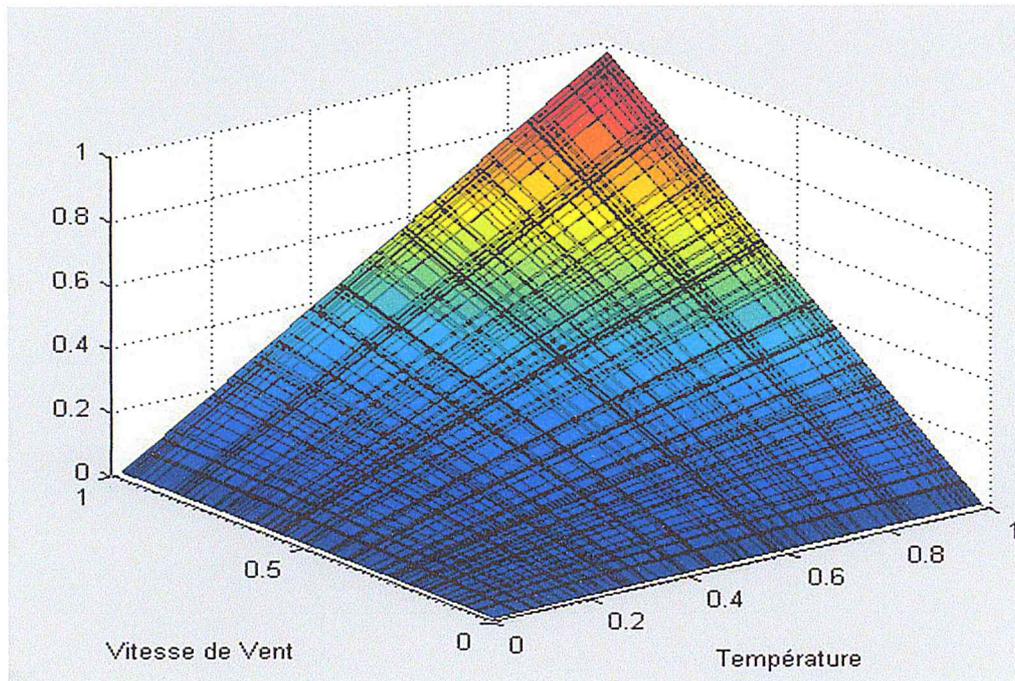


Figure 4.26 : densité de la copule de Clayton avec $\theta = 0.159$

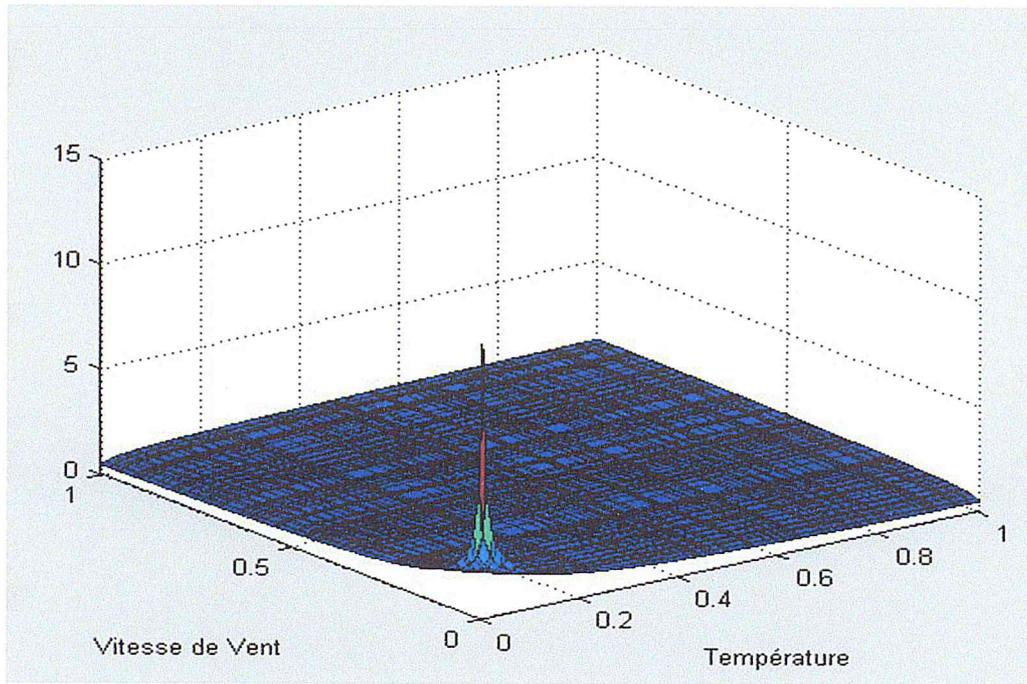


Figure 4.27 : Fonction de répartition de la copule de Clayton avec $\theta = 0.159$

