République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université Saad Dahlab – Blida1

Faculté des sciences
Département de mathématiques

Mémoire de fin d'étude

PRESENTE POUR L'OBTENTION DU DIPLOME DE
Master EN MATHEMATIQUES
SPECIALITE : RECHERCHE OPERATIONNELLE

Thème

La Domination 1-mobile dans les graphes

Présenté par :

Wieme Bairi & Fatima Bouattou

Jury :

Président : Tami Omar — Maître de Conférences. Univ. Blida 1.

Promoteur: Boumediene Merouane Houcine — Maître de Conférences. Univ. Blida 1.

Examinateur : Chellali Mustapha — Professeur. Univ. Blida 1.

Examinateur : Blidia Mostafa — professeur. Univ. Blida 1.

Blida, juillet 2017

Résumé

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à la sécurité dans les graphes. Une stratégie de protection d'un graphe consiste à placer des gardiens au chevet des sommets afin de protéger le graphe contre d'éventuelles attaques. Dans la littérature, plusieurs variantes de ces problèmes de protection ont été étudiées.

Nous présentons la *domination 1-mobile* où un gardien au plus est placé dans un sommet. Lorsqu'un gardien est attaqué, il est neutralisé ou peut se déplacer à un sommet voisin de sorte que le placement des gardiens forme, avant et après l'attaque, un dominant du graphe. Nous cherchons à utiliser le minimum de gardiens tel que l'ensemble des gardiens forme, avant et après l'attaque, un dominant du graphe. Un tel ensemble est dit *dominant 1-mobile* et sa cardinalité minimum est dite *nombre de domination 1-mobile.*

Nous rappelons les résultats de la littérature concernant la domination 1-mobile et deux concepts de sécurité similaires. Nous rappelons également les résultats de quatre variantes de la domination 1-mobile. Nous contribuons à l'étude du sujet par des résultats sur le nombre de domination 1-mobile et sa variante indépendante.

Abstract

A 1-movable dominating set is a dominating set $S \subseteq V(G)$ such that for every $v \in S$, $S-\{v\}$ is a dominating set, or there exists a vertex $u \in V(G) \cap N(v)$ such that $(S-\{v\}) \cup \{u\}$ is a dominating set. The idea is that every dominator is either not needed at all, or can be replaced by a neighbor if an attack destroys its ability to provide domination so that the resulting set is also dominating for G .

In this study, we recall the main results about the concept and some of its variations. We present a few basic results on this parameter.

ملخص

في هذه المذكرة, نهتم بدراسة أمن المخططات البيانية. إحدى استراتجيات التأمين تقوم بوضع مراقبين على رؤوس المخطط لصد الهجمات.

في الهيمنة المتحركة, يتم وضع مراقب على الأكثر في كل عقدة, عند حدوث هجوم على أحد المراقبين, يمكن الاستغناء عنه أو تحريكه إلي رأس مجاور بحيث مجموع المراقبين يشكل, قبل وبعد الهجوم, مجموعة مهيمنة.

في هذه المذكرة, نذكر بالنتائج السابقة حول الهيمنة المتحركة و بعض فروعها.

نعطي بعض النتائج الجزئية لمخططات بيانية بسيطة.

Remerciement

Qu'il nous soit permis de remercier dieu pour nous donné la patience et le courage nécessaires, pour finaliser ce présent travail.

Nous tenons à remercier notre promoteur Monsieur ***Boumediene Merouane H*ocine** pour la confiance qu'il nous a accordée en nous proposant ce thème et d'avoir accepté de le diriger.

Nous remercions vivement Monsieur ***Tami Omar*,** Maître de Conférences au département de Mathématique de l'université Saad Dahlab, pour l'intérêt porté à ce travail et pour avoir accepté de présider le jury de mémoire.

Nos remerciements vont aussi aux professeurs ***Chellali Mustapha*** et ***Blidia Mostafa***, pour avoir acceptés d'être membres de ce jury et vouloir examiner notre travail de recherche.

Nous tenons à remercier, aussi chaleureusement tous les enseignants et les professeurs du département de mathématiques.

DEDICACE

C'est avec un grand honneur et de la joie que je dédie ce modeste travail à mes

Chers Parents (Balkacem, et F.Zohra), ainsi qu'à mes frères : Mohamed et Abdeljalil et ma sœur Khaoula. Et à tous les membres de ma famille.

BAIRI WIEME

DEDICACE

C'est avec un grand honneur et de la joie que je dédie ce modeste travail à mes

Chers Parents (Bachir, et Djamila), à mon mari Mohamed, à ma grand-mère, ainsi qu'à mes frères : Mohamed et Merouane et ma sœur Maroua. Et à tous les membres de ma famille.

BOUATTOU FATIMA

Table des matières

Chapitre 2. La domination 1-mobile, co-sécurisé et sécurisé

Chapitre 3. Variantes de la domination 1-mobile

Chapitre 4. Contribution en domination 1-mobile

Pour protéger un graphe, nous déployons un certain nombre de gardiens sur les sommets du graphe et l'ensemble des gardiens doit former un dominant du graphe. Lorsque le gardien est attaqué, il est neutralisé ou peut se déplacer à un sommet voisin de sorte que le placement des gardiens forme, avant et après l'attaque, un dominant du graphe. L'objectif est d'utiliser un nombre minimum de gardiens. Le problème est appelé domination 1-mobile.

Les chapitres de ce mémoire sont développés de la manière suivante : Le premier chapitre comporte la terminologie de la théorie des graphes utilisée dans ce mémoire et un aperçu de la domination classique et ses variantes. Dans le deuxième chapitre, nous présentons trois paramètres de graphes qui combinent la sécurité et la domination dans les graphes, à savoir : la domination 1-mobile, co-sécurisée et sécurisée.

Dans le troisième chapitre, nous nous intéressons aux quatre variantes suivantes de la domination 1-mobile: la domination 1-mobile totale, connectée, indépendante et clique. Nous énonçons, l'essentiel des résultats de la littérature.

Le dernier chapitre comporte notre contribution. Nous avons étudié la domination 1-mobile et sa variante indépendante pour des graphes simples, à savoir : les chaines, cycles, arbres, bipartis complets et multipartis.

Chapitre 1

Généralités et Terminologie

Nous introduisons dans ce chapitre les notions usuelles dans le domaine de la théorie des graphes, ainsi que les définitions de base utilisées tout au long de ce mémoire.

Nous présentons dans ce chapitre un rappel des notions préliminaires et les définitions de base de la théorie des graphes, nous rappelons quelques invariants de graphes : nombre de stabilité, nombre de domination, utilisés dans ce mémoire. Nous terminons par la définition de quelques variantes de la domination.

Pour plus de détails, nous invitons le lecteur à se référer de l'ouvrage de BERGE [1] pour avoir plus de détails concernant les notions de théorie des graphes et l'ouvrage de HAYNES [2] en ce qui concerne les notions liées à la domination.

1.1 Définition et notations

Intuitivement un *graphe* est un ensemble de *points* ou *sommets* (que nous supposerons non vide et fini dans la suite) dont certaines paires sont reliées, formant ainsi les *extrémités* d'une *arête*. Plus formellement :

1.1.1 Graphe :

Définition 1.1 :

Un graphe G est un couple, noté $G=(V,E)$, et déterminé par deux ensembles :

- Un ensemble $V=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ dont les éléments sont appelés les *sommets* (ou bien les *nœuds* dans les réseaux).

Un ensemble $E=\{u_1,u_2,...,u_m\}$ du produit cartésien $V\times V$ dont les éléments sont des appelés *arêtes.*

- Le nombre de sommets d'un graphe G, où l'*ordre* de graphe G, est égal à $|V|$, noté souvent par n.
- Le nombre d'arêtes d'un graphe G, ou la *taille* de graphe G, est égal à $|E|$, noté souvent par m.

A titre d'exemple, nous donnons dans la Figure 1.1, une représentation d'un graphe G d'ordre 5 avec $V=\{a,b,c,d,e\}$ et $E=\{ac,ad,bd,be,ed\}$

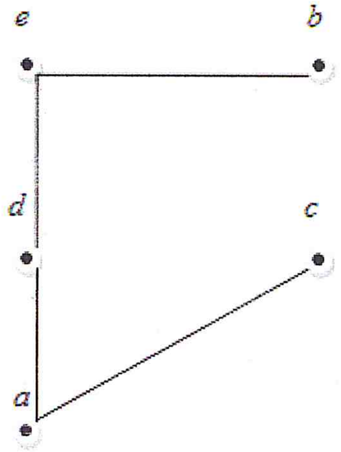


Figure 1.1: Un graphe G avec cinq sommets et quatre arêtes.

Définition 1.2 :

- Deux arêtes sont dites *adjacentes* s'ils ont une extrémité en commun.
- Une arête est *incidente* à un sommet si ce sommet est une extrémité de cette arête.

Un graphe d'ordre 1 est dit *trivial*, sinon il est dit *non trivial*. Une arête à une extrémité est dite *boucle*. Un graphe G est dit *simple* si G est sans boucle et si deux sommets quelconques de G sont reliés par au plus une arête. Dans tout ce qui suit, les graphes considérés sont simples et non triviaux. Par exemple, le graphe G de la Figure 1.1 est un graphe non trivial et simple.

Notons que la définition 1.1 laisse la possibilité pour une arête d'avoir ses deux extrémités identiques, une telle arête est appelée **boucle**. De plus, pour de nombreuses applications il peut être utile d'avoir plusieurs arêtes ayant mêmes extrémités ; on parle alors d'**arêtes multiples**. Un graphe ayant des arêtes multiples est un **multi graphes,** s'il contient également des boucles, on parle de **pseudo graphe** *(*Figure 1.2).

Figure 1.2: Un pseudographe.

1.1.2 Sous graphe :

Définition 1.2 :

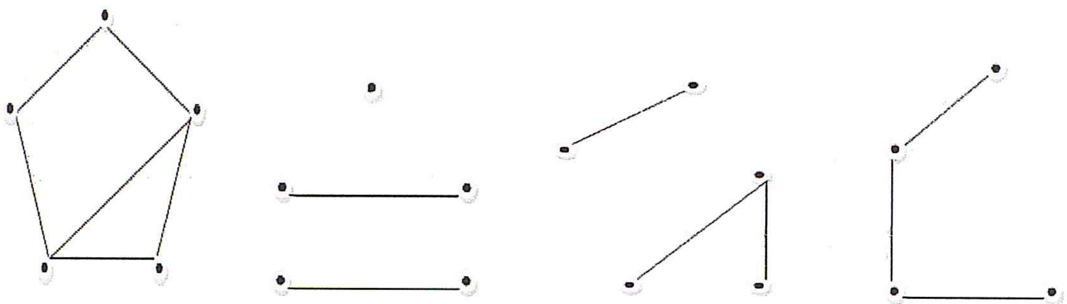
Soit $G=(V,E)$ et $G^{'}=(V^{'},E^{'})$ deux graphes. Alors $G^{'}$ est un *sous graphe* de G si $V^{'}\subseteq V$ et $E^{'}\subseteq E$.

Définition 1.4 :

Soit $G=(V,E)$ et $G^{'}=(V^{'},E^{'})$ deux graphes. Alors $G^{'}$ est un *graphe partiel* de G si $V^{'}=V$ et $E^{'}\subseteq E$ (on supprime certains arcs).

Définition 1.5 :

Soit $G=(V,E)$ et $G^{'}=(V^{'},E^{'})$ deux graphes. Alors $G^{'}$ est un sous *graphe induit* si $V^{'}\subseteq V$ et $G^{'}$ contient toutes les arêtes $xy\in E$: $x,y\in V^{'}$.



(a) (b) (c) (d)

Figure 1.3: (a) Un graphe G, (b) sous graphe de G, (c) graphe partiel de G et (d) sous graphe induit de G.

1.1.3 Voisinage :

Définition 1.6 :

Dans un graphe $G=(V,E)$:

- Le *voisinage ouvert* d'un sommet $v\in V$, noté par $N_G(v)$ est l'ensemble des sommets qui lui sont adjacents. $N_G(v)=\{u\in V\,/\,uv\in E\}$.
- Le *voisinage fermée* de v, noté par $N_G[v]$. $N_G[v]=N_G(v)\cup v$.

Définition 1.7 :

Le voisinage ouvert (resp. fermé) d'un ensemble de sommet S, noté par $N_G(S)$ (resp. $N_G[S]$), est $N_G[S] = \underset{v \in S}{\cup} N_G(v)$ (resp. $N_G[S] = N_G(S) \cup S$).

Parfois pour alléger les notions et lorsqu'il n'y a aucune confusion sur le graphe G, nous écrivons $N(v)$ et $N[v]$ au lieu de $N_G(S)$ et $N_G[S]$, respectivement. Voir la Figure 1.4 pour une illustration.

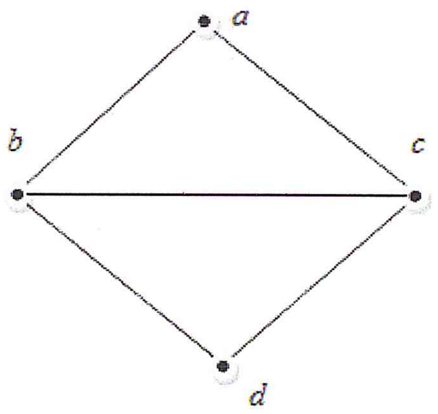


Figure 1.4: Un graphe G avec $N_G(a) = \{b,c\}$ et $N_G[a] = \{a,b,c\}$.

1.1.4 Degré d'un sommet :

Définition 1.8 :

Dans un graphe $G = (V, E)$, le *degré* d'un sommet x, noté par $d_G(x)$, est le nombre d'arêtes incidentes à x.

Un sommet *pendant* est un sommet de degré 1.

Le plus petit degré d'un graphe G, noté par $\delta(G)$, est $\delta(G) = \min\{d_G(v) \setminus v \in V\}$, et le plus grand degré d'un graphe G, noté par $\Delta(G)$, est $\Delta(G) = \max\{d_G(v) \setminus v \in V\}$. Ils sont respectivement égaux au degré d'un sommet ayant le moins et le plus de voisins. Dans le graphe G de la Figure 1.4, $d_G(a) = 2$, $\delta(G) = 2$ et $\Delta(G) = 3$.

1.1.5 Chaîne et cycle :

Définition 1.9 :

Dans un graphe $G=(V,E)$, Une *chaîne* P d'ordre n, noté par P_n, est le graphe connexe dont tous les sommets sont de degré 2, sauf les deux extrémités de la chaîne qui sont de degré 1.

Dans la Figure 1.5, nous illustrons une chaîne P_5.

Figure 1.5: Une chaîne P_5.

Définition 1.10 :

Dans un graphe $G=(V,E)$, un *cycle* d'ordre n, noté C_n, est le graphe connexe dont les sommets sont tous de degré 2.

Dans la Figure 1.6, nous illustrons une chaîne C_5.

Figure 1.6: Un cycle C_5.

La *longueur* d'un cycle ou d'une chaîne est le nombre d'arêtes qu'il / elle contient.

Définition 1.11 :

Un graphe dont tous les sommets ont le même degré est dit *régulier*. Si le degré commun est k, alors le graphe est dit k-régulier.

1.1.6 Distance et diamètre :

Définition 1.12 :

La *distance* entre deux sommets x, y dans un graphe G, notée par $d_G(x,y)$, est la longueur de la plus courte chaîne entre x et y.

Définition 1.13 :

Le *diamètre* d'un graphe G, noté par $diam(G)$, est $diam(G)=\max(d_G(x,y))$.

Dans le graphe G dans la Figure 1.1, $d_G(e,d)=1$, $diam(G)=4$.

1.1.7 Complémentaire :

Quand on recherche les propriétés d'un graphe, il est parfois plus simple d'étudier son complémentaire.

Définition 1.14 :

Le graphe *complémentaire* d'un graphe $G=(V,E)$, est le graphe $\overline{G}=(V,\overline{E})$ où une arête $e\in\overline{E}\Leftrightarrow e\notin E$.

Remarquer que $\overline{\overline{G}}=G$. Dans la Figure 1.7, nous donnons l'exemple de deux graphes complémentaires.

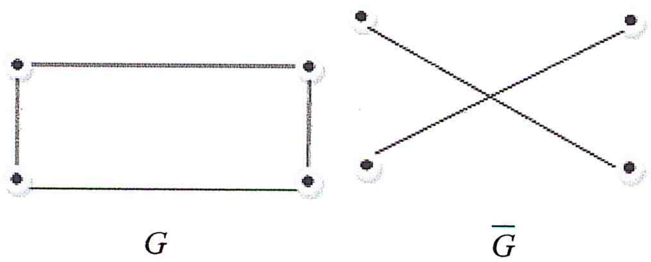


Figure 1.7: Un graphe et son complémentaire.

1.1.8 Connexité :

La connexité d'un graphe est une mesure importante de sa robustesse lorsqu'il est considéré comme un réseau (réseau de transport, réseau informatique, etc.). Intuitivement, le nombre de composantes connexes correspond au nombre de « morceaux » du graphe quand on le dessine.

Définition 1.15 :

Un graphe est *connexe* si pour toute paire de sommets il est possible de passer de l'un à l'autre par une suite de sommets adjacents.

La connexité définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des sommets, et chacune des classes d'équivalence est appelée *composante connexe* du graphe. Autrement dit, un graphe est connexe si et seulement s'il ne contient qu'une seule composante connexe. Un résultat classique énonce que :

Lemme 1.1 :

Pour tout graphe G, G est connexe ou $\overline{G}$ est connexe.

