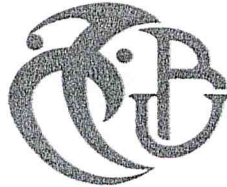


1111 - 510 - 39 - 1
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
La République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE BLIDA 1

Faculté des Sciences

Département Mathématiques



Mémoire de Master

En Mathématiques

Spécialité : Modélisation Stochastique et Statistique

Résolution Numérique des Equations Différentielles Stochastiques

Cas de l'EDS de Black-Scholes

Réalisé par :

BOUDAHDIR LOUIZA

BERKANI ASMAA

Proposé et encadré par :

M^r R. FRIHI M.A.A

Composition de jury :

M^r O.TAMI M.A.A

Président

M^r A.RASSOUL M.C.A

Examinateur

M^r M.BOUKHARI M.A.A

Examinateur

Blida 2017/2018

MA-510-39-1

Remerciement

Je tiens tout d'abord à remercier **Allah** le tout puissant, qui m'a donné la force, la capacité et surtout la patience pour accomplir ce travail.

Je tiens à adresser mes plus chaleureux remerciements à Monsieur « Frihi », notre promoteur de ce PFE, pour son aide illimité et son soutien pendant toute cette période pleine de défis. Ses conseils avisés et sa patience nous ont aidées à surmonter l'hésitation, l'embarras et de rediriger le projet pour avoir les meilleurs résultats. Son œil critique nous a été très précieux pour structurer le travail et pour améliorer la qualité des différentes sections sans oublier sa constante disponibilité à notre égard et de nous avoir donné l'occasion de travailler sur un tel sujet de recherche qui est très riche d'information et de découverte pour nous.

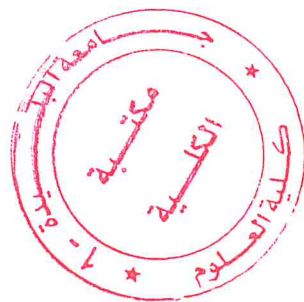
D'une façon générale, je tiens à remercier tout le personnel enseignant et non-enseignant, de la Faculté des Sciences que j'ai pu côtoyer de ma première année de licence à ma dernière année de master.

Je tiens à remercier les membres de jury qui ne font le grand honneur d'évaluer ce travail.

A mes parents qui nous ont tout donnée pour que nous en arrivions là: du fond du cour : je leur en suis plus que reconnaissante et espère faire tout pour qu'ils soient fières de moi.

Je remercie ma sœur **Hadjira** et mes frères **Hocine, Ahmed** et **Oussama** pour son aide, son soutien et sa présence lorsque j'ai eu besoin ainsi que mon binôme **Louiza** pour leurs prières .

Enfin, pour terminer ces remerciements, une pensée pour ma collègue et ma sœur **Cherifi Sabiha** , merci pour votre soutien, amitié et vos encouragements.



Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier **Allah** le tout puissant, qui m'a donné la force, la capacité et surtout la patience pour accomplir ce travail.

Je tiens à adresser mes plus chaleureux remerciements à Monsieur « Frihi », notre promoteur de ce PFE, pour son aide illimitée et son soutien pendant toute cette période pleine de défis. Ses conseils avisés et sa patience nous ont aidés à surmonter l'hésitation, l'embarras et de rediriger le projet pour avoir les meilleurs résultats. Son œil critique nous a été très précieux pour structurer le travail et pour améliorer la qualité des différentes sections sans oublier sa constante disponibilité à notre égard et de nous avoir donné l'occasion de travailler sur un tel sujet de recherche qui est très riche d'information et de découverte pour nous..

Mes vifs et chaleureux remerciements et gratitude à mes parents, mes frères, ma sœur et son mari ainsi que mon binôme Asmaa pour leurs prières, soutiens, encouragements et leurs amours illimités. « Elhamdoulillah de vous avoir dans notre vie, nous vous aimons du fond du cœur ».

Je tiens à exprimer mon sincères remerciements à mes amies pour leurs prières et leurs encouragements qu'avec, nous avons pu surmonter tous les obstacles

Je tiens à remercier toute personne qui a participé de près ou de loin à l'exécution de ce modeste travail.

Résumé :

Les équations différentielles stochastiques(EDS) trouvent de l'ampleur dans la modélisation des phénomènes économiques, financiers ainsi que des problèmes physiques très variés (la physique quantique, mécanique stochastique) et même en biologie (évolution de populations,réseaux de neurones), et en ingénierie.

La résolution analytique des EDS n'est pas toujours possible comme dans le cas des équations différentielles ordinaires(EDO). C'est pourquoi, on fait appel aux méthodes numériques qui ont prouvé leurs stabilités et leurs convergences vers les solutions exactes surtout avec les algorithmes complexes développés suite à la performance et la vitesse d'exécution des ordinateurs qui ont permet de vérifier la consistance et stabilité des ces algorithmes.

Dans notre travail, nous avons essayé d'étudier quelques méthodes de résolution des EDS et les appliquées à l'EDS de Black-Scholes. Cette dernière est très utilisée en finance et surtout dans les achats des marchandises à terme.

Abstract

Stochastic differential equations (DSEs) are found in the modeling of economic and financial phenomena as well as very varied physical problems (quantum physics, stochastic mechanics) and even in biology (evolution of populations, neural networks), and in engineering.

The analytical resolution of EDS is not always possible as in the case of ordinary differential equations (ODEs). This is why we use numerical methods that have proved their stability and their convergence towards the exact solutions especially with the complex algorithms developed following the performance and performance of the computers that have made it possible to check the consistency and stability. of these algorithms.

In our work, we tried to study some methods of solving DHS and applied them to the DHS of Black-Scholes. The latter is very used in finance and especially in the purchase of commodities futures.

ملخص

وجدت المعادلات التفاضلية العشوائية (زخما في نمذجة الظواهر الاقتصادية المالية ومشاكل مختلفة جدا المادية (فيزياء الكم، والميكانيكا العشوائية)، وحتى في علم الأحياء (تطور السكان، والشبكات العصبية)، و في الهندسة.

لذلك، استخدمنا الطرق العددية ODE ممكناً دائماً كما هو الحال في المعادلات التفاضلية العادية (EDS) لا يكون التحليل التحليلي لـ التي أثبتت استقرارها والتقارب إلى حلول الدقيقة خاصة مع خوارزميات معقدة وضعت بعد الأداء والتنفيذ وسرعة أجهزة الكمبيوتر التي تسمح لك للتحقق من التناسق والاستقرار من هذه الخوارزميات.

من بلاك سكولز. هذا الأخير يستخدم بشكل كبير في EDO وتطبيقها على EDS في عملنا ، حاولنا دراسة بعض الطرق لحل التمويل وخاصة في شراء السلع الآجلة.

Table des matières

Introduction Générale

1	Martingales et Mouvement Brownien	9
1.1	Martingales	9
1.1.1	Définition (Processus Stochastique)	10
1.1.2	Définition (Filtration)	10
1.1.3	Définition (Filtration naturelle)	10
1.1.4	Processus Adapté	10
1.1.5	Définition (Martingale)	11
1.1.6	Propriétés	11
1.1.7	Inégalité de Doob	12
1.1.8	Inégalité de Jensen	12
1.1.9	Martingales à temps discret	12
1.1.10	Processus arrêté	12
1.1.11	Convergence des Martingales à temps discret	14
1.1.12	Convergence d'une suite de variables aléatoires (Processus à temps discret)	14
1.1.13	Convergence presque sûre	15
1.1.14	Convergence presque sûre d'une sous-Martingale	15
1.1.15	Convergence presque sûre d'une sur-Martingale	16
1.1.16	Convergence dans L^1	16
1.1.17	Convergence dans L^p	17

1.1.18	Convergence des Martingales à temps continu	19
1.2	Mouvement Brownien	20
1.2.1	Vecteur Gaussien	20
1.2.2	Processus Gaussiens	21
1.2.3	Propriétés	22
1.2.4	Propriétés de Martingale	22
1.2.5	Continuité et non différentiabilité	23
2	Intégrale Stochastique et les Equation Différentielles Stochastique	24
2.1	Intégrale stochastique	24
2.1.1	Intégrale de stieljes	25
2.1.2	Intégrale par rapport au M.B	26
2.1.3	Définition(bon processus)	26
2.1.4	Processus étagés	26
2.1.5	Intégrale d'Itô	28
2.1.6	Processus d'Itô	29
2.1.7	Formules d'Itô	30
2.2	Equations différentielles stochastiques(EDS)	31
2.2.1	Définition (EDS)	31
2.2.2	Solution forte d'une EDS	32
2.2.3	Existence et unicité de la solution	32
2.2.4	Solution faible d'EDS	33
2.2.5	Exemple	34
3	Résolution Numerique des Equations Différentielles Stochastiques	35
3.1	Présentation de EDS	36
3.1.1	Partitionnement	36
3.1.2	Régimes asymptotiques	37
3.1.3	Stabilité	37

Index

- \mathbb{R} . L'ensemble des nombres réels.
- \mathbb{R}_+ . L'ensemble des nombres réels non négatifs $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.
- \mathbb{R}^d . Espace réel euclidien de dimension d .
- \mathbb{N} . Ensemble des nombres naturelle
- Ω . Ensemble non vide (espace d'état).
- \mathcal{F} . σ -algèbre.
- (\mathcal{F}_t) Une famille croissante de σ -algèbre $(\mathcal{F}_t) \in \mathcal{F}$.
- (Ω, \mathcal{F}, P) . Espace probabilisé.
- B . Mouvement brownien.
- $E [\cdot]$. Espérance mathématique .
- $var (\cdot)$. Variance mathématique.
- $P(\cdot)$. Mesure de probabilité .
- \otimes . Produit matriciel de Kronecker.
- $N \wedge n$. Minimum des variables aleatoires N et n .
- $N \vee n$. Maximum des variables aleatoires N et n .
- $\{ \cdot \}^c$ Complémentaire .
- max Maximum.
- exp Exponentielle Mathématique.
- σ . Fonction de dispersion .
- $\| \cdot \|$. Norme euclidienne d'un vecteur ou d'une matrice.
- $\| \cdot \|_2$ Norme euclidienne d'un vecteur ou norme spectrale d'une matrice.
- $\Delta B_i = B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$, Représentent les accroissements d'un processus de Wiener.
- $C_{ij} = Cov(C_i, C_j)$. Matrice de covariance du vecteur Gaussien.
- $C_{s,t} = Cov(X_s, X_t)$. Fonction de covariance du processus Gaussien.
- T . L'instant final.

t_0 . L'instant initial.

X_0 . La valeur initiale.

Drift . Coefficient de dérive.

Difusion . Coefficient de difusion.

Abréviation

EDO. Equations Différentielles Ordinaires

EDS. Equations Différentielles Stochastiques.

MB. Mouvement Brownien.

E-M. Méthode d'Euler-maruyama.

B-S. Equation de Black et Scholes.