4.7.6 Copule bivariée Humidité-Vitesse du vent

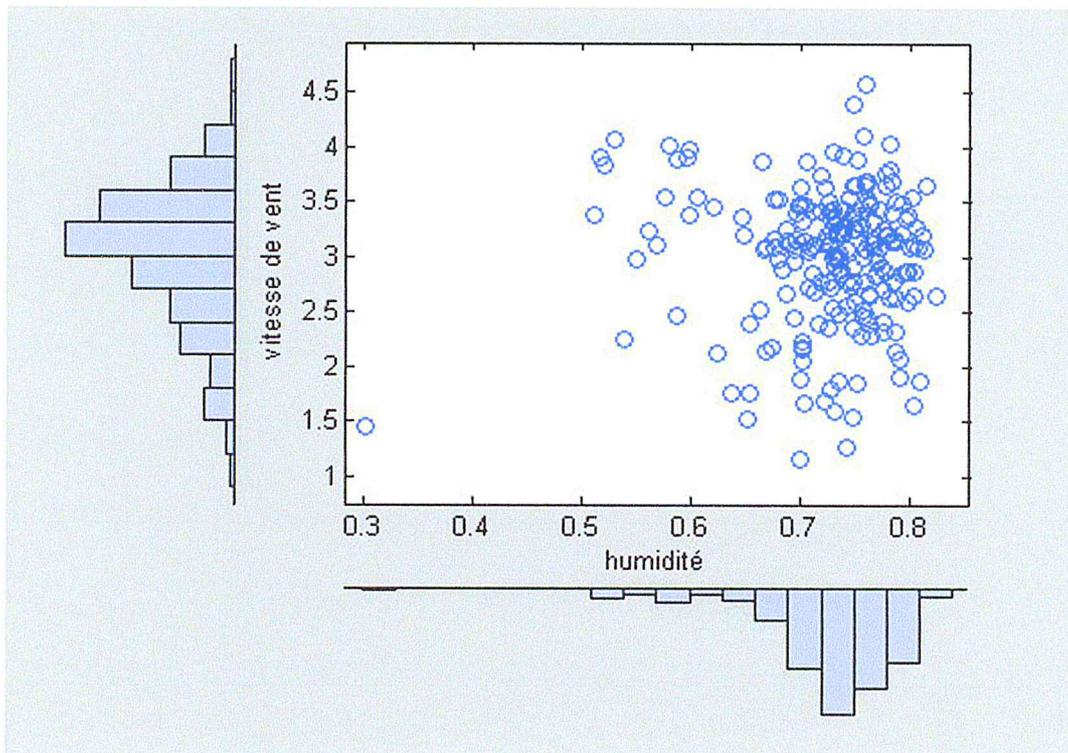


Figure 4.28 : Humidité Vitesse du Vent

L'ajustement graphique nous montre une faible corrélation entre l'humidité et la vitesse de vent, la meilleure copule est la copule de Student avec $\rho = -0.0039$ (voir annexe 6)