1.2 Graphes particuliers

1.2.1 Graphe complet :

Définition 1.16 :

Un graphe est *complet* si chaque deux sommet sont adjacents. Il est noté par K_n.

Le graphe complet K_n est un $(n-1)$-régulier.

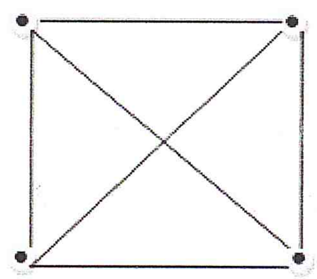


Figure 1.8: Un graphe complet K_4.

1.2.2 Graphe biparti :

Définition 1.17 :

Un graphe est dit *biparti* si l'ensemble des sommets peut être partitionné en deux ensembles X et Y non vides tel que toute arête a une extrémité dans X et l'autre dans Y. Il est noté par $G[X,Y]$.

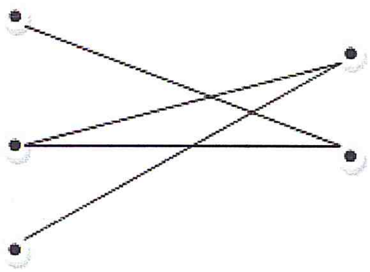


Figure 1.9: Un graphe biparti.

Définition 1.18 :

Un *graphe biparti complet* est un graphe biparti $G[X,Y]$ où tout sommet de X est adjacent à tout sommet de Y. Il est noté par $K_{r,s}$ avec, $r=|X|$ et $s=|Y|$.

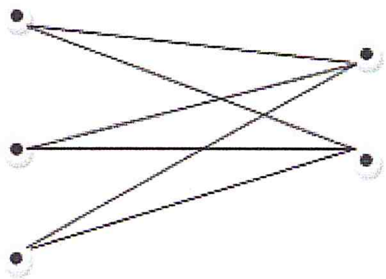


Figure 1.10: Un graphe biparti complet $K_{3,2}$.

1.2.3 Une étoile :

Définition 1.19 :

Une *étoile* est un graphe biparti complet $G[X,Y]$ avec $|X| = 1$ et $|Y| = s$. Il est noté par $K_{1,s}$.

Le sommet de X est appelé *sommet central* de l'étoile.

Dans la Figure 1.11, nous illustrons l'étoile $K_{1,3}$, appelée également *griffe*.

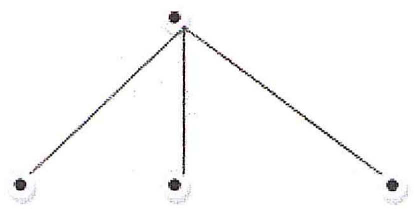


Figure 1.11: L'étoile $K_{1,3}$.

Définition 1.20 :

Une *double étoile* $S_{r,k}$ est le graphe formé par les deux étoiles $K_{1,r}$ et $K_{1,k}$ avec une arête reliant les deux sommets centraux.

Dans la Figure 1.12, la double étoile $S_{3,2}$ est représentée.

Figure 1.12: Une double étoile $S_{3,2}$

1.2.4 Isomorphisme :

Définition 1.21 :

Deux graphes $G=(V,E)$ et $H=(U,F)$ sont dits *isomorphes* s'il existe une *bijection* f de V dans U telle que pour chaque deux sommets u, $v \in V$, $uv \in E \Leftrightarrow f(u)f(v) \in F$. Nous notons $G \cong H$.

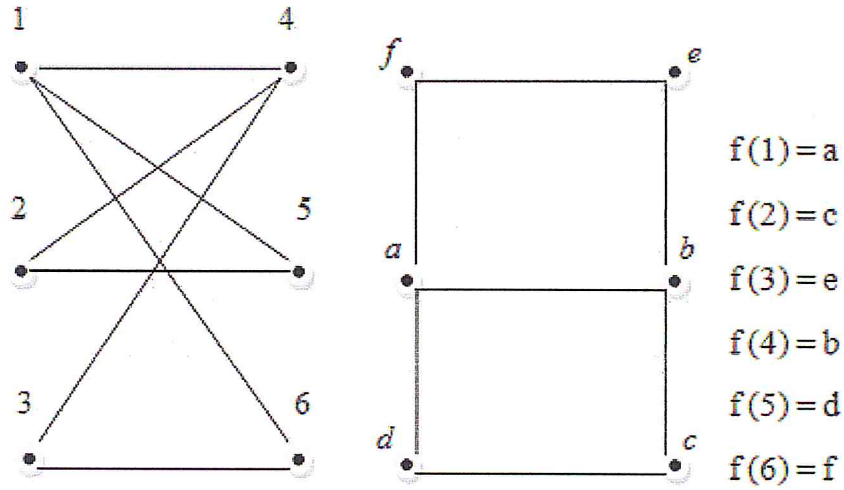


Figure 1.13: Deux graphes isomorphes et la bijection explicitée.

1.2.5 Arbre, forêt et arborescence :

Définition 1.22 :

Un *arbre* est un *graphe* connexe et sans cycle.

Une *forêt* est un graphe où chaque *composante connexe* est un arbre.

Dans les Figures 1.14 et 1.15, un arbre et une forêt, respectivement, sont donnés comme exemple.

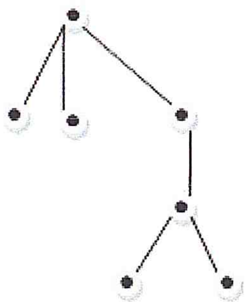


Figure 1.14: Un arbre T.

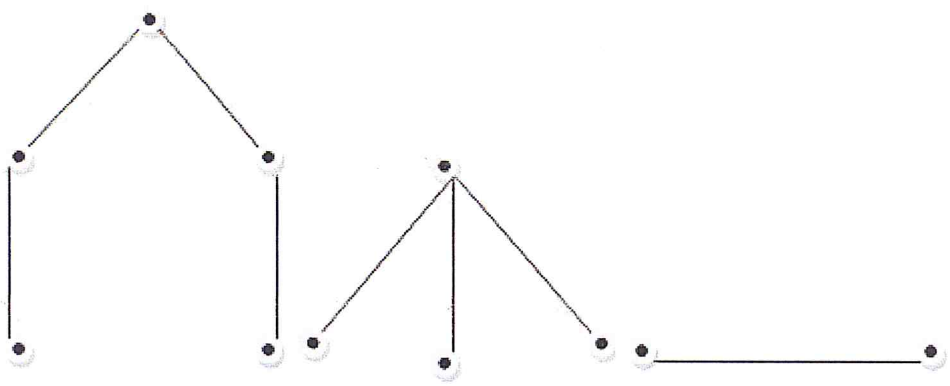


Figure 1.15: Une forêt à trois composantes connexes.

Définition 1.23 :

Une *arborescence* est un arbre avec un sommet distingué que l'on appelle *racine.*

On appelle le niveau d'un sommet u, la longueur du chemin qui mène a u à partir de la racine. Dans la Figure 1.16, nous donnons un exemple d'arborescence à trois niveaux.

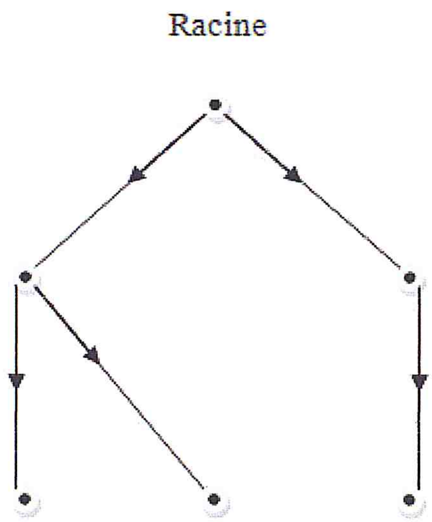


Figure 1.16: Une arborescence.

1.2.6 Clique :

Définition 1.24 :

Une *clique* est un ensemble de sommets deux à deux adjacents.

Nous rappelons dans la suite de cette section, quatre opérations de graphes qui permettent de construire de nouveaux graphes.

1.2.7 Couronne :

Définition 1.25 :

La *couronne* d'un graphe H, noté par *cor(H)*, est le graphe obtenu à partir d'une copie de H en attachant un sommet pendant à chaque sommet de H. Il est évident que l'ordre de cor(H) est égal à $2|H|$.

Dans la Figure 1.17, nous donnons un graphe H et sa couronne *.

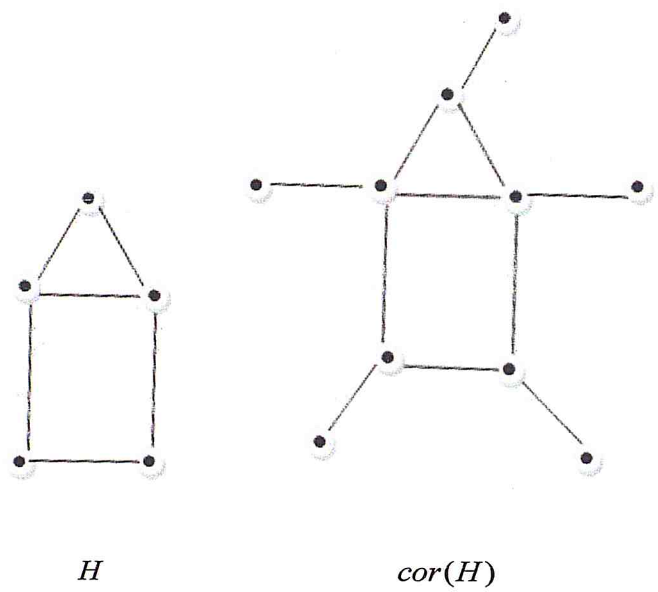


Figure 1.17: Un graphe H et sa couronne associée.

1.2.8 Composition de deux graphes :

Définition 1.26 :

La composition de deux graphes G et H, notée $G[H]$ est le graphe avec $V(G[H]) = V(G) \times V(H)$ et $(u_1, u_2)(v_1, v_2) \in E(G[H])$ si $u_1 v_1 \in E(G)$ ou $u_1 = v_1$ et $u_2 v_2 \in E(H)$

1.2.9 Joint de deux graphes :

Définition 1.27 :

Le joint de deux graphes G et H, noté par $G+H$, est un graphe obtenu à partir de G et H en liant chaque sommet de G à tous les sommets de H.

1.2.10 Couronne de deux graphes :

Définition 1.28 :

la couronne de deux graphes G et H, notée $G \circ H$, est le graphe obtenu en prenant une copie de G d'ordre n et n copies de H puis rejoindre le sommet i de G à chaque sommet de la $i$ème copie de H.

1.3 Quelques invariants de graphes

Deux graphes isomorphes ont des propriétés communes. Ces propriétés sont appelées *invariants* de graphes.

Définition 1.29 :

Un *invariant* de graphe est une propriété stable par isomorphisme.

En d'autres termes, un invariant est une propriété qui est la même pour deux graphes s'ils sont isomorphes. Par exemple, le nombre de sommets et d'arêtes sont deux invariants de base d'un graphe.

Avant de donner les définitions de quelques invariants de graphes utilisés dans ce mémoire, nous allons définir les notions de minimalité et maximalité.

Définition 1.30 :

Un ensemble (de sommets, d'arêtes. . .) est *minimal* (*resp. maximal*) pour une propriété P s'il ne contient (resp. n'est contenu dans) aucun ensemble vérifiant la propriété P.

Un ensemble (de sommets, d'arêtes. . .) est *minimum* (*resp. maximum*) pour une propriété P s'il est de cardinalité minimale (*resp. maximale*) pour la propriété P.

Il est facile de voir qu'un ensemble maximum (resp. minimum) est aussi maximal (resp. minimal), mais un ensemble maximal (resp. minimal) n'est pas nécessairement maximum (resp. minimum).

1.3.1 Un stable (indépendant) :

Définition 1.31 :

Soit $G=(V,E)$ un graphe. Un sous ensemble stable $S \subseteq V$ est dit *stable* (*indépendant*) si les sommets de S ne sont pas adjacents deux à deux.

Définition 1.32 :

La *cardinalité maximum* d'un *stable* de G est appelée le nombre de stabilité. Il est noté par $\beta(G)$.

Définition 1.33 :

La *cardinalité minimum* d'un *stable maximal* de G est appelé le nombre de domination stable. Il est noté par $i(G)$.

Nous allons illustrer la notion de maximalité (définition 1.30), pour la propriété de stabilité, par un exemple. L'ensemble $X = \{x_3, x_6\}$ de la figure 1.18 est un stable maximal. En effet, il est impossible d'ajouter à ce stable un autre sommet pour former un stable de cardinalité supérieure. X est le plus petit ensemble stable possible, alors $i(G) = 2$. Par ailleurs, X n'est pas un stable maximum, puisqu'il est possible de trouver un autre stable de cardinalité supérieure, par exemple l'ensemble $\{x_1, x_3, x_5\}$ de cardinalité 3 est le plus grand ensemble stable possible. Alors, $\beta(G) = 3$.

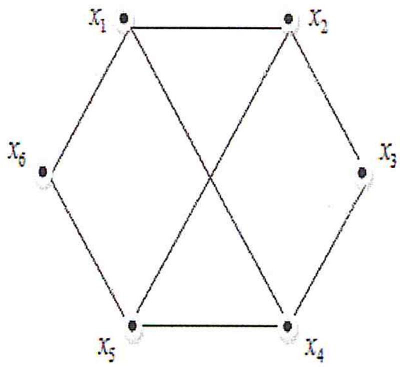


Figure 1.18 : Un graphe G avec $\beta(G) = 3$ et $i(G) = 2$.

1.3.2 Un couplage :

Définition 1.34 :

Un *couplage* d'un graphe $G = (V, E)$ est un sous-ensemble d'arêtes non incidentes deux à deux.

Définition 1.35 :

La *cardinalité maximum* d'un *couplage* de G il est noté par $\alpha(G)$.

Dans la Figure 1.19, le graphe G admet l'ensemble d'arêtes $V = \{x_1x_6, x_2x_3, x_4x_5\}$ comme couplage maximum. Alors, $\alpha(G) = 3$.

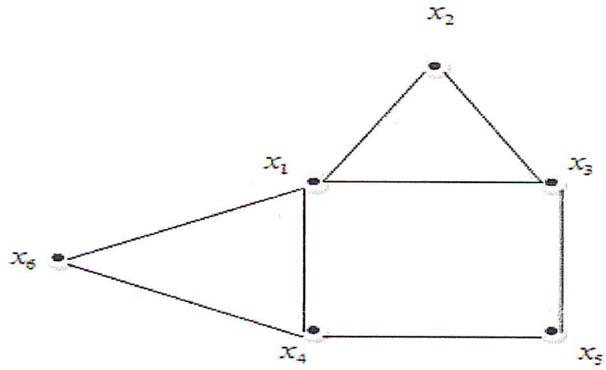


Figure 1.19 : *Un* graphe G avec $\alpha(G)=3$.

1.4 La domination dans les graphes

Dans cette section, nous rappelons la domination classique et cinq de ses variantes, à savoir : la domination totale, connexe, couplée, indépendante et clique.

1.4.1 Historique :

Bien que l'étude mathématique des ensembles dominants a commencé dans les années soixante, le sujet trouve son origine en 1862 dans les jeux d'échecs quand de Jaenisch [3] étudia le problème de la détermination du nombre minimum de reines à placer sur un èchiquier $n \times n$ de sorte que chaque case soit occupée par une reine ou peut être occupée en un seul mouvement par l'une d'elles, tout en sachant que les règles du jeu des échecs permet à une reine de se déplacer à travers les cases horizontalement, verticalement ou diagonalement.

Pour un échiquier 8×8, cinq est le nombre minimum de reines qui dominent toutes les cases de l'échiquier. Ce problème est à l'origine de l'étude mathématique de la domination. En 1892, Ball [6] a traité la question de De Jaenisch en considérant d'autres conditions supplémentaires. En 1964, les frères Yaglom [7] étudièrent les problèmes posés par De Jaenisch et Ball. L'appellation ‹‹ coefficient de stabilité externe ›› fut introduite par Berge en 1962 [4] pour définir le nombre de domination. Ore [8] fut le premier à employer les termes ‹‹ ensemble dominant ›› et ‹‹ nombre de domination ›› qu'il nota $d(G)$.

L'étude moderne de la domination a débuté après l'apparition de l'article de Cockayne et Hedetniemi [9] en 1977. Les auteurs de [9] on été les premiers à utiliser la notation $\gamma(G)$ pour désigner le nombre de domination.

1.4.2 Domination classique:

Définition 1.36 :

Un ensemble $S \subseteq V$ dans un graphe $G=(V,E)$ est un *ensemble dominant* si chaque sommet $v \in V$ est un élément de S où adjacent à un élément de S.

Définition 1.37 :

La cardinalité minimum d'un ensemble dominant de G, appelé le *nombre* de *domination inférieur*. Il est noté par $\gamma(G)$.

Définition 1.38 :

La *cardinalité maximum* d'un *ensemble dominant minimal* de G, appelé le *nombre* de *domination supérieur*. Il est noté par $\Gamma(G)$.

Le nombre de domination inférieur est souvent appelé *nombre de domination*. Pour un graphe G un ensemble S est dit $\gamma(G)$*-ensemble* si S est un dominant et $|S|=\gamma(G)$.

