REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE SAAD DAHLAB DE BLIDA

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE MASTER

Spécialité : Recherche Opérationnelle

SUR LE NOMBRE DE SUBDIVISION DE LA DOMINATION 2-RAINBOW

Présenté Par:

- M[ll] METALI Hanane
- M[me] ELKECHBOUR MERROUCHE Hayet

Devant le jury composé de

M. BLIDIA	Professeur, U. de Blida	Président
M. CHELLALI	Professeur, U. de Blida	Promoteur
S. KHELIFI	Maître de Conf B, U. de Médéa	Examinateur
N. MEDDAH	Maître Assistant A, U. de Blida	Examinatrice

Promotion : 2012-2013

Table des matiéres

RESUME

Supposons que nous avons un ensemble de 2 couleurs et à chaque sommet v d'un graphe $G = (V, E)$, nous attribuons un sous-ensemble de ces couleurs. Si nous exigeons que chaque sommet pour lequel nous avons atribué un ensemble vide il faut que dans son voisinage les 2 couleurs soient attribuées. C'est à dire, on a une application $f : V(G) \to \mathcal{P}(\{1, 2\})$ tel que pour tout $v \in V(G)$ ayant $f(v) = \emptyset$ on a $\bigcup_{u \in N(v)} f(u) = \{1, 2\}$. C'est ce qu'on appelle la fonction de domination 2-Rainbow d'un graphe G. Le paramètre correspondant $\gamma_{r2}(G)$, qui est le minimum de la somme des nombres de couleurs attribuées sur tous les sommets de $V(G)$, est appelé le nombre de domination 2-Rainbow de G.

Dans ce mémoire, nous nous sommes interessés à l'étude de l'effet de la subdivision des arêtes de G où on détermine le nombre minimum d'arêtes que l'on doit subdiviser pour faire augmenter $\gamma_{r2}(G)$. Ce nombre est noté par $sd_{\gamma_{r2}}(G)$, il est toujours supérieur ou égal à 1.

ABSTRACT

Assume we have a set of 2 colors and to each vertex of a graph G we assign an arbitrary subset of these colors. If we require that each vertex to which an empty set is assigned has in its neighborhood all 2 colors, then this is called the 2-rainbow dominating function of a graph G. It means that we have a function f that assigns to each vertex a set of colors chosen from the set $\{1,2\}$; that is, $f : V(G) \rightarrow \mathcal{P}(\{1,2\})$. If for each vertex $v \in V(G)$ such that $f(v) = \emptyset$ we have $\bigcup_{u \in N(v)} f(u) = \{1,2\}$. The corresponding parameter $\gamma_{r2}(G)$, which is the minimum sum of numbers of assigned colors over all vertices of G, is called the 2-rainbow domination number of G.

In this thesis, we are intersted in the studying of the effect of the subdivision of edges of G to determin the minimum number of edges of G that must be subdivider in order to increase the $\gamma_{r2}(G)$. This number is denoted by $sd_{\gamma_{r2}}(G)$ who is always greater or equal then 1.

ملخص

نفرض أنه لدينا مجموعة تتكون من لونين, و عند كل رأس من البيان نقوم بوضع مجموعة فرعية من هذين اللونين بحيث كل رأس معين بمجموعة خالية يجب أن يكون في الرؤوس المجاورة له كلا هذان اللونان. هذا ما يسمى بوظيفة الهيمنة 2- قوس قزح.

القيمة γ_{r2} تعني الحد الأدنى للألوان الموضوعة عند كل رأس من مجموعة الألوان المختارة من المجموعة الكلية .

في هذا البحث نتعرض لدراسة أثر تقسيم الحواف لبيان ما .من أجل إيجاد العدد الأدنى من الحواف التي يجب تقسيمها و ذالك من أجل زيادة عدد الهيمنة 2 - قوس قزح المسمى ب: بعدد تقسيم الهيمنة 2 - قوس قزح و نرمز له ب:

$sd\gamma_{r2}$ الأكبر دائما أو يساوي الواحد.

REMERCIEMENTS

Nous remercions ALLAH, le tout puissant de nous avoir donné tant de courage, de volonté et surtout de patience pour l'élaboration de ce travail.

Nous tenons à exprimer nos sincères remerciements et notre reconnaissance à notre promoteur Monsieur M.CHELLALI, Professeur à l'université de Blida de nous avoir introduit dans ce sujet, d'avoir accepté de nous encadrer, aussi que pour sa patience et ses conseils.

Nous remercions Monsieur M.Blidia professeur à l'université de Blida, d'avoir accepté de présider le jury.

Nous remercions Monsieur S.Khelifi, Maître de conférences à l'université de Médéa, d'avoir bien voulu accepter d'être notre examinateur.

Nous remercions Madame N.MEDDAH, Maître de conférences à l'université de Blida, d'avoir bien voulu accepter d'être notre examinatrice.

Nous remercions tous les membres de nos familles ainsi que nos amis pour leurs soutiens et encouragements.

INTRODUCTION GENERALE

La recherche opérationnelle est une discipline dont le but est de fournir des méthodes pour répondre à un type précis de problème, c'est-à-dire à élaborer une démarche universelle pour un type de problème qui aboutit à la ou les solutions les plus efficaces. La particularité de la recherche opérationnelle est que les méthodes proposées sont des démarches rationnelles basées sur des concepts et des outils mathématiques et/ou statistiques.

Généralement, ces méthodes sont employées sur des problèmes tels que leur utilisation "manuelle" devient impossible. C'est pourquoi, du fait qu'elles sont rationnelles, les démarches proposées par la recherche opérationnelle peuvent être traduites en programmes informatiques. La traduction d'une démarche en un programme informatique n'est pas en général facile et sans difficultés à mettre en œuvre.

L'histoire de la théorie des graphes débute peut être avec les travaux d'Euler au XVIIIème siècle et trouve son origine dans l'étude de certains problèmes, tels que celui des ponts de Königsberg, la marche du cavalier sur l'échiquier ou le problème de coloration des cartes.

La théorie des graphes s'est alors développée dans diverses disciplines telles que la chimie, la biologie, les sciences sociales. Depuis le début du XXème siècle, elle constitue une branche à part entière des mathématiques, grâce aux travaux de König, Menger, Cayley puis de Berge et d'Erdös.

De manière générale, un graphe permet de représenter la structure, les connexions d'un ensemble complexe en exprimant les relations entre ses éléments : réseau de communication, réseaux routiers, interaction de diverses espèces animales, circuits électriques, ...

Les graphes constituent donc une méthode de pensée qui permet de modéliser une grande variété de problèmes en se ramenant à l'étude des sommets et des arcs ou des arêtes.

Dans la théorie des graphes beaucoup de problèmes sont apparus, ces problèmes ont de nombreuses applications, bien au delà des histoires de pompiers et de déchetteries. Pour la domination, on peut trouver de nombreuses applications dans le domaine des réseaux (par exemple, choisir des relais radio où placer des liaisons satellite) ou dans les problèmes d'affectation et d'emplois du temps (sur un graphe biparti reliant d'un côté des candidats à leurs compétences de l'autre côté, choisir un minimum d'employés qui couvrent toutes les compétences).

Le concept de la domination trouve son origine dans le jeu d'échec, le principe est de couvrir (dominer) l'ensemble des cases par certaines pièces du jeu. L'idée semble remonter au XVIème siècle en Inde . En 1862, D. JAENISH posa le problème suivant: Déterminer le nombre de reines à placer sur l'échiquier de telle manière que chaque case soit occupée en un seul mouvement par l'une des reines. Au fait, ce problème est un problème de domination, on associe au jeu un graphe où les sommets sont les différents cases de l'échiquier et on met une arête si le déplacement de la reine est possible sinon on ne met pas d'arête. Le nombre de reines est égale à la cardinalité minimale d'un sous-ensemble dominant dans le graphe associé (graphe des reines).

La domination dans les graphes est considérée actuellement comme l'un des domaines les plus florissants de la théorie des graphes. Elle devient un domaine théorique à partir de 1958 grâce à Claude Berge et ne connaîtra sa véritable expansion qu'à partir de 1977 grâce aux travaux de Cockayne et Hedetniemi.

Qu'est ce qu'un dominant dans un graphe ?.

Un dominant dans un graphe est un sous ensemble de sommets où tout sommet du graphe est ou bien dans cet ensemble ou bien adjacent à un sommet de cet ensemble. En général, le problème de chercher l'ensemble dominant ayant la petite ou la grande taille est un problème extrêmement difficile. Le cardinal minimum d'un tel ensemble est appelé le nombre de domination.

Plusieurs types de domination que ce soit des paramètres ou des fonctions sont définis sur la base de définition précédente en imposant des propriétés supplémentaires sur les ensembles dominants. Par exemples, si on impose à ce que le dominant soit un stable alors on a la domination stable, si on impose à ce que tout sommet du graphe soit dominé au moins deux fois on a la domination double, et si on impose à ce que les sommets du dominant lui même soient couplés deux à deux on a la domination couplée. Aussi des fonctions de domination peuvent être définies, citons à titre d'exemple la fonction de domination Romaine et la fonction de domination 2-Rainbow qui a été proposée pour la résolution de la conjecture de Vizing. Ces deux dernières peuvent être définies sur n'importe quel graphe.

L'objetif principal de ce mémoire est l'étude de l'effet de la subdivision des arêtes sur le nombre de la domination 2-Rainbow, noté $sd_{\gamma r2}(G)$. Le contenu du mémoire s'étale sur trois chapitres développés comme suit:

Le premier chapitre contient les principales définitions et terminologies de la théorie des graphes utilisées dans ce memoire. On donne aussi un aperçu général sur la domination dans les graphes.

Le deuxième chapitre est consacré aux résultats existants sur l'étude de quelques paramètres de domination sur des graphes issus de la subdivision des arêtes.

Le chapitre trois a pour objectif l'étude de l'effet de la subdivision des arêtes sur le paramètre $\gamma_{r2}(G)$.

La thèse s'achève par une conclusion sur l'ensemble du travail réalisé.

CHAPITRE I

CONCEPTS FONDAMENTAUX

Dans ce chapitre, on rappelle quelques définitions et notions fondamentales relatives aux graphes auxquels nous nous intéresserons dans la suite de ce mémoire. Pour plus de détails, le lecteur peut se référer aux livres de Berge ([8, 9]) ou bien au livre de Chartrand et Lesniak ([14]).

1.1 Définitions préliminaires

Un *graphe* $G = (V, E)$ est la donnée de deux ensembles, un ensemble fini de sommets V et un ensemble fini d'arêtes E. Le cardinal de V est appelé *l'ordre* de G, noté souvent par n. Une *arête* $e \in E$ est une paire de sommets (u, v) notée par abus $e = uv$ ou bien $e = vu$, où u et v sont les extrémités de u. On dira dans ce cas que u et v sont *adjacents* et que e est *incidente* à u et v. Une *boucle* est une arête dont les deux extrémités sont confondues. Un graphe est dit *simple* s'il est sans boucles et sans arêtes multiples. Tous les graphes considérés dans cette thèse sont simples et finis. Le *voisinage ouvert* d'un sommet v est $N_G(v) = \{u \in V \mid uv \in E\}$ et le *voisinage fermé* de v est $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. Pour un sous-ensemble $S \subseteq V$, le voisinage ouvert est $N_G(S) = \bigcup_{v \in S} N_G(v)$ et le voisinage fermé $N_G[S] = N_G(S) \cup S$. S'il n'y a pas de confusion, nous écrirons $N(v)$ et $N[v]$ à la place de $N_G(v)$ et $N_G[v]$ respectivement, de même pour $N_G(S)$ et $N_G[S]$. Le *degré* d'un sommet $v \in V$ noté $\deg_G(v)$ est égal au cardinal de son voisinage ouvert. Un sommet de degré nul sera dit un *sommet isolé* et un sommet de degré égal à un sera dit *pendant* tandis que le sommet adjacent à un sommet pendant sera dit *support*, mais s'il est adjaçent à au moins deux sommets pendants dans ce cas il est dit sommet support fort. On notera par $\Delta(G)$ et $\delta(G)$ le *degré maximum* et le degré *minimum* dans G respectivement. S'il n'y a pas de confusion, on ecrira $\deg(v)$, Δ et δ pour désigner respectivement $\deg_G(v)$, $\Delta(G)$ et $\delta(G)$.