R-K. Méthode de Runge-Kutta.

p.s. Presque sûrement

Introduction générale

Un phénomène stochastique est un processus dépendant du temps et contrôlé par un (ou des) mouvement brownien (MB) (aussi appelé processus de Wiener). Ce dernier est décrit par des équations différentielles stochastiques (EDS) qui diffèrent des équations différentielles ordinaires modélisant les processus déterministes. Contrairement aux EDO, les EDS contiennent deux termes : la dérive pour l'évolution du temps et la diffusion qui inclut le bruit, (ces bruits sont des mouvements browniens à accroissements indépendants). Du fait de la présence d'un MB qui n'est pas dérivable par rapport au temps, les dérivées présentées dans les EDO sont remplacées dans les EDS par des différentielles (dt pour le temps et dB_t pour le mouvement brownien et dX_t pour l'état de processus), et pour résoudre les EDS, on fait appel aux formules d'Itô.

De nombreux phénomènes sont décrits par des EDS lorsqu'une description déterministe n'est pas satisfaisante : économie (mathématiques financières et cours boursiers), géologie (tremblement de terre), informatique (modélisation des réseaux), physique et mécanique (mouvements des particules dans un gaz ou dans un milieu ionisé) physique quantique, électricité (modélisation des circuits électriques en tenant compte des bruits), ingénierie (synthèse de commande prenant en compte les défaillances pouvant apparaître aléatoirement).....

En général, il est très difficile, voire impossible de trouver ou de tracer une solution exacte aux équations différentielles stochastiques, nous devons donc avoir recours à des méthodes numériques afin de trouver une bonne approximation de la solution recherchée.

Dans ce mémoire nous allons exposer les notions fondamentales sur la résolution numérique des équations différentielles stochastiques et la convergence de ces dernières puis nous clôturons ce travail par une comparaison de quelques méthodes numériques à savoir la méthode d'Euler-Maruyama et la méthode de Milstein. Pour atteindre cet objectif, nous avons rédigé un mémoire articulé sur quatre chapitres :

Le premier chapitre sera consacré aux rappels de base concernant une synthèse des processus aléatoires (Processus-stochastique, Martingale, Mouvement Brownien).

Dans le deuxième chapitre, nous allons présenter les outils et les définitions essentiels concernant les EDS, l'intégrale stochastique, et les formules d'Itô. Nous traiterons par la suite les équations différentielles stochastiques, la solution forte d'une EDS, le théorème d'existence et unicité de la solution d'une EDS et la solution faible.

Le chapitre trois est réservé aux études de quelques méthodes numériques à savoir approximation d'Euler–Maruyama, approximation de Milstein, les approximations de Runge–Kutta et ensuite nous allons étudier la convergence forte et faible des schémas numériques.

Dans le dernier chapitre, nous allons comparer les solutions approchées obtenues par des méthodes numériques avec les solutions exactes de l'EDS de Black-Sholes par le biais de simulation à savoir les schémas d'Euler-Maruyama et de Milstein).

Nous clôturons ce mémoire par une conclusion générale.

Chapitre 1

Martingales et Mouvement Brownien

Introduction

Dans ce premier chapitre nous introduisons quelques notions fondamentales liées aux processus stochastiques et nous commençons par les Martingales ainsi que le Mouvement Brownien.

1.1 Martingales

Une martingale est un processus aléatoire qui ne possède pas de partie prévisible relativement à l'information dont on dispose. La théorie des martingales a eu de grandes répercussions dans de nombreux champs d'application, en probabilité bien sûr, mais aussi pour la résolution numérique des équations aux dérivées partielles (théorie du potentiel, EDP), en assurance (théorie de la ruine) et en finance.

1.1.1 Définition (Processus Stochastique)

Soit (Ω, A, P) un espace de probabilité. Un processus stochastique $(X_t)_{t \geq 0}$ (à valeurs dans $\mathbb{R}^d, d \in \mathbb{N}, d \geq 1$) est une application

$$\mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$$

$$(t, \omega) \longrightarrow X_t(\omega)$$

définie sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ mesurable par rapport à la tribu produit $B_{\mathbb{R}_+} \otimes A$. En général, nous notons $\mathcal{F} = B_{\mathbb{R}_+} \otimes A$.

Pour chaque ω fixé de Ω , l'application qui à t associe $X(\omega, t)$ est appelée trajectoire du processus. Dans tout ce qui suit, on omet la variable ω .

1.1.2 Définition (Filtration)

$\{\mathcal{F}_t; 0 \leq t \leq +\infty\}$ est une famille croissante de sous-tribus pour $0 \leq s \leq t < +\infty$, $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$.

1.1.3 Définition (Filtration naturelle)

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus stochastique, sa filtration naturelle $(\mathcal{F}_t^X)_{t \geq 0}$ est la filtration définie par :

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s, s \leq t\}$$

La filtration est un formalisme probabiliste pour décrire l'information dont on dispose. La dernière propriété traduit simplement que l'information augmente au cours du temps.

1.1.4 Processus Adapté

Un processus est dit adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t, 0 \leq t < +\infty\}$ si pour tout, X_t est \mathcal{F}_t -mesurable.

1.1.5 Définition (Martingale)

Soient $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ une filtration, et $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus adapté tel que $E[|X_t|] < +\infty$, pour chaque $t \in \mathbb{R}^+$, alors :

On dit que X est une $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -martingale (resp sous-martingale) (resp sur-martingale) si $\forall 0 \leq s \leq t$:

$$E(X_t/F_s) = X_s, (\text{resp } E(X_t/F_s) \geq X_s), (\text{resp } E(X_t/F_s) \leq X_s) \text{ Pp.s} \quad (1.1)$$

Exemple

Soit $X \in L^1$. On pose $X_t = E(X/\mathcal{F}_t)$. On a, pour $s < t$

$$E(X_t/F_s) = E(E(X/\mathcal{F}_t)/F_s) = E(X/\mathcal{F}_s) = X_s$$

et $(X_t)_{t \geq 0}$ est une martingale.

1.1.6 Propriétés

- Si X est une Martingale $E(X_t) = E(X_0), \forall t$.
- Si $(X_t, t \leq T)$ est une martingale, le processus est complètement déterminé par sa valeur terminale :

$$X_t = E(X_T/F_t).$$

- Si $p \geq 1$ et $(X_t)_{t \geq 0}$ est une martingale telle que $E(|X|^p) < \infty$ pour tout n , alors $|X|^p$ est une sous-martingale .
- Si $(X_t)_{t \geq 0}$ est une sous-martingale, alors $(X_t - a)^+$ est une sous-martingale.
- Si $(X_t)_{t \geq 0}$ est une sur-martingale, alors $X_t \cap a$ est une sur-martingale.

1.1.7 Inégalité de Doob

Si X est une martingale continue alors :

$$E(\sup_{s \leq T} X_s^2) \leq 4E(X_T^2) \quad (1.2)$$

1.1.8 Inégalité de Jensen

Soit M_t une martingale (resp. sous martingale) et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe (resp. convexe croissante). telle que $\varphi(M_t)$ est intégrable pour tout $t \geq 0$ (ie : $E(\varphi(M_t)) < \infty$), alors $\varphi(M_t)$ est une sous-martingale, avec de plus chaque φ croissante (c'est évident si $\varphi(x) = x^+$ ou $|x|$ ou X^2 qui sont les cas principaux ou on appliquera cette inégalité pour tout $\varphi \in F$

$$E(\varphi(x) / \mathcal{F}_s) \geq E(\varphi(M_t) / \mathcal{F}_s) = \varphi(E(M_t) / \mathcal{F}_s) \geq \varphi(M_s) \quad (1.3)$$

donc :

$$E(\varphi(M_t) / \mathcal{F}_s) \geq \sup_{f \in F} \varphi(M_s) = \varphi(M_s) \quad (1.4)$$

1.1.9 Martingales à temps discret

1.1.10 Processus arrêté

Soit $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un processus stochastique et soit $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$ la filtration canonique, Une variable aléatoire N à valeurs dans $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ est un temps d'arrêt si $\{N = n\} \in \mathcal{F}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La condition $\{N = n\} \in \mathcal{F}_n$ signifie qu'avec l'information disponible au temps n , on doit pouvoir décider si oui ou non l'événement $\{N = n\}$ est réalisé. en d'autres termes.

Soient N et M des temps d'arrêt. Alors $N \wedge M$ et $N \vee M$ sont des temps d'arrêt.

Soit $N_k, k \in \mathbb{N}$, une suite de temps d'arrêt telle que $N_k \nearrow N$. Alors N est un temps d'arrêt.

Soient N et M deux temps d'arrêt tels que $M \leq N$. Alors $F_M \subseteq F_N$.

Soit $A \in F_M$. Alors pour tout $n > 0$, $N = n$ implique $M \leq n$ d'où

$$\{A \cap N = n\} = n \cap \{M \leq n\} \cap \{N = n\} \in F_n$$

puisque

$$A \cap \{M \leq n\} = \bigcup_{k=0}^n (A \cap \{M = k\}) \in \mathcal{F}_n \text{ et } \{N = n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_n$ une filtration, $(X_n)_n$ un processus adapté à la filtration et N un temps d'arrêt. On appelle processus arrêté en N le processus X^N défini par :

$$X_n^N = X_{N \wedge n}$$

Proposition . Si N est un temps d'arrêt et X_n est une sur-martingale (par rapport à la même filtration \mathcal{F}), alors le processus arrêté $X_{N \wedge n}$ est une sur-martingale .

Preuve . Considérons le processus $H_n = 1_{N \geq n}$. Puisque l'on a :

$$\{N \geq n\} = \{N \leq n-1\}^c \in F_{n-1},$$

le processus H_n est prévisible.

De plus il est évidemment borné et non-négatif. $(H.X)_n$ est une sur-martingale. Or nous avons

$$(H.X)_n = \sum_{m=1}^n 1_{\{N \geq m\}}(X_m - X_{m-1}) = \sum_{m=1}^n (X_m - X_{m-1}) = X_{N \wedge n} - X_0$$

donc :

$$X_{N \wedge n} = X_0 + (H.X)_n$$

est une sur-martingale.

Il suit directement de ce résultat que si $(X_n)_{n \geq 0}$ est une sous-martingale (respec-

tivement une martingale), alors $(X_{N \wedge n})_n$ est une sous-martingale (respectivement une martingale).

Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une sous-martingale et soit N un temps d'arrêt satisfaisant

$$P\{N \leq k\} = 1$$

pour un $k \in \mathbb{N}$. Alors :

$$E(X_0) \leq E(X_N) \leq E(X_k).$$

1.1.11 Convergence des Martingales à temps discret

Notion de convergence

Commençons par rappeler quatre notions de convergence d'une suite de variables aléatoires

1.1.12 Convergence d'une suite de variables aléatoires (Processus à temps discret)

Soient X et $(X_n)_{n \geq 0}$ des variables aléatoires réelles, définies sur un même espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P)

1. On dit que $(X_n)_{n \geq 0}$ converge presque sûrement vers X si :

$$P(\{\omega \in \Omega : \lim X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1 \tag{1.5}$$

2. Si $p > 0$, on dénote par $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ l'ensemble des variables aléatoires X telles que

$$E(|X|^p) < \infty. \text{ Si } X_n, X \in L^p, \text{ on dit que } X_n \text{ converge dans } L^p \text{ vers } X$$

si :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(|X_n - X|^p) = 0 \tag{1.6}$$

3. On dit que $(X_n)_{n \geq 0}$ converge en probabilité vers X si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} = 0 \quad (1.7)$$

4. On dit que $(X_n)_{n \geq 0}$ converge en loi vers X si pour toute fonction h continue et bornée, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(h(X_n)) = E(h(X)) \quad (1.8)$$

pour tout $\varepsilon > 0$. liens entre ces quatre notions de convergence sont résumées dans la proposition suivante.