Dans le graphe de la Figure 1.20, l'ensemble $\{x_1,x_2,x_5\}$ est un dominant minimal maximum et l'ensemble $\{x_1,x_4\}$ est un dominant minimal minimum. D'où $\gamma(G)=2$.

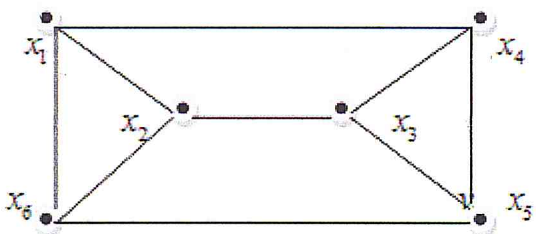


Figure 1.20 : Un graphe G avec $\gamma(G)=2$ et $\Gamma(G)=3$.

Dans la littérature, nous trouvons d'autres définitions équivalentes, citons :

Définition 1.39 :

Un ensemble $D \subseteq V$ est un *ensemble dominant* de $G = (V, E)$ si pour tout sommet v de $V \setminus D$, $N(v) \cap D \neq \varnothing$.

Définition 1.40 :

Un ensemble $D \subseteq V$ est un *ensemble dominant* de G si $N[D] = V$.

La domination possède plusieurs exemples pratiques, nous citons deux exemples :

1) Chercher le nombre minimum de policiers qu'on doit placer pour contrôler tous les ronds-points d'une ville, revient à déterminer un dominant de cardinalité minimum dans le graphe correspondant à cette ville dont les sommets sont les ronds-points, et les arêtes sont routes entre ces ronds-points.

2) Considérons, un graphe d'une carte géographique ou les sommets sont les localités et les arêtes ont les routes entre deux localités différentes, on suppose qu'un gardien d'une localité protège ses voisins et lui-même, nous cherchons le nombre minimum de gardien pour protéger toutes les localités. Pour résoudre ce problème d'une façon optimale, il suffit de déterminer un dominant minimum dans ce graphe.

1.4.3 Quelques variantes de la domination :

Une autre motivation pour l'étude de la domination est la possibilité de former de nouveaux paramètres de domination. Ces derniers sont souvent issus de situations pratiques et sont définis en imposant une ou plusieurs contraintes additionnelles sur l'ensemble dominant ou sur l'ensemble dominé ou même sur la façon de dominer. Nous considérons ici les variantes de domination qui seront évoqués dans les autres chapitres.

La domination totale :

Définition 1.41 :

Un ensemble $D \subseteq V$ dans un graphe $G = (V, E)$ est un ensemble *dominant total* si chaque sommet dans V est adjacent à un sommet de D.

Définition 1.42 :

La cardinalité *minimum* d'un ensemble *dominant total* est appelé *le nombre de domination total* de G il est noté $\gamma_t(G)$.

Une conséquence immédiate des définitions des nombres de domination et domination totale, est que pour tout graphe G, $\gamma_t(G) \geq \gamma(G)$.

Dans la Figure 1.21, l'ensemble $D = \{x_2, x_3, x_4\}$ est un dominant total minimum, donc $\gamma_t(G) = 3$.

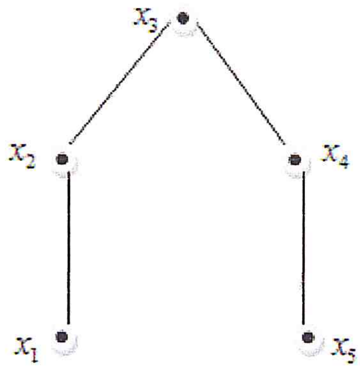


Figure 1.21 : Un graphe G avec $\gamma_t(G) = 3$.

La domination connexe (connecté) :

Définition 1.43 :

Un ensemble $D \subseteq V$ dans un graphe $G = (V, E)$ est un ensemble *dominant connexe* si tous les sommets de $V \setminus D$ sont adjacents à au moins un sommet dans D et le sous-graphe $G[D]$ induit par l'ensemble D est connexe.

Définition 1.44 :

La *cardinalité minimum* d'un ensemble *dominant connexe* est appelé *le nombre de domination connexe* de G il est noté $\gamma_c(G)$.

Dans la Figure 1.22, l'ensemble $D = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ est un dominant connexe minimum car $G[S]$ est un graphe connexe et tous les sommets de $V \setminus S$ sont adjacents à un sommet de S.

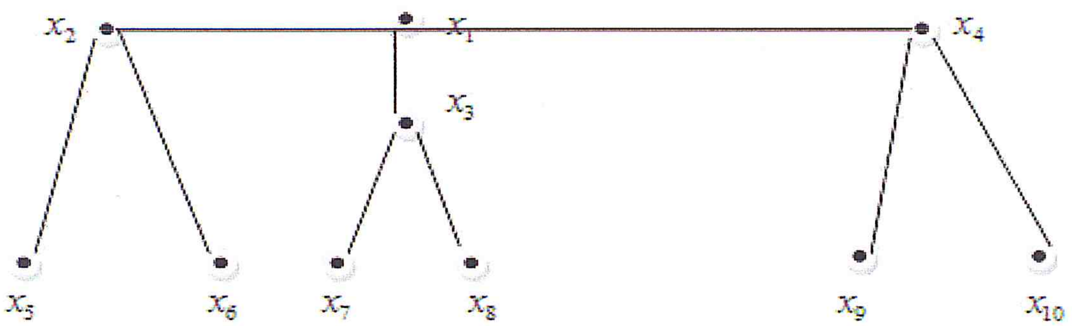


Figure 1.22 : Un graphe G avec $\gamma_C(G)=4$.

La domination coupleé :

Définition 1.45 :

Un ensemble $D \subseteq V$ dans un graphe $G=(V,E)$ est un ensemble *dominant couplé* si D est un dominant et dont le sous graphe *induit* par D possède un *couplage parfait*.

Définition 1.46 :

La *cardinalité minimum* d'un ensemble *dominant couplé* est appelé *le nombre de domination couplé* de G il est noté par $\gamma_{pr}(G)$.

Dans la Figure 1.23, l'ensemble $D=\{x_1,x_2\}$ est un dominant couplé de cardinalité minimum.

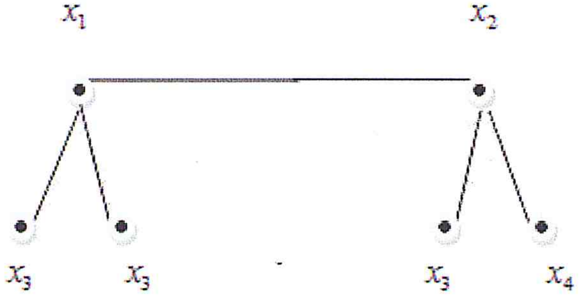


Figure 1.23 : Un graphe G avec $\gamma_{pr}(G)=2$.

La domination indépendante :

Définition 1.47 :

Un ensemble $D \subseteq V$ dans un graphe $G=(V,E)$ est un ensemble *dominant indépendant* si D est un ensemble indépendant et un ensemble dominant.

Définition 1.48 :

La *cardinalité minimum* d'un ensemble *dominant indépendant* est appelé *le nombre de domination indépendant* de G il est noté par $i(G)$.

Dans la Figure 1.24, l'ensemble $D=\{x_2,x_5\}$ est un dominant indépendant de cardinalité minimum.

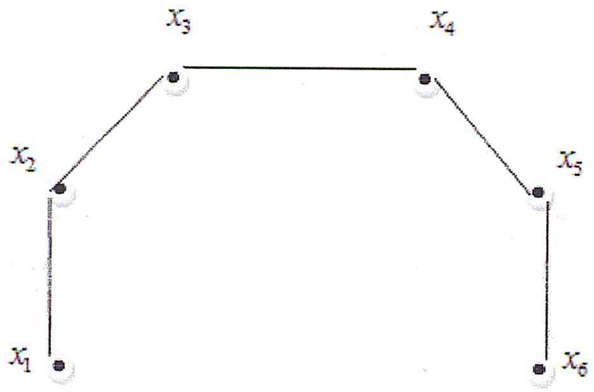


Figure 1.24 : Un graphe G avec $i(G)=2$.

La domination clique (convexe) :

Définition 1.49 :

Un ensemble $D \subseteq V$ dans un graphe $G=(V,E)$ est un ensemble *dominant clique (convexe)* si chaque sommet de $V \setminus D$ a au moins un voisin dans D.

Définition 1.50 :

La *cardinalité minimum* d'un ensemble *dominant clique* est appelé *le nombre de domination clique* de G il est noté par $\gamma_{cl}(G)$.

Dans la Figure 1.25, l'ensemble $D=\{x_2,x_4\}$ est un dominant clique de cardinalité minimum.

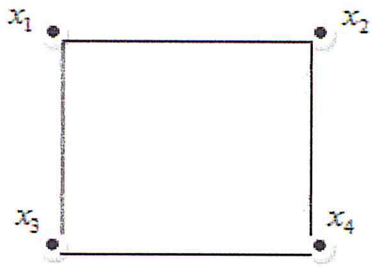


Figure 1.25 : Un graphe G avec $\gamma_{cl}(G)=2$.

1.4.4 Complexité du problème de domination :

Soit $G=(V,E)$ un graphe d'ordre n . Le problème de décision [18] associé au problème de recherche d'un ensemble dominant est donné par :

Ensemble dominant :

Instance : Un graphe $G=(V,E)$ d'ordre n et k un entier positif, $k \leq n$.

Question : Existe-il un ensemble dominant de G de cardinal $\leq k$?

Par la réduction du problème "$3-SAT$" au problème "Ensemble dominant", David Johnson montra que le problème de l'ensemble dominant est difficile.

Théorème (Garey et Johnson [31]) Le problème "Ensemble dominant" est difficile.

Le problème "Ensemble dominant" reste difficile pour la classe des graphes bipartis (Dewdney [30]) et les graphes triangulés (Booth et johnson [29]). Néanmoins, il est facile pour la classe des arbres.

Chapitre 2
Les dominations 1-mobile, co-sécurisée et sécurisée

Dans ce chapitre nous présentons trois paramètres de graphes combinant dans leurs définitions la sécurité et la domination: la domination 1-mobile γ_m^1, la domination sécurisée γ_s et la domination co-sécurisée γ_{cs}. Nous donnons des définitions illustrées par des exemples pratiques. Nous commençons par la relation entre γ_m^1, γ_{cs} et γ_s, ensuite la relation de la domination γ_m^1 avec d'autres paramètres de graphe, les bornes en fonction des paramètres structurels du graphe. Nous nous intéressons également à des classes particulières de graphes et à la relation liant la domination 1-mobile à d'autres invariants du graphe, les opérations du graphe. Nous terminons le chapitre par une liste des problèmes ouverts sur la domination 1-mobile proposés par nous-mêmes.

2.1 Définitions :

En pratique, il y a plusieurs situations où l'on cherche à protéger un réseau contre les attaques extérieures. Le réseau peut être informatique, de communication, de transport, etc. La stratégie de protection dépend directement du type de l'attaque: attaque sur les nœuds du réseau ou sur les liaisons entre ces nœuds, attaque unique ou attendue multiple. Ce qui a donné naissance à plusieurs concepts de sécurité en théorie des graphes. Nous nous intéressons au cas où une seule attaque est effectuée contre un seul nœud du réseau.

2.1.1 La domination 1- mobile :

En 2011, la domination 1-mobile a été étudiée par Blair et *al.* [17].

Définition 2.1 :

Un ensemble dominant S d'un graphe $G=(V,E)$ sans sommet isolé est un ensemble dominant *1-mobile* si pour chaque $v \in S$ au moins une des deux conditions suivantes est vérifiée:

1. $S \setminus \{v\}$ est un ensemble dominant ou
2. Il existe un sommet $u \in V(G) \cap N(v)$ tel que $(S \setminus \{v\}) \cup \{u\}$ est un ensemble dominant.

Tout graphe sans sommet isolé possède au moins un ensemble 1-mobile. En effet, il suffit de prendre tous les sommets du graphe dans l'ensemble. Dans un contexte d'optimisation, on s'intéresse à l'ensemble de cardinalité minimum.

Définition 2.2 :

La cardinalité minimum d'un ensemble dominant 1-movable est le *nombre de domination 1-mobile* de G. Il est noté par $\gamma_m^1(G)$.

Nous disons que le sommet u *protège* le sommet v ou v est *protégé* par u.

Exemple 2.1 :

Considérons la chaîne $P_3 = v_1v_2v_3$ de la Figure 2.1. L'ensemble $S = \{v_2\}$ est un ensemble dominant mais S n'est pas un ensemble dominant 1-mobile car $S \setminus \{v_2\}$ n'est pas dominant (condition 1 non vérifiée) et ni $S \setminus \{v_2\} \cup \{v_1\}$, ni $S \setminus \{v_2\} \cup \{v_3\}$ n'est un ensemble dominant (condition 2 non vérifiée). De même pour $S = \{v_1\}$ ou $S = \{v_2\}$ Par ailleurs, $S = \{v_1, v_2\}$ est un ensemble dominant 1-mobile car $S \setminus \{v_1\}$ est un ensemble dominant de la chaîne (condition 1 vérifiée) et $S \setminus \{v_2\} \cup \{v_3\}$ l'est aussi (condition 2 vérifiée). Par conséquent, $\gamma_m^1(P_3) = 2$.

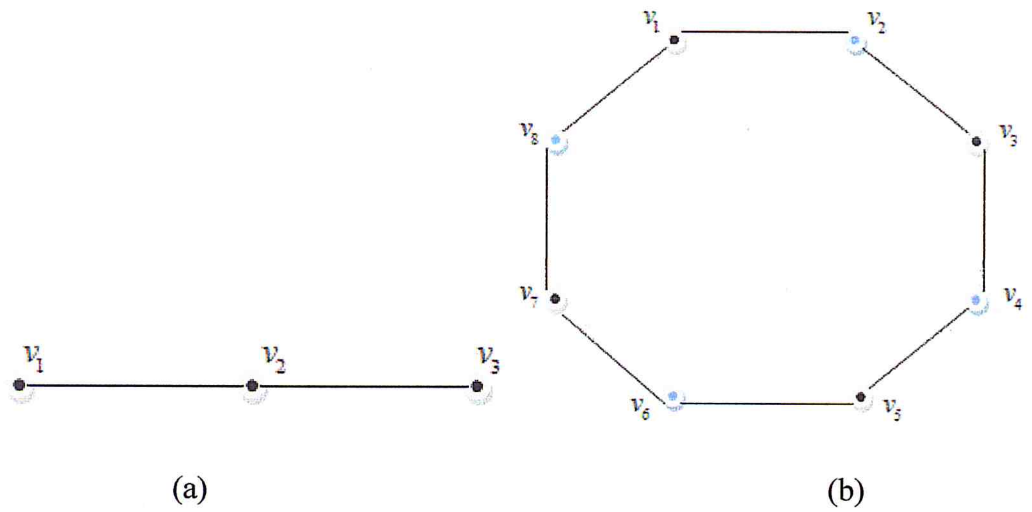


Figure 2.1: Le $\gamma_m^1(G)$-ensemble : a) $\gamma_m^1(P_3) = 2$; b) $\gamma_m^1(C_8) = 4$.

Dans le cycle C_8 de la figure 2.1, l'ensemble $S = \{v_3, v_5, v_8\}$ est un dominant de C_8 mais il n'est pas 1-mobile, le sommet v_8 ne vérifie aucune des deux conditions. L'ensemble $S_1 = \{v_2, v_4, v_5, v_6, v_8\}$ est un ensemble dominant 1-mobile, chacun des sommets de v_3, v_5 et v_8 vérifie la 2ème condition et le sommet v_5 vérifie la 1ère condition. Par ailleurs, l'ensemble $S_2 = \{v_2, v_4, v_6, v_8\}$ est aussi un ensemble dominant 1-mobile qui est plus petit que S_1. Nous pouvons vérifier que S_2 est le plus petit ensemble dominant 1-mobile que nous pouvons obtenir pour G. Alors, $\gamma_m^1(C_8) = 4$.

Exemple pratique 2.2 :

Considérons un réseau informatique formé de nœuds et de liaisons entre les nœuds. Nous déployons un certain nombre de logiciels antivirus sur les nœuds du réseau. Un logiciel est utilisé pour détecter et neutraliser l'activité suspecte dans le nœud où il se trouve et dans tout nœud voisin. L'évolution des conditions à un nœud (par exemple, une infection virus) pourraient empêcher le bon fonctionnement du logiciel. Il est naturel de désactiver le logiciel dans le nœud infecté ou d'envisager un nœud voisin où le déplacer. L'objectif est de protéger tout le réseau avant et après l'attaque virus. Pour de raisons économiques, nous voulons utiliser le minimum de logiciels antivirus. La situation peut être modélisée par un graphe G = (V, E) ou V représente les nœuds et E les liaisons entre ces nœuds. Le problème revient à la recherche d'un ensemble dominant 1-mobile dans G.

2.1.2 La domination co-sécurisée :

En 2014 Arumugam et *al.* [20] ont défini un concept de sécurité, proche dans sa définition de la 1-mobilité, où tout sommet de l'ensemble doit être protégé, i.e. condition 1 supprimée.

Définition 2.3 :

Un ensemble dominant S d'un graphe $G = (V, E)$ sans sommet isolé est *co-sécurisé*, si pour chaque $v \in S$ il existe un sommet $u \in V(G) \cap N(v)$ tel que $(S \setminus \{v\}) \cup \{u\}$ est un ensemble dominant de G.