Une *chaîne* C dans un graphe $G = (V, E)$ est une séquence finie de sommets $v_1, v_2, ..., v_k$ telle que pour tout $1 \leqslant i \leqslant k-1$, $e_i = v_iv_{i+1} \in E$. L'entier $k-1$ représente la longueur de C (au sens des arêtes) et les sommets v_1 et v_k sont appelés respectivement extrémité initiale et extrémité finale de la chaîne C. Une chaîne est dite *élémentaire* (resp. *simple*) si tous ses sommets sont distincts (resp. toutes ses arêtes sont distinctes). Une *corde* est une arête reliant deux sommets non consécutifs dans une chaîne. Une chaîne minimale induite par n sommets et notée par P_n est une chaîne élémentaire sans cordes. Un *cycle* est une chaîne dont les deux extrémités sont confondues. Un cycle élémentaire C_n induit par n sommets est un cycle dont les sommets sont distincts. Comme il est illustré ci-dessous.

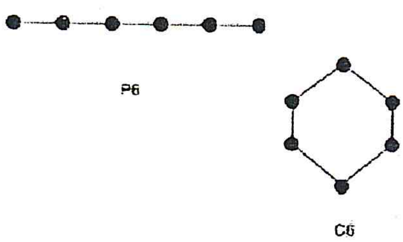

Figure 1: Une chaine P_6 et un cycle C_6

La *distance* entre deux sommets x et y dans un graphe G notée $d(x, y)$ est la longueur d'une plus courte chaîne joignant x et y. L'*excentricité* d'un sommet v dans un graphe $G = (V, E)$ est $exc(v) = \max\{d(v, w), w \in V\}$ et le *diamètre* de G noté $diam(G)$ est égal à $\max\{exc(v), v \in V\}$. Un sommet de G ayant une excentricité minimum est appelé *centre*.

1.2 Quelques graphes particuliers

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Pour un sous-ensemble $S \subseteq V$, le *sous graphe induit* par S noté par $G[S]$ est le graphe ayant S pour ensemble de sommets et dont les arêtes sont celles de E ayant leurs deux extrémités dans S. Pour un sous-ensemble $U \subseteq E$, le *graphe partiel* de G défini par U noté G_U est le graphe dont les ensembles de sommets et d'arêtes sont respectivement V et U.

Un exemple d'un graphe simple est illustré dans la figure suivante.

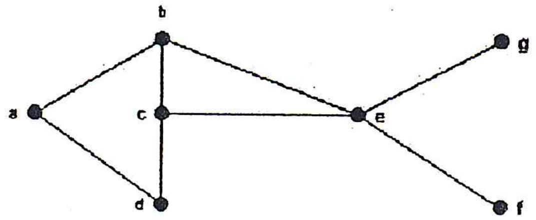

Figure 2: Graphe simple

Pour l'exemple 2, voir le sous graphe induit par l'ensemble $S = \{a, b, c, d\}$ est illustré dans la figure suivante.

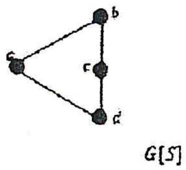

Figure 3: $G[S]$ le graphe induit par S.

Le *graphe complémentaire* de G noté $\overline{G}$ est un graphe ayant le même ensemble de sommets que G et une arête est dans $\overline{G}$ si elle n'est pas dans G. Un exemple d'un graphe G et son complémentaire $\overline{G}$ est illustré dans la figure suivante.

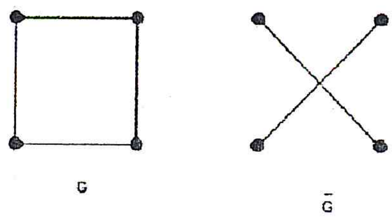

Figure 4: Un graphe G et son complémentaire $\overline{G}$

Un graphe est dit *connexe* si pour toute paire de sommets du graphe il existe une chaîne les reliant. Une *composante connexe* d'un graphe est un sous graphe maximal (au sens de l'inclusion) connexe. Voir la figure ci-dessous.

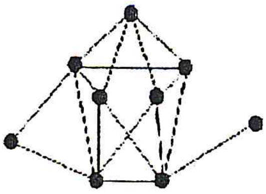

Figure 5: Un graphe connexe d'ordre 9.

Un graphe est dit *biparti* si l'on peut partitionner l'ensemble de ses sommets en deux sous-ensembles V_1 et V_2 tels que les sous graphes $G[V_1]$ et $G[V_2]$ ne contiennent aucune arête. Un graphe est biparti si et seulement si il ne contient pas de cycles de longueur impaire. On appelle graphe biparti complet, un graphe biparti tel que pour tout sommet $u \in V_1$ et $v \in V_2$, $uv \in E$. Si $|V_1| = p$ et $|V_2| = q$, alors le graphe biparti complet est noté $K_{p,q}$ avec p et q des entiers positifs. Un exemple d'un graphe biparti complet $K_{2,3}$ est illustré dans la figure suivante.

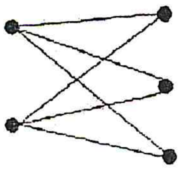

Figure 6: Un graphe biparti complet $K_{2,3}$.

Un cas particulier d'un graphe biparti complet dans lequel $|V_1| = 1$ et $|V_2| = s$ est appelé une étoile et notée $K_{1,s}$. Le sommet de V_1 est appelé centre de l'étoile. Un exemple d'une étoile $K_{1,5}$ est montré dans la figure suivante.

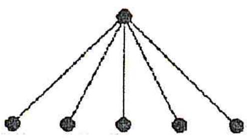

Figure 7: L'etoile $K_{1,5}$.

Une double étoile notée $S_{r,s}$ est le graphe obtenu par les deux étoiles $K_{1,r}$et $K_{1,s}$ en ajoutant une arête reliant les deux centres. Voir la figure suivante.

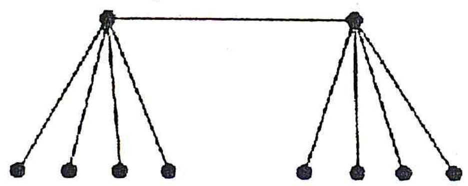

Figure 8: Une étoile double $S_{(4,4)}$.

Subdiviser une arête quelconque uv dans un graphe G veut dire la supprimer puis la remplacer par deux arêtes ux et xv, autrement dit insérer un nouveau sommet x au milieu de cette arête.

Une étoile subdivisée SS_k est une étoile dans laquelle toutes les arêtes sont subdivisées. En effet, le graphe de la Figure suivante est obtenu par la subdivision de l'etoile $K_{1,3}$.

Figure 9: Une étoile subdivisée SS_3.

Une étoile double subdivisée $S^*_{(r,k)}$ est un graphe obtenu à partir d'une étoile double, en subdivisant toutes les arêtes. En effet le graphe de la Figure 8 aprés avoir subdivisé ses arêtes est le suivant.

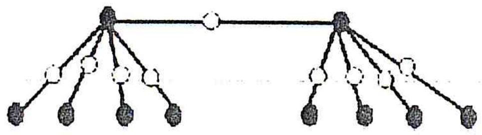

Figure 10: Une double étoile subdivisée $S^*_{4,4}$.

Un graphe dont tous les sommets ont le même degré k est appelé un graphe *k-régulier*. Ainsi les cycles élémentaires C_n sont des graphes 2-régulier. La figure suivante montre un exemple d'un graphe G régulier d'ordre 7 tel que $\delta = \Delta = 4$.

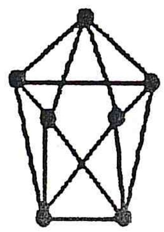

Figure 11: Un graphe 4-régulier.

Un arbre est un graphe connexe et acyclique, où acyclique veut dire sans cycles. Un arbre est un graphe simple tel que deux sommets quelconques sont reliés par une chaine élémentaire unique. Voir la figure suivante.

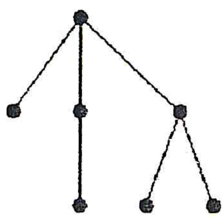

Figure 12: Un arbre T.

Une forêt est un graphe acyclique. Les composantes connexes d'une forêt sont donc des arbres.

Un *couplage* dans un graphe G est un sous-ensemble d'arêtes non incidentes deux à deux. On notera par $\beta_1(G)$ la taille maximale d'un couplage dans G. Le couplage est dit *parfait* dans G si $\beta_1(G) = n/2$. Il est à noter que $\beta_1(G)$ peut être déterminé en un temps polynômial pour tout graphe G (Voir [9]).

La couronne d'un graphe H noté par $H \circ K_1$, est obtenu à partir de H en reliant chaque sommet $v \in V(H)$ par un sommet pendant. Par exemple, le graphe $C_4 \circ K_1$ est illustré dans la figure suivante.

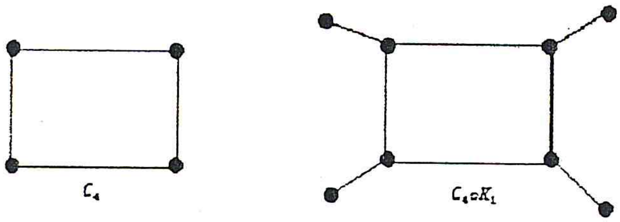

Figure 13: La couronne d'un cycle C_4.

Une chenille est un graphe simple ayant au moins un sommet pendant dont la suppression de tous ses sommets pendants donne une chaine simple.

On donne dans ce qui suit la définitions du produit cartésien.

Définition 1 *Soient* $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ *deux graphes simples, le produit Cartésien de* G_1 *et* G_2 *noté par* $G_1 \square G_2 = (V(G_1 \square G_2), E(G_1 \square G_2))$ *tel que:* $V(G_1 \square G_2) = \{(x_1, x_2)/ x_1 \in V_1, x_2 \in V_2\}$ *et* $E(G_1 \square G_2) = \{(x_1, x_2)(x_1', x_2')$ *tel que* $x_1 = x_1'$ *et* $x_2 x_2' \in E(G_2)$ *ou* $x_2 = x_2'$ *et* $x_1 x_1' \in E(G_1)\}$.

Voir la figure suivante qui illustre un produit cartésien d'un $G_1 = K_2$ et un $G_2 = K_2$.

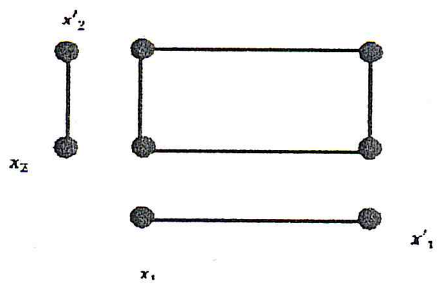

Figure 14: Le produit Cartésien de $K_2 \square K_2$.

1.3 Aperçu sur la domination

Le problème de la recherche du nombre de domination apparaît dans beaucoup de problèmes concrets de notre monde réel, pour éclairer mieux la définition relative à ce problème, on cite les exemples suivants.

Considérons un réseau de communication constitué de stations fixes et entre deux stations quelconques, il peut exister une communication directe (selon les besoins). Le problème posé est de sélectionner un ensemble minimum de stations pour installer des transmetteurs, tout en assurant pour les stations qui ne possèdent pas de transmetteurs d'avoir une liaison directe avec ceux qui possèdent un transmetteur.