Proposition

- La convergence presque sûre implique la convergence en probabilité.
- La convergence dans L^p implique la convergence en probabilité.
- La convergence dans L^p implique la convergence dans L^q pour tout $q < p$.
- Si $X_n \rightarrow X$ presque sûrement et $|X_n| \leq Y \quad \forall n$ avec $Y \in L^p$, alors $X_n \rightarrow X$ dans L^p .
- La convergence presque sûre, la convergence en probabilité et La convergence dans L^p implique la convergence en loi .

1.1.13 Convergence presque sûre

1.1.14 Convergence presque sûre d'une sous-Martingale

Théorème. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une sous-martingale telle que $\sup_n E(X_n^+) < \infty$ Alors $(X_n)_{n \geq 0}$ converge presque sûrement, lorsque $n \rightarrow \infty$, vers une variable aléatoire X satisfaisant $E(|X|) < \infty$.

Preuve (Voir [3])

1.1.15 Convergence presque sûre d'une sur-Martingale

Corollaire. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une sur-martingale positive. Alors $(X_n)_{n \geq 0}$ converge presque sûrement, lorsque $n \rightarrow \infty$, vers une variable aléatoire X avec $E(X) \leq E(X_0)$.

Preuve. $Y_n = -X_n$ est une sous-martingale bornée supérieurement par 0, avec $E(Y_n^+) = 0$, donc elle converge. Comme $E(X_0) > E(X_n)$, l'inégalité suit du lemme de Fatou.

1.1.16 Convergence dans L^1

La discussion de la convergence d'une martingale dans L^1 nécessite la notion d'intégrabilité uniforme.

Intégrabilité uniforme

Une collection $\{X_i\}_{i \in I}$ de variables aléatoires est dite uniformément intégrable si :

$$\lim_{i \in I} (\sup E(|X_i| 1_{\{|X_i| > M\}})) = 0 \quad (1.9)$$

On remarque qu'en prenant M assez grand pour que le supremum soit inférieur à 1, on obtient :

$$\sup_{i \in I} E(|X_i|) \leq \sup_{i \in I} (|X_i| 1_{\{|X_i| \leq M\}}) + \sup_{i \in I} (|X_i| 1_{\{|X_i| > M\}}) \leq M + 1 < \infty \quad (1.10)$$

Nous commençons par un résultat général montrant qu'il existe de très vastes familles de variables uniformément intégrables.

Convergence d'une sous-Martingale dans L^1

Si (X_n) est une sous-martingale, alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1. $(X_n)_{n \geq 0}$ est uniformément intégrable.

2. $(X_n)_{n \geq 0}$ converge presque sûrement et dans L^1 .
3. $(X_n)_{n \geq 0}$ converge dans L^1 .

Preuve (voir [3])

Convergence d'une Martingale dans L^1

Si $(X_n)_{n \geq 0}$ est une martingale, alors les quatre conditions suivantes sont équivalentes :

1. $(X_n)_{n \geq 0}$ est uniformément intégrable.
2. $(X_n)_{n \geq 0}$ converge presque sûrement et dans L^1 .
3. $(X_n)_{n \geq 0}$ converge dans L^1 .
4. il existe une variable aléatoire intégrable X telle que $X_n = E(X|F_n)$.

Dans ce cas X est la limite de $(X_n)_{n \geq 0}$ dans L^1 .

1.1.17 Convergence dans L^p

La convergence d'une martingale dans L^p suit de manière simple de l'inégalité du maximum L^p :

Convergence d'une Martingale dans L^p

Soit X_n une martingale telle que $\sup_n E(|X_n|^p) < \infty$ pour un $p > 1$. Alors X_n converge vers une variable aléatoire X presque sûrement et dans L^p .

On a :

$$(E(X_n^+))^p \leq (E(X_n))^p \leq E(|X_n|^p) \quad (1.11)$$

Donc X_n converge presque sûrement vers une variable X .

$$E\left(\sup_{0 \leq m \leq n} |X_m|\right) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E(|X_n|^p)$$

Faisant tendre n vers l'infini, le théorème de la convergence monotone montre que $\sup_n |X_n|$ est dans L^p . Comme :

$$|X_n - X|^p \leq (2 \sup_n |X_n|)^p,$$

le théorème de la convergence dominée montre que

$$E(|X_n - X|^p) \rightarrow 0.$$

Dans la suite, nous considérons plus particulièrement le cas $p = 2$. Rappelons que si une martingale X_n est dans L^2 , on peut définir son processus croissant

$$\langle X_n \rangle = \sum_{m=1}^n E((X_m - X_{m-1})^2 | F_{m-1})$$

La croissance implique que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle X \rangle_n = \langle X \rangle_\infty \text{ existe dans } \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$$

Cette quantité s'interprète comme la variance totale de la trajectoire $X_n(w)$.

Soit X_n une martingale dans L^2 telle que $X_0 = 0$. Alors :

$$E(\sup_n X_n^2) \leq 4E(\langle X \rangle_\infty).$$

L'inégalité du maximum L^2 donne

$$E(\sup_m X_m^2) \leq 4E(X_n^2) = 4E(\langle X \rangle_n)$$

puisque :

$$E(X_n^2) = E(M_n) + E(\langle X_n \rangle) \text{ et } E(M_n) = E(M_0) = E(X_0^2).$$

Le résultat suit alors du théorème de convergence monotone.

1.1.18. Convergence des Martingales à temps continu

Théorème. Soit une $(X_t)_{t \geq 0}$ une $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -sous-martingale continue à droite, avec $\sup_{t \geq 0} E[X_t^+] < \infty$. Alors $(X_t)_{t \geq 0}$ converge p.s. quand $t \rightarrow +\infty$. On note X_∞ sa limite. On a de plus $X_\infty \in L^1$.

Remarque. En général la convergence n'a pas lieu dans L^1 .

Définition

On dit qu'un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est uniformément intégrable si

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \sup_{t \geq 0} E[|X_t| I_{|X_t| > a}] = 0$$

On dit qu'une martingale est fermée s'il existe une v.a $Z \in L^1$ telle que

$$\forall t \geq 0, X_t = E[Z/\mathcal{F}_t] \text{ p.s.}$$

Théorème. Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ une martingale c.à.d. Il y a équivalence entre les propriétés suivantes :

1. M est une martingale fermée,
2. M est uniformément intégrable,
3. il existe $X_\infty \in L^1$ telle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} X_t = X_\infty$ p.s. et dans L^1 .

On a alors que p.s. $X_t = E[X_\infty/\mathcal{F}_t]$.

Preuve. Même preuve que dans le cas discret.

Théorème. Soit une $(X_t)_{t \geq 0}$ une $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ martingale (sur ou sur) càd fermée. On note X_∞ sa limite. Soit T un $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -temps d'arrêt. On pose $X_T = X_\infty$ sur $\{T = \infty\}$. Alors $E[X_\infty/\mathcal{F}_T] = X_T$ (resp \leq et \geq) et le processus $X^T = (X_{T \wedge t})_{t \geq 0}$ est encore une martingale uniformément intégrable de valeur terminale X_T . En particulier, $E[X_T] = E[X_0] = E[X_\infty]$

1.2 Mouvement Brownien

Historique

Un botaniste anglais, Robert Brown, a observé en 1828 des grains de pollen en suspension dans de l'eau. Les minuscules particules entre les vacuoles des grains de pollen forment un processus dont le mouvement, dû aux chocs entre les particules, est très d'esordonné (on observe un changement continu des directions) et semble a priori imprévisible. La loi suivie par une seule particule de cet amas est la loi du mouvement brownien. Par la suite, Louis Bachelier décrit mathématiquement le processus brownien dans sa thèse (en 1900), où il l'utilise en finance pour présenter une analyse stochastique de la théorie de la spéculation (ce qui est considéré à présent comme la base des mathématiques financières).

Le physicien Perrin était déjà conscient de ce fait, lorsqu'il fit la remarque suivante :

"C'est un cas où il est vraiment naturel de penser à ces fonctions continues sans dérivées que les mathématiciens ont imaginées, et que l'on regardait à tort comme de simples curiosités mathématiques, puisque l'expérience peut les suggérer." (Perrin)

1.2.1 Vecteur Gaussien

Définition (Vecteurs Gaussiens)

Un Vecteur Gaussien est une variable aléatoire (X_1, \dots, X_d) à valeur dans \mathbb{R}^d telle que pour tout $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_d X_d$ est une variable Gaussienne. La matrice $C = (C_{ij})_{1 \leq i, j \leq d}$ définie par $C_{ij} = Cov(C_i, C_j)$ est appelée matrice de covariance du vecteur Gaussien. On dit alors que $X \sim N(\mu, C)$, où est le vecteur des moyennes de X_1, \dots, X_d . Si $\mu = (0, \dots, 0)$, le vecteur est dit centré.

La matrice de covariance encode toute l'information contenue dans un vecteur Gaussien.

1.2.2 Processus Gaussiens

Définition

Les lois marginales de $X = (X_t)_{t \geq 0}$ sont les lois des variables aléatoires de la forme

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \text{ où } n \geq 1 \text{ et } 0 \leq t_1 < \dots < t_n$$

Définition (Processus Gaussiens)

Un processus Gaussien centré est un processus aléatoire à valeur réelle dont toutes les lois marginales correspondent à des vecteurs Gaussiens. Plus précisément, si $(X_t)_{t \geq 0}$ dénote ce processus aléatoire, $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ et tout $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_d X_d$ est une variable Gaussienne centrée.

La fonction $C = (C_{st})_{s, t \geq 0}$ de \mathbb{R}_+^2 dans \mathbb{R} définie par $C_{st} = \text{Cov}(X_s, X_t)$ est appelée fonction de covariance du Processus Gaussien. le processus est dit centré si :

$$E[X_t] = 0 \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Définition (Mouvement Brownien)

Le processus $B = (B_t)_{t \in [0, T]}$ est un mouvement brownien (M.B) sur (Ω, \mathcal{F}, P) si et seulement si :

1. $B_0 = x$ et si B est issu de 0, c'est-à-dire que $B_0 = 0$ P-prèsque sûrement (p.s), le mouvement brownien est dit standard.
2. B est à trajectoires continues.
3. B est à accroissement indépendants, c'est-à-dire que pour tous $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, la famille de variables aléatoires $(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, \dots, B_{t_1} - B_{t_0})$ est indépendante.
4. pour tous $0 \leq s < t \leq T$, $B_t - B_s$ suit une loi gaussienne centrée de variance $t - s$ i.e :

$$B_t - B_s \rightsquigarrow N(0, t - s).$$

Proposition

Le mouvement Brownien standard partant de $B_0 = 0$ est un processus Gaussien centré, continu sur \mathbb{R}_+ , et de fonction de covariance $C_{st} = Cov(B_s, B_t) = s \wedge t$.