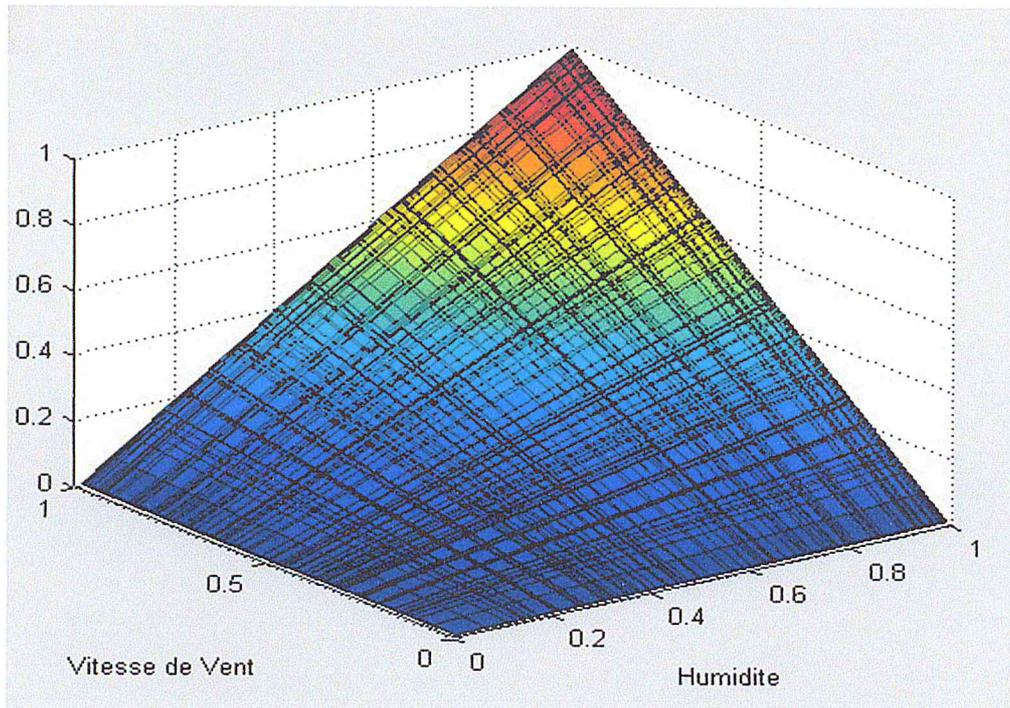


Figure 4.29 : densité de la copule de Student avec $\rho = -0.0039$

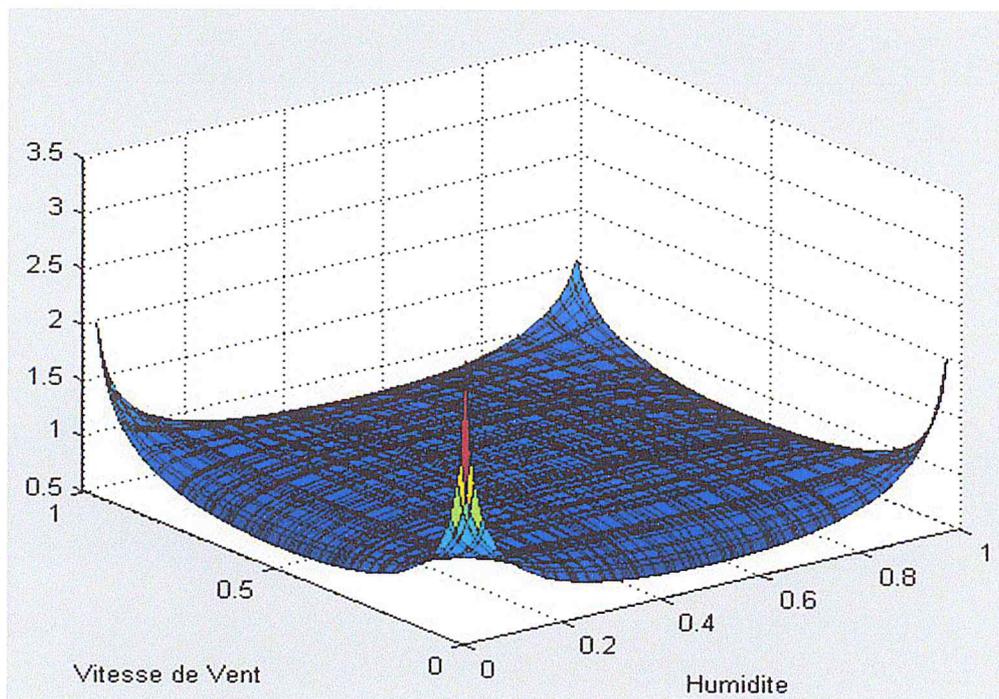


Figure 4.30 : Fonction de répartition de la copule de Student avec $\rho = -0.0039$

Conclusion

La copule est un concept de modélisation de la structure de dépendance. Contrairement aux différentes mesures de dépendance, la relation entre les variables est bien expliquée par la copule. Autrement dit, au lieu de résumer la structure de la dépendance par un seul nombre, par exemple le coefficient de corrélation, on peut utiliser la fonction copule qui décrit au mieux cette dépendance.