Supposons qu'une région est divisée en plusieurs surfaces. Un poste militaire campant en une surface est capable de contrôler non seulement la surface qu'il occupe, mais aussi les surfaces avoisinantes (c-à-d : les surfaces qui ont une frontière en commun avec la surface occupée). Il est demandé de choisir le nombre minimum de surfaces occupées par des postes militaires pour que toute la région soit contrôlée.

Donnons maintenant la définition des ensembles dominants dans les graphes. Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Un sous-ensemble de sommets D de V est un *dominant* si tout sommet de $V - D$ est adjacent à au moins un sommet de D. Le cardinal minimum d'un ensemble dominant de G appelé *nombre de domination* est noté par $\gamma(G)$. Le cardinal maximum d'un ensemble dominant minimal de G appelé *nombre de domination supérieur* noté par $\Gamma(G)$. Comme exemple illustratif, on a:

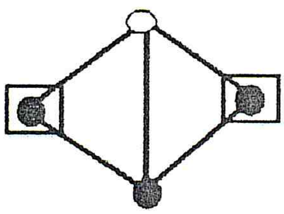

Figure 15: Un graphe G tel que $\gamma(G) = 1$ et $\Gamma(G) = 2$.

Dans la litérature, il existe d'autres définitions équivalentes aux ensembles dominants dans les graphes. En voici des exemples:

- Un ensemble $D \subseteq V$ est un dominant si pour tout $v \in V$, $|N[v] \cap D| \geqslant 1$,
- Un ensemble $D \subseteq V$ est un dominant si pour tout $v \in V - D$, $N(v) \cap D \neq \emptyset$,
- Un ensemble $D \subseteq V$ est un dominant si $N[D] = V$.

Le problème de domination posé par DEJAENISH [40] en 1862 consite à déterminer le nombre minimum de reines à placer sur l'échiquier de telle manière que chaque case soit occupée par une reine ou bien peut être occupée en un seul mouvement par l'une des reines. Par exemple pour un échiquier 5×5 le nombre minimum est 3 et pour un échiquier 8×8 le nombre minimum est 5. Le nombre minimum dans un échiquier $n \times n$ reste indéterminé jusqu'à présent. Pour plus de détails voir [25].

En 1958, Claude Berge [8] donna une formulation de la domination dans les graphes orientés. Le nombre de domination s'appelait alors coefficient de stabilité externe. L'appelation actuelle du nombre de domination est due à Ore [44] en 1962 qui utilisa la notation $\delta(G)$ pour désigner le nombre de domination dans un graphe non orienté. A l'exception de quelques resultats, la domination n'a connue sa veritable expansion qu'après la parution de l'article de Cockayne et Hedetniemi [18] en 1977. Depuis l'étude de la domination dans les graphes avec des propriétés additionnelles a donné naissance à plusieurs paramètres de domination dont la résolution est NP-Complet (Voir [10, 42, 43]).

En 1990, Un numéro spécial de la revue Discrete Mathematics édité par Hedetniemi et Laskar (Voir [38]) a été consacré entièrement à la domination dans les graphes. Dans ce numéro, Hedetniemi et Laskar ont inclus une liste de quelques 400 références.

On dénombre actuellement quelques 100 types de domination (certains ont été définis avec des applications pratiques) et plus de 2000 références dans le domaine, on peut citer par exemple la domination double, couplée, stable, totale... Plusieurs études ont été faites sur

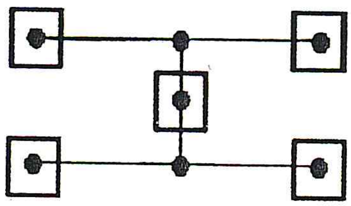

Figure 16: Un graphe G tel que $\gamma(G) = i(G) = 2$ et $\alpha(G) = \Gamma(G) = 5$.

la domination et qui consistent à déterminer les propriétés de différents types de dominants ainsi que des bornes supérieures ou inférieures concernant ces paramètres. Pour un aperçu détaillé, le lecteur peut consulter les deux livres de Haynes, Hedetniemi et Slater ([28],[29]).

On note que la domination trouve un champ d'application très large surtout en informatique, on peut citer par exemple les réseaux de communication, les problèmes de localisations, les microprocessus...

1.4 Quelques types de domination

En raison de la large variétés des problèmes liés à la domination, nous allons nous restreindre dans cette partie uniquement a quelques types de domination.

La notion de stabilité dans les graphes a été liée en premier aux ensembles dominants. Un sous-ensemble $S \subseteq V$ est dit *stable* de G si les sommets de S sont non adjacents deux à deux. Le cardinal minimum (resp. maximum) d'un ensemble stable maximal de G noté $i(G)$ (resp. $\alpha(G)$) est appelé le *nombre de domination stable* (resp. *le nombre de stabilité)* de G. En effet, il est facile de voir que tout ensemble stable est maximal si et seulement si c'est un dominant. Par conséquent la stabilité maximale peu être vue comme un cas particulier des ensembles dominants. Dans ce cas, on a pour tout graphe G l'inégalité suivante $\gamma(G) \leqslant i(G) \leqslant \alpha(G) \leqslant \Gamma(G)$.

La figure suivante illustre un exemple d'un graphe G tel que $\gamma(G) = i(G) = 2$ et $\alpha(G) = \Gamma(G) = 5$.

En 1980, Cockayne, Dawes et Hedetniemi introduisent les ensembles dominants totaux (voir [36]) qui sont définis comme étant des ensembles dominants sans sommets isolés, c'est à dire que chaque sommet de l'ensemble possède au moins un autre voisin dans le même ensemble. Le cardinal minimum d'un ensemble dominant total $\gamma_t(G)$ est appélé le *nombre de domination totale*. Dans ce cas pour tout graphe G sans sommets isolés on a $\gamma_t(G) \geqslant \gamma(G)$. Comme exemple pratique, on cite l'exemple suivant.

Considérons un groupe d'individus. On veut sélectionner parmi ce groupe un comité restreint tel que toute personne du groupe ait des affinités avec au moins un membre de ce comité. Si nous modélisons ce problème par un graphe G dont l'ensemble des sommets représente le groupe d'individus et, deux sommets sont adjacents s'il y a affinités entre les personnes représentées. Alors le comité restreint sélectionné est un dominant total du graphe G.

Figure 17: Un graphe tel que $\gamma_t(G) = 5$.

La domination couplée a été introduite par Haynes et Slater en 1998 (voir [35]). Un sous ensemble S de V est dit ensemble dominant couplé de G si S est un dominant de G et si le sous graphe induit par S admet un couplage parfait. Le nombre de domination couplée, noté $\gamma_{pr}(G)$, désigne la cardinalité minimum d'un ensemble dominant couplé. Comme exemple pratique, on cite le suivant.

Considérons un village au sein duquel on veut placer un groupe de vigiles qui assure la protection de ses voisins tout en s'assurant lui même une protection mutuelle avec un collègue. Le plus petit groupe de vigiles représente un ensemble dominant couplé minimum du graphe représentatif des habitants du village. Voir la figure suivante.

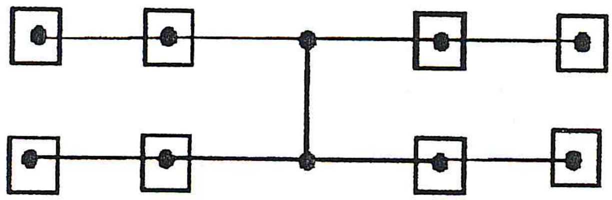

Figure 18: Un graphe tel que $\gamma_{pr}(G) = 8$.

Un sous ensemble S de $V(G)$ est un dominant connexe si le sous graphe induit par S est connexe. Le nombre $\gamma_c(G)$ est le cardinal minimum d'un ensemble dominant connexe minimal. La figure suivante illustre un exemple d'un graphe G contenant un dominant connexe minimum tel que $\gamma_c(G) = 6$.

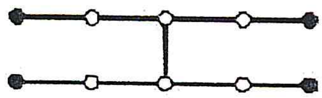

Figure 19: Un graphe tel que $\gamma_c(G) = 6$.

Un autre concept qui est la domination double introduite par Harary et Haynes en 2000 (voir [26]). Un sous ensemble S de V est dit ensemble dominant double de G si tout sommet de V est dominé par au moins deux sommets de S , autrement dit si v est un sommet qui n'est pas dans S alors v admet au moins deux voisins dans S et si v est un sommet de S alors v admet au moins un voisin dans S. Le nombre de domination double, noté $\gamma_{\times 2}(G)$, désigne le cardinal minimum d'un ensemble dominant double de G.

Si nous reprenons l'exemple précédent, en spécifiant que tout villageois soit protégé par au moins deux vigiles et que chaque vigile soit lui même protégé par un de ses collègues, alors le plus petit groupe constitué est un ensemble dominant double minimum du graphe représentatif des habitants du village.

Voir la figure suivante.

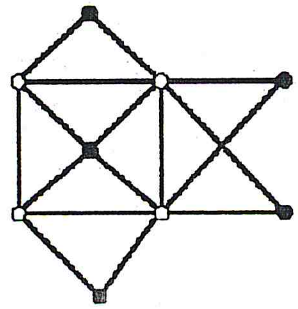

Figure 20: Un graphe tel que $\gamma_{\times 2}(G) = 4$.

Un ensemble S est dit 2-dominant si tout sommet v de $V - S$ a au moins deux voisins dans S. Le nombre de 2-domination est le cardinal minimum d'un ensemble 2-dominant de G.

Voir l'exemple illustré dans la figure ci-dessous.

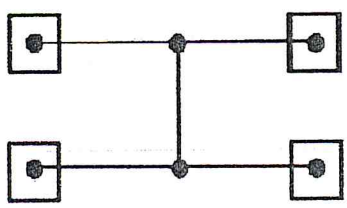

Figure 21: Un graphe tel que $\gamma_2(G) = 4$.

CHAPITRE II

L'EFFET DE LA SUBDIVISION DES ARÊTES SUR QUELQUES PARAMÈTRES DE DOMINATION

Dans ce chapitre, nous allons étudier quelques paramètres de dominations dans les graphes modifiés par la subdivision des arêtes. Nous rappelons que tous les graphes considérés dans ce mémoire sont finis, simples et non orientés.

2.1 Le nombre de subdivision de la domination

Arumugam a été le premier à étudier la domination dans les graphes sous l'effet de la subdivision des arêtes. Il a donné la définition suivante.

Définition 2 (Arumugam [3]) *Le nombre de subdivision de la domination d'un graphe G noté $sd_\gamma(G)$ est le nombre minimum d'arêtes que l'on doit subdiviser (sachant qu'une arête ne peut être subdiviser qu'au plus une fois) pour faire augmenter le nombre de domination $\gamma(G)$.*

Nous présentons ci-dessous quelques résultats importants obtenus par Arumugam.

Théorème 3 (Arumugam [3]) *pour tout arbre T d'ordre $n \geq 3$*

$$1 \leq sd_\gamma(T) \leq 3$$

On propose un autre exemple d'une chaine P_n où $sd_\gamma(P_n) \geq 2$ pour $n \equiv 1[3]$. A titre d'exemple $\gamma(P_5) = \gamma(P_6) = 2 < \gamma(P_7) = 3$ d'où $sd_\gamma(P_5) = 2$.

Les graphes illustrés dans les figures ci-dessous sont des arbres vérifiant $sd_\gamma(T) = 1, 3$ réspectivement. Dans tout ce qui suit pour les graphes illustrés, les sommets marqués en blanc sont les sommets issus de la subdivision.

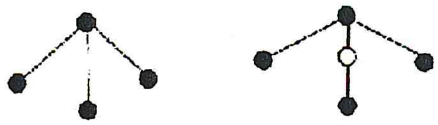

Figure 22: Un arbre tel que $sd_\gamma(T) = 1$.