Définition 2.4 :

La cardinalité minimum d'un ensemble dominant co-sécurisé est appelé le *nombre de domination co- sécurisé* de G. Il est noté par $\gamma_{cs}(G)$.

Exemple 2.3 :

Pour le graphe G de la Figure 2.2, l'ensemble $\{v_2, v_7\}$ est un ensemble dominant de G mais il n'est pas un dominant co-sécurisé. L'ensemble $\{v_2, v_5, v_7\}$ est un ensemble dominant co-sécurisé et c'est le plus petit ensemble que nous pouvons obtenir. Par conséquent, $\gamma_{cs}(G) = 3$.

Noter que l'ensemble $\{v_2, v_5, v_6, v_7\}$ n'est pas un dominant co-sécurisée car la condition n'est pas vérifiée pour v_5 et v_6.

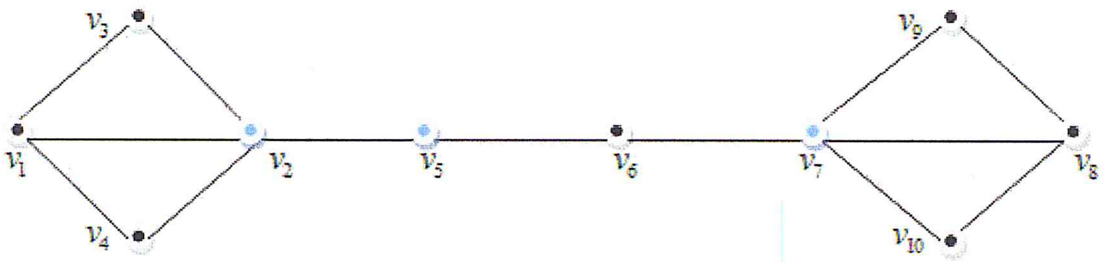


Figure 2.2 : Un graphe G avec $\gamma_{cs}(G) = 3$.

Exemple pratique 2 .4 :

Reprenons l'exemple pratique 2.2 et supposons qu'en plus des conditions précédentes, nous avons une information importante à sauvegarder, par exemple un code confidentiel. Nous proposons de partager ce code antivirus entre les logiciels antivirus du réseau, qui doivent alors rester opérationnels. Le problème revient à chercher un $\gamma_{cs}(G) - ensemble$ où déployer les logiciels antivirus.

Arumugram et *al.* [20] ont défini la co-sécurité en s'inspirant de la domination sécurisée présentée ci-dessous.

2.1.3 La domination sécurisée :

En 2006, Cockayne et *al.* [24] ont définit la domination sécurisée où, contrairement à la domination co-sécurisé, la condition de déplacement est exigé pour les sommets à l'extérieur de l'ensemble.

Définition 2.5 :

Un ensemble dominant S d'un graphe simple $G = (V, E)$ est *sécurisé* si pour chaque sommet $u \in V \setminus S$, il existe un sommet $v \in S$ adjacent à u tel que $(S \setminus \{v\}) \cup \{u\}$ est un ensemble dominant de G.

Proposition 2.2 (Arumugam et *al.* [20])

Soit $G=(V,E)$ un graphe sans sommet isolé. Un sous-ensemble S de V est un ensemble co-sécurisé de G si et seulement si S est un dominant de G. Un sommet $u \in V \setminus S$ protège $v \in S$ si et seulement si $u \in N(v)$ et $epn(v,S) \subseteq N[u]$.

Corolaire 2.2 (Arumugam et *al.* [20])

Soit $G=(V,E)$ un graphe sans sommet isolé. Un sous-ensemble S de V est un ensemble co-sécurisé de G si et seulement si S est un dominant de G et pour chaque sommet $v \in S$, il existe $u \in (V \setminus S)$ tel que $u \in N(v)$ et $epn(v,S) \subseteq N[u]$.

2.2.2 Relation entre γ_m^1 et les autres paramètres de graphe:

Notons que d'après le Théorème 2.1, toute borne supérieure de $\gamma_s(G)$ d'un graphe G est une borne supérieure aussi de $\gamma_m^1(G)$.

En 2003, Cockayne et *al.* [24] ont relié le nombre de domination sécurisé γ_s au nombre de couplage maximum.

Proposition 2.3 (Cockayne et *al.* [24])

Pour tout graphe G d'ordre $n \geq 2$, $\gamma(G) \leq \gamma_m^1(G) \leq \gamma_s(G) \leq n-\alpha(G)$.

En 2008, klostermeyer et *al.* [21] ont donné l'observation suivante.

Corollaire 2.2 (Klostermeyer et *al.* [21])

Pour tout graphe G d'ordre $n \geq 2$. Alors, $\gamma_m^1(G) \leq \gamma_s(G) \leq 2\beta(G)$.

Cockayne et *al.* [24] ont étudié une classe particulière de graphe.

Théoréme 2.4 (Cockayne et *al.* [24])

Soit G un graphe sans griffe et sans C_5 d'ordre $n \geq 2$. Alors, $\gamma_m^1(G) \leq \gamma_s(G) \leq \beta(G)$.

Une partition en clique d'un graphe G est une partition de $V(G)$ dans des ensembles $V_1, V_2, \ldots, V_k$ de sorte que le graphe induit par chaque V_i, $i = 1,2,\ldots,k$, est une clique. Le nombre de partition en clique d'un graphe G est le nombre minimum

Théorème 2.1 (Blair et *al.* [17])

Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 2$. Alors,

$$\gamma(G) \leq \gamma_m^1(G) \leq \gamma_s(G) \qquad (2)$$

Arumugam et *al.* [20] ont comparé γ_s et γ_{cs} pour les graphes sans feuille et sans sommet isolé.

Théorème 2.2 (Arumugam et *al.* [20])

Soit G un graphe avec $\delta(G) \geq 2$. Alors, $\gamma_{cs}(G) \leq \gamma_s(G)$ (3)

Nous en déduisons des inégalités (1), (2) et (3) que pour tout graphe G avec $\delta(G) \geq 2$, nous avons :

$$\gamma_m^1(G) \leq \gamma_{cs}(G) \leq \gamma_s(G).$$

Evidement, toute borne de γ_{cs} ou γ_s est une borne de γ_m^1.

Le résultat suivant est trivial, il caractérise un ensemble dominant 1-mobile.

Théorème 2.3 (Renario et *al.* [18])

Soit $G=(V,E)$ un graphe sans sommet isolé d'ordre $n \geq 2$. Un sous-ensemble S de V est un ensemble dominant 1-mobile de G si et seulement si S est un ensemble dominant de G et pour chaque sommet $v \in S$, $epn(v,S) = \varnothing$ ou il existe $u \in (V \setminus S) \cap N(v)$ tel que $epn(v,S) \subseteq N[u]$.

Une autre caractérisation d'un ensemble dominant sécurisé est due à Cockayne et *al.* [24].

Proposition 2.1 (Cockayne et *al.* [24])

Soit $G=(V,E)$ un graphe simple. Un sous-ensemble S de V est un ensemble dominant sécurisé de G si et seulement si S est un dominant de G, un sommet $v \in S$ protège $u \in V \setminus S$ si et seulement si le sous graphe induit $G\left[epn(v,S) \cup \{uv\}\right]$ est complet.

Arumugam et *al.* [23] ont caractérise un ensemble dominant co-sécurisé.

Un ensemble S est dit $\gamma_m^1(G)$*-ensemble* (resp. $\gamma_{cs}(G)$*-ensemble*, $\gamma_s(G)$-ensemble) si S est un dominant sécurisé de G et $|S|=\gamma_m^1(G)$ (resp. $|S|=\gamma_{cs}(G)$, $|S|=\gamma_s(G)$).

Nous donnons dans la suite quelques définitions utiles. Soient un graphe $G=(V,E)$ et $X\subset V$.

Définition 2.7 :

Le *voisinage privé* de $x\in X$ relativement à X, noté par $pn(x,X)$ est défini par,

$pn(x,X)= N[x]-N[X\setminus\{x\}]$.

Un sommet de $pn(x,X)$ est dit *voisin privé de x.*

Définition 2.8 :

Le *voisinage privé extérieur* de $pn(x,X)$ relativement à X, noté par $epn(x,X)$ et défini par, $epn(x,X) = pn(x,X) -\{x\}$.

Les sommets dans $epn(x,X)$ sont appelés *les voisins privés extérieurs* de x.

Définition 2.9 :

Le *voisinage privé intérieur* de $x\in X$ relativement à X, noté par $ipn(x,X)$ est défini comme suit $ipn(x,X)=\{w\in X : N(w)\cap X=\{x\}\}$.

Les sommets dans $ipn(x,X)$ sont appelés *les voisins privés intérieurs* de *x.*

2.2 Résultats :

Dans cette section, nous allons présenter l'essentiel des résultats trouvés dans la littérature concernant les trois paramètres, en particulier ceux de γ_m^1.

2.2.1 Relation entre γ_m^1, γ_{cs} et γ_s :

Par définition, $\gamma(G)$ est une borne inférieure de $\gamma_m^1(G)$, $\gamma_{cs}(G)$ et $\gamma_s(G)$ pour tout graphe G.

Par définition, tout ensemble dominant co-sécurisé est dominant 1-mobile. Alors, pour tout graphe G sans sommet isolé :

$$\gamma_m^1(G)\leq\gamma_{cs}(G) \qquad (1)$$

Définition 2.6 :

La cardinalité minimum d'un ensemble dominant sécurisé est le *nombre de domination sécurisé* de G. Il est noté par $\gamma_s(G)$.

Nous disons que le sommet v *protège* le sommet u et que u est *protégé* par v.

Exemple 2.5 :

Dans le graphe de la Figure 2.3, l'ensemble $S_1 = \{v_1, v_5\}$ est un dominant mais il n'est pas sécurisé alors que $S_2 = \{v_1, v_5, v_6\}$ est un ensemble dominant sécurisé. En effet, v_5 protège v_7 et v_1 protège v_2, v_3 et v_4. C'est le plus petit ensemble dominant sécurisé possible pour G.

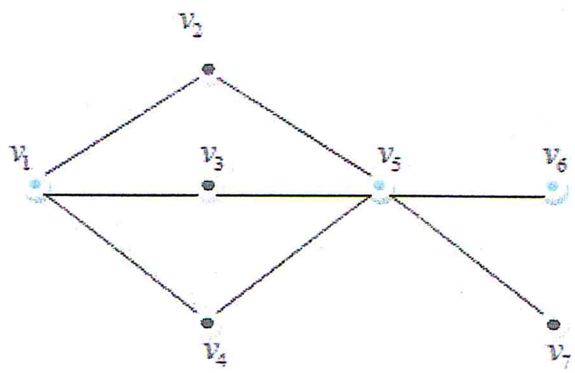


Figure 2.3: Un graphe G avec $\gamma_s(G)=3$.

Exemple pratique 2.6 :

Considérons un musé à protéger contre le vol. Un ensemble de postes qui représentent les intersections entre les allés du musé, est déterminé. Le PDG du musée a décidé de mettre en place des gardes. De sorte qu'un un garde protège son intersecté et doit pouvoir se déplacer en cas d'intrusion dans un intersecté voisin. L'ensemble des gardes doit protéger tout le musé avant et après l'intrusion. Pour ne pas attiser l'attention des visiteurs et pour des raisons économiques, le PDG cherche à recruter un nombre minimum de gardes. Nous modélisons la situation par un graphe où les sommets représentent les intersectés et les arêtes sont les allés. Le problème revient à chercher un ensemble dominant sécurisé minimum.

de parties dans une partition en cliques de G. Il est noté par $\overline{\chi}(G)$. Blair *et al* [17] ont étudié la relation entre $\gamma_m^1(G)$ et le nombre de partition en cliques $\overline{\chi}(G)$.

Théorème 2.5 (Blair et *al.* [17])

Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 2$. Alors :

$$\gamma_m^1(G) \leq \overline{\chi}(G).$$

2.2.3 Les bornes de γ_m^1 en fonction de n l'ordre du graphe :

Observation 2.1 (Blair et *al.* [17], Arumugam et *al.* [20], Cockayne et *al.* [24])

$\gamma_m^1(K_n) = \gamma_{cs}(K_n) = \gamma_s(K_n) = 1$, pour $n \geq 2$.

Observation 2.2 (Blair et *al.* [17])

$$\gamma_m^1(K_{1,n}) = n.$$

Blair et *al.* [17] ont caractérisé les graphes atteignant ces bornes.

Théorème 2.6 (Blair et *al.* [17])

Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe d'ordre $n \geq 2$. Alors, $\gamma_m^1(G) = 1$ si et seulement si G possède deux sommets de degré $n-1$.

Prevue:

Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 2$ avec deux sommets x et y, de degré $n-1$. L'ensemble $(S-\{x\}) \cup \{y\}$ est un ensemble dominant de G, donc $S = \{x\}$ est un ensemble dominant 1-mobile d'ordre 1. D'où, $\gamma_m^1(G) = 1$.

Maintenant, soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 2$ avec $\gamma_m^1(G) = 1$. Il existe un sommet de degré $n-1$, disons x, de sorte que $S = \{x\}$ est un ensemble dominant. En outre, il doit y avoir un sommet $y \neq x$ adjacent à x, tel que $(S-\{x\}) \cup \{y\} = \{y\}$ est aussi un ensemble dominant de G. Par conséquent y est de degré $n-1$. $\square$

Théorème 2.7 (Blair et *al.* [17])

Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 2$. Alors, $1 \leq \gamma_m^1(G) \leq n-1$.

Théorème 2.8 (Blair et *al.* [17])

Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 2$. Alors, $\gamma_m^1(G) = n-1$ si et seulement si $G = K_{1,n-1}$.

Corollaire 2.3 (Blair et *al.* [17])

Soit G un graphe bipartite connexe d'ordre $n \geq 3$. Alors, $2 \leq \gamma_m^1(G) \leq n-1$.

Ils ont aussi montré le résultat d'existence suivant:

Théorème 2.9 (Blair et *al.* [17])

Soit k et n des entiers tels que $1 \leq k < n$. Alors, il existe un graphe connexe d'ordre n avec $\gamma_m^1(G) = k$.

Preuve:

Considérons le graphe G obtenu à partir du graphe complet K_{n-k+1} en attachant à un sommet u choisi arbitrairement, $k-1$ sommets notés $v_1, v_2, ..., v_{k-1}$. L'ensemble $\{u, v_1, v_2, ..., v_{k-1}\}$ est un ensemble dominant minimum 1-mobile. La Figure 2.4 illustre le cas de $n = 8$ et $k = 4$. $\square$

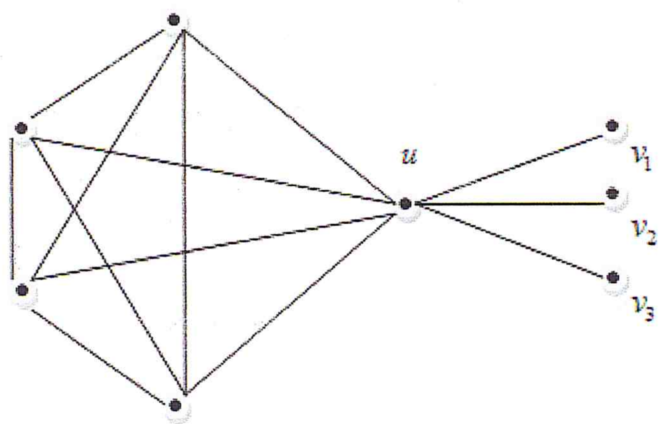


Figure 2.4: Un graphe G d'ordre n = 8 avec $\gamma_m^1(G) = 4 = k$.

Ils ont notamment caractérisé les graphes G avec $\gamma_m^1(G)=2$.

Théorème 2.10 (Hinampas et Canoy [16])

Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$, $\gamma_m^1(G)=2$ et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites:

(i) G n'a pas deux sommets de degré $n-1$ et

(ii) Il existe 2 sommets x et y qui dominent G tel que :

- $epn(x,\{x,y\})\setminus\{z\} \subseteq N_G(z)$ pour un certain $z \in N_G(x)$ et
- $epn(y,\{x,y\})\setminus\{z\} \subseteq N_G(w)$ pour un certain $w \in N_G(y)$ pour un certain $z \in N_G(x)$.

Preuve :

Supposons que $\gamma_m^1=2$. D'après le théorème 2.6. G ne contient pas deux sommets de degré $n-1$. Soit $S=\{x,y\}$ un ensemble dominant 1-mobile de G donc il existe $z \in N_G(x)$ tel que $(S\setminus\{x\})\cup\{z\}=\{y,z\}$ est un ensemble dominant de G. Soit $v \in epn(x;S)\setminus\{z\}$. Etant donné que $vy \notin E(G)$, il découle que $v \in N(z)$ Ainsi $epn(x;S)\setminus\{z\} \subseteq N(z)$. De même, (b) vérifie.

Pour l'inverse, supposons que (i) et (ii) vérifie. Alors $\gamma_m^1 \geq 2$. Soit $S=\{x,y\}$. Ensuite, par (ii), $\{y,z\}$ et $\{x,w\}$ sont des ensemble dominant de G. Par conséquent S est un ensemble dominant 1-mobile de G. Nous pouvons vérifier que 2 est la cardinalité minimum d'un ensemble dominant 1-mobile de G . D'où, $\gamma_m^1(G)=2.\square$

Burger et *al.* [25] et Arumugam et *al.* [20] ont donné plusieurs bornes supérieures $\gamma_m^1(G)$.