Preuve .On prend par exemple $s < t$

$$\begin{aligned}
 cov(B_t, B_s) &= E[B_s B_t] - E[B_s] E[B_t] \\
 &= E[B_s B_t] \\
 &= E[B_s(B_s + B_t - B_s)] \\
 &= E[B_s^2] - E[B_s(B_t - B_s)] \\
 &= s, \text{ par indépendance de } B_s \text{ et } B_t - B_s
 \end{aligned}$$

1.2.3 Propriétés

Soit $B = \{B_t, t \in \mathbb{R}^+\}$ un mouvement brownien, alors :

a) Symétrie : Le processus $(-B) = \{-B_t, t \in \mathbb{R}^+\}$, est un mouvement brownien.

b) Propriété de Markov simple : Pour tout $s > 0$, le processus $\{B_t^{(s)} = B_{t+s} - B_s, t \in \mathbb{R}^+\}$ est un mouvement brownien indépendant de $(B_u, u \leq s)$.

c) Changement d'échelle : Si $\lambda > 0$, et si $B_t^\lambda = \frac{1}{\lambda} B_{\lambda^2 t}$, $t \geq 0$ alors le processus $B^\lambda = (B_t^\lambda)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien.

1.2.4 Propriétés de Martingale

1. B_t est une martingale
2. $B_t^2 - t$ est une martingale
3. Pour tout réel α , $\exp(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2} t)$ est une martingale.

Proposition

Soit $(B_t)_{t \in [0,1]}$ un mouvement brownien sur $[0, 1]$ à valeur dans \mathbb{R} sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) .

Soit $(X_t)_{t \in]0,1]}$ un processus à valeurs dans \mathbb{R} sur un autre espace probabilisé tel que :

1. $(X_t)_{t \in]0,1]}$ est à trajectoires presque sûrement continues sur $]0,1]$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, le vecteur $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ a même loi que $(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n})$. Alors, si l'on pose $X_0 = 0$ p.s, $(X_t)_{t \in]0,1]}$ est encore un mouvement brownien.

1.2.5 Continuité et non différentiabilité

En un certain sens, le mouvement Brownien est une courbe continue choisie au hasard uniformément. Il est donc naturel de se demander quelle est la régularité d'une telle fonction. Contrairement à l'intuition répandue que les fonctions typiques sont très régulières (il est en fait non trivial d'exhiber des fonctions non régulières), le théorème suivant montre que les fonctions typiques sont en fait non dérivables.

Théorème

Presque sûrement, la trajectoire du mouvement brownien $(B_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans \mathbb{R} , défini sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) n'est nulle part différentiable.

Preuve (Voir [

Chapitre 2

Intégrale Stochastique et les Equation Différentielles Stochastique

Introduction

Ce chapitre est dédié à la présentation d'intégrale stochastique et les équations différentielles stochastiques auxquelles ce mémoire est consacré .

2.1 Intégrale stochastique

Le calcul différentiel donne un cadre à la notion d'équation différentielle ordinaire, et sert de modèle pour des phénomènes variables dans le temps. Quand on a voulu ajouter à ces équations des perturbations aléatoires, on a été gêné par la non différentiabilité du Mouvement Brownien(M.B). Du coup on a commencé par construire une intégrale par rapport au M.B, pour ensuite définir la notion d'équation différentielle stochastique. Et il a fallu donner un sens à

$$\int_0^t H_s dB_s \tag{2.1}$$

où $H = (H_s)$ est un processus stochastique et B_s est un mouvement brownien

2.1.1 Intégrale de Stieltjes

Soit f une fonction à valeurs réelles, définie sur $[a, b]$. Supposons que f soit à variation finie sur $[a, b]$. Alors f se décompose en $f = g - h$ avec g et h croissantes sur $[a, b]$.

Rappelons que si g est croissante, g est à variation bornée et pour ϕ fonction définie sur $[a, b]$ et continue, on peut définir l'intégrale au sens de Stieltjes de ϕ par rapport à g de la façon suivante :

$$\int_a^b \phi(t) dg(t) = \lim_{|\Pi| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^m \phi(t_{k-1}) (g(t_k) - g(t_{k-1})) \quad (2.2)$$

ou Π est la subdivision $\{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ de l'intervalle $[a, b]$ i.e.

$$|\Pi| = \max_{k=1, \dots, m} (t_k - t_{k-1}).$$

On pose alors :

$$\int_a^b \phi df = \int_a^b \phi dg - \int_a^b \phi dh$$

Mais la réciproque est vraie. Si pour toute fonction ϕ continue, la limite suivante :

$$\lim_{|\Pi| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^m \phi(t_{k-1}) (g(t_k) - g(t_{k-1}))$$

Donc il est impossible de définir l'intégrale stochastique trajectoire par trajectoire pour tout processus continu. Si $X = (X_t)_{t \geq 0}$ est un processus stochastique continu, pour ω fixé, on ne peut pas donner un sens à l'expression :

$$\int_0^t X_s(\omega) dB_s(\omega)$$

2.1.2 Intégrale par rapport au M.B

La construction est due à K. Itô (1942 – 1944) dans le cas du M.B et a été généralisée au cas d'une martingale de carré intégrable par Kunita et Watanabe (1967).

nous supposons donner un mouvement brownien $(B_t)_{t \geq 0}$ avec sa filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. On définit deux classes de processus :

$$X^2 = \{X = (X_t)_{0 \leq t}, \text{ processus adapté, tel que } \forall t \geq 0, E(\int_0^t X_s^2 ds) < \infty\}$$

et M_c^2 l'ensemble des martingales (par rapport à la filtration du brownien), de carré intégrable, continues et nulles à l'instant 0.

2.1.3 Définition(bon processus)

On dit que $(\varphi_s)_{s \geq 0}$ est un bon processus s'il est (\mathcal{F}_t^B) -adapté et si

$$E \left[\int_0^t \varphi_s^2 ds \right] < \infty \quad (2.3)$$

pour tout $t > 0$.

2.1.4 Processus étagés

Soit φ_t un processus en escalier

$$\varphi_t = \sum_{k=1}^n \alpha_k 1_{]t_k, t_{k+1}]}(t) \quad (2.4)$$

avec $\{t_0, t_1, \dots, t_{n-1}\}$ une subdivision de l'intervalle $[0, t]$, l'intégrale stochastique de φ est définie par :

$$I_t(\varphi) = \int_0^t \varphi_s dB_s = \sum_{k=0}^{n-1} (B_{t_{k+1}} - B_{t_k}), t \geq 0 \quad (2.5)$$

On considère l'opérateur linéaire

$$I : \varepsilon \rightarrow L^2(\Omega, C([0, T]))$$

$$\varphi \rightarrow I(\varphi)$$

défini par :

$$I_t(\varphi) = \int_0^t \varphi_s dB_s, \quad 0 \leq t \leq T$$

E est dense dans $M^2(0, T)$, on peut alors prolonger I de manière unique en une application linéaire continue I définie sur $M^2(0, T)$ à valeurs dans $L^2(\Omega, C([0, T]))$. Cette application sera également notée

$$I_t(\varphi) = \int_0^t \varphi_s dB_s$$

Proposition : Soient $\theta, \varphi \in M^2$, alors $I_t(\varphi)$ et $I_t(\theta)$ sont des martingales continues qui vérifient, pour tout $t \geq s \geq 0$:

$$E[I_t(\varphi)] = 0$$

$$\text{var}[I_t(\varphi)] = E[I_t^2(\varphi)] = \int_0^t \varphi_s^2 ds$$

$$\text{cov}(I_t(\varphi), I_t(\theta)) = E[I_t(\varphi) I_t(\theta)] = \int_0^t \theta_s \varphi_s ds$$

$$E[I_t(\varphi) I_s(\varphi)] = \int_0^{t \wedge s} \varphi_u du$$

Cas général

Si φ est un bon processus, il existe $\{\varphi^n, n \geq 0\}$ suite de processus étagés tel que

$$E \left[\int_0^t (\varphi_s - \varphi_s^n)^2 ds \right] \rightarrow 0$$

quand $n \rightarrow \infty$ il existe une variable aléatoire $I_t(\varphi)$ de carré intégrable tel que

$$E[|I_t(\varphi) - I_t(\varphi^n)|^2] \rightarrow 0$$

quand $n \rightarrow \infty$ on pose

$$I_t(\varphi) = \int_0^t \varphi_s dB_s$$

pour tout $t \geq 0$.

2.1.5 Intégrale d'Itô

Dans le cadre d'un changement de variable dans une intégrale, lorsqu'on pose $y = f(x)$ on écrit généralement $dy = f'(x)dx$. Cette règle se lit directement dans la notation de Leibniz quand on écrit $dy = \frac{df}{dx} dx$. Si l'on considère une fonction composée, par exemple si x est une variable du temps t , on peut continuer à utiliser dans les intégrales la règle de dérivation des fonctions composées qui s'écrit alors

$$dy = \frac{df}{dx} \frac{dx}{dt} dt$$

Puisque l'intégrale d'Itô, comme l'intégrale de Riemann, a été définie comme somme d'une quantité infinie d'accroissements infinitésimaux dB_t , et que cette définition est a priori cohérente avec les notations de Leibniz et les manipulations qui en découlent, il paraît logique d'appliquer les mêmes règles. Pourtant si l'on prend $f(x) = x^2$ par exemple, on aurait :

$$Y_t = B_t^2, dY_t = 2B_t dB_t, \text{ et } \int_0^t 2B_s dB_s = \int_0^t dY_s = Y_t - Y_0 = B_t^2 \quad (\text{Faux})$$

ce qui est faux puisque $\int_0^t 2B_s dB_s$ est une martingale. D'après la formule d'Itô on a un terme additionnel :

$$B_t^2 = \int_0^t 2B_s dB_s + \int_0^t ds$$

ou bien :

$$B_t^2 = B_t^2 - t$$

et les règles de changement de variable doivent être modifiées.

2.1.6 Processus d'Itô

Définition

Un processus d'Itô est un processus stochastique $X = (X_t)_{t \geq 0}$ de la forme :

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s \quad (2.6)$$

avec :

- X_0 et F_0 -mesurables.
- $\int_0^t |b_s| ds < \infty$ presque sûrement.
- $\int_0^t \sigma_s^2 ds < \infty$ presque sûrement.
- b_s et σ_s sont F_t -adaptés.

Pour tout $t \geq 0$, et σ un bon processus local, on utilise la notation formelle :

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t \text{ et } X_0 = x \quad (2.7)$$

Le coefficient b s'appelle la dérive (ou le drift) du processus, et σ coefficient de diffusion.

Le processus $t \rightarrow x + \int_0^t b_s ds$ est la partie à variation finie de $X = (X_t)_{t \geq 0}$, et le processus $t \rightarrow \int_0^t \sigma_s dB_s$ la partie martingale de X .

2.1.7 Formules d'Itô

On se donne un processus d'Itô X réel et une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ suffisamment régulière. Nous présentons deux formules d'Itô.

Première formule d'Itô

Supposons f de classe C^2 alors

$$f(X_t) = f(x) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) \sigma_s^2 ds \quad (2.8)$$

– si f est à dérivées bornées, et σ borné, le processus

$$f(X_t) - \int_0^t f'(X_s) b_s ds - \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) \sigma_s^2 ds \quad (2.9)$$

est une martingale.