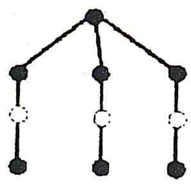

Figure 23: Un arbre tel que $sd_\gamma(T) = 3$.

Haynes et al. ont déterminé une borne pour le paramètre $sd_\gamma(G)$ pour quelque graphes particuliers.

Théorème 4 (Haynes et al. [30]) *Pour tout graphe connexe G d'ordre $n \geq 3$, soit uv une arête de $E(G)$ telle que $\deg_G(u) \geq 2$ et $\deg_G(v) \geq 2$. Alors $sd_\gamma(G) \leq \deg_G(u) + \deg_G(v) - 1$.*

Pour les graphes réguliers, on a:

Corollaire 5 (Haynes et al. [30]) *Pour tout graphe k-régulier G on a, $sd_\gamma(G) \leq 2k-1$.*

La figure 24 montre un exemple de graphe régulier qui est le cycle C_4 atteignant la borne du Corollaire 5.

Figure 24: Un graphe 2-regulier G tel que $sd_\gamma(G) = 3$.

Pour les graphes complets, les graphe ayant un sommet v tel que $\deg_G(v) = n - 1$ ou les étoiles nous avons toujours $\gamma(G) = 1$. On a le résultat suivant.

Proposition 6 (Haynes et al. [30]) *Si G est un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$ et $\gamma(G) = 1$, alors:* $sd_\gamma(G) = 1$.

On propose le graphe de la figure 25 comme exemple pour la Proposition 6.

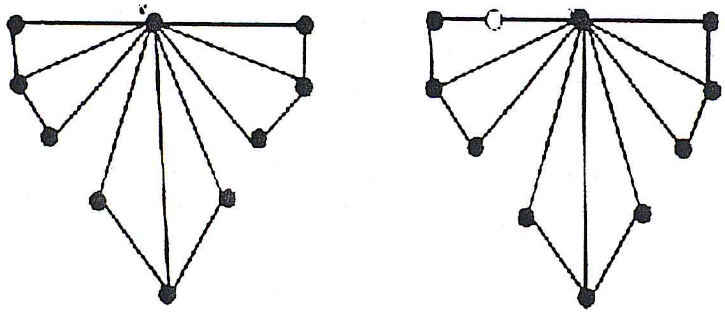

Figure 25: Un graphe G tel que $\gamma(G) = 1$ et $sd_\gamma(G) = 1$.

Théorème 7 (Haynes et al. [30]) *Si G est un graphe avec $\gamma(G) = k$ et $\beta_1(G) \geq k+1$, alors $sd_\gamma(G) \leq k+1$.*

Nous proposons ci-dessous un exemple d'un graphe G tel que $\gamma(G) = 2 < \beta_1(G) = 3$ où $sd_\gamma(G) = 2$.

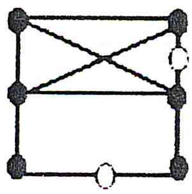

Figure 26: Un graphe G tel que $\gamma(G) = 2 < \beta_1(G) = 3$ où $sd_\gamma(G) = 2$.

Proposition 8 (Haynes et al. [30]) *Si G est un graphe ayant $\gamma(G) = \beta_1(G) = \frac{n}{2}$, alors $sd_\gamma(G) \leq 3$.*

La figure 27 montre un exemple de graphe atteignant la borne supérieur de la Proposition 8.

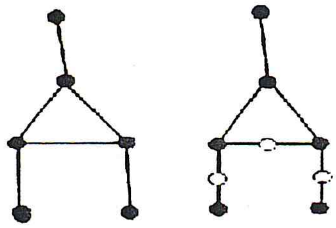

Figure 27: Un graphe G tel que $\gamma(G) = \beta_1(G) = \frac{n}{2}$, et $sd_\gamma(G) = 3$.

Il est à noter qu'un sommet v est dit triangulé si tout voisin u de v est contenu dans un triangle avec v, c'est équivalent à dire q'un sommet v est triangulé si le sous graphe $G[N(v)]$ ne contient pas un sommet isolé. On dit qu'un graphe G est triangulé s'il possède au moins un sommet triangulé, G est complètement triangulé si tout sommet de $V(G)$ est triangulé.

Proposition 9 (Haynes et al. [30]) *Pour tout graphe G complètement triangulé:*

$$sd_\gamma(G) \leq \delta(G) + 1$$

Un sommet v est dit simplicial si le sous graphe induit par $G[N[v]]$ est complet. Comme conséquence à la Proposition précedente on a:

Corollaire 10 *Si G est un graphe contenant un sommet simplicial u tel que $\deg_G(u) \geq 2$, alors $sd_\gamma(G) \leq \deg_G(u) + 1$.*

Rappelons qu'une clique est un sous graphe complet d'un graphe G.

Théorème 11 (Haynes et al. [30]) *Si G est un graphe contenant une clique ayant éxécte-ment deux sommets simpliciaux et au moins deux autres non simpliciaux, alors $1 \leq sd_\gamma(G) \leq 2$.*

La figure suivante propose deux graphes satisfaisant ce théorème où les deux bornes sont atteintes.

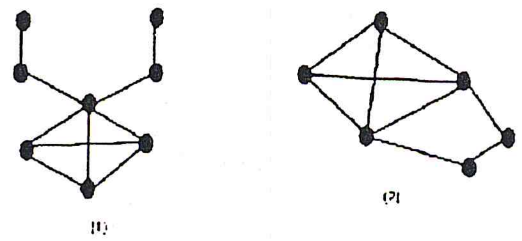

Figure 28: Le graphe (1), $sd_\gamma(G) = 1$ et pour le graphe (2), $sd_\gamma(G) = 2$.

Théorème 12 (Haynes et al. [30]) *Si G est un graphe connexe possèdant un sommet u triangulé, alors $sd_\gamma(G) \leq \deg_G(u) + 1$.*

Un k-arbre est un graphe qui peut être obtenu à partir d'un graphe complet en k sommets, en ajoutant un nouveau sommet et en l' attachant à tous les sommets du sous graphe complet pour le graphe existant d'ordre k. On répète la même opération pour chaque attachement des sommets. Il est façile de voir qu'un k-arbre est complètement triangulé. Pour $k = 1$ on un arbre. Si $k = 2$, où a un 2-arbre. Voici un exemple de 2-arbre.

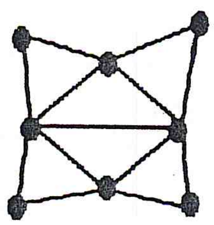

Figure 29: Un 2-arbre.

Comme conséquence de Théorème 12, on a le Corollaire suivant sur les k-arbre.

Corollaire 13 *Pour tout k-arbre, $k \geq 2$, $sd_\gamma(G) \leq k + 1$.*

Nous cloturons cette partie par quelques problèmes ouverts que l'on a collecté..

Problème 14 (Favaron et al. [19]) *Caractériser les classes des graphes ayant* $sd_\gamma(G) = 1$.

Problème 15 (Favaron et al. [19]) *Est ce que* $sd_\gamma(K_t \times K_t \times K_t) = 5$.

Problème 16 (Favaron et al. [19]) *Caractériser les classes des graphes pour lesquels* $sd_\gamma(G) = \gamma(G) + 1$.

Problème 17 (Favaron et al. [19]) *Est ce que c'est vria que pour tout graphe* G *de degré minimum* $\delta(G) \geq 2$, $sd_\gamma(G) \leq \delta(G) + 1$.

2.2 Le nombre de subdivision de la domination totale

Le concept de subdivision de la domination totale a été introduit pour la première fois par Velammal dans sa thèse Ph. D [47]. Il a donné la définition suivante.

Définition 18 *Le nombre de subdivision de la domination totale noté* $sd_{\gamma t}(G)$ *est le nombre minimum d'arêtes qu'il faut subdiviser pour faire augmenter le nombre de domination totale.*

Pour certaines classes des graphes $sd_{\gamma t}$ est majoré par un constante c par exemple $c = 3$ pour les cycles, les arbres et les 2-arbres ou pour les graphes outer planaires maximaux, $c = 4$ pour les grilles, $c = 2k - 1$ pour les graphes k-réguliers. Il est montré dans [22].

1. $sd_{\gamma t}(G) \leq n - \gamma_t(G) + 1$, La borne est atteinte seulement pour les P_3, C_3, K_4, P_6, C_6;
2. $sd_{\gamma t}(G) \leq \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$, La borne est atteinte seulement pour les P_3, C_3, $K_{1,3} + e$, P_6, $K_4 - e$, K_5;
3. $sd_{\gamma t}(G) \leq n - \delta + 2$, La borne est atteinte seulement pour les $K_n (n \geq 4)$;
4. $sd_{\gamma t}(G) \leq 2\beta_1(G)$ quand $\delta(G) \geq 2$, La borne est atteinte seulement pour le C_3.

Observation 19 *Soit* G *un graphe connexe d'ordre* ≥ 3 *et* $S \subseteq E(G)$. *Si* G' *est un graphe obtenu à partir de* G *en subdivisant une arête quelconque de* S *,alors* $\gamma_t(G') \geq \gamma_t(G)$.

Dans [22] Favaron et al. ont montré que:

Théorème 20 (Favaron et al. [22]) *Pour tout graphe connexe d'ordre $n \geq 3$ tel que $\gamma_t(G) \leq \beta_1(G)$, on a $sd_{\gamma t}(G) \leq \gamma_t(G) + 1$.*

Théorème 21 (Haynes et al. [32]) *Pour tout graphe connexe G, soit u, v deux sommets adjacents chacun de degré au moins 2. Alors $sd_{\gamma t}(G) \leq \deg_G(u) + \deg_G(v) - |N(u) \cap N(v)| - 1 = |N(u) \cap N(v)| - 1$.*

Rappelons qu'une distance entre deux sommets est la longueur de la plus courte chaine joignant ces deux sommets. On note par $N_2(v)$ l'ensemble des sommets à distance de 2 et par $d_2(v) = |N_2(v)|$.

Théorème 22 (Haynes et al. [33]) *Si G un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$, alors*

$$sd_{\gamma t}(G) \leq 3 + \min\{d_2(v); v \in V(G) \text{ et } \deg_G(v) \geq 2\}$$

Théorème 23 (Haynes et al. [33]) *Si G est un graphe d'ordre $n \geq 3$ ayant $\gamma_t(G) = 2$ ou 3, alors $1 \leq sd_{\gamma t}(G) \leq 3$.*

Comme exemple illustratif, voir la figure suivante.

Figure 30: Un graphe d'ordre 5 ayant $\gamma_t(G) =$ 3, tel que $sd_{\gamma t}(G) = 1$.

Théorème 24 (Favaron et al. [22]) *Pour tout graphe connexe d'ordre au moins 3 tel que $\delta = 1$, on a $sd_{\gamma t}(G) \leq \gamma_t(G)$.*

Voir la figure suivante.

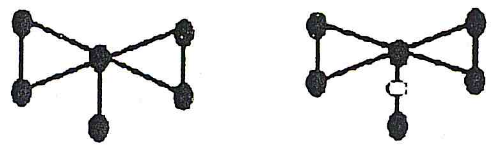

Figure 31: Un graphe avec $\delta = 1$, tel que $sd_{\gamma t}(G) = \gamma_t(G) = 1$.

Récemment, Karami et al. ont prouvé que pour tout graphe connexe et d'ordre au moins 3. on a

$$sd_{\gamma t}(G) \leq 2\gamma_t(G) - 1$$

La borne peut être atteinte si le graphe est isomorphe à $K_n(n \geq 4)$. [22]. Ils ont posé le problème suivant.

Problème 25 (Karami et al. [41]) *Caractériser les graphes ayant* $sd_{\gamma t}(G) = 2\gamma_t(G) - 1$.

Pour conclure cette partie voici quelques conjecutres.

Conjecture 26 (Favaron et al. [23]) *Pour tout graphe connexe d'ordre au moins* $3, sd_{\gamma t}(G) \leq \beta_1(G) + 1$.