Dans ce mémoire on a abordé la notion des copules ainsi que les différentes propriétés qui lui sont associées. Au début, on a vu la notion des copules et ses propriétés. Ensuite on a présenté quelques familles de copules paramétriques les plus utilisées et leurs propriétés fondamentales à savoir : les copules elliptiques et les copules Archimédiennes. Nous avons présenté deux méthodes pour estimer la copule. La première méthode est paramétrique, c'est-à-dire elle impose un modèle paramétrique pour la copule et pour les distributions marginales. La seconde approche est non-paramétrique pour les distributions marginales.

Et nous l'avons conclu avec une application en météorologie où nous avons fait l'ajustement univarié des différentes variables et nous avons clôturé notre application en faisant l'ajustement des différentes copules bivariées en mesurant la dépendance entre eux.

La résolution de certains problèmes entourant les copules permettra

Probablement d'accentuer le développement de nouvelles applications. Les limites

actuelles concernent, entre autres, les calculs pour la modélisation en dimensions

Conclusion

Supérieures et l'absence de consensus entourant les méthodes d'adéquation à utiliser pour sélectionner une famille de copules. Ces éléments constituent au tant de défis pour les futurs étudiants qui opteront pour les copules dans le but de modéliser la dépendance.

Au-delà de ces défis, la comparaison entre copules et modèles alternatifs constituera peut-être l'épreuve déterminante pour la progression de l'intérêt envers cet outil statistique au cours de la prochaine décennie.

Annexe 1

Choix de la bonne copule

A l'aide du logiciel MODELISK on peut ajuster la meilleure copule qui estime nos données en minimisant les critères SIC, AIC (Akaike) et HQIC avec

n = nombre d'observations

k = nombre de paramètres à estimer

l_{max} = la valeur maximale du log de vraisemblance du paramètre à estimer

SIC (Schwarz information criterion)

$$SIC = \ln[n] k - 2\ln[l_{max}]$$

AIC (Akaike information criterion)

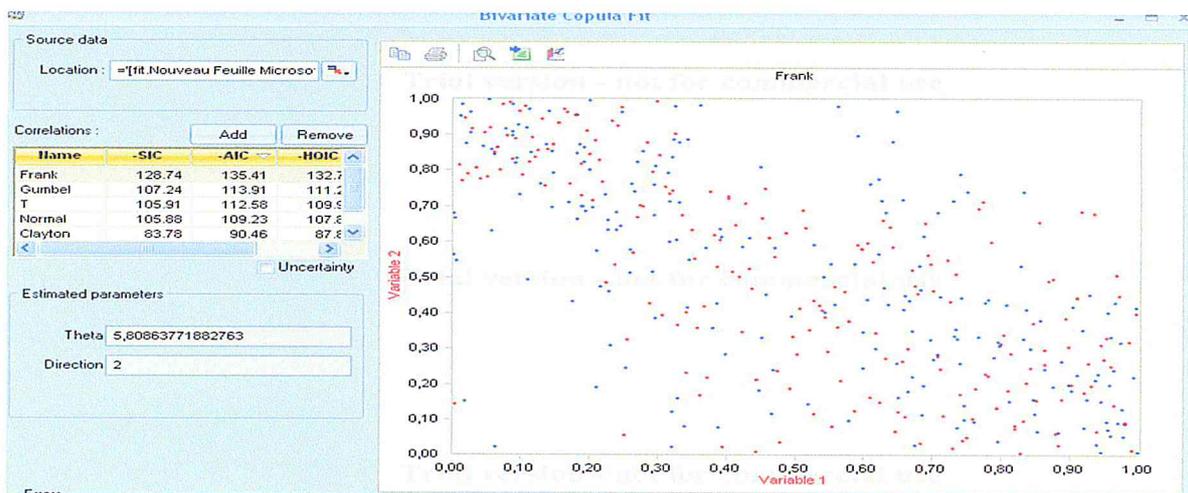
$$AIC = \left(\frac{2n}{n-k-1}\right) k - 2\ln[l_{max}]$$