Cette formule s'écrit sous forme différentielle

$$\begin{aligned} df(X) &= f'(X_t) dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t) \sigma_t^2 dt \\ df(X) &= (f'(X_t) b_t + \frac{1}{2} f''(X_t) \sigma_t^2) dt + f'(X_t) \sigma_t dB_t \end{aligned}$$

$$df(X) = f'(X_t) b_t dt + \frac{1}{2} f''(X_t) dX_t + f'(X_t) \sigma_t dB_t \quad (2.10)$$

On utilise souvent la notation :

$$df(X_t) = f'(X_t) dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t) dX_t \cdot dX_t \quad (2.11)$$

avec la table de multiplication

\times	dt	dB_t
dt	0	0
dB_t	0	dt

Deuxième formule d'Itô

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ de classe C^1 par rapport à t et de classe C^2 par rapport à x . On a

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f_x(s, X_s) ds + \int_0^t f'_x(s, X_s) dx_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''_{xx}(s, X_s) \sigma_s^2 ds \quad (2.12)$$

on peut écrire sous la forme différentielle

$$df(t, X_t) = (f'_t(t, X_t) + f'_x(t, X_t) b_t + \frac{1}{2} f''_{xx}(t, X_t) \sigma_t^2) dt + f'_x(t, X_t) \sigma_t dB_t \quad (2.13)$$

2.2 Equations différentielles stochastiques(EDS)

On se place toujours sur un espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) , et on se donne un (M.B) $B = (B_t)_{t \geq 0}$ unidimensionnel, avec sa filtration naturelle.

2.2.1 Définition (EDS)

Soit T un réel strictement positif. On considère deux fonctions $b : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\sigma : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, mesurables. On se donne également une variable aléatoire ξ , de carré intégrable et indépendante du M.B.

On cherche à résoudre l'équation différentielle stochastique :

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t) dB_t, \text{ avec } \xi = X_0 \quad (2.14)$$

En fait cette équation doit être interprétée au sens d'une équation intégrale, à savoir :

$$X_t = \xi + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s, 0 \leq t \leq T \quad (2.15)$$

Le coefficient b s'appelle la dérive tandis que la matrice $\sigma\sigma^*$ s'appelle la matrice de diffusion.

2.2.2 Solution forte d'une EDS

Une solution de l'EDS (2.10.1), X est un processus continu tel que :

- a) X est mesurable et adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$;
- b) P-p.s. $\int_0^t \{ |b(s, X_s)| + \|\sigma(s, X_s)\|^2 \} ds < \infty$
- c) P-p.s, on a $X_t = \xi + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s, 0 \leq t \leq T$
ou la filtration est défini pour tout t positif par

$$\mathcal{F}_t = \sigma \{ \xi, B_s, s \leq t \}$$

2.2.3 Existence et unicité de la solution

Théorème . On suppose qu'il existe une constante K telle que pour tout $t \in [0, T]$, x et y dans \mathbb{R}^n :

- a) condition de Lipschitz en espace, uniforme en temps :

$$|b(t, x) - b(t, y)| + \|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\| \leq K |x - y| \quad (2.16)$$

b) croissance linéaire :

$$|b(t, x)| + \|\sigma(t, x)\| \leq K(1 + |x|) \quad (2.17)$$

c) $E|\xi|^2 < \infty$.

Alors l'EDS (2.10.1) possède une unique solution. De plus cette solution vérifie:

$$E \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^2| \right) < \infty.$$

On retrouve donc le résultat classique des EDO (prendre $\sigma = 0$). Depuis il était démontré des résultats d'existence et d'unicité avec des conditions plus faibles sur b et σ .

2.2.4 Solution faible d'EDS

Nous pouvons affaiblir les hypothèses d'existence et d'unicité de la solution d'une EDS (notamment les conditions de Lipschitz) et donc introduire une nouvelle notion de solution dite faible, en opposition aux solutions fortes. Ceci a des implications importantes aussi bien pour la théorie que pour les applications.

Définition

La solution faible de l'équation (2.1) est un triplet :

(Ω, \mathcal{F}, P) , un espace de probabilité adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.

$B = (B_t)_{t \geq 0}$, est un $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ mouvement brownien (standard), X un processus $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -adapté, les processus X et B_t sont définis sur le même espace donné et vérifient :

$$P \left(\int_0^t [|\alpha(s, X_s)|^2 + |\sigma(s, X_s)|^2] ds = 1, t \geq 0 \right) \quad (2.18)$$

et

$$dX_t = \alpha(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \text{ avec } \xi = X_0$$

2.2.5 Exemple

Mouvement brownien géométrique

Le mouvement brownien géométrique est un processus de la forme :

$$X(t) = X_0 + \exp\left(\sigma B(t) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right) \quad (2.19)$$

Sa particularité est d'être un processus stochastique à valeurs positives. De ce fait il est utilisé en mathématiques financières pour modéliser l'évolution de cours de bourse, de taux d'intérêts, de produit financier. La dynamique de ce processus est la base même du modèle de Black-Scholes. Grâce à la formule d'Itô, le mouvement brownien géométrique est solution de :

$$X(t) = X_0 + \int_0^t \sigma X_s dB_s + \int_0^t \mu X_s ds$$

Chapitre 3

Résolution Numérique des Equations Différentielles Stochastiques

Introduction

L'analyse numérique est une discipline à l'interface des mathématiques et de l'informatique. Elle s'intéresse tant aux fondements qu'à la mise en pratique des méthodes permettant de résoudre, par des calculs purement numériques, des problèmes d'analyse mathématique.

Plus formellement, l'analyse numérique est l'étude des algorithmes permettant de résoudre numériquement par discrétisation les problèmes de mathématiques continues (distinguées des mathématiques discrètes).

De manière similaire aux équations différentielles ordinaires où la résolution numérique passe par une discrétisation du temps et un schéma d'approximation concernant l'intervalle de temps élémentaire sur lequel l'intégration est faite, il est nécessaire de procéder de manière similaire avec les équations différentielles stochastiques, à quelques différences près.

- Pour une équation ordinaire, la trajectoire étant déterministe, on peut contrôler avec la solution exacte la qualité de l'approximation. Avec un processus de Wiener, nous avons vu que deux trajectoires sont très différentes, cette différence s'accrois-

sant avec le temps.

- Les schémas d'approximation des méthodes de résolution des équations différentielles sont basées sur le calcul différentiel usuel. Dans le cas des équations différentielles stochastiques, ces schémas reposent sur le calcul différentiel stochastique de nature assez différente.

3.1 Présentation de EDS

Une équation différentielle stochastique est donnée sous sa forme différentielle :

$$dX_t = b(X_t, t) dt + \sigma(X_t, t) dB_t \quad (3.1)$$

Nous avons vu que si b et σ sont continues en (t, X) et lipschitziennes en X , cette équation possède une unique solution forte $X(t)$.

Ou sous sa forme intégrale

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s, s) ds + \int_0^t \sigma(X_s, s) dB_s \quad (3.2)$$

Cependant, il est parfois difficile d'obtenir une expression analytique pour cette solution. Il est donc important de développer des méthodes numériques afin de simuler des approximations de la solution de telles équations. Les schémas numériques utilisés pour les équations différentielles ordinaires peuvent, en général, être adaptés au cas aléatoire.

3.1.1 Partitionnement

Soit un échantillon (X_0, X_1, \dots, X_N) de $N + 1$ observations. Dans la pratique, ces observations (discrètes) ne sont disponibles qu'à des instants de discrétisation équidistants $\{ih\}_i^N$ pour une certaine partition $= \{t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_N = T\}$ de l'intervalle $[t_0 = 0, T]$, où $T = Nh$ représente le nombre total des observations et h le pas de discrétisation. Les instants de discrétisation équidistants sont donc $t_i = ih$, où $h = (t_i - t_{i-1}) = T/N$ avec

N assez large.

Sur la base du partitionnement, il existe plusieurs régimes asymptotiques dans la littérature.

3.1.2 Régimes asymptotiques

L'étude des propriétés asymptotiques se fait en utilisant l'un des trois schémas d'échantillonnages suivant :

1. $T \rightarrow \infty$, h est fixé et $N \rightarrow \infty$. Cela suppose que le pas de temps est fixe et la taille de l'échantillon augmente avec T . Ce type de régime est largement utilisé dans la littérature et est connu sous le nom de "Long-span asymptotics".
2. $h \rightarrow 0$, T est fixé et $N \rightarrow \infty$. Cette fois le pas h décroît et tend vers zéro tandis que T reste fixe et N continue de tendre vers l'infini. Ce régime est connu sous le nom de "In-fill asymptotics".
3. $T \rightarrow \infty$, $h \rightarrow 0$ est fixé et $N \rightarrow \infty$. Il s'agit d'une combinaison des deux premiers régimes connu sous le nom de "Double asymptotics".

3.1.3 Stabilité

on suppose maintenant que $b(0, t) = 0$ et $\sigma(0, t) = 0$ pour $t \geq 0$. Ainsi le processus $X_t = 0$ est un point d'équilibre, c'est l'unique solution de (3.1) avec $X_0 = c = 0$.

Définition

La position d'équilibre de (3.1) est dite p -stable en moyenne si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\sup_{0 \leq t < \infty} E \left| \hat{X}_n(c) \right|^p < \varepsilon, \text{ pour } |c| < \delta \quad (3.3)$$

et il est dit asymptotiquement p -stable en moyenne s'il est p -stable en moyenne et pour tout c au voisinage de $x = 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E \left| \hat{X}_t(c) \right|^p = 0 \quad (3.4)$$

Dans le cas où $p = 1$ ou $p = 2$, on parle de la stabilité en moyenne et de la stabilité en moyenne quadratique (MS-stabilité) respectivement.

En remplaçant dans la formule précédente $E |X_t(c)|^p$ par $E |X_t(c)|$, on obtient la notion de stabilité asymptotique du premier moment. Si on considère $E |X_t(c)|^2$, on parle de stabilité asymptotique de second degré.

Considérons maintenant un schéma stochastique à un pas appliqué à l'équation (3.1) avec un pas $h > 0$. Ceci conduit à l'approximation discrète

$$\hat{X}_N = \hat{X}_0 + f(t_N, \dots, h, \hat{X}_1, \dots, \hat{X}_N)$$

Où f est fonction déterministe différentielle.

On suppose aussi que le processus de discrétisation conserve le point d'équilibre $\hat{X}_N = 0$ pour $c = 0$. Les différentes notions de stabilité du point d'équilibre d'une EDS donnée peuvent être appliquées au point d'équilibre de $(\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_N)$.

Définition

Une position d'équilibre de la discrétisation $(\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_N)$ est dite MS-stable si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que $E |X_n(c)|^2 < \varepsilon$, $n \in \mathbb{N}$ pour $|c| < \delta$ et il est dit asymptotiquement MS-stable s'il est MS-stable et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left| \hat{X}_n(c) \right|^2 = 0 \quad (3.5)$$

L'analyse de la stabilité d'une méthode numérique stochastique consiste à étudier dans quelle mesure la solution numérique de cette méthode obtenue à partir de cette méthode, reproduit le comportement de stabilité de la solution exacte.

3.1.4 Convergence forte

Nous dirons qu'une approximation discrète du temps $(\hat{X}_n)_{0 \leq n \leq N}$ de la solution exacte $(X_n)_{0 \leq n \leq N}$ d'une EDS converge dans le sens fort avec l'ordre $\alpha \in (0, \infty]$ s'il existe une constante $K < \infty$ telle que :

$$E \left| X_n - \hat{X}_n \right| \leq Kh^\alpha \quad (3.6)$$

pour toute $h \in (0, 1)$.