Conjecture 27 (Favaron et al. [23]) *Pour tout graphe connexe d'ordre au moins* $3, sd_{\gamma t}(G) \leq \gamma_t(G) + 1$.

Conjecture 28 (Favaron et al. [23]) *Pour tout graphe connexe d'ordre au moins* $3, sd_{\gamma t}(G) \leq \frac{n+1}{2}$.

2.3 Le nombre de subdivision de la domination double

La notion de subdivision de la domination double a été intrduite en 2007 par Atapour et al.[4]. Il ont donné la définition suivante.

Définition 29 *Le nombre de subdivision de la domination double noté $sd_{\gamma\times2}(G)$ est le nombre minimum d'arêtes que l'on doit subdiviser pour faire augmenter le nombre de la domination double sachant qu'une arête ne peut être subdivisée qu'au plus une seule fois.*

Proposition 30 *La chaine P_n et le cycle C_n vérifient:*

$$sd_{\gamma\times2}(P_n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \equiv 1[3]. \\ 1 \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad sd_{\gamma\times2}(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \equiv 2[3] \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$$

Théorème 31 (Atapour et al. [4]) *Pour tout arbre T non trivial et sans support fort, on a $1 \leq sd_{\gamma\times2}(T) \leq 2$.*

Ces bornes sont atteintes pour les chaines, les arbres ayant un support fort ainsi pour la classe des chenilles. La figure ci-dessous montre un exemple d'une chenille.

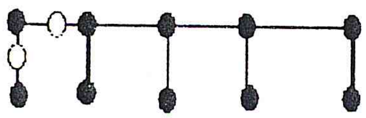

Figure 32: Une chenille tel que $sd_{\gamma\times2}(G) = 2$

Théorème 32 (Atapour et al. [4]) *Pour tout grphe G d'ordre $n \geq 3$ ayant au moins un support fort alors, on a $sd_{\gamma\times2}(T) = 1$.*

Voir la figure ci-dessous.

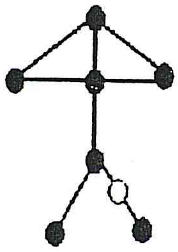

Figure 33: Un graphe G ayant un support fort tel que $sd_{\gamma\times 2}(T) = 1$.

Proposition 33 (Atapour et al. [4]) *Pour tout graphe G d'ordre $n \geq 4$ ayant au moins un support (faible) simple le alors, on a* $1 \leq sd_{\gamma\times 2}(T) \leq 2$.

Voir la figure ci- dessous.

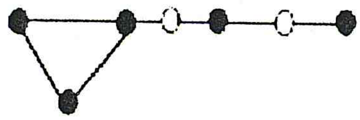

Figure 34: Un graphe G ayant un support simple tel que $sd_{\gamma\times 2}(G) = 2$.

Proposition 34 (Atapour et al. [4]) *Pour tout graphe G d'ordre $n \geq 2$ tel que $\gamma_{\times 2} = 2$, alors on a $sd_{\gamma\times 2}(T) = 1$.*

La borne est atteinte pour un C_3.

Proposition 35 (Atapour et al. [4]) *Pour tout graphe G d'ordre $n \geq 4$ sans support fort tel que $\gamma_{\times 2}(G) = n$, on a $sd_{\gamma\times 2}(T) = 2$.*

Voir la figure suivante.

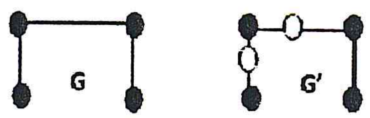

Figure 35: Un graphe G sans support fort tel que $\gamma_{\times 2}(G) = 4$ et $sd_{\gamma\times 2}(G) = 2$.

Concernant les graphes bipartis complets, nous présentons le résultat suivant.

Proposition 36 (Atapour et al. [4]) *Soit G un graphe biparti complet $K_{r,s}$ avec $r \geq 2$ et $s \geq 2$, alors on a $sd_{\gamma\times 2}(T) = 1$.*

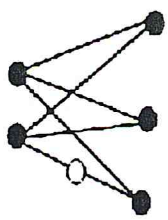

Figure 36: Un graphe biparti complet $K_{2,3}$ tel que $sd_{\gamma\times 2}(T) = 1$.

Proposition 37 (Atapour et al. [4]) *Pour tout graphe G d'ordre au moins deux contenant un dominant double, on a $sd_{\gamma\times 2}(T) = 1$.*

Nous terminons par cette conjecture.

Conjecture 38 (Haynes et al. [27]) *Pour tout graphe G d'ordre $n \geq 2$, on a $1 \leq sd_{\gamma\times 2}(T) \leq 2$.*

2.4 Le nombre de subdivision de la domination couplée

On commence par donner la définition suivante.

Définition 39 *Le nombre de subdivision de la domination couplée noté $sd_{\gamma pr}(G)$ est le nombre minimum d'arêtes qu'il faut subdiviser pour faire augmenter le nombre de domination couplée.*

Théorème 45 (Favaron et al. [21]) *Si G est un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$ alors $sd_{\gamma pr}(G) \leq n-1$.*

Cette borne est atteinte si et seulement si G est un C_3, C_5 ou G est une étoile subdivisée.

A la fin de cette partie, nous présentons les deux problèmes suivants.

Problème 46 (Favaron et al. [21]) *Est ce que c'est vrai que pour tout graphe connexe G d'ordre $n \geq 3$, $sd_{\gamma pr}(G) \leq 2\beta_1(G)(\leq n)$*

Problème 47 (Favaron et al. [21]) *Dire si c'est vraie que si G est un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$ alors $sd_{\gamma pr}(G+e) \leq sd_{\gamma pr}(G)$ pour toute arête $e \in E(G)$.*

2.5 Le nombre de subdivision de la 2-domination

Tout d'abord, on donne la définition suivante.

Définition 48 *Le nombre de subdivision de la 2-domination noté $sd_{\gamma 2}(G)$ est le nombre minimum d'arêtes qu'il faut subdiviser pour faire augmenter le nombre de 2-domination.*

Dans ce qui suit, on donne une majoration pour le paramètre $sd\gamma_2$ en terme de degré minimum δ et $\deg_G(v)$.

Théorème 49 (Atapour et al. [6]) *Soit G un graphe connexe, si $v \in V(G)$ tel que $\deg_G(v) \geq 2$, alors $sd\gamma_2(G) \leq \deg_G(v)$.*

Voir la figure suivante.

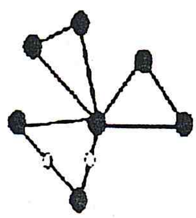

Figure 38: Un graphe G tel que $\deg(v) = 2$ et $sd\gamma_2(G) = 2$.

Corollaire 50 *Pour tout graphe connexe G ayant $\delta \geq 2$, on a $sd\gamma_2(G) \leq \delta$.*

Voir la figure 38.

Théorème 51 (Atapour et al. [6]) *Soit G un graphe connexe contenant deux sommets adjacents u et v, chacun de degré au moins deux, pour lequel $|N(u) \cap N(v)| \neq 1$. Alors $sd\gamma_2(G) \leq \deg_G(u) + \deg_G(v) - |N(u) \cap N(v)| - 2$.*

Pour la classe des graphes complets et les graphes bipartis complets, nous avons les deux résultats suivants.

Proposition 52 (Atapour et al. [6]) *Soit K_n un graphe complet d'ordre $n \geq 3$, alors $sd\gamma_2(K_n) = 2$.*

Proposition 53 (Atapour et al. [6]) *Soit $K_{m,n}$ un graphe biparti complet d'ordre $n, m \geq 4$, alors on a $sd\gamma_2(K_n) = 3$.*

Pour conclure cette partie, on présente les problèmes suivants.

Problème 54 (Atapour et al. [6]) *Caractériser les arbres T tel que $sd\gamma_2(T) \leq 2$.*

Problème 55 (Atapour et al. [6]) *Est ce que c'est vrai que pour tout graphe connexe d'ordre $n \geq 3$, $1 \leq sd\gamma_2(G) \leq 3$.*

2.6 Le nombre de subdivision de la fonction de domination Romaine

Soit f une application qui affecte pour chaque sommet d'un graphe $G = (V, E)$ un sous ensemble de l'ensemble $\{0, 1, 2\}$, c'est à dire, $f : V(G) \to \{0, 1, 2\}$ tel que pour tout $v \in V(G)$ ayant $f(v) = 0$, il existe au moins un sommet $u \in N(v)$ tel que $f(u) = 2$. La fonction f est dite une fonction de domination Romaine, FDR, de G. Le poids de la fonction f est $p(f) = \sum_{v \in V(G)} f(v)$. Le nombre de domination Romaine $\gamma_R(G)$ est le poids minimum parmi toutes les FDR de G. La fonction de domination Romaine a été introduite par Cockayne et Alan, et elle a été proposée par Ian Stewart [46].

Dans cette partie, on étudie l'effet de la subdivision des arêtes sur le paramètre γ_R. On donne la définition suivante.

Définition 56 *Le nombre de subdivision de la Domination Romaine d'un graphe noté $sd_{\gamma_R}(G)$ est le nombre minimum d'arêtes que l'on doit subdiviser pour faire augmenter le nombre de subdivision de la domination Romaine.*

Pour la classe des graphes complets et les graphes bipartis complets, on a les résultats suivants.

Proposition 57 (Atapour et al. [5]) *Si K_n est un graphe complet d'ordre $n \geq 3$, alors:* $sd_{\gamma_R}(K_n) = 1$.

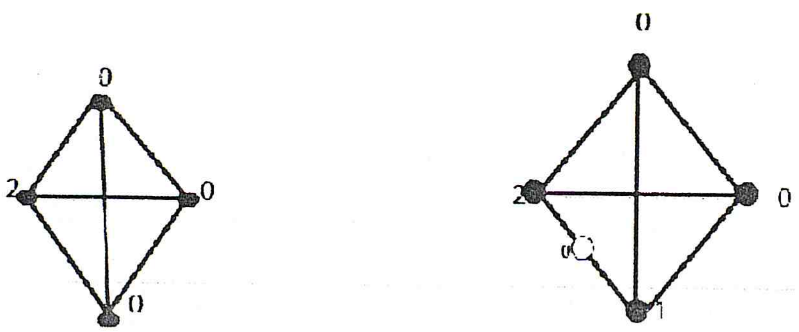

Figure 39: Un graphe complet K_4 tel que $sd_{\gamma_R}(K_4) = 1$.

Théorème 58 (A. Khodkar et al.[1]) *Si G est un graphe contenant un couplage M tel que $\left\lfloor \frac{\gamma_R(G)}{2} \right\rfloor + 1 \leq |M|$ alors:$sd_{\gamma_R}(G) \leq \left\lfloor \frac{\gamma_R(G)}{2} \right\rfloor + 1$.*

Théorème 59 (A. Khodkar et al.[1]) *Si G est un graphe n-sommet alors $sd_{\gamma_R}(G) \leq n - \Delta + 1$.*

La borne du ce Théorème est atteinte. Pour voir, considérer un C_4 ayant $\gamma_R(C_4) = 4$ et $\Delta = 2$ tel que $sd_{\gamma_R}(G) = 3$.

Proposition 60 (A. Khodkar et al.[1]) *Soit G est un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$. Si $\gamma_R(G) = 2$ ou 3, alors $sd_{\gamma_R}(G) = 1$.*

La borne de ce Théorème est atteinte. Pour voir considérer un graphe complet K_n où $n \geq 3$.

Proposition 61 (A. Khodkar et al.[1]) *Pour tout graphe connexe G d'ordre $n \geq 3$. Si $\delta(G) = 1$, alors $sd_{\gamma_R}(G) \leq 2$.*

Une concéquence dirècte de cette Proposition est la suivante:

Théorème 62 (Atapour et al. [5]) *Pour tout arbre T d'ordre $n \geq 3$, $sd_{\gamma_R}(T) \leq 2$.*

Voir la figure suivante pour un exemple d'arbre où la borne est atteinte.