Théorème 2.11 (Burger et *al.* [25])

Soit G un graphe différent d'un C_5, avec $\delta(G) \geq 2$. Alors $\gamma_m^1(G) \leq \gamma_s(G) \leq \dfrac{n}{2}$.

Arumugam et *al.* [20] ont donné une borne supérieure au nombre de domination sécurisé en fonction de l'ordre et la circonférence $c(G)$. Rappelons que la circonférence d'un graphe G est le plus petit cycle induit de G.

Proposition 2.4 (Arumugam et *al.* [20])

Soit G un graphe d'ordre n avec $c(G) \geq 3$. Alors, $\gamma_m^1(G) \leq \gamma_s(G) \leq n - \left\lfloor \frac{4c(G)}{7} \right\rfloor$.

Arumugam et *al.* [20] ont également obtenu des bornes supérieures en fonction du diamètre et de l'ordre du graphe.

Proposition 2.5 (Arumugam *et al* [20])

Soit G un graphe sans sommet isolé d'ordre n. Alors, $\gamma_m^1(G) \leq \gamma_{cs}(G) \leq n - \left\lfloor \frac{4(diam(G)+1}{7} \right\rfloor$.

Proposition 2.6 (Arumugam et *al.* [20])

Soit G un graphe sans sommet isolé d'ordre n. Alors, $\gamma_m^1(G) \leq \gamma_{cs}(G) \leq n - \gamma(G)$.

Des bornes supérieures de nombre de domination co-sécurisé pour tout graphe G en fonction de l'ordre du graphe et son degré maximum ont été démontrées par Arumugam et *al.* [23] en 2014.

Corollaire 2.4 (Arumugam et *al.* [20])

Soit G un graphe d'ordre n sans sommet isolé. Alors, $\gamma_m^1(G) \leq \gamma_{cs}(G) \leq \frac{n\Delta(G)}{\Delta(G)+1}$.

Toutes les bornes précédentes sont atteintes.

2.2.4 Graphes particuliers :

Blair et *al.* [17], Arumugam et *al.* [20] et Cockayne et *al.* [24] ont déterminé le nombre de domination 1-mobile, domination co-sécurisée et domination sécurisée. Pour les chaînes et les cycles.

Proposition 2.7 (Blair et *al.* [17], Arumugam et *al.* [20])

$$\gamma_m^1(p_n) = \gamma_{cs}(p_n) = \left\lceil \frac{2n}{5} \right\rceil, \text{ pour } n \geq 2.$$

Preuve (Blair et *al.* [17])

Soit $P_n = v_1 v_2 \ldots v_n$ une chaîne d'ordre n. Observons que $\gamma_m^1(p_n) \leq \left\lceil \frac{2n}{5} \right\rceil$ puisque l'ensemble $S = \{v_i \mid i \equiv 2(\text{mod}\, 5)\ ou\ 4(\text{mod}\, 5)\}$ est un ensemble dominant 1-mobile. Supposons maintenant que $\gamma_m^1(p_n) < \left\lceil \frac{2n}{5} \right\rceil$ et soit S un ensemble dominant 1-mobile minimum. Donc, il existe un sous graphe induit isomorphe à un P_5 contenant au plus un sommet dominant. Etiquetons les sommets de ce sous-graphe par v_1, v_2, v_3, v_4, v_5. Le sommet $v_3 \in S$ étant donné que d'autres choix ne parviennent pas à dominer soit v_2 ou v_4. Dans ce cas, le sommet v_3 ne vérifie pas la définition 2.1, contradiction. □

La même preuve précédente reste valide pour $\gamma_{cs}(p_n)$.

Cockayne et *al.* [24] ont donné le nombre de domination sécurisée pour les chaînes et les cycles.

Proposition 2.8 (Cockayne et *al.* [24])

$$\gamma_s(P_n) = \left\lceil \frac{3n}{7} \right\rceil, \forall\, n \geq 1. \qquad ; \qquad \gamma_s(C_n) = \left\lceil \frac{3n}{7} \right\rceil, \forall\, n \geq 4.$$

En ce qui concerne les cycles, les auteurs dans [17, 20] ont calculé les nombres de domination 1-movable et co-sécurisée des cycles.

Proposition 2.9 (Blair et *al.* [17], Arumugam et *al.* [20])

$$\gamma_m^1(C_n) = \gamma_{cs}(C_n) = \left\lceil \frac{2n}{5} \right\rceil, \text{ pour } n \geq 4.$$

Nous allons donner la preuve de Arumugam et *al.* [20] de proposition 2.9. Pour cela, le lemme suivant est nécessaire.

Lemme 2.1 (Arumugam et *al.* [20])

Soit H un sous-graphe partiel d'un graphe G, alors $\gamma_{cs}(G) \leq \gamma_{cs}(H)$.

Preuve de la proposition 2.9 (Arumugam et *al.* [20])

Il est facile de vérifier le résultat pour $4 \leq n \leq 9$. Maintenant, supposons que $n \geq 10$. D'après la Proposition 2.7 et le lemme 2.1, $\gamma_{cs}(C_n) \leq \gamma_{cs}(P_n) = \left\lceil \frac{2n}{5} \right\rceil$. Soit S un γ_{cs}-ensemble de C_n. Puisque $n \geq 10$, au moins deux sommets adjacents, soient u et v, de C_n doivent être dans $V \setminus S$ sinon $|S| \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil > \left\lceil \frac{2n}{5} \right\rceil$. Nous obtenons une chaîne P_n en supprimant l'arête uv. Il facile de voir que S reste un ensemble dominant co-sécurisé de P_n. Par conséquent, $\gamma_{cs}(P_n) \leq \gamma_{cs}(C_n)$, d'où $\gamma_{cs}(C_n) = \gamma_{cs}(P_n) = \left\lceil \frac{2n}{5} \right\rceil$. $\square$

La preuve précédente reste valide pour le paramètre γ_m^1.

2.2.5 Les arbres :

La caractérisation d'un ensemble dominant 1–mobile dans un arbre est donnée dans le suivant théorème.

Théorème 2.12 (Blair et *al.* [17])

Soit T un arbre d'ordre $n \geq 2$ et S un ensemble dominant de T. Alors, S est un dominant 1-mobile de T si et seulement si $|epn[v, S]| \leq 1$ pour tout $v \in S$.

Arumugam et *al.* [20] ont donné des bornes pour $\gamma_s(T)$ en fonction de l'ordre et le nombre de feuilles d'un arbre T.

Théorème 2.13 (Arumugam et *al.* [20])

Soit T un arbre d'ordre $n \geq 3$ avec k feuilles. Alors,

$$\left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil \leq \gamma_s(T) \leq \left\lfloor \frac{n+k-1}{2} \right\rfloor.$$

Il en résulte une borne supérieure de $\gamma_m^1(T)$

$$\gamma_m^1(T) \le \left\lfloor \frac{n+k-1}{2} \right\rfloor.$$

2 .2.6 Les opérations de graphes :

Dans cette section, nous présentons les résultats obtenus dans [16, 17, 18, 19], concernant les opérations de graphes suivantes: couronne d'un graphe ou de deux graphes, composition de deux graphes et joint de deux graphes.

Hinampas et Canoy [16] ont caractérisé les ensembles dominants 1-mobile dans le joint de deux graphes. Rappelons le joint de deux graphes G et H, noté par $G+H$, est un graphe obtenu à partir de G et H en liant chaque sommet de G à tous les sommets de H voir la section 1.2.9.

Théorème 2.14 (Hinampas et Canoy [16])

Soient G et H deux graphes connexes non triviaux. L'ensemble $S \subseteq V(G+H)$ est un ensemble dominant 1-mobile de $G+H$ si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée: G ou $\gamma(H)=1$ si $|S|=1$.

(i) S est un ensemble dominant de G . En plus, S est également un ensemble 1-mobile de G ou $\gamma(H)=1$ si $|S|=1$.

(ii) S est un ensemble dominant de H. En plus, S est également un ensemble 1-mobile de H ou $\gamma(G)=1$ si $|S|=1$.

(iii) $S \cap V(G) \neq \varnothing$ et $S \cap V(H) \neq \varnothing$.

Ils ont en déduit que le nombre 1-mobile dominant du joint de deux graphes est 1 ou 2.

Corollaire 2.5 (Hinampas et Canoy [16])

Soit G et H deux graphes connexes non triviaux. Alors,

$$\gamma_m^1(G+H)=\begin{cases}1 \; si \; \gamma(G)=1=\gamma(H) \; ou \; \gamma_m^1(G)=1 \; ou \; \gamma_m^1(H)=1\\ 2 \;\; \text{sinon.}\end{cases}$$

Ils se sont intéressés au cas où l'un des deux graphes est trivial.

Théorème 2.15 (Hinampas et Canoy [16])

Soit H un graphe connexe d'ordre $n \geq 2$. Alors, l'ensemble $S \subseteq V(K_1+H)$ est un dominant 1-mobile de K_1+H si et seulement si une des conditions suivantes est vérifiée :

(i) $S=V(K_1)$ et $\gamma(H)=1$.

(ii) $S=V(K_1)\cup S_1$ où $\varnothing \neq S_1 \subseteq V(H)$ et

- $S_1 \cup \{c\}$ est un ensemble dominat de H pour un certains $c \in V(H)\setminus S_1$ ou

- S_1 est un ensemble dominant de H .

(iii) $S \subseteq V(H)$ et S est un ensemble dominant de H.

Du théorème précédent, ils ont en déduit l'égalité des nombres de domination et de domination 1-mobile pour ces graphes.

Corollaire 2.6 (Hinampas et Canoy [16])

Soit H un graphe connexe d'ordre $n \geq 2$ alors $\gamma_m^1(K_1+H)=\gamma(H)$.

Blair et *al.* [17] se sont intéressé au graphe couronne d'un graphe.

Lemme 2.2 (Blair et *al.* [17])

Soit G un graphe sans sommet isolé. Alors, $\gamma_m^1(cor(G))=\gamma(cor(G))$.

Rappelons que la couronne de deux graphes G et H, notée $G \circ H$, est le graphe obtenu en prenant une copie de G d'ordre n et n copies de H puis rejoindre le sommet i de G à chaque sommet de la $i$ème copie de H voir section 1.2.10 pour la définition. Hinampas et Canoy [16] ont caractérisé un ensemble dominant 1-mobile de $G \circ H$ et ils ont montré que le calcul de $\gamma_m^1(G \circ H)$ se réduit au calcul de $\gamma(H)$.

Corollaire 2.7 (Hinampas et Canoy [16])

Soient G et H deux graphes connexes non-triviaux. Alors, $\gamma_m^1(G \circ H) = |V(G)|\gamma(H)$.

Hinampas et Canoy Se sont intéressés également à la composition de graphes. Rappelons que la composition de deux graphes G et H, notée $G[H]$ est le graphe avec $V(G[H]) = V(G) \times V(H)$ et $(u_1,u_2)(v_1,v_2) \in E(G[H])$ si $u_1v_1 \in E(G)$ ou $u_1 = v_1$ et $u_2v_2 \in E(H)$ par exemple, si on considère $G = P_2$ et $H = P_3$ alors $G[H] = P_2[P_3]$ est le graphe illustré dans la Figure 2.5.

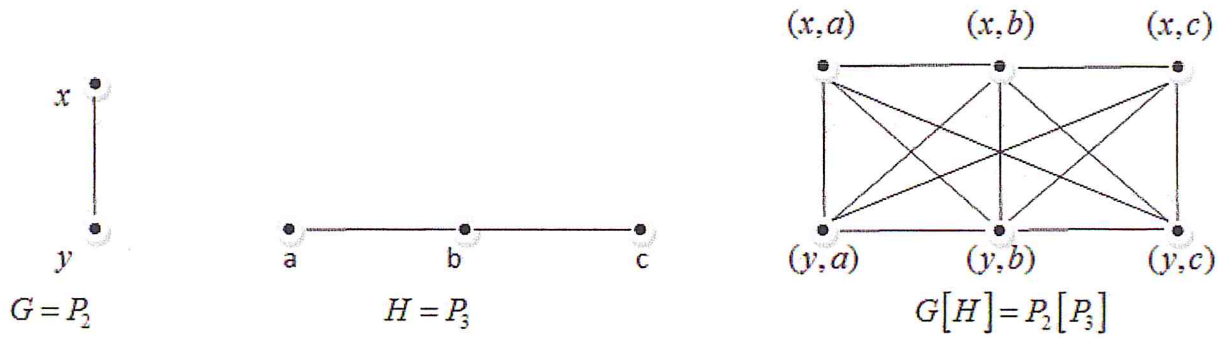


Figure 2.5 : La composition de graphe P_2 et P_3.

Les deux résultats suivants sont nécessaires pour la caractérisation d'un ensemble dominant 1-mobile de la composition de deux graphes.

Théorème 2.17 (Go et Canoy [19])

Soient G et H deux graphes connexes. Alors, $C = \bigcup_{x \in S}(\{x\} \times T_x) \subseteq V(G[H])$, où $S \subseteq V(G)$ et $T_x \subseteq V(H)$ pour chaque $x \in S$, est un ensemble dominant de $G[H]$ si et seulement si une des deux conditions suivantes est vérifiée :

(i) S est un ensemble dominant total de G ou

(ii) S est un ensemble dominant de G et T_x est un ensemble dominant de H pour tout $x \in S \setminus N_G(S)$.

Lemme 2.3 (Go et Canoy [19])

Soit G un graphe connexe et S un ensemble dominant de G. Alors $\gamma_t(G) \leq |S \cap N_G(S)| + 2|S \setminus N_G(S)|$. En particulier, $\gamma_t(G) \leq 2\gamma(G)$.

Théorème 2.18 (Hinampas et Canoy [18])

Soient G et H deux graphes connexes non triviaux. Un sous-ensemble $C = \bigcup_{x \in S}(\{x\} \times T_x)$ de $V(G[H])$, où $S \subseteq V(G)$ et $T_x \subseteq V(H)$ pour chaque $x \in S$, est un ensemble dominant 1-mobile de $G[H]$, si et seulement si une des conditions suivantes est vérifiée:

(i) S est un ensemble dominant total de G ou

(ii) S est un ensemble dominant de G et T_x est un ensemble dominant de H pour tout $x \in S \setminus N_G(S)$, tels que pour chaque $x \in S \setminus N_G(S)$ avec $|T_x| = 1$, une des conditions suivantes est vérifiée:

- $S \setminus \{x\}$ est un ensemble dominant de G ou
- $(S \setminus \{x\}) \cup \{y\}$ est un ensemble dominant de G pour un certain somme $y \in (V(G) \setminus S) \cap N_G(x)$ ou
- T_x est un ensemble dominant 1-mobile de H.

Corollaire 2.8 (Hinampas et Canoy [18])

Soient G et H deux graphes connexes non triviaux avec $\gamma(H) = 1$. Alors, $\gamma_m^1(G[H]) \leq \min\{\gamma_t(G), \gamma_m^1(G)\}$

Dans le graphe de la Figure 2.6 (a), l'inégalité précédente est stricte. En effet, $\gamma_t(P_3) = 2$, $\gamma_m^1(P_3) = 2$ et $\gamma_m^1(P_3[K_3]) = 1$. Ainsi, $\gamma_m^1(P_3[K_3]) = 1 < \min\{2,2\} = \min\{\gamma_t(P_3), \gamma_m^1(P_3)\}$. Dans le graphe 2.6 (b), la borne est atteinte. Ainsi, $\gamma_m^1(K_{1,4}[P_2]) = 1 < \min\{2,4\} = \min\{\gamma_t(K_{1,4}), \gamma_m^1(K_{1,4})\}$. De même, dans le graphe 2.6. (c), on a $\gamma_m^1(P_5[P_3]) = 2 = \min\{3,2\} = \min\{\gamma_t(P_5), \gamma_m^1(P_5)\}$.

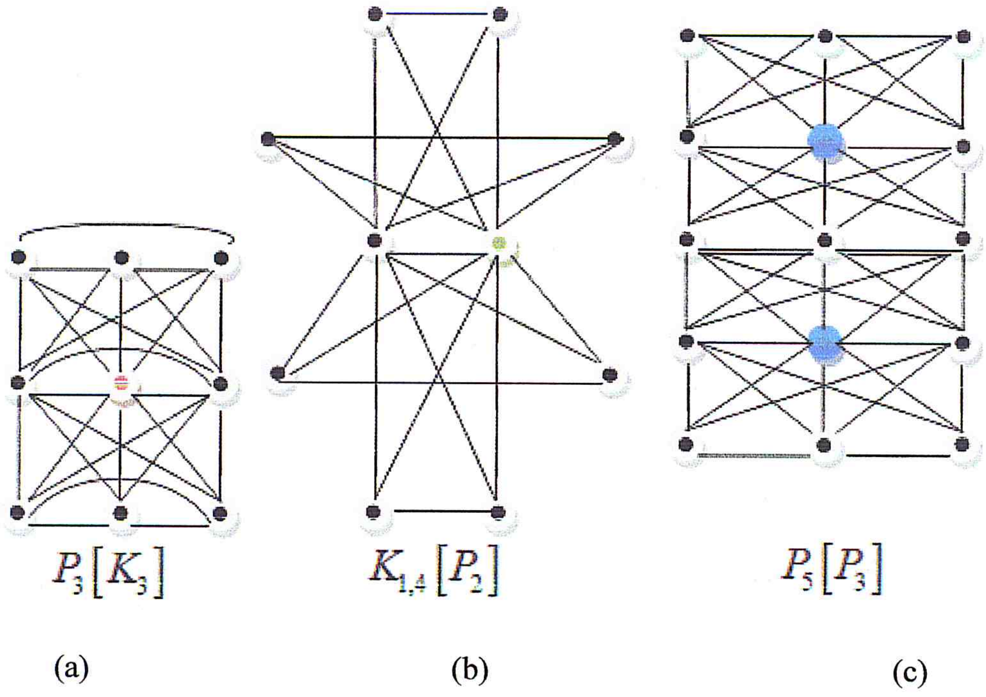


Figure 2.6: des graphes $G[H]$ avec $\gamma_m^1(G[H]) \leq \min\{\gamma_t(G), \gamma_m^1(G)\}$.