HQIC (Hannan-Quinn information criterion)

$$HQIC = 2\ln[\ln[n]]k - 2\ln[l_{max}]$$

Dans tout ce qui suit les données empiriques sont représentées en rouge et les données simulées sont représentées en bleu

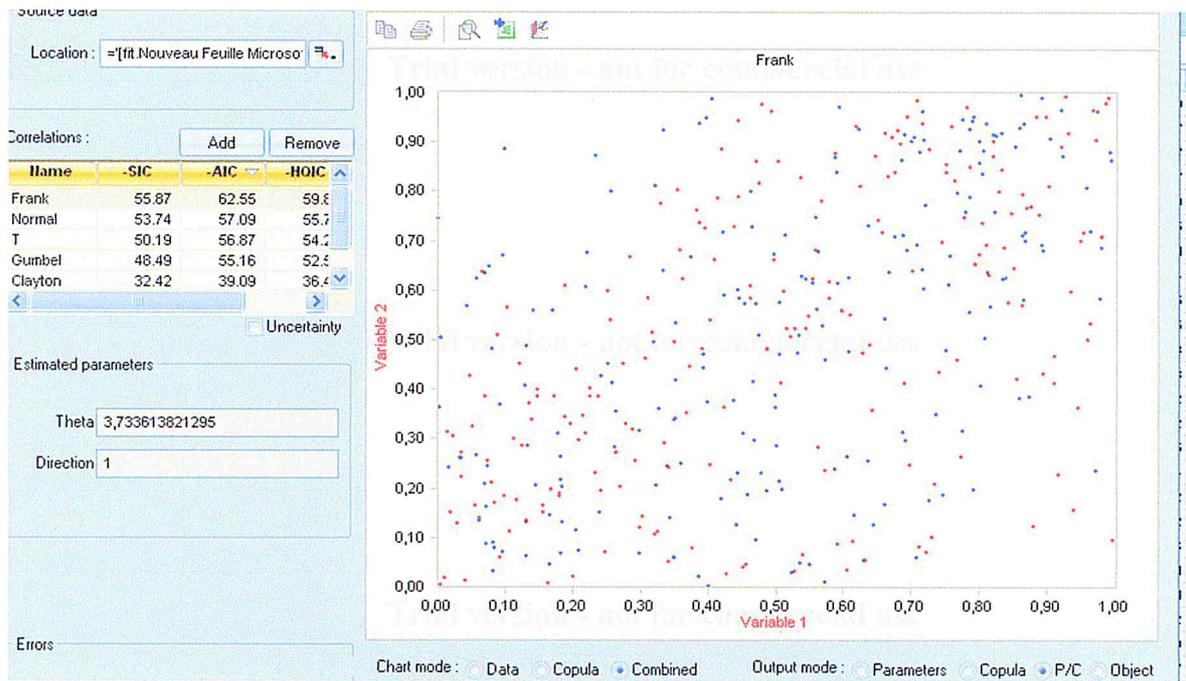
Précipitation (1) – Température (2)



Pour la Précipitation et la Température La meilleure copule est celle de Frank avec $\theta \sim 5.8$