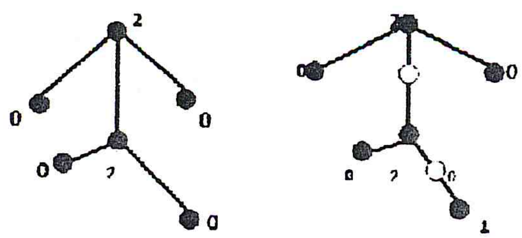

Figure 40: Un arbre T tel que $\gamma_R(T) = 3$ et $sd_{\gamma_R}(T) = 2$.

Rappelons qu'un sommet v est dit simplicial si son voisinage induit $N[v]$ est une clique.

Théorème 63 (Atapour et al. [5]) *Soit u et v deux sommets adjacents non-simpliciaux d'un graphe connexe G d'ordre $n \geq 3$. Soit r le maximum ordre d'une clique engendré par le sous graphe $G[N(u) \cap N(v)]$, alors:*

$$sd_{\gamma R}(G) \leq \deg_G(u) + \deg_G(v) - 2r - 1$$

Rappelons q'un graphe gonflé noté G_I peut être obtenu en remplaçant chaque sommet $v \in V$ par une clique d'ordre $\deg(v)$, où chaque sommet de la clique sera adjacent à exactement un sommet des autres cliques corespondant aux voisins de v.

Voici un exemple d'un graphe gonflé.

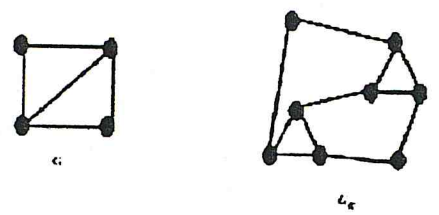

Figure 41: Un graphe G et son graphe gonflé G_g.

Corollaire 64 *Si G_I est le graphe gonflé d'un graphe G avec $\delta(G) \geq 2$,alors $sd_{\gamma_R}(G) \leq 3$.*

On conclut cette partie par les deux problèmes suivants.

Problème 65 (Atapour et al. [5]) *Caractériser les arbres ayant $sd_{\gamma_R}(G) \leq 2$.*

Problème 66 (Atapour et al. [5]) *Est ce que c'est vrai que pour tout graphe d'ordre au moins trois, $1 \leq sd_{\gamma_R}(G) \leq 3$.*

CHAPITRE III

LE NOMBRE DE SUBDIVISION DE LA DOMINATION 2-RAINBOW

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude de la fonction de domination 2-Rainbow dans les graphes modifés par la subdivision des arêtes. Donnons d'abord la définition suivante.

Soit f une application qui affecte pour chaque sommet d'un graphe $G = (V, E)$ un sous ensemble de l'ensemble $\{1, 2, 3, ..., k\}$, c'est à dire, $f : V(G) \to \mathcal{P}(\{1, 2, 3, ..., k\})$ tel que pour tout $v \in V(G)$ ayant $f(v) = \emptyset$ on a $\bigcup_{u \in N(v)} f(u) = \{1, 2, 3, ..., k\}$. La fonction f est dite une fonction de domination k-Rainbow, FDkR, de G. Le poids de la fonction f est $p(f) = \sum_{v \in V(G)} |f(v)|$ et le nombre de domination k-Rainbow $\gamma_{rk}(G)$ est le poids minimum parmi toute les FDkR de G. La domination k-rainbow a été introduite par Brešar et al. [12], [11] dans le but d'étudier la domination couplée dans les produits Cartésien de graphes.

Dans ce mémoire, on s'intéressera au cas $k = 2$. Pour une FD2R, on définit les ensembles $V_0^f = \{v : f(v) = \{\emptyset\}\}$, $V_1^f = \{v : f(v) = \{1\}\}, V_2^f = \{v : f(v) = \{2\}\}, V_{12}^f = \{v : f(v) = \{1, 2\}\}$, Il est claire que V_0^f, V_1^f, V_2^f et V_{12}^f partitionnent l'ensemble des sommets de G. Aussi, si G est un graphe d'ordre au moins deux, alors $\gamma_{r2}(G) \geq 2$. Voir [13].

3.2 Résultats préliminaires

Le résultat suivant, qui sera utile pour la suite, donne une caractérisation de tous les graphes G tels que $\gamma_{r2}(G) = 2$. Soit $K_{2,m}^*$,où $m \geq 2$, un graphe obtenu par un graphe biparti complet $K_{2,m}$ en ajoutant zéro ou plusieurs arêtes entre les sommets appartenant à l'ensemble de taille m.

Le résultat suivant a été etabli par Brešar,Tadeja Kraner Šumenjakb dans l'article [11].

Proposition 67 *Pour un graphe G d'ordre $n \geq 2$, $\gamma_{r2}(G) = 2$ si et seulement si $G = 2K_1, K_{2,m}^*$, ou bien $\Delta(G) = n - 1$.*

Preuve. Si G est non connexe, alors il est claire que $G = 2K_1$. Donc on supposera que G est connexe et soit f une FD2R sur G de poids minimum et tel que $\left|V_{12}^f\right|$ est maximum. Il est claire $\left|V_{12}^f\right| \in \{0,1\}$. Si $\left|V_{12}^f\right| = 0$, alors il existe deux sommets u, v dans G tels que $u \in V_1^f$ et $v \in V_2^f$. Par conséquent tout sommet de $V - \{u, v\} = V_0^f$ est adjacent à u et v. A noter que les sommets de V_0^f peuvent être adjacents. Aussi $\left|V_0^f\right| \geq 2$, sinon $G = P_3$ ou C_3 et un tel graphe admet une fonction g FD2R ayant $|V_{12}^g| = 1$, ce qui contredit le choix de f . Maintenant si $uv \in E$, alors on peut définir une autre FD2R g sur G de poids minimum tel que $u \in V_{12}^g$ et $V_0^g = V - \{u\}$, ce qui contredit le choix de f une nouvelle fois. Donc $uv \notin E$ et par conséquent $G = K_{2,m}^*$. En fin supposons que $\left|V_{12}^f\right| = 1$. Alors $V_1^f = V_2^f = \emptyset$ et donc V_{12}^f domine tous les sommets de V. D'où $\Delta(G) = n - 1$.

La réciproque est simple à voir. ■

Lemme 68 (Brešar et Sumenjakb [11])

i) Pour $n \geq 3$, $\gamma_{r2}(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{n}{4} \rceil - \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$.

ii) Pour $n \geq 1$, $\gamma_{r2}(P_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$.

Théorème 69 *Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$ et $e = uv \in E(G)$. Si G' est le graphe obtenu à partir de G en subdivisant l'arête e, alors $\gamma_{r2}(G) \leq \gamma_{r2}(G')$.*

Preuve. Notons par x le sommet résultant de la subdivision de l'arête $e = uv$. Considérons une fonction de domination 2-rainbow f sur G' de poids minimum. Si $f(u) \cup f(v) = \{1, 2\}$, alors f est une fonction de domination 2-rainbow de G et donc $\gamma_{r2}(G) \leq p(f) = \gamma_{r2}(G')$. Donc supposons que $f(u) \cup f(v) \neq \{1, 2\}$. Ainsi pour l'un au moins de u et v, disons u, on a $f(u) = \emptyset$. Par conséquent $f(x) \neq \emptyset$. Soit alors la fonction g définie sur G par $g(z) = f(z)$ pour tout $z \in V(G') - \{u\}$, et $g(u) = f(x)$. Il est claire que $p(g) = p(f)$ et que g est une fonction de domination 2-rainbow sur G. D'où $\gamma_{r2}(G) \leq p(g) = p(f) = \gamma_{r2}(G')$.
■

Dans ce qui suit, on donnera pour certaines classes de graphes le nombre de subdivision pour la domination 2-rainbow.

3.3 Le nombre de subdivision de la domination 2-Rainbow

Proposition 70 *Soit G un graphe complet d'ordre $n \geq 3$, alors $sd_{\gamma r2}(G) = 2$.*

Preuve. Puisque $\gamma_{r2}(C_3) = \gamma_{r2}(C_4) = 2$, alors $sd_{\gamma_{r2}}(K_3) \geq 2$. Donc d'aprés la Proposition 67 $sd_{\gamma r2}(G) = 2$. Donc on supposera que $n \geq 4$. Montrons d'abord que $sd_{\gamma r2}(G) \geq 2$. Supposons le contraire que $sd_{\gamma r2}(G) = 1$. Soit uv l'arête subdivisée et y le sommet résultant de la subdivision. Notons par G' le graphe obtenu. D'après la Proposition 67 .Définissons la fonction f définie sur G' par $f(u) = \{1\}, f(v) = \{2\ \}$ et $f(x) = \emptyset$; pour tout $x \notin \{u, v\}$.

Alors f est une fonction de domination 2-rainbow de poids $p(f) = 2 = \gamma_{r2}(G)$, contradiction. D'où $sd_{\gamma r2}(G) \geq 2$. Montrons maintenant que la subdivision de deux arêtes suffisent pour augmenter $\gamma_{r2}(G)$. Rappelons que $n \geq 4$. Soit u, v, z trois sommets quelconques de G et soit x, y les sommets résultants de la subdivision des arêtes uv et vz, respectivement. Notons par G' le graphe obtenu, il est claire $\Delta(G') < \Delta - 1$ et $G' \neq k^*_{2,n}$. Donc par la Proposition 67, $\gamma_{r2}(G') \geq 3$ et par conséquent $sd_{\gamma r2}(G) = 2$. ■

Proposition 71 *Si G un graphe contient un sommet support fort, alors $sd_{\gamma r2}(G) = 1$.*

Preuve. Soit w un sommet support adjacent à deux sommets pendants u et v. Soit G' le graphe résultant de la subdivision de l'arête uw et notons par x le nouveau sommet. Soit f une fonction de domination 2-rainbow sur G' de poids minimum. Supposons que $f(w) = \{1, 2\}$. Alors $f(x) = f(v) = \emptyset$ et $|f(u)| = 1$. Dans ce cas définissons la fonction g sur G par $g(y) = f(y)$ pour tout $y \neq u$ et $g(u) = \emptyset$. Il est claire que g une fonction de domination 2-rainbow sur G et donc $\gamma_{r2}(G) \leq p(g) = p(f) - 1 = \gamma_{r2}(G') - 1$. Dans le cas où $|f(w)| = 0$ ou 1, on peut voir facilement que l'on peut se ramener au cas précédent. Par conséquent $\gamma_{r2}(G) = 1$. ■

Théorème 72 *Si T est un arbre non trivial, alors $sd_{\gamma r2}(T) \leq 2$.*

Preuve. Si $n = 2$, alors $sd_{\gamma r2}(T) = 2$. Donc on suppose que $n \geq 3$. Si T possède un support fort alors par la Proposition 71, $sd_{\gamma r2}(T) = 1$. Donc on supposera T ne possède pas de support fort et par conséquent T est d'ordre $n \geq 4$. Si $n = 4$ alors $T = P_4$ et donc $sd_{\gamma r2}(T) = 2$. On supporera par la suite que $n \geq 5$. Puisque T ne possède pas de support fort, alors son diamètre est au moins quatre.

Considérons la plus longue chaine dans T et désignons ses sommets par u_0-u_1-u_2-...-u_k où $k \geq 4$ est le diamètre de T. Il est claire que $\deg_T(u_0) = \deg_T(u_k) = 1$ et $\deg_T(u_1) = 2$ car T est sans support fort. Considérons les cas suivants.