Corollaire 2.9 (Renario et *al.* [18])

Soient G et H deux graphes connexes non triviaux avec $\gamma(H) \neq 1$. Alors, $\gamma_m^1(G[H]) = \gamma_t(G)$.

Nous terminons ce chapitre par deux questions ouvertes.

Question 1

La caractérisation des graphes $\gamma_m^1(G) \leq 2$ a été donnée dans les théorèmes 2.6 et 2.10.

Pour quels graphes G, nous avons $\gamma_m^1(G) = 3$?

Question 2

Haynes et *al* [1] ont démontré que la somme des nombres de domination d'un graphe G et de son complémentaire $\overline{G}$ est au plus $n+1$. Avec n l'ordre du graphe. Nous pensons que cette inégalité est valable pour la domination 1-mobile.

Est-ce que $\gamma_m^1(G)+\gamma_m^1(\overline{G})\leq n+1$ *pour G un graphe connexe d'ordre n ?*

Chapitre 3

Variantes de la domination 1-mobile

Nous nous intéressons dans ce chapitre aux variantes de la domination 1-mobile. Quatre variantes ont été trouvées dans la littérature: dominant 1-mobile totale, connecxe, indépendante et clique.

3.1 La domination 1-mobile totale dans les graphes

La domination 1-mobile totale a été étudiée en 2014 par Lomarda et *al.* [14].

Définition 3.1 :

Un ensemble dominant total $S \subset V$ d'un graphe $G = (V, E)$ sans sommet isolé est un *ensemble dominant 1-mobile total* si pour chaque $v \in S$, une des deux conditions suivantes est vérifiée :

1. $S \backslash \{v\}$ est un ensemble dominant total ou
2. Il existe un sommet $u \in (V \backslash S) \cap N(v)$ tel que $(S \backslash \{v\}) \cup \{u\}$ est un ensemble dominant total de G.

Définition 3.2 :

La cardinalité minimum d'un ensemble dominant 1-mobile total est le nombre de domination 1-movable de G. Il est noté par $\gamma_{mt}^{1}(G)$.

Lomarda et *al.* [14] ont caractérisé les graphes connexes admettant des ensembles dominants 1-mobile total.

Théorème 3.1 (Lomarda et *al.* [14])

Un graphe G connexe admet un ensemble dominant 1-mobile total si et seulement si $\delta(G) \geq 2$.

Les deux remarques suivantes sont triviales.

Remarque 3.1 (Lomarda et *al.* [14])

Pour tout graphe G connexe $\delta(G) \geq 2$, d'ordre $n \geq 3$,

(i) $\gamma(G) \leq \gamma_t(G) \leq \gamma_{mt}^{1}(G)$ et

(ii) $2 \leq \gamma_{mt}^{1}(G) \leq n$.

Ils ont caractérisé les graphes G pour lesquels $\gamma_{mt}^{1}(G) = 2$.

Théorème 3.2 (Lomarda et *al.* [14])

Soit G un graphe connexe $\delta(G) \geq 2$, d'ordre $n \geq 3$. Alors, $\gamma_{mt}^{1}(G) = 2$ si et seulement s'il existe deux sommets x et y adjacents de degré n-1 tels que:

(i) Il existe $z \in N(x) \setminus epn(x, \{x, y\})$ avec $epn(x, \{x, y\}) \subseteq N(z)$ et

(ii) Il existe $w \in N(y) \setminus epn(y, \{x, y\})$ avec $epn(y, \{x, y\}) \subseteq N(w)$.

Corollaire 3.1 (Lomarda et *al.* [14])

$\gamma_{mt}^{1}(k_n) = 2$, pour $n \geq 3$.

Le résultat suivant caractérise un ensemble dominant 1-mobile total.

Théorème 3.3 (Lomarda et *al.* [14])

Soit G un graphe connexe $\delta(G) \geq 2$. Un sous-ensemble S de V est un ensemble dominant 1-mobile total de G si et seulement si S est un ensemble dominant total de G et pour chaque $v \in S$, soit $epn(v, S) = ipn(v, S) = \emptyset$ ou il existe $u \in (V \setminus S) \cap N(v)$ de telle sorte que $epn(v, S) \cup ipn(v, S) \subseteq N[u]$.

Lomarda et *al.* [14] se sont intéressés au joint de deux graphes. Ils ont utilisé la caractérisation de Go et *al.* [10] d'un ensemble dominant total dans le joint de deux graphes. Voir la définition du joint de deux graphes dans la section 1.2.9.

Théorème 3.4 (Go et *al.* [10])

Soient G et H deux graphes connexes. L'ensemble $C \subseteq V(G + H)$ est un ensemble dominant total de $G + H$ si et seulement si une des trois conditions suivantes est vérifiée:

(i) $C \cap V(G)$ est un dominant total de G.

(ii) $C \cap V(H)$ est un dominant total de H.

(iii) $C \cap V(G) \neq \emptyset$ et $C \cap V(H) \neq \emptyset$.

Théorème 3.5 (Lomarda et *al.* [14])

Soient G et H deux graphes connexes non triviaux. Alors, $S \subseteq V(G+H)$ est un ensemble dominant 1-mobile total de $G+H$ si et seulement si une des conditions suivantes est vérifiée:

(i) $S \subseteq V(G)$ et S est un dominant total de G.

(ii) $S \subseteq V(H)$ et S est un dominant total de H.

(iii) $S \cap V(G) \neq \emptyset$ et $S \cap V(H) \neq \emptyset$.

Ils ont en déduit que le nombre dominant 1-mobile total du joint de deux graphes est constant.

Corollaire 3.2 (Lomarda et *al.* [14])

Soient G et H deux graphes connexes non-triviaux. Alors, $\gamma_{mt}^{1}(G+H) = 2$.

Aussi, ils se sont intéressés au cas où l'un des deux graphes joints est un trivial.

Théorème 3.6 (Lomarda et *al.* [14])

Soit H un graphe connexe d'ordre $n \geq 2$ et $S \subseteq V(K_1 + H)$. Alors, S est un ensemble dominant 1-mobile total de $K_1 + H$ si et seulement si une des conditions suivantes est vérifiée:

(i) $S \subseteq V(H)$ ou S est un ensemble dominant total de H.

(ii) $S = V(K_1) \cup S_1$ où S_1est un ensemble dominant total de H.

(iii) $S = V(K_1) \cup S_1$ où $S_1 \subseteq V(H)$ et $S_1 \cup \{b\}$ est un ensemble dominant total de H pour un certain $sommet$ $b \in V(H)\backslash S_1$.

Ils ont en déduit que $\gamma_{mt}^{1}(K_1 + H) = \gamma_t(H)$.

Corollaire 3.3 (Lomarda et *al.* [14])

Soit H un graphe connexe d'ordre $n \geq 2$. Alors, $\gamma_{mt}^{1}(K_1 + H) = \gamma_t(H)$.

Lomarda et *al.* [14] se sont intéressés à la couronne de deux graphes. Voir la section 1.2.10 pour la définition de cette opération. Ils ont utilisé la caractérisation d'un ensemble dominant 1-mobile total de $G \circ H$ et ils ont montré que le calcul de $\gamma^1_{mt}(G \circ H)$ se réduit au calcul de $\gamma_t(H)$.

Corollaire 3.4 (Lomarda et *al.* [14])

Soient G et H deux graphes connexes non-triviaux. Alors,

$$\gamma^1_{mt}(G \circ H) = |V(G)|\gamma_t(H).$$

Go et *al.* [19] se sont intéressés à la composition de deux graphes. Voir la section 1.2.8 pour la définition de cette dernière.

Les deux résultats suivants sont nécessaires pour la caractérisation d'un ensemble dominant 1-mobile total dans la composition de deux graphes.

Théorème 3.8 (Go et *al.* [19])

Soient G et H deux graphes connexes. Alors, $C = \bigcup_{x \in S}(\{x\} \times T_x) \subseteq V\big(G[H]\big)$, où $S \subseteq V(G)$ et T_x de $V(H)$ pour chaque $x \in S$, est un ensemble dominant total de $G[H]$ si et seulement si une des deux conditions suivante est vérifiée:

(i) S est un ensemble dominant total de G ou

(ii) S est un ensemble dominant de G et T_x est un ensemble dominant total de H pour tout $x \in S \backslash N(S)$.

Remarque 3.2 (Go et *al.* [19])

Soient G et H deux graphes connexes non triviaux. Alors,

$$\gamma_t(G[H]) = \gamma_t(G).$$

Théorème 3.9 (Lomarda et *al.* [13])

Soient G et H deux graphes connexes non triviaux. Un sous-ensemble $C = \bigcup_{x \in S}(\{x\} \times T_x) \subseteq V\big(G[H]\big)$, où $S \subseteq V(G)$ et $T_x \subseteq V(H)$ pour chaque $x \in S$, est un ensemble dominant 1-mobile total de $G[H]$ si et seulement s'il est un ensemble dominant total de $G[H]$.

Corollaire 3.5 (Lomarda et *al.* [13])

Soient G et H deux graphes connexes non triviaux. Alors,

$$\gamma_{mt}^{1}(G[H]) = \gamma_t(G).$$

3.2 Domination 1-mobile connecté dans les graphes :

En 2015, Lomarda et *al.* [23] ont étudié une deuxième variante de la la domination 1-movable, appelée la domination 1-mobile connecté.

Définition 3.3:

Un ensemble dominant connecté $S \subset V$ d'un graphe $G = (V, E)$ sans sommet isolé, est *un ensemble dominant 1-mobile connecté* si pour chaque $v \in S$, une des deux conditions suivantes est vérifiée :

1. $S \backslash \{v\}$ est un ensemble dominant connecté ou
2. il existe un sommet $u \in (V \backslash S) \cap N(v)$ de telle sorte que $(S \backslash \{v\}) \cup \{u\}$ est un ensemble connecté de G.

Définition 3.4 :

La cardinalité minimum d'un ensemble dominant 1-movable connecté est le nombre de domination 1-movable de G. Il est noté par $\gamma_{mc}^{1}(G)$.

Rappelons qu'un sommet déconnectant d'un graphe, appelé aussi point d'articulation, est un sommet dont la suppression augment le nombre de composantes connexes du graphe.

La remarque suivante est triviale.

Remarque 3.3 (Lomarda et *al.* [23])

Tout ensemble dominant connecté d'un graphe contient tous les sommets déconnectants du graphe.

Lomarda et *al.* [23] ont caractérisé un graphe connexe admettant un ensemble dominant connecté 1-movable.

Théorème 3.10 (Lomarda et *al.* [23])

Un graphe G connexe non trivial admet un ensemble dominant 1-movable connecté si et seulement si G et sans sommet déconnectant.

Les deux remarques suivantes sont triviales.

Remarque 3.4 (Lomarda et *al.* [23])

Pour tout graphe G connexe non trivial sans sommets déconnectant, Alors :

(i) $\gamma_c(G) \leq \gamma_{mc}^1(G)$ et

(ii) $1 \leq \gamma_{mc}^1(G) \leq n$.

Les deux bornes de la Remarque 3.4. (ii) sont atteintes. En effet, $\gamma_{mc}^1(C_4) = 4$ et $\gamma_{mc}^1(K_5) = 1$.

Lemme 3.1 (Lomarda et *al.* [23])

$\gamma_{mc}^1(K_n) = 1$, pour tout $n \geq 2$.

Ils ont caractérisé les graphes G pour lesquels $\gamma_{mc}^1(G) = 1$ et $\gamma_{mc}^1(G) = 2$.

Théorème 3.11 (Lomarda et *al.* [23])

Soit G un graphe connexe non trivial sans sommet déconnectant. Alors, $\gamma_{mc}^1(G) = 1$ si et seulement si $G = K_2$ ou $G \cong K_2 + H$ pour un certain graphe H .

Théorème 3.12 (Lomarda et *al.* [23])

Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$ sans sommet déconnectant. Alors, $\gamma_{mc}^1(G) = 2$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées:

(i) $G \ncong K_2 + H$ pour toute graphe H et

(ii) Il existe deux sommets x et y adjacent de degré n-1 tels que :

- $epn(x, \{x, y\}) \in N(z)$ pour un certain $z \in N(x) \cap N(y)$ et
- $epn(y, \{x, y\}) \in N(w)$ pour un certain $w \in N(x) \cap N(y)$.

Ils ont ensuite caractérisé un ensemble dominant 1-mobile connecté.

Théorème 3.13 (Lomarda et *al.* [23])

Soit G un graphe connexe sans sommets déconnectant. Un sous-ensemble S de V est un ensemble dominant 1-movable connecté de G si et seulement si S est un ensemble dominant connecté de G et pour chaque $v \in S$, soit $epn(v,S) = ipn(v,S) = \emptyset$ ou il existe $u \in (V \setminus S) \cap N(v)$ telle que $epn(v,S) \cup ipn(v,S) \subseteq N[u]$.

Lomarda et *al.* [23] ont caractérisé les ensembles dominants 1-mobile connectés dans le joint de deux graphes.

Théorème 3.14 (Lomarda et *al.* [23])

Soient G et H deux graphes connexes non triviaux. Alors $S \subseteq V(G+H)$ est un ensemble dominant 1-mobile connecté de G + H si et seulement si une des deux conditions suivantes est vérifiée:

(i) S est un ensemble dominant connecté de G tel que si $|S| = 1$, soit S est un ensemble dominant 1-mobile connecté de G ou il existe $u \in V(H)$ de telle sorte que {u} est un ensemble dominant (connecté) de H.

(ii) S est un ensemble dominant connecté de H tel que si $|S| = 1$, soit S est un ensemble dominant 1-mobile connecté de H ou il existe $v \in V(G)$de telle sorte que {v} est un ensemble dominant (connecté) de G.

(iii) $S \cap V(G) \neq \emptyset$ et $S \cap V(H) \neq \emptyset$.

Ils ont en déduit que le nombre dominant 1-mobile connecté du joint de deux graphes est 1 ou 2.

Corollaire 3.6 (Lomarda et *al.* [23])

Soient G et H deux graphes connexes non triviaux. Alors,

$$\gamma_{mc}^{1}(G+H) = \begin{cases} 1 \text{ si } \gamma_c(G) = 1 = \gamma_c(H) \text{ ou } \gamma_{mc}^{1}(G) = 1 \text{ ou } \gamma_{mc}^{1}(H) = 1. \\ 2 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Ils se sont ensuite intéressés au cas où l'un des deux graphes joints est trivial.

Théorème 3.15 (Lomarda et *al.* [23])

Soient H un graphe connexe d'ordre $n \geq 2$ et $S \subseteq V(K_1 + H)$. Alors, S est un ensemble dominant 1-mobile connecté de $K_1 + H$ si et seulement si une des trois conditions suivantes est vérifiée :

(i) $S = V(K_1)$ et il existe $u \in V(H)$ tel que {u} est un ensemble dominant connecté de H.

(ii) $S = V(K_1) \cup S_1$, où $\varnothing \neq S_1 \subseteq V(H)$ et soit,

- S_1 est un ensemble dominant connecté de H ou
- $S_1 \cup \{b\}$ est un ensemble dominant connecté de H pour un certain sommet $b \in V(H) \setminus S_1$.

(iii) S est un ensemble dominant connecté de H.

Ils ont en déduit le résultat suivant.

Corollaire 3.7 (Lomarda et *al.* [23])

Soit H un graphe connexe d'ordre $n \geq 2$. Alors,

$$\gamma_{mc}^{1}(K_1 + H) = \gamma_c(H).$$

Dans le cas où les deux graphes sont un stable, ils ont obtenu le résultat suivant.

Théorème 3.16 (Lomarda et *al.* [23])

Soit $m \geq 2$ et $n \geq 2$ deux entiers positifs. Alors, $S \subseteq V(K_{m,n})$ est un ensemble dominant 1-mobile connecté de $K_{m,n} = \overline{K_m} + \overline{K_n}$ si et seulement si $|S \cap V(\overline{K_m})| \geq 2$ et $|S \cap V(\overline{K_n})| \geq 2$.

Corollaire 3.8 (Lomarda et *al.* [23])

Soit $m \geq 2$ et $n \geq 2$ deux entiers positifs. Alors,

$$\gamma_{mc}^{1}(K_{m,n}) = 4.$$

Les deux résultats suivants seront nécessaires pour la caractérisation d'un ensemble dominant 1-mobile connecté de la composition de deux graphes.