3.1.5 Convergence faible

Nous dirons aussi qu'une approximation discrète du temps $(\hat{X}_n)_{0 \leq n \leq N}$ de la solution exacte $(X_n)_{0 \leq n \leq N}$ d'un EDS converge dans le sens faible avec l'ordre $\beta \in (0, \infty]$ si pour tout polynôme g ,il existe une constante $K(g) < \infty$ telle que : pour toute $h \in (0, 1)$

$$\left| E(g(X_n)) - E(g(\hat{X}_n)) \right| \leq K(g)h^\beta \quad (3.7)$$

3.2 Approximation de la solution d'une équation différentielle stochastique

3.2.1 Approximation d'Euler-Maruyama

C'est l'une des méthodes les plus simples pour la résolution des équations différentielles stochastiques. On n'utilise que les deux premiers termes de la formule (3.1) .

L'approximation d'Euler -Maruyama consiste a utiliser une discrétisation régulièrement espacée du temps $h = \Delta t_i$ avec $\Delta t_i = T/N$ et i varie de 0 à N .

Le schéma d'Euler est bien evidemment analogue a celui que l'on a pour les équations différentielles ordinaires

$$\hat{X}_{i+1} = X_i + b(\hat{X}_i, t_i) \Delta t_i + \sigma(\hat{X}_i, t_i) \Delta B_i \quad (3.8)$$

de condition initiale \hat{X}_0 où, \hat{X}_{i+1} est la valeur de l'approximation à l'instant de discrétisation t_i et $\Delta B_i = B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$, représentent les accroissements d'un processus de Wiener $B = \{B_t, t \geq 0\}$ pour lequel $\Delta B_i \rightsquigarrow N(0, \Delta B_i)$ avec $\Delta B_i = \sqrt{h} \varepsilon_i$ en loi, où ε_i sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi $N(0,1)$.

l'approximation d'Euler d'un processus de diffusion $X(t)$ dont la représentation est celle du modèle (3.1) est de la forme :

$$\hat{X}_{i+1} = \hat{X}_i + b(\hat{X}_i)h + \sigma(\hat{X}_i)\sqrt{h}\varepsilon_i \quad (3.9)$$

Théorème : Supposons que σ soit de classe C^2 avec ses deux dérivées bornées et que b soit lipschitzienne.

Quand $n \rightarrow +\infty$, on a $\left\| X_n - \hat{X}_n \right\|_{L^\infty([0,1])} = O(1/n^{2\alpha-1})$.

Remarquons que ce théorème n'a un intérêt que si $\alpha > 1/2$. Lorsque $1/2$, nous considérons un schéma de type Milstein d'ordre $\alpha \geq 1/2$.

3.2.2 Approximation de Milstein

La méthode de Milstein à l'ordre 1, ce qui signifie qu'il convergera vers le processus de solution stochastique correcte plus vite qu'Euler-Maruyama comme le pas Δt_i tends vers 0. La méthode de Milstein est identique à Méthode d'Euler-Maruyama s'il n'y a pas de terme X dans le partie de diffusion $b(X, t)$ de l'équation (3.1).

Par conséquent, afin d'obtenir le schéma de Milstein, nous devons rajouter au schéma

d'Euler le terme :

$$\frac{1}{2}\sigma\left(\hat{X}_i, t_i\right)\frac{\partial\sigma}{\partial x}\left(\hat{X}_i, t_i\right)\left(\Delta B_i^2 - \Delta t_i\right)$$

De là, l'approximation de Milstein du modèle est donnée comme suit :

$$\begin{aligned}\hat{X}_{i+1} &= \hat{X}_i + b\left(\hat{X}_i, t_i\right)\Delta t_i + \sigma\left(\hat{X}_i, t_i\right)\Delta B_i + \frac{1}{2}\sigma\left(\hat{X}_i, t_i\right)\frac{\partial\sigma}{\partial x}\left(\hat{X}_i, t_i\right)\left(\Delta B_i^2 - \Delta t_i\right) \quad (3.10) \\ \hat{X}_{i+1} &= \hat{X}_i + b\left(\hat{X}_i\right)h + \sigma\left(\hat{X}_i\right)\sqrt{h}\varepsilon_i + \frac{1}{2}\sigma\left(\hat{X}_i\right)\frac{\partial\sigma}{\partial x}\left(\hat{X}_i\right)\left(h\varepsilon_i^2 - h\right)\end{aligned}$$

Théorème : Supposons que σ soit de classe C^{2m+1} avec ses deux dérivées bornées et que b soit lipschitzienne.

Quand $n \rightarrow +\infty$, on a $\left\|X_n - \hat{X}_n\right\|_{L^\infty([0,1])} = O(1/n^\beta)$ où $\beta = \inf\{\alpha, (2m+1)\alpha - 1\}$

Remarque. L'approximation d'Euler -Maruyama converge fortement pour $\alpha = 0.5$ et converge faiblement à l'ordre $\beta = 1$. L'approximation de Milstein converge fortement et faiblement à l'ordre 1.

3.2.3 Approximation de Runge -Kutta d'ordre 1.5

La méthode de Runge -Kutta d'ordre 1.5 permet de simuler des solutions approchées en n'utilisant qu'un nombre des variables aléatoire générer par une distribution gaussienne. Cependant il existe des méthodes d'ordre plus élevé faussant intervenir des nombres aléatoires qui ne sont pas gaussiennes ce qui complique la résolution de EDS.

L'approximation de Rung-Kutta 1.5 est donnée comme suit :

$$\hat{X}_{i+1} = \hat{X}_i + b\left(\hat{X}_i, t_i\right)\Delta t_i + \sigma\left(\hat{X}_i, t_i\right)\Delta B_i + \frac{1}{2}\left(\sigma\left(\hat{X}'_i, t_i\right) - \sigma\left(\hat{X}_i, t_i\right)\right)\left[\Delta B_i^2 - \Delta t_i\right] / \sqrt{\Delta t_i} \quad (3.11)$$

Avec

$$\hat{X}'_i = \hat{X}_i + b(\hat{X}_i)\Delta t_i + \sigma(\hat{X}_i)\sqrt{\Delta t_i} \quad (3.12)$$

Chapitre 4

Etude de Simulation de la Solution Approchée de l'EDS de Black-scholes

Introduction

Après avoir présenté quelques méthodes numériques de résolution des équations différentielle stochastiques, nous allons comparer deux méthodes numériques par le biais de simulation. à savoir la méthode d'Euler Maruyama et la méthode de Milstein que nous allons appliquer à l'équation différentielle stochastique de Black Scholes (connue sur le nom "La formule de Black Scholes"). Afin d'atteindre cet objectif, nous allons simuler des échantillons de différents tailles pour différentes répliques. Les solutions approchées estimées sont calculées sur la base de plusieurs pas de temps de discrétisation.

4.1 Formule de Black-Scholes

En 1973, Black et Scholes ont proposé une formule, qui porte aujourd'hui leurs noms. Le terme de Black-Scholes est utilisé pour désigner deux concepts très proches :

- - Le modèle Black-Scholes ou modèle Black-Scholes-Merton qui est un modèle ma-

thématique du marché pour une action, dans lequel le prix de l'action est un processus stochastique en temps continu.

- Le modèle de Cox Ross-Rubinstein qui suit un processus stochastique en temps discret.
- Le modèle mathématique qui décrit le marché financier est à la fois simple et efficace.
- La formule différentielle de ce modèle est donnée par :

$$dX = \mu X dt + \sigma X dB_t \quad (4.1)$$

avec les constantes μ et σ . La solution de cette EDS est mouvement brownien géométrique :

$$X(t) = X_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t\right) \quad (4.2)$$

4.1.1 Simulation de la solution exacte de EDS de Black-Sholes

Nous avons simulé la solution exacte de Black-Scholes pour différentes tailles et pas de discrétisation et nombre d'échantillons et pour des paramètres constantes ($\mu = 0.25, \sigma = 0.5$).

Les Figures suivantes illustrent la solution exacte de EDS de Black-Scholes simulée :

Le premier représente la solution exacte simulée pour un échantillon de taille 100 avec un pas de discrétisation $\frac{1}{100}$.

4.1.1 Simulation de la solution exacte de EDS de Black-Scholes

Nous avons simulé la solution exacte de Black-Scholes pour différentes tailles et pas de discrétisation et nombre d'échantillons et pour des paramètres constants ($\mu = 0.25, \sigma = 0.5$).

Les Figures suivantes illustrent la solution exacte de EDS de Black-Scholes simulée :

Le premier représente la solution exacte simulée pour un échantillon de taille 100 avec un pas de discrétisation $\frac{1}{100}$.

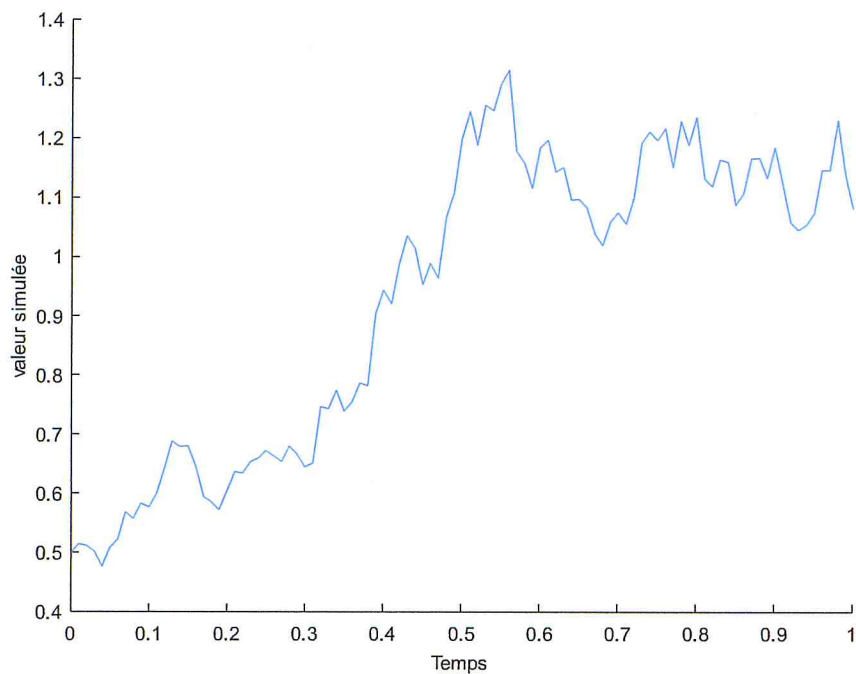


Figure1: Simulation de la solution exacte pour un échantillon de taille 100 et pas de discrétisation $h=1/100$.

4.2 Simulation de la solution approchée par des méthodes numériques

4.2.1 Simulation par la méthode d'Euler-Maruyama

Le premier figure représente la solution approchée simulée de taille 100 avec un pas de discrétisation $\frac{1}{100}$ par la méthode d'Euler-Maruyama.