Cas 1. $\deg_T(u_2) \geq 3$. Supposons d'abord que u_2 est un support adjacent au sommet pendant u_2'. Dans ce cas soit l'arbre T' obtenu en subdivisant les arêtes u_0u_1 et u_1u_2. Désignons par x et y les sommets respectives issus de la subdivision. Pour toute fonction de domination 2-rainbow f sur G' de poids minimum, le cardinal des affectations de f sur les sommets de la chaine on a u_0-x-u_1-y-u_2-u_2' est au moins 4. Donc on peut supposer, sans perte de généralités, que $f(x) = f(u_2) = \{1,2\}$. Dans ce cas, on définit une fonction g sur T, par $g(w) = f(w)$ pour tout $w \in V(T) - \{u_0\}$ et $g(u_0) = \{1\}$. On peut voir que g est une fonction de domination 2-rainbow sur T. D'où on a $\gamma_{r2}(T) \leq p(g) = p(f) - 1 < \gamma_{r2}(T')$. Donc, pour la suite u_2 est supposé un sommet qui n'est pas support. Puisque $\deg_T(u_2) \geq 3$, alors tout voisin de u_2 différent de u_3 est un support. Soit l'arbre T' obtenu en subdivisant les arêtes u_0u_1 et u_1u_2. Désignons par x et y les sommets respectives issus cette subdivision. On peut supposer que $|f(u_2)| \neq 0$, sinon on peut se ramener à ce cas. Si $f(u_2) = \{1,2\}$ alors $f(x) = \{1,2\}$. Maintenant si $|f(u_2)| = 1$, alors $|f(u_0)| = |f(u_1)| = 1$. On définit une fonction g sur T, par $g(w) = f(w)$ pour tout $w \in V(T) - \{u_0, u_1\}$. Maintenant on posera $f(u_0) = \{1\}$ et $f(u_1) = \emptyset$ si on est dans la première situation, sinon $f(u_1) = \emptyset$ et $f(u_0) = \{1\}$ ou $\{2\}$ de manière que $f(u_0) \cup f(u_2) = \{1,2\}$. Il est facile de constater que g est une fonction de domination 2-rainbow sur T. D'où on a $\gamma_{r2}(T) \leq p(g) = p(f) - 1 < \gamma_{r2}(T')$.

Cas 2. $\deg_T(u_2) = 2$. Considérons l'arbre T' obtenu en subdivisant les arêtes u_1u_2 et u_2u_3. Notons par x et y les sommets respectives issus de la subdivision. On ppeut distinguer les sous cas suivants.

Cas 2.1. $f(u_0) = \emptyset$. Alors $f(u_1) = \{1,2\}$ et donc $f(x) = \emptyset$. On a besoin que $|f(u_2) \cup f(y) \cup f(u_3)| \geq 2$. Sans perte de généralité, on posera $f(u_2) = \{1\}$, $f(u_3) = \{2\}$ et $f(y) = \emptyset$. Dans ce cas, on définit une fonction g sur T, par $g(z) = f(z)$ pour tout

$z \in V(T) - \{u_0, u_1\}$, et $g(u_1) = \emptyset$, $g(u_0) = \{2\}$. Il est clair que g est une fonction de domination 2-rainbow sur T de poids $p(g) = p(f) - 1 < p(f)$.

Cas 2.2. $f(u_0) \neq \emptyset$. Si $f(u_0) = \{1,2\}$, alors on peut changer les affectations de u_0 et de u_1. Ainsi on sera dans le cas précedent. Donc on peut supposer que $|f(u_0)| = 1$, disons $f(u_0) = \{1\}$. Alors $f(u_1) = \emptyset$ et $f(x) = \{2\}$. Ainsi $f(u_2) = \emptyset$ et $f(y) = \{1\}$. Maintenant, on définit g sur T' par $g(z) = f(z)$ pour tout $z \in V(T) - \{u_0, u_2\}$, et $g(u_2) = \{1\}$ et $g(u_0) = \{2\}$. Dans ce cas, g est une fonction de domination 2-rainbow sur T de poids $p(g) = p(f) - 1 < p(f)$. D'où le résultat. ∎

Il est à signaler que la borne du Théorème 72 est atteinte. Pour voir considerer une chaine P_4, où $\gamma_{r2}(P_4) = \gamma_{r2}(P_5) = 3$ et $\gamma_{r2}(P_6) = 4$.

Proposition 73 *Si G est un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$ tel que $\gamma_{r2}(G) = 2$, alors $sd_{\gamma_{r2}}(G) \leq 2$.*

Preuve. Il est claire que le résultat est vrai pour $n = 3$. Donc on supposera que $n \geq 4$. Supposons que $G = K_n$. Alors d'aprés la Proposition 70, on a $sd_{\gamma_{r2}}(G) = 2$.

On suppose que $G \neq K_n$. Il existe deux sommets, non adjacent u, v. Designons par G' le graphe résultant de la subdivision d'une arête incidente à u et notons par x ce nouveau sommet. Soit f la fonction de domination 2-rainbow de poids minimum sur G'. S'il existe un sommet $z \in V(G')$ tel que $f(z) = \{1,2\}$, alors $f(G') \geq 3$, car aucun sommet de G' n'est adjacent à tous les sommets de G'. Donc, on peut supposer que $\forall z \in V(G')$, $|f(z)| \leq 1$.

Vu que $\bigcup_{t \in N(x)} f(t) = \{1,2\}$ et $vx, vu \notin E(G')$ alors $f(G') \geq 3$. D'où $sd_{\gamma_{r2}}(G) \leq 2$. ∎

Proposition 74 *Si G est un graphe connexe tel que $\gamma_{r2}(G) = 3$, alors $sd_{\gamma_{r2}}(G) \leq 2$.*

Preuve. Puisque $\gamma_{r2}(G) = 3$, alors $n \geq 4$ et le degré maximum dans G est inférieur strictement à $n - 1$. Soit v un sommet de degré maximum. Puisque $\deg_G(v) \leq n - 2$, alors $V(G) - N[v] \neq \emptyset$. Soit alors u un sommet quelconque de $V(G) - N[v]$ adjacent à un sommet $w \in N(v)$. Subdivisons les arêtes vw et wu et notons par x et y les sommets résultants, réspectivement. Designons par G' le nouveau graphe obtenu et soit f une fonction de domination 2-rainbow de poids minimum sur G'. Pour montrer que $sd_{\gamma_{r2}}(G) \leq 2$, il suffit de montrer que $\gamma_{r2}(G') \geq 4$. Pour cela, examinons les cas suivants:

Cas 3. $|f(u)| = 1$, disons $f(u) = \{1\}$. Alors sans perte de généralité $f(x) = f(y) = \emptyset$. Par conséquent $f(v) = \{2\}$ et $f(w) = \{2\}$. Dans ce cas, on définit la fonction g de domination 2-rainbow sur G par $g(z) = f(z)$ pour tout $z \neq \{u, v\}$, $g(u) = \emptyset$ et $g(v) = \{1\}$. Il est claire que $\gamma_{r2}(G) \leq p(g) = p(f) < \gamma_{r2}(G')$.

Dans tous les cas, on a $sd_{\gamma_{r2}}(G) \leq 2$, d'où le résultat. ■

Théorème 76 *Soit G un graphe connexe tel que $\delta(G) \geq 2$. Si v est un sommet simplicial de G, alors $sd_{\gamma_{r2}}(G) \leq \deg_G(v) + 1$.*

Preuve. Soit v un sommet simplicial de G. Notons par $N(v) = \{v_1, v_2, ..., v_{\deg_G(v)}\}$ l'ensemble des voisins de v. Puisque $\delta(G) \geq 2$, Soit G' le graphe obtenu en subdivisant les arêtes $vv_1, vv_2, ..., vv_{\deg_G(v)}$ et une arête v_iv_j tel que $i \neq j$, disons v_1v_2. Notons par $x_1, x_2, ..., x_{\deg_G(v)}$ et x, les sommets respectives issus de la subdivision. Parmi toutes les fonction de domination 2-rainbow sur G' de poids minimum soit f une telle fonction pour laquelle $|f(v)|$ est maximum. Examinons les cas suivants.

Cas 1. $f(v) = \{1, 2\}$. Alors $f(x_i) = \emptyset$ pour tout $i = 1, ..., \deg_G(v)$. A noter que $f(v)$ n'a aucune influence sur les sommets $v_1, v_2, ..., v_{\deg(v)}$. Par conséquent, définissons une fonction g de domination 2-rainbow sur G par: $g(y) = f(y)$ pour tout sommet $y \neq V(G) - \{v, v_1\}$, $|g(v)| = 1$ et $g(v_1) = f(v_1) \cup f(x)$. Donc il est claire que g est une fonction de domination 2-rainbow et $\gamma_{r2}(G) < \gamma_{r2}(G')$.

Cas 2. $|f(v)| = 1$. S'il existe deux sommets x_i, x_j tel que $|f(x_i)| \geq 1$ et $|f(x_j)| \geq 1$.Donc on peut définir un fonction g de domination 2-rainbow sur G tel que $g(v) = \{1, 2\}$, $g(y) = f(y)$ pour tout sommet $y \neq v$. Donc il est claire que g est une fonction de domination 2-rainbow et $\gamma_{r2}(G) < \gamma_{r2}(G')$. Donc on peut supposer qu'il existe au plus un sommet x_i tel que $|f(x_i)| \geq 1$, et on affecte $\emptyset$ pour le rèste des x_j . Par conséquent, au moins $(\deg_G(v) - 1)$ sommets parmi $\{v_1, v_2, ..., v_{\deg_G(v)}\}$ ont $f(v_i) \neq \emptyset$, on supposera $|f(v_1)| \neq 0$. D'autre part, il faut remarquer que $|f(v_1) \cup f(v_2) \cup f(x)| \geq 2$. Dans ce cas on considère g une fonction de domination 2-rainbow sur G comme suit: $g(v) = \emptyset$, $g(y) = f(y)$ $\forall$ $y \neq V(G) - \{v_1, v_2\}$. Maintenant:

- Si $f(x) \neq \emptyset$, alors $g(v_1) = \{1, 2\}$ et $g(v_2) = f(v_2)$. Donc il est claire que g est une fonction de domination 2-rainbow et $\gamma_{r2}(G) < \gamma_{r2}(G')$.

- Si $f(x) = \emptyset$, alors $f(v_1) \cup f(v_2) = \{1,2\}$ pour dominer x, dans ce cas $g(v_1) = f(v_1)$, $g(v_2) = f(v_2)$. Donc il est claire que g est une fonction de domination 2-rainbow et $\gamma_{r2}(G) < \gamma_{r2}(G')$.

Cas 3. $|f(v)| = 0$. S'il existe un sommets x_i tel que $f(x_i) = \{1,2\}$, alors on peut changer les poids de v et v_i par $f(v) = \{1\}$, $f(v_i) = \{2\}$ et $f(x_i) = \emptyset$, on obtient une une fonction de domination 2-rainbow où $|f(v)|$ est maximum, ce qui contredit notre choix de f. Donc pour tout x_i, on a $|f(x_i)| \leq 1$. D'autre part pour dominer v on a besoin de deux sommets x_i et x_j tel que $f(x_i) \cup f(x_j) = \{1,2\}$. Dans ce cas les sommets v_i et v_j sont affecté par $\emptyset$ (sinon on peut changer l'affectation de v). S'il existe une x_k, où $k \neq i,j$ tel que $|f(x_k)| = 1$. Alors on peut définir g par $|g(v)| = 2$, $g(y) = f(y)$ pour tout $y \neq v$. Il est claire que g est une fonction de domination 2-rainbow et $\gamma_{r2}(G) < \gamma_{r2}(G')$. Donc $\forall k \neq i,j$, $f(x_k) = \emptyset$. Examinons les situations suivantes.

a) $\deg_G(v) = 2$. Donc $|f(x_1)| = |f(x_2)| = 1$. Alors on peut changer l'affectation de v et de x_1 de façon que $f(v) \cup f(v_1) = \{1,2\}$, ce qui contredit le choix de v. D'où et similairement $f(v_1) = \emptyset$ et $f(v_2) = \emptyset$. Par conséquent $|f(x)| \geq 1$. On definit g comme suit $g(v) = \{1,2\}$, $g(y) = f(y)$ pour tout sommet $y \neq v$. Donc il est claire que g est une fonction domination 2-rainbow sur G, d'où $\gamma_{r2}(G) < \gamma_{r2}(G')$.

b) $\deg_G(v) \geq 3$. Soit x_k avec $k \neq i,j$ un sommet quelconque de G. On sait que $f(v) = \emptyset$ et $f(x_k) = \emptyset$. D'où $f(v_k) = \{1,2\}$. Puisque v est un sommet simplicial, alors on peut changer l'affectation de v,x_i et x_j par $f(v) = \{1,2\}$, $|f(x_1)| = |f(x_2)| = 0$. On obtient ainsi une contradiction avec le choix de f.