Théorème 3.17 (Go et *al.* [19])

Soient G et H deux graphes connexes. Alors, $C = \bigcup_{x\in S}(\{x\}\times T_x) \subseteq V(G[H])$, où $S \subseteq V(G)$ et $T_x \subset V(H)$ pour chaque $x \in S$, est un ensemble dominant connecté de $G[H]$ si et seulement si S est un ensemble dominant connecté de G, où T_x est un ensemble dominant connecté de H chaque fois que $|S| = 1$, autrement dit, $S = \{x\}$.

Théorème 3.18 (Lomarda et *al.* [13])

Soient G et H deux graphes connexes non triviaux. Un sous-ensemble $C = \bigcup_{x\in S}(\{x\}\times T_x)$ de $V(G[H])$ est un ensemble dominant 1-mobile connecté de $G[H]$ si et seulement si une des conditions suivantes est vérifiée :

(i) S est un ensemble dominant connecté de G

(ii) Si $S = \{x\}$, puis T_x est un ensemble dominant connecté de H et

(iii) Si $S = \{x\}$ et $|T_x| = 1$, soit S est un ensemble dominant 1-mobile connecté de G ou T_x est un ensemble dominant 1-mobile de H.

Corollaire 3.9 (Lomarda et *al.* [13])

Soient G et H deux graphes connexes non triviaux. Alors,

$$\gamma^1_{mc}(G[H]) = \begin{cases} 1 \text{ si } \gamma(\mathrm{G})=1=\gamma^1_{mc}(H) \text{ ou } \gamma^1_{mc}(G) = 1 = \gamma(H) \\ 2 \text{ si } \gamma(\mathrm{G})=1. \\ \gamma_c(G) \text{ si } \gamma(\mathrm{G}) \neq 1. \end{cases}$$

3.3 Domination 1-mobile indépendante dans les graphes :

En 2015, La domination 1-mobile indépendante a été introduite par Hinampas et *al.* [11].

Définition 3.5 :

Un ensemble dominant indépendante $S \subset V$ d'un garaphe $G = (V, E)$ sans sommet isolé, est *un ensemble dominant 1-mobile indépendante* de G si pour chaque $v \in S$, il existe un sommet

$u \in (V \setminus S) \cap N(v)$ de telle sorte que $(S \setminus \{v\}) \cup \{u\}$ est un ensemble dominant indépendant de G.

Définition 3.6 :

La cardinalité minimum d'un ensemble dominant 1-mobile indépendante est le nombre de domination 1-mobile de G. Il est noté par $\gamma_{mi}^1(G)$.

Un ensemble dominant 1-mobile indépendant n'existe pas toujours. Par exemple, une chaîne P_3 n'admet aucun ensemble dominant 1-mobile indépendante. Notons par $\Re_{mi}^1$ la famille des graphes admettant un ensemble dominant 1-mobile indépendant. Il est trivial que pour $G \in \Re_{mi}^1$, $\gamma(G) \leq \gamma_i(G) \leq \gamma_{mi}^1(G)$ et $1 \leq \gamma_{mi}^1(G) \leq \beta(G)$ et ces bornes sont atteintes. Par exemple, $\gamma_{mi}^1(P_4) = \beta(P_4) = 2$.

Hinampas et *al.* [11] ont caractérisé les graphes G pour $\gamma_{mi}^1(G) = 1$.

Théorème 3.19 (Hinampas et *al.* [11])

Soit G un graphe connexe non trivial. Alors, $\gamma_{mi}^1(G) = 1$ si et seulement si $G = K_2$ ou il existe un graphe H tel que $G \cong K_2 + H$.

Corollaire 3.10 (Hinampas et *al.* [11])

$\gamma_{mi}^1(K_n) = 1$, pour $n \geq 2$.

Le résultat suivant caractérise un ensemble dominant 1-mobile indépendant.

Théorème 3.20 (Hinampas et *al.* [11])

Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 2$. Un sous-ensemble S de V est un ensemble dominant 1-mobile indépendant de G si et seulement si S est un ensemble dominant indépendant de G et pour chaque $v \in S$, il existe $u \in (V \setminus S) \cap epn(v, S)$ de telle sorte que $epn(v; S) \subseteq N[u]$.

Ils ont caractérisé les graphes G pour lesquels $\gamma_{mi}^1(G) = 2$.

Théorème 3.21 (Hinampas et *al.* [11])

Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$. Alors, $\gamma_{mi}^{1}(G) = 2$ si et seulement si les conditions suivantes est satisfaites:

(i) G n'est pas isomorphe à $K_2 + H$ pour tout graphe H et

(ii) Il existe deux sommets non adjacents x et y de degré n-1 tel que :

- $epn(x,\{x,y\}) \setminus \{z\} \subseteq N(z)$ pour un certain $z \in N(x) \cap epn(x;\{x,y\})$ et
- $epn(y,\{x,y\}) \setminus \{w\} \subseteq N(w)$ pour un certain $w \in N(y) \cap epn(y,\{x,y\})$.

Hinampas et *al.* [11] ont caractérisé les ensembles dominants 1-mobile indépendants dans le joint de deux graphes connexes non triviaux.

Théorème 3.22 (Hinampas et *al.* [11])

Soient G et H deux graphes connexes non triviaux. $S \subseteq V(G+H)$ est un ensemble dominant 1-mobile indépendant de $G+H$ si et seulement si une des conditions suivantes est vérifiée :

(i) S est un ensemble dominant indépendant de G tel que :

- Si $|S| \geq 2$ alors S est un ensemble dominant 1-mobile indépendante de G ou
- Si $|S| = 1$ S est un ensemble dominant 1-mobile indépendant de G ou il existe $w \in V(H)$ tel que $\{w\}$ est un ensemble dominant indépendant de H.

(ii) S est un ensemble dominant indépendant de H tel que :

- Si $|S| \geq 2$, alors S est un ensemble dominant 1-mobile indépendant de H ou
- Si $|S| = 1$, soit S est un ensemble dominant 1-mobile indépendant de H ou il existe $u \in V(G)$ tel que $\{u\}$ est un ensemble dominant indépendant de G.

Ils ont en déduit le résultat suivant.

Corollaire 3.11 (Hinampas et *al.* [11])

Soient G et H deux graphes connexe non triviaux. Alors ,

$$\gamma_{mi}^{1}(G+H)=\begin{cases}1 \text{ si } \gamma_i(G)=1=\gamma_i(H) \text{ ou } \gamma_{mi}^{1}(G)=1 \; ou \; \gamma_{mi}^{1}(H)=1\\ \min\{\gamma_{mi}^{1}(G),\gamma_{mi}^{1}(H)\} \quad \text{sinon.}\end{cases}$$

Ils se sont ensuite intéressés au cas où l'un des deux graphes joints est trivial.

Théorème 3.23 (Hinampas et *al.* [11])

Soient H un graphe connexe d'ordre $n \geq 2$, et $S \subseteq V(K_1+H)$. Alors, S est un ensemble dominant 1-mobile indépendant de K_1+H si et seulement si une des trois conditions suivantes est vérifiée :

(i) $S=V(K_1)$ et il existe $u \in V(H)$ tel que $\{u\}$ est un ensemble dominant indépendant de H.

(ii) S est un ensemble dominant indépendante de H et $|S|=1$.

(iii) $|S| \geq 2$ et S est un ensemble dominant 1-mobile indépendant de H.

Ils ont en déduit que $\gamma_{mi}^{1}(K_1+H)=\begin{cases}1 \text{ si } \gamma_i(H)=1\\ \gamma_{mi}^{1}(H) \text{ sinon.}\end{cases}$

Corollaire 3.12 (Hinampas et *al.* [11])

Soit H un graphe connexe d'ordre $n \geq 2$. Alors ,

$$\gamma_{mi}^{1}(K_1+H)=\begin{cases}1 \text{ si } \gamma_i(H)=1\\ \gamma_{mi}^{1}(H) \text{ sinon.}\end{cases}$$

Hinampas et *al.* [11] ont caractérisé un ensemble dominant 1-mobile indépendant de $G \circ H$ et ils ont montré que le calcul de $\gamma_{mi}^{1}(G \circ H)$ revient aux calcules de $\gamma_{mi}(G)$ et $\gamma_i(H)$

Corollaire 3.13 (Hinamapas et *al.* [11])

Soient G et H deux graphes connexes non triviaux. Alors ,

$$\gamma^1_{mi}(G \circ H) = \begin{cases} |V(G)| \text{ si } \gamma_i(H) = 1 \\ |V(G)|\gamma^1_{mi}(H) \text{ si } \gamma_i(H) \neq 1. \end{cases}$$

Les deux résultats suivants sont nécessaires pour la caractérisation d'un ensemble dominant 1-mobile indépendant dans la composition de deux graphes.

Théorème 3.24 (Canoy [27])

Soient G et H deux graphes connexes. Un sous ensemble $C = \bigcup_{x \in S}(\{x\} \times T_x) \subseteq V(G[H])$, où $S \subseteq V(G)$ et $T_x \subset V(H)$, est un ensemble dominant indépendant de $G[H]$ si et seulement si S est un ensemble dominant de G et T_x est un ensemble dominant indépendant de H pour tout $x \in S$.

Théorème 3.25 (Hinampas et *al.* [18])

Soient G et H deux graphes connexes. Un sous-ensemble, $C = \bigcup_{x \in S}(\{x\} \times T_x) \subseteq V(G[H])$, où $S \subseteq V(G)$ et $T_x \subset V(H)$, est un ensemble dominant indépendant dans $G[H]$ si et seulement si S est un ensemble dominant indépendante de G et T_x est un ensemble dominant indépendant de H pour tout $x \in S$ tel que pour chaque $x \in S$,

(i) Si $|T_x| \geq 2$ alors T_x est un ensemble dominant 1-mobile indépendant de G et

(ii) Si $|T_x| = 1$ alors il existe $y \in (V(G) \setminus S) \cap N_G(x)$ tel que $(S \setminus \{x\}) \cup \{y\}$ est un ensemble dominant indépendant de G où T_x est un ensemble dominant 1-mobile indépendante de H.

Corollaire 3.14 (Hinampas et *al.* [18])

Soient G et H deux graphes connexes non triviaux,

(i) Si $\gamma(H) \neq 1$ alors $\gamma^1_{mi}(G[H]) = \gamma_i(G)\gamma^1_{mi}(H)$.

(ii) Si $\gamma^1_{mi}(H) = 1$ alors $\gamma^1_{mi}(G[H]) = \gamma_i(G)$.

(iii) Si $\gamma(H) = 1$ et $G \in \Re^1_{mi}$ alors $\gamma^1_{mi}(G[H]) \leq \gamma^1_{mi}(G)$. Si de plus, $H \notin \Re^1_{mi}$, alors $\gamma^1_{mi}(G[H]) = \gamma^1_{mi}(G)$.

Corollaire 3.15 (Hinampas et *al.* [18])

Soit G un graphe connexe non trivial et K_n un graphe complet d'ordre $n \geq 2$. Alors,

$$\gamma_{mi}^{1}(G[K_n]) = \gamma_i(G).$$

3.4 Domination clique 1-mobile dans les graphes :

En 2016, La domination 1-mobile clique a été étudiée par Daniel et *al.* [12].

Définition 3.7 :

Un ensemble dominant clique $S \subset V$ d'un graphe $G = (V, E)$ sans sommet isolé, est *un ensemble dominant 1-mobile clique* si pour chaque $v \in S$, il existe un sommet $u \in (V(G) \setminus S) \cap N(v)$ de telle sorte que $(S \setminus \{v\}) \cup \{u\}$ est un ensemble dominant clique de G.

Définition 3.8 :

La cardinalité minimum d'un ensemble domination 1-mobile clique est le nombre de domination 1-mobile de G, il est noté par $\gamma_{mcl}^{1}(G)$.

Remarque 3.5 (Daniel et *al.* [12])

Soit G un graphe connexe. Alors, $\gamma_{cl}(G) = 1$ si et seulement si $\gamma(G) = 1$.

Théorème 3.26 (Daniel et *al.* [12])

Soit G un graphe connexe non trivial. Alors, les propositions suivantes sont équivalentes:

(i) $\gamma_{m}^{1}(G) = 1$.

(ii) $\gamma_{mcl}^{1}(G) = 1$.

(iii) $G = K_2$ ou $G = K_2 + H$ pour certain graphe H.

Ils ont caractérisé les graphes G pour lesquels $\gamma_{mcl}^{1}(G) = 2$.

Théorème 3.27 (Daniel et *al.* [12])

Soit G un graphe connexe d'ordre n $\geq$ 3. Alors $\gamma_{mcl}^{1}(G)=2$ si et seulement s'il existe des sommets adjacentes x et y de G satisfaisant les propriétés suivantes :

(i) $N(x)\cup N(y)=V$.

(ii) $N[x]\setminus N[y]\neq\varnothing$ ou $N[y]\setminus N[x]\neq\varnothing$.

(iii) $\{x\}$ est un ensemble dominant de G où il existe $v\in(V\setminus S)\cap N(y)$ tels que $N[y]\setminus N(x)\subseteq N(v)$.

(iv) $\{y\}$ est un ensemble dominant de G où il existe $w\in(V\setminus S)\cap N(x)$ tels que $N[x]\setminus N(y)\subseteq N(w)$.

Daniel et *al.* [12] ont caractérise les ensembles dominants 1-mobile cliques dans le joint de deux graphes connexes non triviaux.

Théorème 3.28 (Daniel et *al.* [12])

Soient G et H deux graphes connexe non triviaux. Un sous-ensemble S de $V(G+H)$ est un ensemble dominant 1-mobile clique de $G+H$ si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée:

(i) S est un ensemble dominant clique de G tel que si $|S|=1$, alors S est un ensemble dominant 1-mobile de G ou il existe $b\in V(H)$ tel que $\{b\}$ est ensemble dominant de H.

(ii) S est un ensemble dominant clique de H tel que si $|S|=1$, alors S est un ensemble dominant 1-mobile de H ou il existe $a\in V(G)$ tel que $\{a\}$ est un ensemble dominant de G.

(iii) $S=\{a,b\}$, où une des propositions suivantes est vérifiée:

(1) a et b ne sont pas des sommets isolés de G et H, respectivement.

(2) $\{a\}$ est un ensemble dominant de G.

(3) $\{a,v\}$ est un ensemble dominant clique de G pour un certains $v\in V(G)$.

(4) $\{b\}$ est un ensemble dominant de H.

(5) $\{b,w\}$ est un ensemble dominant clique de H pour un certains $w \in V(H)$.

(iv) $S=\{a\}\cup E$ où $|E|\geq 2$, a n'est pas un sommet isolé de G et $\langle E\rangle$ est un clique de H, Où E est un ensemble dominant clique de H, où $E\cup\{w\}$ est un ensemble dominant Clique de G pour un certain $w \in V(H)\setminus E$

(v) $S=D\cup\{b\}$, où $|D|\geq 2$, b n' est pas un sommet isolé de H et $\langle D\rangle$ est un clique de G où D est un ensemble dominant clique de G, où $D\cup\{w\}$ est un ensemble dominant clique de G pour un certains $w \in V(G)\setminus D$.

(vi) $|S_1|\geq 2$ et $|S_2|\geq 2$, où $\langle S_1\rangle$ et $\langle S_2\rangle$ sont des cliques de G et H, respectivement.

Le résultat suivant est une conséquence immédiate du théorème 3.28.

Corollaire 3.16 (Daniel et *al.* [12])

Soient G et H deux graphes non-triviaux. Alors $1\leq \gamma^1_{mcl}(G+H)\leq 2$. En outre, $\gamma^1_{mcl}(G+H)=1$ si et seulement si une des propositions suivantes est vérifies:

(i) $\gamma^1_{mcl}(G)=1$.

(ii) $\gamma(G)=1$ et $\gamma(H)=1$.

(iii) $\gamma^1_{mcl}(H)=1$.

Daniel et *al.* [12] ont caractérisé les ensembles dominants 1-mobile clique dans la composition de deux graphes connexes non triviaux.

Corollaire 3.17 (Daniel et *al.* [12])

Soient G et H deux graphes connexe non-triviaux tels que G admet un ensemble dominant clique. Alors,

$$\gamma^1_{mcl}(G[H])=\begin{cases}1 \text{ si } \gamma(\text{G})=1 \text{ et } \gamma^1_{mcl}(H)=1.\\ 2 \text{ si } \gamma(\text{G})=1 \text{ et } \gamma(\text{H})\neq 1.\\ \gamma_{cl}(\text{G}) \text{ si } \gamma(\text{G})\neq 1.\end{cases}$$

Chapitre 4

Contribution en domination 1-mobile

Dans ce chapitre nous allons présenter quelques résultats élémentaires que nous avons obtenus pour la domination 1-mobile et sa variante indépendante. Nous nous somme intéressé aux graphes chaînes, cycles, arbres, bipartis complets et multipartis.

4.1 Chaînes et cycles:

Nous avons étudié le nombre 1-mobile indépendant dans les chaînes et les cycles.

4.1.1 Chaînes :

Proposition 4.1

$n \geq 4$ (d'après définition de page 67) P_3 n'admet pas un ensemble dominant indépendant 1-mobile.

$$\gamma_{mi}^{1}(p_n) = \begin{cases} \frac{2n}{5} \text{ et } \exists \text{ un } \gamma_{mi}^{1}-ensemble \text{ si n} \equiv 0[5]. \\ \left\lceil \frac{2n}{5} \right\rceil \text{ et } \exists \text{ deux } \gamma_{mi}^{1}-ensemble \text{ si n} \equiv 2[5]. \\ \left\lceil \frac{2n}{5} \right\rceil \text{ et } \exists \text{ deux } \gamma_{mi}^{1}-ensemble \text{ si n} \equiv 4[5]. \\ \nexists \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve :

Soit $p_n = v_1 v_2 ... v_n$. Nous distinguons deux cas : $v_1 \in S$ et $v_1 \notin S$. Nous remarquons que dans les deux cas, l'appartenance ou non d'un sommet v_i , $i \neq 1$, à un ensemble dominant 1-mobile indépendant n'est pas au choix, mais plutôt elle est forcée selon la situation de v_1.