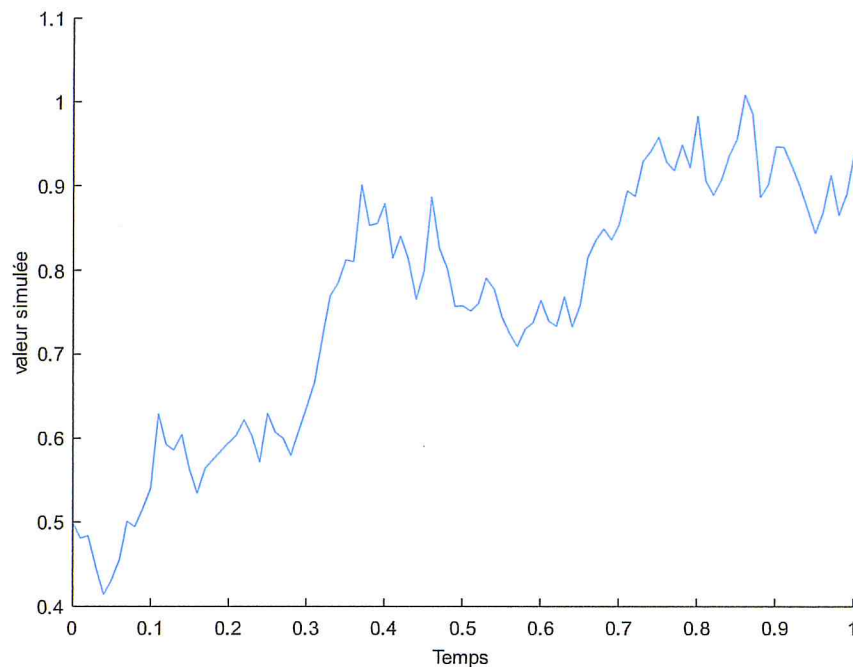


Figure3: Simulation de la solution approchée par la méthode d'Euler-Maruyama pour un échantillon de taille 100 et pas de discrétisation $h=1/100$

La deuxième figure représente la solution approchée simulée de taille 500 avec un pas de discrétisation $\frac{1}{500}$ par la méthode d'Euler-Maruyama.

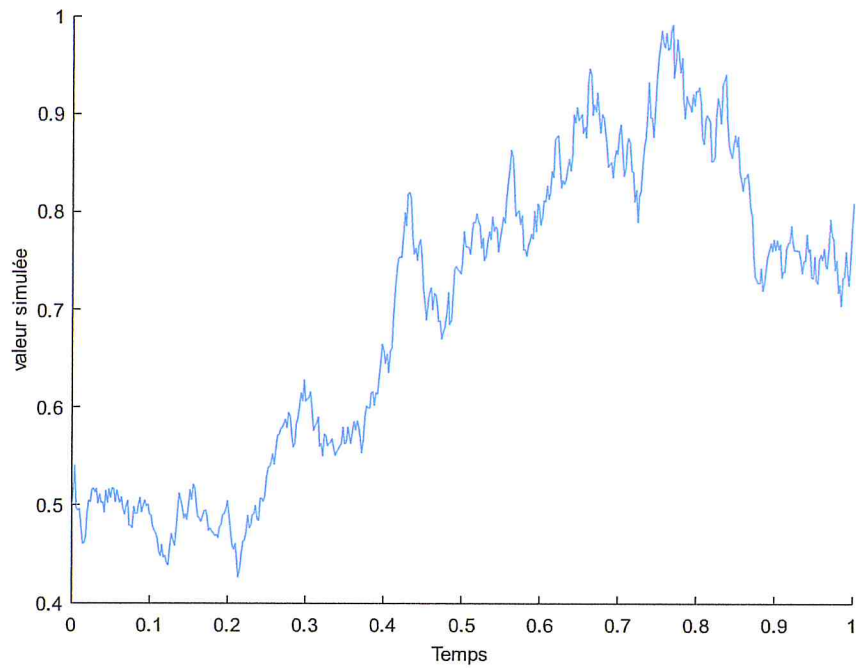


Figure 4: Simulation de la solution approchée par la méthode d'Euler-Maruyama pour un échantillon de taille 500 et pas de discrétisation $h=1/500$.

4.2.2 Simulation par la méthode de Milstein

Le figure suivante représente la solution approchée simulée de taille 100 avec un pas de discrétisation $\frac{1}{100}$ par la méthode de Milstein

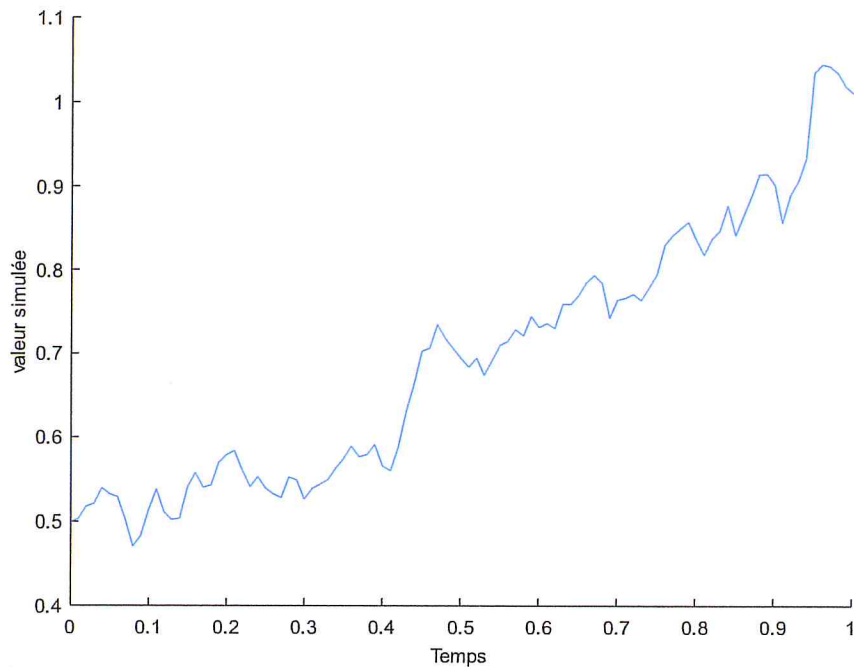


Figure5: Simulation de la solution approchée par la méthode de Milstein pour un échantillon de taille 100 et pas de discrétisation 1/100.

La quatrième figure représente la solution approchée simulée de taille 500 avec un pas de discrétisation $\frac{1}{500}$ par la méthode de Milstein.

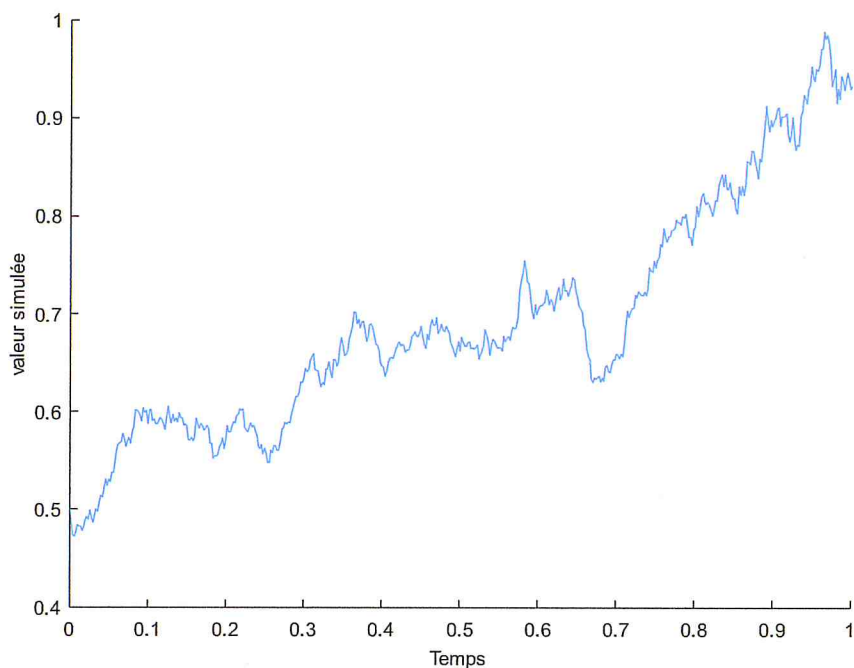
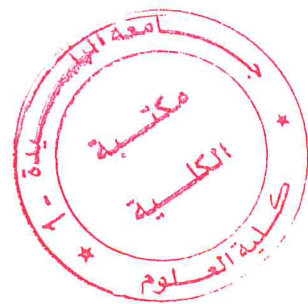


Figure 6: Simulation de la solution approchée par la méthode de Milstein pour un échantillon de taille 500 et pas de discrétisation $h=1/500$.



4.3 Etude comparative

Nous testons la sensibilité de l'équation par rapport au nombre de simulations et les pas de discrétisation dans le schéma d'Euler-Maruyama et de Milstein. Avant de présenter les résultats (voir les tableaux ci-dessous), nous traçons quelques graphes de la solution approchée et de la solution exacte dans le cas des deux schémas :

4.3.1 Comparaison de la solution exacte et la solution approchée par la méthode d'Euler-Maruyama

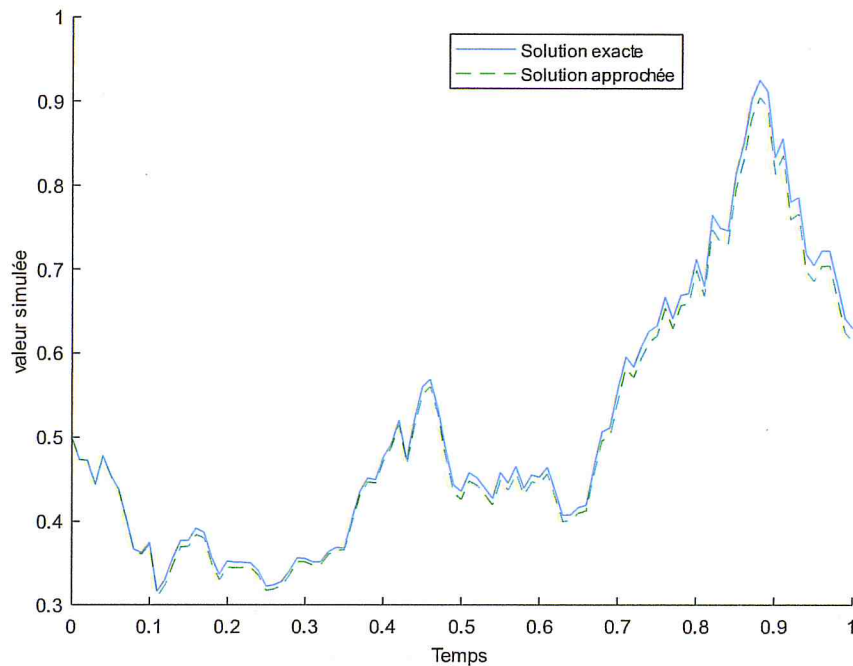


Figure7: Simulation par la méthode d'Euler-Maruyama pour un échantillon de taille 100 et pas de discrétisation 1/100.