■

Comme conséquence, on a le résultat suivant.

Corollaire 77 *Si G est un k-arbre, alors $sd_{\gamma_{r2}}(G) \leq k+1$.*

Preuve. Si $k = 1$, alors G est un arbre et d'aprés le Théorème 72, le résultat est vrai. Donc on suppose que $k \geq 2$. Il est claire par définition que G contient un sommet simplicial de degré k. Ainsi par le Théorème 76, on a le résultat. ■

Proposition 78 *Si $K_{n,m}$ un graphe biparti complet, alors $sd_{\gamma r2}(G) \leq 2$.*

Preuve. On supposera que $m \geq n$. Si $\gamma_{r2}(K_{n,m}) = 2$ ou 3 alors d'après que la Proposition 73 et la Proposition 74, le résultat est vrai. Donc on peut supposer que $n \geq 4$. il est claire que $\gamma_{r2}(K_{n,m}) = 4$. Considérons deux arêtes incidentes uv et vw où u et w appartiennent à la partie de taille n. Notons par x et y les sommets résultants de la subdivision des arêtes uv et vw, respectivement. Soit $K'_{n,m}$ le nouveau graphe obtenu, Définissons la fonction f sur $K'_{n,m}$. Pour toute fonction f de domination 2-rainbow, la somme des cardinaux des affectations sur les sommets u, v, x, y et w est au moins 3. Donc il est claire que pour dominer x et y on a besoin d'au moins trois affectations non vides, par exemple posons $f(u) = \{1\}, f(v) = \{2\ \}$ et $f(w) = 1$, et donc il faut affecter $\{1\}$ à un sommet de V_2 différent à v pour dominer les sommets rèstants de V_1. De même pour le rèste des sommets de V_2, il faut affecter un $\{2\}$ à un sommet de V_1 différent à u et w. Il est claire que $p(f) = \gamma_{r2}(G') \geq 5$ et par conséquent le résultat est vrai. ■

Dans tous les cas $sd_{\gamma r2}(G) \leq 2$.

Conclusion

Nous nous sommes intéressés dans ce mémoire à l'étude de l'effet de la subdivision d'une arête sur le nombre de la fonction de domination 2-Rainbow.

En premier lieu, nous avons tenté de faire le point sur ce qui a été fait dans ce domaine par rappaort à quelques paramètres do domination, comme les nombres de domination totale, domination double, domination couplée...etc. Puis nous nous sommes orientés vers l'étude des graphes où le nombre de la domination 2-Rainbow augmente lorsqu'on subdivise une ou plusieur arêtes.

Nous avons établi quelques résultas où nous avons majoré le nombre des arêtes suffisant pour l'augmentation de γ_{r2} pour quelques classes de graphes. Par exemple les arbres, les graphes complet, les graphes bipartis complets ainsi que les graphes possédant un sommet simplicial.

REFERENCES

[1] Abdoallah Khodkar, B. P. Mobaraky and S. M. Sheikholeslami. Upper bounds for the Roman domination subdivision number of a graph. *AKCE J. Graphs. Combin.*, 5,NO. 1 (2008), pp. 7– 14.

[2] H. Aram, O. Favaron et S.M. Sheikholeslami, Trees with domination subdivision number three. Soumis.

[3] Arumugam, Private communication, june 2000.

[4] M. Atapour, A. Khodkar, A., Sheikholeslami, S.M.: Characterisation of double domination subdivision number of trees. Discrect. Appl. Math 155, 1700–1707 (2007).

[5] M. Atapour, S. M. Sheikholeslami and Abdoallah Khodkar. Roman domination subdivision number of graphs. *Aequationes Math.* 78 (2009) 237–245.

[6] M. Atapour, S.M. Sheikholeslami, A. Hansberg, L. Volkmann, A. Khodkar, 2-domination subdivision number of graphs. *AKCE J. Graphs Combin.* 5 (2008), 169–177.

[7] M. Atapour, A. Khodkar and S.M. Sheikholeslami, Roman domination subdivision number of a graph. Soumis.

[8] C. Berge, Graphs and Hypergraphs. (North Holland, Amsterdam, 1973).

[9] C. Berge, Theory of graphs and its applications. Methuen, London, (1985,1962).

[10] K.S. Booth et J.H. Johnson, Dominating sets in chordal graphs. *SIAM J. Comput.* 11(1982) 191-199.

[11] Boštjan Brešara,1, Tadeja Kraner Šumenjakb, On the 2-rainbow domination. *Discrete Applied Mathematics* 155 (2007) 2394 – 2400.

[12] B. Brešar, M.A. Henning and D.F. Rall, Rainbow domination in graphs. *Taiwanese J. Math.* 12 (2008) 201–213.

[13] B. Brešar, T.K. Šumenjak, On the 2-rainbow domination in graphs. *Dis- crete Appl. Math.* 155 (2007) 2394–2400.

[14] G. Chartrand and L. Lesniak, Graphs & Digraphs: Third Edition, Chapman & Hall, London, 1996.

[15] E. J Cockayne, R.M. Dawes, S. T. Hedetniemi, Total domination in graphs. *Networks* vol 10 (1980) 211-219.

[16] E. J. Cockayne, P. A. Dreyer, S. M. Hedetniemi and S. T. Hedetniemi, on Roman domination in graphs. *Discrete Math.* 278 (2004) 11-22.

[17] E.J. Cockayne, S.T. Hedetniemi and D.J. Miller, Properties of hereditary hypergraphs and middle graphs. *Canad. Math. Bull.* 21(1978) 461-468.

[18] E.J. Cockayne et S.T. Hedetniemi, Towards a theory of domination in graphs. *Networks* 7 (1977) 247–261.

[19] O. Favoron, T. W. Haynes and S. T. Hedetniemi, Domination subdivision numbers in graphs. *Util. Math.* 66 (2004) 195–209.

[20] O. Favaron, H. Karami, R. Khoeilar and S.M. Sheikholeslami, A new upper bound for total domination subdivision numbers. *Graphs Combin.* 25 (2009), 41–47.

[21] O. Favaron, H. Karami and S.M. Sheikholeslami, Paired domination subdivision number of graphs. *Graphs and Combinatorics* 25: 503–512 (2009).

[22] O. Favaron, H. Karami, R. Khoeilar and S.M. Sheikholeslami, On the total domination subdivision number in some classes of graphs. *J. Comb. Optim.* 20 (2010), 76-84.

[23] O. Favaron, H. Karami, R. Khoeilar and S.M. Sheikholeslami, Matching and total domination subdivision number of graphs with few C4. *Discuss. Math. Graph Theory* 30 (2010), 611–618.

[24] O. Favaron, H. Karami and S.M. Sheikholeslami, Total domination and total domination subdivision numbers of graphs. *Australas. J. Combin.* 38 (2007), 229–235.

[25] G.H. Fricke, S.M. Hedetniemi, S.T. Hedetniemi, A.A. McRae, C.K. Wallis, M.S. Jacobson, H.W. Martin et W.D. Weakley, Combinatorial problems on chessboards: A briev survey, dans Graph Theory, Combinatorics and Applications: Proc. Seventh Quad. Internat. Conf. on the Theory and Applications of Graphs, vol. 1, *Y. Alavi and A. Schwenk, Eds., Wiley,* 1995, pp. 507–528.

[26] F.Harary , T.W. Haynes. Double domination in graphs. *Ars Combin.* 55, 201–213 (2000).

[27] T. W. Haynes, S.M. Hedetniemi, S.T. Hedetniemi, J. Knisely and L.C. van der Merwe, Domination subdivision number. *Discuss Math. Graph Theory* 21 (2001), 239–253.

[28] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, and P. J. Slater, Domination in graphs: Advanced topics. Marcel Decker, Inc. New York, 1998.

[29] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, and P. J. Slater, Fundamentals of Domination in Graphs. Marcel Decker, Inc. New York, 1998.

[30] T. W. Haynes, M. Henning and P. J. Slater, Stephen T. Hedetneimi, David P. Jacobs and Lucas C. Van Der Merwe, Domination subdivision numbers. *Discussiones Mathematicae. Graph Theory* 21 (2001) 239–253.

[31] T. W. Haynes, M. Henning and P. J. Slater, Strong equality of domination parameters in trees. *Discrete Mathematics* 260 (2003) 77–87.

[32] T.W. Haynes, M.A. Henning and L.S. Hopkins, Total domination subdivision numbers of graphs. *Discuss. Math. Graph Theory* 24 (2004), 457–467.

[33] T.W. Haynes, M.A. Henning and L.S. Hopkins, Total domination subdivision numbers of trees. *Discrete Math.* 286 (2004) 195–202.

[34] T. W. Haynes, S.T. Hedetniemi and L.C. van der Merwe, Total Domination subdivision numbers. *J. Combin Math. Combin Comput.* 44(2003),115–128.

[35] T. W. Haynes and P. J. Slater, Paired-domination in graphs. *Networks* 32 (1998) 199–206.

[36] M.A. Henning, L. Kang, E. Shan and A. Yeo, On matching and total domination in graphs. *Discrete Math.* 308 (2008), 2313–2318.

[37] M. A. Henning and D. F. Rall, on the total domination number of cartesien product of graph. *Graphs and Combinatorics* 21(2005) 63–69.

[38] S.T. Hedetniemi et R.C. Laskar, Bibliography on domination in graphs and some basic definitions of domination parameters. *Discrete Mathematics* 86 (1990) 257-277.

[39] S.T. Hedetniemi et R.C. Laskar, Introduction. *Discrete Mathematics* 86 (1990) 3-9.

[40] C.F. de Jaenisch, Applications de l'analyse mathématique au jeu des echecs. *Petrograde* (1862).

[41] H. Karami, A. Khodkar and S.M. Sheikholeslami, An upper bound for total domination subdivision numbers of graphs. *Ars Combin.* 102 (2011),321–331.

[42] R. Laskar and K. Peters, Domination and irredundance in graphs. Technical Report 434, Dep. Mathematical Sciences, Clemson univ, (1983).

[43] R. Laskar, J. Pfaff, S.M. Hedetniemi and S.T. Hedetniemi, On the algorithmic complexity of total domination. *SIAM J. Alg. Disc. Math.* Vol. 5, No 3, september 1984.

[44] O. Ore, Theory of graphs. Amer. Soc. Colloq. Pub 38, Providence, R.I.(1962).

[45] S.M. Sheikholeslami, On the total domination subdivision numbers in graphs. *Cent. Eur. J. Math.* 8 (2010), 468–473.

[46] I. Stewart, Defend the Roman Empire, Sci. Amer. 281 (6) (1999), 136–139.

[47] S. Velammal, Studies in graph théory. Convering, Independence, Domination and Related Topics, *Ph. D. Thesis (Manonmaniam Sundaranar Uni- versity, Tirunelveli,* 1997).

[48] V. G. Vizing, Some unsolved problems in graph theory. *Uspehi Mat. Nauk,* 23(6) (1968) (144) 117–134.