Notons par m le plus grand multiples de 5 inférieur à n, *i.e.* $m = 5\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor$.

Cas 1: $v_1 \in S$. Alors, $v_i \in S$ si seulement si $i = 1+5k$ ou $i = 4+5k$, $k:0..n$ et $i \leq m$.

Cas 2: $v_1 \notin S$. Alors, $v_i \in S$ si et seulement si $i = 2+5k$ ou $i = 4+5k$, $k:0..n$ et $i \leq m$.

L'appartenance de deux sommets v_i , $i = m+1, m+2, ..., n$ à l'ensemble S est unique et facile à déterminer puisqu'ils sont au plus au nombre de quatre.

Résumons selon la valeur de n modulo 5 :

Si $\text{n} \equiv 0[5]$ alors $\gamma_{mi}^{1}(p_n) = \frac{2n}{5}$ $\exists$ deux $\gamma_{mi}^{1}-ensemble$.

Si $\text{n} \equiv 1[5]$. Dans ce cas le graphe n'admet pas un ensemble dominant 1-mobile indépendant.

Si $n \equiv 2[5]$ alors $\gamma_{mi}^1(p_n) = \left\lceil \frac{2n}{5} \right\rceil$ $\exists$ deux $\gamma_{mi}^1 - ensemble$.

Si $n \equiv 3[5]$. Dans ce cas le graphe n'admet pas un ensemble dominant 1-mobile indépendant.

Si $n \equiv 4[5]$ alors $\gamma_{mi}^1(p_n) = \left\lceil \frac{2n}{5} \right\rceil$ $\exists$ deux $\gamma_{mi}^1 - ensemble$. □

Nous pensons que le nombre de domination 1-mobile indépendant d'un cycle est donné par :

$$\gamma_{mi}^1(C_n) = \begin{cases} 1 \text{ si } n=3. \\ \frac{2n}{5} \text{ si } n \equiv 0[5]. \end{cases}$$

4.2 Double étoiles et arborescences :

4.2.1 Double étoile :

Nous commençons par donner l'observation suivante.

Observation 4.1

Soit T un arbre, s un support de T est $\{l_1, l_2, ..., l_k\}$ les feuilles de s. Alors, tout ensemble D dominant 1-mobile de T vérifié $D \cap \{s, l_1, l_2, ..., l_k\} \geq k$.

Preuve :

Soit D un ensemble dominant 1-mobile de T. Tout sommet support a tous ses feuilles dans D sauf peut être une et dans ce dernier cas le support est dans D.

Remarque 4.1

Soit $G = (V, E)$ un graphe sans sommet isolé où tout sommet de G est ou bien un support ou une feuille. Alors, $\gamma_m^1(G) = l$.

4.2.2 Arborescences :

Dans cette section nous intéressons à une famille particulière d'arborescences notée T_h^k.

Définition 4.1 :

Une arborescence T_h^k possède h niveaux, la racine est de degré *k*, les feuilles sont de degré 1 et les autres sommets (intermédiaires) sont de degrés $k+1$.

Remarque 4.2

Toute arborescence T_h^k, peut être construite récursivement comme suit :

- Soit la racine *r* appartenant au niveau V_1 ,

- Pour tout sommet du niveau V_i avec $i = 1,...,h-1$, attacher k nouveaux sommets.

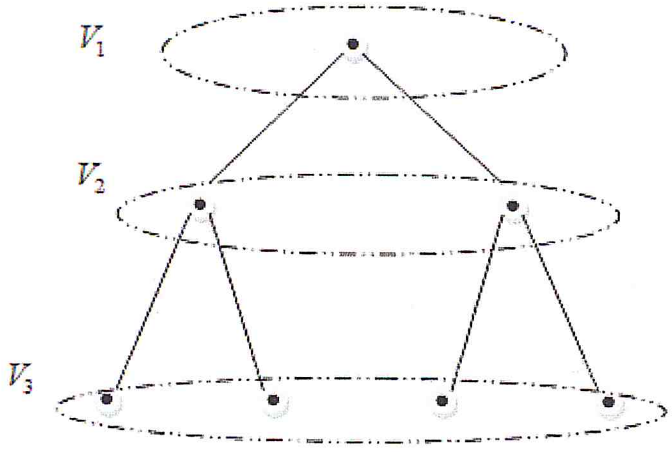


Figure 4.1 : Une arborescence T_3^2.

Proposition 4.2

Soit une arborescence T_h^k avec $h \geq 2$ et $k \geq 2$. Alors,

$$\gamma_m^1(T_h^k) = \begin{cases} \dfrac{k^{h+2} - h^2}{k^3 - 1} & \text{si h} \equiv 0[3]. \\ \dfrac{k^{h+2} - 1}{k^3 - 1} & \text{si h} \equiv 1[3]. \\ \dfrac{k^{h+2} - k}{k^3 - 1} & \text{si h} \equiv 2[3]. \end{cases}$$

Preuve :

Cas 1: $h \equiv 0[3]$. On peut voir que : $\gamma_m^1(T_h^k) \geq k^{h-1} + k^{h-4} + k^{h-7} + ... + k^5 + k^2$ et comme il existe un dominant 1-mobile de taille $k^{h-1} + k^{h-4} + k^{h-7} + ... + k^5 + k^2$ alors $\gamma_m^1(T_h^k) = k^{h-1} + k^{h-4} + k^{h-7} + ... + k^5 + k^2 = \dfrac{k^{h+2} - k^2}{k^3 - 1}$.

Cas 2: $h \equiv 1[3]$. On peut voir aussi que $\gamma_m^1(T_h^k) \geq k^{h-1} + k^{h-4} + k^{h-7} + ... + k^3 + k^0 = \dfrac{k^{h+2} - 1}{k^3 - 1}$ et comme il existe un dominant 1-mobile de taille $\dfrac{k^{h+2} - 1}{k^3 - 1}$ alors $\gamma_m^1(T_h^k) = \dfrac{k^{h+2} - 1}{k^3 - 1}$.

Cas 3: $h \equiv 2[3]$. Le même raisonnement donne. $\gamma_m^1(T_h^k) = \dfrac{k^{h+2} - k}{k^3 - 1} = k^{h-1} + k^{h-4} + ... + k^2 + k^1$.

4.3 Bipartis et multipartis complets :

4.3.1 Bipartis complets :

Le nombre de domination 1-mobile des graphes bipartis complets, est donné par le résultat suivant.

Proposition 4.3

Soit $K_{m,n}$ un graphe biparti complet telle que $m \leq n$. Alors,

$$\gamma_m^1(K_{m,n}) = \begin{cases} n & \text{si m} = 1. \\ 2 & \text{si m} = 2. \\ 3 & \text{si m} = 3. \\ 4 & \text{si m} \geq 4. \end{cases}$$

Preuve :

Soit $K_{m,n} = (X,Y)$ un graphe biparti complet avec $m = |X|$, $n = |Y|$ et $m \leq n$. Nous distinguons cinq cas.

cas 1: $m=1$, alors $K_{1,n}$ est une étoile donc d'après l'observation 2.2 $\gamma_m^1(K_{1,n}) = n$.

cas 2: $m=2$, d'après le Théorème 2.6 $\gamma_m^1(K_{2,n}) \neq 1$ car il n'existe pas deux sommets de degrés $n-1$ dans $K_{2,n}$.

$\gamma_m^1 \notin \{1\} \Rightarrow \gamma_m^1 \geq 2$. Soit $D = X$ un ensemble dominant et $x_1, x_2 \in X$. Tout $y \in Y$ *protège* x_i, $i=1,2$, alors D est un ensemble dominant 1-mobile, $\gamma_m^1(K_{2,n}) = 2$.

cas 3: $m=3$. Il est clair que $\gamma_m^1(K_{3,n}) \neq 1$. Nous montrons par l'absurde que $\gamma_m^1(K_{3,n}) \neq 2$. Soit $D = X$ un ensemble dominant et $x_1, x_2 \in X$. Tout $y \in Y$ *protège* x_i, $i=1,2$. Si $|D \cap X| = 2$ et $|D \cap Y| = 0$, alors D n'est pas un ensemble dominant 1-mobile de $K_{3,n}$ contradiction. Si $|D \cap X| = 1$ (resp $|D \cap Y| = 1$), alors soit $y_1 \in Y$ le sommet protégé de x. Alors $D \backslash \{x\} \cap \{y_1\} = \{y, y_1\}$ n'est pas un dominant 1-mobile de $K_{3,n}$ contradiction. D'où $\gamma_m^1(K_{3,n}) \neq 2$. Puisque on a déjà $\gamma_m^1(k_{3,n}) \neq 1$ et $\gamma_m^1(k_{3,n}) \neq 2$ on déduit que $\gamma_m^1 \geq 3$. Soit $D = X$

un ensemble dominant et $x_1, x_2, x_3 \in X$. puisque tout $y \in Y$ protège $x_i, i=1,2,3$, alors D est un ensemble dominant 1-mobile. D'où $\gamma_m^1 \leq 3$ et donc $\gamma_m^1(K_{3,n}) = 3$.

cas 4 : $m=4$. Dans ce cas $\gamma_m^1 \notin \{1,2,3\} \Rightarrow \gamma_m^1 \geq 4$. Soit $D = X$ un ensemble dominant et $x_1, x_2, x_3, x_4 \in X$. Puisque tout $y \in Y$ protège $x_i, i=1,2,3,4$, alors D est un ensemble dominant 1-mobile. D'où $\gamma_m^1 \leq 4$ et donc $\gamma_m^1(K_{4,n}) = 4$.

cas 5 : $m \geq 4$. Dans ce cas il est claire que $\gamma_m^1 \geq 4$, car 3 sommets quelconques ne forment pas un ensemble dominant 1-mobile . □

4.3.2 Multipartis complets :

Le nombre de domination 1-mobile des graphes multipartis complets, nous avons le résultat suivant.

Proposition 4.4

Soit $k_{p_1, p_2, ..., p_t}$ un graphe multipartite complet telle que $p_1 \leq p_2 \leq ... \leq p_t$, avec $t \geq 3$. Alors,

$$\gamma_m^1\left(k_{p_1, p_2, ..., P_t}\right) = \begin{cases} 1 \text{ si } \mathrm{p}_1 = p_2 = 1. \\ 2 \text{ sinon.} \end{cases}$$

preuve :

Soit $G = k_{p_1, p_2, ..., p_t}$ un graphe multipartite complet tels que $p_1 \leq p_2 \leq ... \leq P_t$, avec $t \geq 3$. Dans le cas où $p_1 = p_2 = 1$, G possède deux sommets de degré $n-1$ et donc d'après le théorème 2.6, $\gamma_m^1(k_{p_1, p_2, ..., p_t}) = 1$. Supposons que $p_2 > 1$, et donc, toujours d'après le Théorème 2.6 $\gamma_m^1(k_{p_1, p_2, ..., p_t}) \geq 2$. Considérons l'ensemble de sommets $S = \{x, y\}$ tel que x et y appartiennent à deux parties différente. Il est facile de vérifier que tout sommet de S est protégé par tout sommet adjacent en dehors de S. Alors S est un ensemble dominant 1-mobile de G et donc $\gamma_m^1(G) \leq 2$. D'où l'égalité $\gamma_m^1(G) = 2$. □

Remarque 4.3

Pour les biparties arbitraires, nous pensons que γ_m^1 est majoré par la valeur $\dfrac{n+l-s}{2}$, avec :

n : l'ordre du graphe, l : nombre de feuilles, s : nombre de supports.

Conclusion

En guise de conclusion, nous pouvons dire que l'importance de notre étude se situe au niveau de la protection et la domination du graphe. C'est ainsi que nous nous sommes penchés sur la domination 1-mobile et sa variante pour des graphes simple.

Et là, de nombreux problèmes reste ouvert par exemple pour quels graphes G Nous avons $\gamma_m^1(G)=3$.

Bibiographie

[1] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, et P. J. Slater, "*Fundamentals of Domination in Graph"*. Marcel Dekker, New York, 1998.

[2] Claude berge, "*Graphes Et Hypergraphes"*, 2ème édition, Paris Dunod, 1970.

[3] C. F. de Jaenisch. " *Applications De L'analyse Mathématique A Des Echecs* ". Petrograd, 1862.

[4] C.Berge. "*Graphs*", North Holland, 1985.

[5] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, et P. J. Slater (Eds.), "*Domination in Graph*", Marcel Dekker, New York, 1998.

[6] W. W. Ball Rouse, "*Mathematical and Problems of Past and Present Times*", Mac Millan, London, 1982.

[7] A. M. Yaglom et A. M. Yaglom, "*Challenging Mathematical Problems With Elementray Solution, In Volume 1, Combinatorial Analyse and Probability Theory* ", San Fransisco, 1964, Holden-day.

[8] O. Ore. "*Theory of Graphs*", Amer. Math. SOC. Colooq. Publ, 38 (American. Mathematical Society Publication. AMS, Providence, 1962.

[9] E. J. Cockayne et S. T. Hedetniemi, "*Towards a Theory of Domination*", Networks, 7:247-261,1977.

[10] C. E. Go, et S. R. Canoy, Jr. "*Domination in the corona and join of graphs*", International Mathematical Forum, 6 (2011), 763-771.

[11] R. G. Hinampas, Jr. et S. R. Canoy, Jr. "*1-Movable Independent Domination in Graphs*", International Journal of Mathematical Analysis, 9 (2015), 73-80.

[12] Teffany V. Daniel et S. R. Canoy, Jr. "*1-movable clique dominating sets of graph* ", International journal of pure and applied mathematics, 106 (2016), 463-471.

[13] Jocecar Lomarda et S. R. Canoy, Jr. "*1-movable total dominating, connected dominating, and double dominating sets in the composition of graphs*", International journal of mathematical analysis, 9 (2015), 2037-2044.

[14] J. Lomarda et S. R. Canoy, Jr. "*1-Movable Total Dominating Sets in Graphs*", International Journal of Mathematical Analysis, 8 (2014), 2703 - 2709.

[15] E. J. Cockayne, P. J. P. Gundlingh, Jr. Munganga et J. H. Van vuuren,"*Protection of a graph*", Utilitas Math, 67 (2005), 19-32.

[16] R.G. Hinampas, Jr. et S. R. Canoy, Jr. "*1-movable domination in graphs*", Applied Mathematical Sciences, 8 (2014), 8565 - 8571.

[17] J. Blair, R. Gera et S. Horton, "*Movable dominating sensor sets in networks*", Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, 77 (2011), 103 - 123.

[18] R. G. Hinampas, Jr. et S. R. Canoy, Jr. "*Movability of dominating, Independent dominating and doubly connected dominating sets in the composition of graphs*", Applied mathematical sciences, 9(2015), 4233-4243.

[19] C.E. Go et S. R. Canoy, Jr. "*Domination in the Composition of Graphs*", AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics, accepted for publication.

[20] S. Arumugam, K. Ebadi et M. Manrique. "*Co-Secure and Secure Domination in Graphs*", Utilitas Mathematica, 94 (2014), 167-182.

[21] W. F. Klostermayer et Mynhard. "*Secure Domination and Secure Total Domination In Graphe*", Discussion Mathématicae Graph Theory, 28 (2008), 267-284.

[22] E. J. Cockayne, O. Favaron et C. M. Mynhardt."*Secure Domination Weak Roman Domination and Forbidden Subgraphs*", Bulletin of the Institue of Combinatorics and its Applications, 39 (2003), 87-100.

[23] J. Lomarda et S. R. Canoy, Jr. "*1-Movable Connected Dominating Sets in Graphs*", Applied Mathematical Sciences, 9 (2015), 507 - 514.

[24] E. J. Cockayne."*Irredundance Secure Domination and Maximum Degree in Trees*", Discrete Mathematicas, 307 (2007), 12-17.

[25] A.P. Burger M. A. Henning et G.H. Van Vuuren. "*Vertex covers and secure domination in graphs*", quaestiones Mathimaticae , 31(2008), 163-171.

[26] J. Lomarda et S. R. Canoy, Jr. "*1-Movable Total Dominating Sets in Graphs*", International Journal of Mathematical Analysis, 8 (2014), 2703 - 2709.

[27] S. R. Canoy, Jr. "*Another look at independent domination in graphs*", International Journal of Mathematical Analysis , 8 (2014), 2075-2082.

[28] S. T. Hedetniemi et R. C. Laskar, "*Introduction*" Discrete Mathematics, 86(1990), 3-9.

[29] K. S. Booth et J. H. Johnson, " *Domination sets in chordal graphs* ", SIAMJ. Comput.pp, 11:191-199,1982.

[30] A. K. Dewdney, " *Fast turing reductions between problems in NP* ",Tech. Rep.71, Dept. of Computer Science, University of West Ontario, 1981.

[31] M. R. Garey et D. S. Johnson, Computers and Intractability. " *A Guid to the Theory of NP-Completeness*". W. H. Freeman and Co, 1978.