Annexe 2

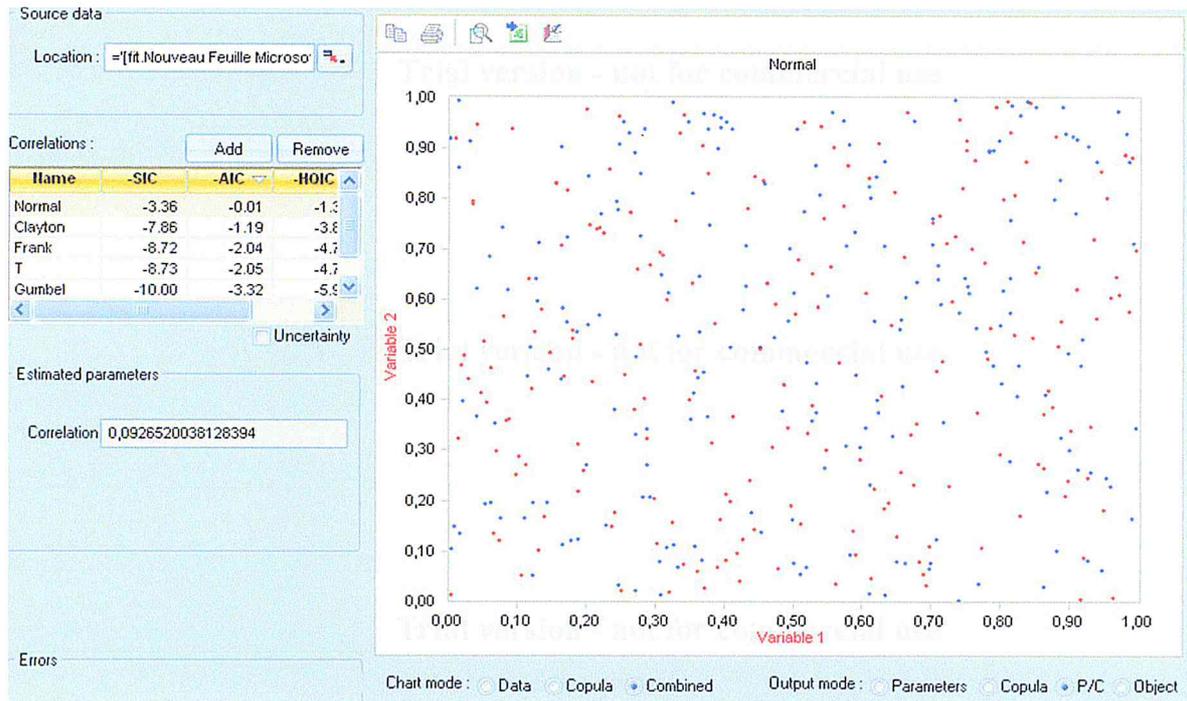
Précipitation (1) – Humidité (2)



Pour la Précipitation et l'humidité La meilleure copule est celle de Frank avec $\theta \sim 3.73$

Annexe 3

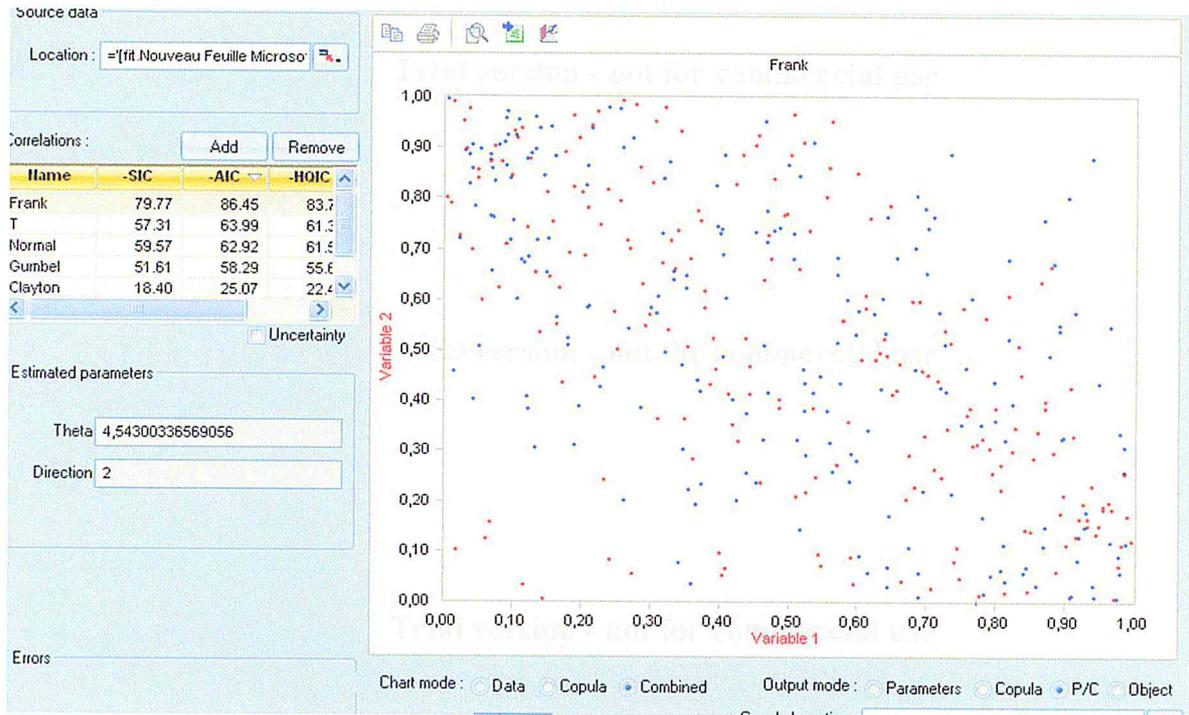
Précipitation (1) – Vitesse de Vent (2)