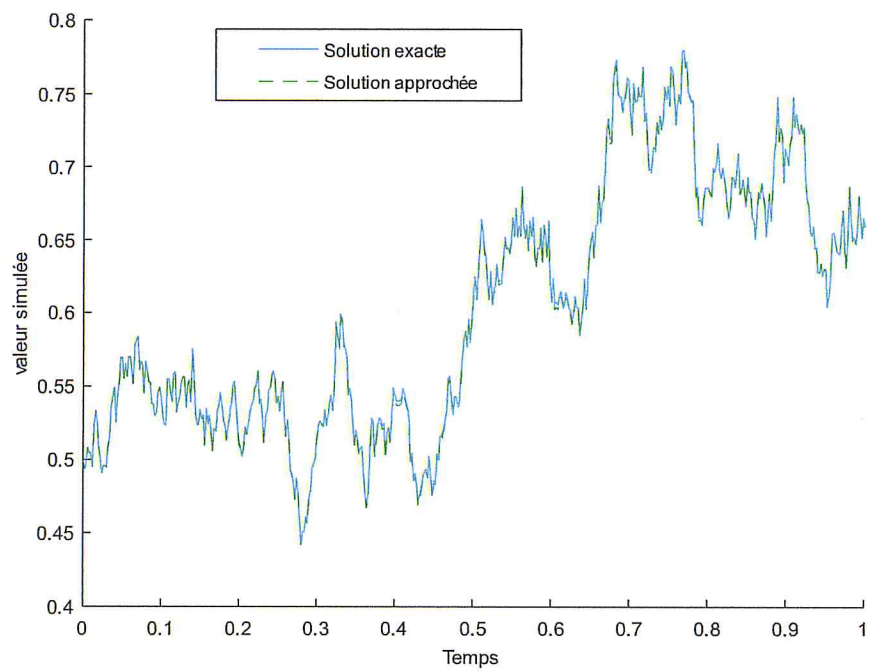


Figure 8: Simulation par la méthode d'Euler- Maruyama pour un échantillon de taille 500 et pas de discrétisation $h=1/500$.

4.3.2 Comparaison de la solution exacte et la solution approchée par la méthode de Milstein

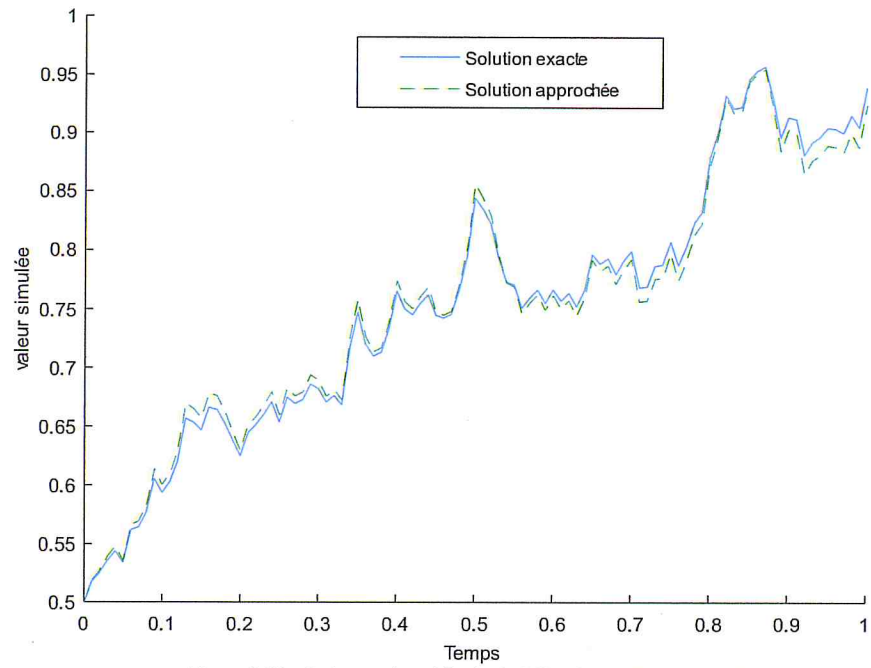


Figure 9: Simulation par la méthode de Milstein pour un échantillon de taille 100 et pas de discrétisation $h=1/100$.

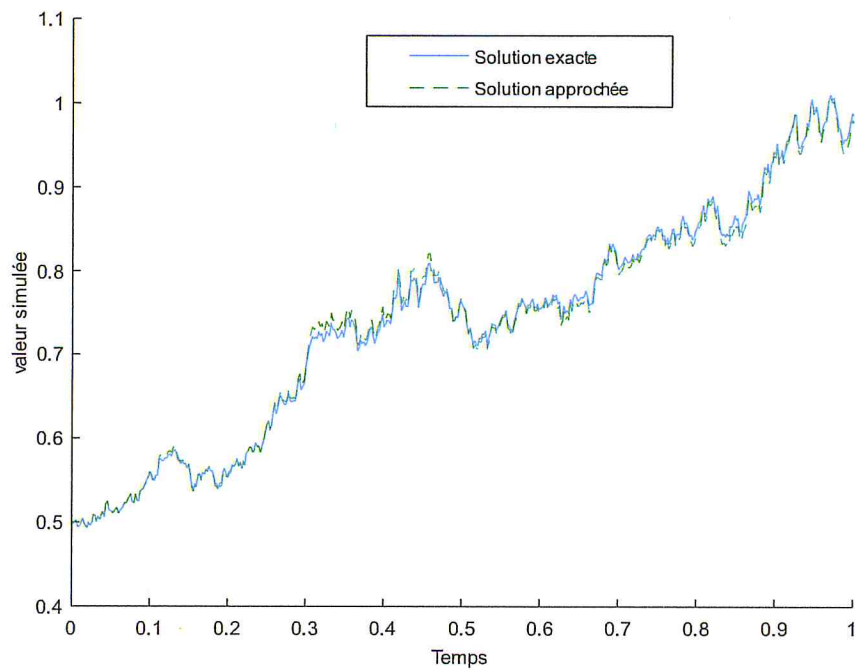


Figure10: Simulation par la méthode de Milstein pour un échantillon de taille 500 et pas de discrétisation $h=1/500$.

A partir des figures présentées ci-dessus, nous remarquons que le graphe de la solution approchée suit étroitement le graphe de la solution exacte pour les deux schémas

Notons également que le nombre de simulations et le pas de discrétisation influent sur la qualité de la solution approchée.

Pour mesurer la précision entre la solution exacte et la solution approchée, nous avons estimé l'erreurs moyenne quadratique entre les deux dernières.

Les tableaux suivants montrent les résultats obtenus :

Tableau1 : L'erreurs moyennes quadratiques a la méthode
d'Euler-Maruyama pour 100 et 500 échantillons
et pour différents pas de discrétisations

$$\left(\frac{1}{100}, \frac{1}{250}, \frac{1}{500}\right)$$

Euler-Maruyama		
Nombre de simulation	Pas de discrétisation	Moyenne quadratiques
100	$\frac{1}{100}$	0.0155
100	$\frac{1}{250}$	0.0017
100	$\frac{1}{500}$	0.0016
500	$\frac{1}{100}$	0.0012
500	$\frac{1}{250}$	0.0011
500	$\frac{1}{500}$	0.0011

Tableau 2 : L'erreurs moyennes quadratiques a la méthode
de Milstein pour 100 et 500 échantillons
et pour différents pas de discrétisations
 $(\frac{1}{100}, \frac{1}{250}, \frac{1}{500})$

Milstein		
Nombre de simulation	Pas de discrétisation	Moyenne quadratiques
100	$\frac{1}{100}$	0.0739
100	$\frac{1}{250}$	0.0487
100	$\frac{1}{500}$	0.0452
500	$\frac{1}{100}$	0.0354
500	$\frac{1}{250}$	0.0229
500	$\frac{1}{500}$	0.0047

Le tableau 1 présente les résultats obtenus pour la méthode Euler-Maruyama.

La première remarque à faire est que la solution s'améliore avec l'augmentation de la taille de l'échantillon qu'est tout à fait logique.

La seconde remarque est que la solution gagne en précision avec la décroissance du pas de la discrétisation.

Nous tirons les mêmes conclusions avec la méthode Milstein figurées dans le tableau 2.

Suivant les résultats de simulations obtenues, nous remarquons que la méthode d'Euler-Maruyama est meilleure que la méthode de Milstein dans les cas étudiés.

Conclusion Générale

Les méthodes numériques pour la résolution des équations différentielle stochastiques (EDS) sont des outils essentiels pour approximer les solutions de ces dernières qui gèrent des phénomènes aléatoires. L'utilité de ces méthodes est qu'elles permettent d'estimer les solutions approchées d'une manière précise et rapide par rapport à la recherche de les solutions exactes qui peuvent être inconnues ou inexploitables.

Dans la litiratures, nous rencontrons beaucoup de méthodes numériques qui proposent des solutions approchées qui se diffèrent par ses qualités de robustesses et ses temps d'exécutions.

Parmi ces méthodes de discrétisations approximatives, nous avons présenté l'approximation d'Euler-Maruyama , l'approximation de Milstein et l'approximation de Rung-Kutta.

Nous avons aussi simulé les solutions approchées de l'EDS de Black-Scholes par la méthode d'Euler Maruyama et la méthode de Milstein.

Dans la seconde étape, nous avons comparé ces deux méthodes .

L'étude de simulation des solutions approchées obtenues par le biais de simulation, nous a révélée que l'approximation d'Euler-Maruyama s'améliore avec la diminution du pas de discrétisation et l'augmentation la taille de échantillon et le nombre d'échantillons.

Nous avons tiré la même conclusion pour la méthode de Milstein.

La troisième conclusion obtenue par l'étude de comparaison par simulation des deux méthodes est que le schéma d'Euler-Maruyama est meilleur que le schéma de Milstein.

Le travail réalisé est loin, d'être achevé. Il reste à étudier d'autres méthodes numériques pour d'autres EDS.

La deuxième perspective de ce travail est la résolution numériques des systèmes d'équations différentielles stochastiques.

Bibliographie

- [1] P. Lévy. Processus Stochastiques et Mouvement Brownien. Gauthier-Villars, Paris, France, 1948.
- [2] D. Revuz, M. Yor : Continuous Martingales and Brownian Motion. Springer, 1999 (troisième édition).
- [3] R. Durrett, Probability : Theory and examples, Duxbury Press, Belmont, CA, 1996.
- [4] F. Comets, T. Meyre : Calcul stochastique et modèles de diffusion. Dunod, 2006.
- [5] D. Foata, A. Fuchs : Processus stochastiques (Processus de Poisson, Chaînes de Markov et Martingales). Dunod, 2002.
- [6] E. Bolthausen, Einführung in die stochastik, notes de cours, Université de Zurich, 2007.
- [7] Avner Friedman, Stochastic differential equations and applications. Vol. 1, Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1975, Probability and Mathematical Statistics, Vol. 28.
- [8] Bernt Øksendal, Stochastic differential equations, 4th ed., Universitext, Springer, Berlin, 1995.
- [9] J. Michael Steele : Stochastic calculus and financial applications.
- [10] Bergstrom, A. R. Nonrecursive models as discrete approximation to systems of stochastic differential equations. *Econometrica* 34, 1 (1966), 173–182. pages 34.
- [11] Wiener , N. (1923). Differential space. *Journal of Mathematical Physics* 2, 131-174.
- [12] Geman, H. (1998). De Bachelier à Black-Scholes-Merton. *Gaz. Math.*, 17- 30.