Pour la Précipitation et la Température La meilleure copule est la copule Normale avec $\rho \sim 0.09$

Annexe 4

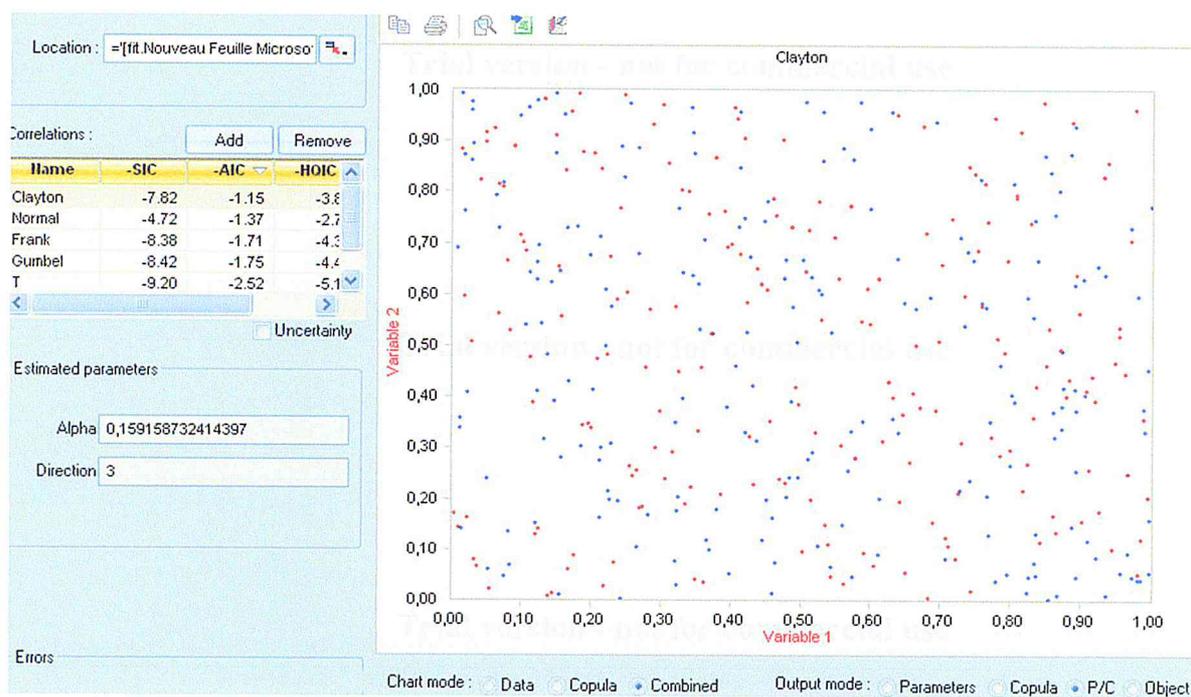
Température (1) -Humidité (2)



Pour la Température et l'Humidité La meilleure copule est celle de Frank avec $\theta \sim 4.54$

Annexe 5

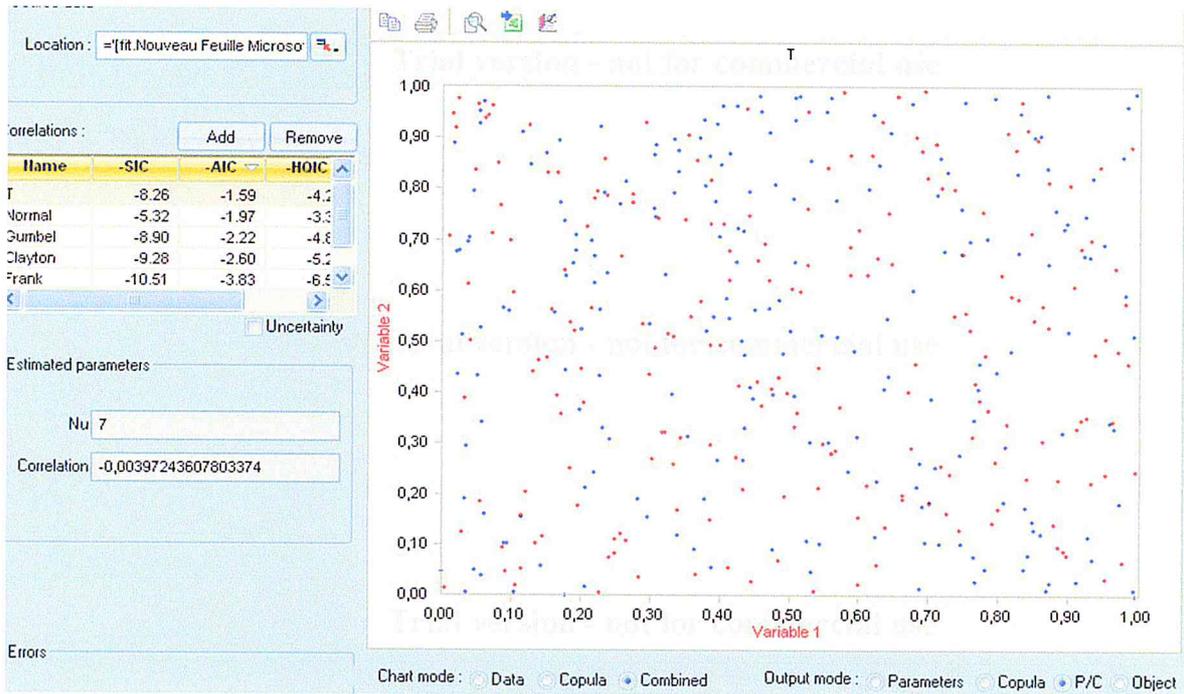
Température(1) - Vitesse de Vent (2)



Pour la Température et la Vitesse de Vent La meilleure copule est celle de Clayton avec $\theta \sim 0.15$

Annexe 6

Humidité (1) – Vitesse de Vent (2)



Pour l'Humidité et la Vitesse de Vent La meilleure copule est la copule de Student avec

$$\rho \sim -0.004$$

Bibliographie

- [1] Thierry Roncalli. Cours. Gestion des Risques Multiples OU Copules et Aspects Multidimensionnels du Risque.
- [2] Myriam Chabot. Thèse Concepts de dépendance et copules CaMUS 4, 48 – 71
- [3] Alexandre Popier. Cours. Copule Université du Maine, Le Mans Septembre 2010
- [4] Lounas Fadhila. Mémoire de magister (université Tizi-Ouzou) 2011. Modélisation de la dépendance par les copules et applications. Mémoire de magister (université Tizi-Ouzou) 2011.
- [5] Nabil Kadi. Thèse. Estimation non-paramétrique de la distribution et densité de copule. Mémoire pour obtenir du grade de maître ès sciences (M.Sc.)(canada) avril 2014.
- [6] Michael Bourdeau-Brien. Thèse. Les copules en finance Analyse qualitative et quantitative de l'expansion de cette théorie. Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures de l'Université Laval dans le cadre du programme de Maîtrise en Sciences de l'administration pour l'obtention du grade de Maître ès Sciences (M. Se.)
- [7] Arthur Charpentier. Cours. Copules et risques multiples.
- [8] Fabien Faivre. Thèse Copules : Une nouvelle vision du capital économique et application à une compagnie à quatre branches.
- [9] David Cadoux et Jean-Marc Loizeau. Copules et dépendances : application pratique à la détermination du besoin en fonds propres d'un assureur non vie.
- [10] Rihab Bedoui & Makrem Ben Dbabis. Thèse . Copules et mesures du risque bidimensionnelles: application pratique aux hedge funds. Version préliminaire, Septembre 2008.
- [11] Slimani. Mémoire de fin d'étude en Master Intitulé : Estimation des paramètres d'une copule.