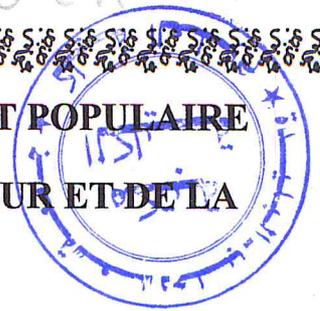


1A-510-16-1

REPUBLICQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA

RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE SAAD DAHLEB DE BLIDA
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES



Projet de Fin d'Etudes

Pour l'obtention du diplôme :

Master En Mathématiques

Spécialité : Recherche opérationnelle

Thème :

ETUDE DES DOMINANTS LOCALISATEURS ET DES CODES IDENTIFIANTS DANS LES GRAPHE ET QUELQUES APPLICATIONS

Présenté par :

Mimoun Yasmina & Lounaci Meriem

Devant les membres de jury:

M^r Chellali Mustapha: Président Professeur, USD Blida

M^r Blidia Mostafa : Promoteur Professeur, USD Blida

M^r Ikhlef-Eschouf Nouredine : Examineur Maître de conférence B Univ. De Médéa

M^{me} Meddah Nacéra: Examinatrice Maître Assistante, USD Blida.

Année 2013

MA-510-16-1

Remerciements



Nous remercions ALLAH, le tout puissant de nous avoir donné tant de courage, de volonté et surtout de patience pour l'élaboration de ce modeste travail ...

Nous tenons à exprimer notre profonde gratitude et connaissance à notre promoteur Mr Blidia Mostafa pour le support qu'il nous a apporté et la confiance qu'il nous a témoigné, et pour ces orientations et ses conseils précieux.

Nous remercions Monsieur Chellali Mustapha. Pour l'honneur qu'il nous fait en présidant le jury de ce mémoire.

Nous remercions également Monsieur Ikhlef-Eschouf Noureddine et Meddah Nacéra, qui ont bien accepté de faire partie du jury.

Un grand Merci pour tous ceux et celles qui ont participé, à la réalisation de ce travail de près ou de loin.

Un très grand Merci à tous les enseignants du département mathématique, en particulier à ceux qui ont contribué à notre formation.

Dédicace

C'est avec un très grand honneur que je dédie ce modeste travail aux personnes les plus chères au monde ma chère maman, pour leur amour et bonté et que sans eux je n'aurai jamais pu atteindre mon objectif, que Dieu me la garde

A mes chers frères : Mohamed et Abdellah.

*A ma très chère tante Tima et sa fille Selma
qui ma suivi et encouragé.*

A mes amis Hocine, Billel et Rahim .

A mes copines F.Zohra , Amel , Monia, Khawla et Lila.

A TOUTE MA FAMILLE SANS EXCEPTION.

*A mon binôme Meriem pour la quelle je souhaite une vie plein de joie ,
et de réussite.*

A tous mes amis.

A toute la promotion 2013.

Yasmin.

DEDICACE

Je tiens à remercier mon dieu ALLAH le tout puissant de m'avoir donné la foi et de m'avoir permis de présenter ce travail.

Je dédie ce petit travail aux plus chères personnes de ma vie. Ils ont le droit de recevoir mes chaleureux remerciements particulièrement pour tous les sacrifices qu'ils ont consentis pour me permettre de suivre mes études dans les meilleures conditions possibles et n'avoir jamais cessé de m'encourager tout au long de mes années d'étude. En leurs souhaitant une longue vie pleine de joie et de santé.

A les deux femmes qui remplissent ma vie d'affection et d'encouragements, à mes très chère mère et grand mère .

A mon adoré papa l'homme à qui je dois ma réussite, mon succès et mon bonheur.

A mon grand père qui je le souhaite une bonne santé et longévité

A mes chers frères : Achour, Mohamed , Youcef et le petit Omar.

A mes chères sœurs: Fatma Zohra, Farida, Aycha, et Khadija

A ma collègue de binôme Yasmina et sa famille

Je remercie infiniment le professeur Blidia, de son encadrement, sa compréhension et son gentillesse durant tout le long de mon mémoire, et tous les enseignants du département mathématique.

Enfin à toute ma famille, à tous mes proches amis : Nadia, Fatima, Samia, Samiha, Zineb, Soumia, Hanane, Hayet, Lila, Najat, et Amina mes collègues pendant tous les années et tous les étudiants du département de mathématiques.

Meriem.

Résumé

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple d'ordre n où V est l'ensemble des sommets et E est l'ensemble des arêtes.

Le problème de domination consiste à trouver un ensemble de sommets C tel que chaque sommet de $V - C$ admet au moins un voisin dans C qu'on appelle un dominant, le cardinal minimum d'un ensemble dominant d'un graphe G est noté $\gamma(G)$ dit nombre de domination. D'une manière plus général, Un ensemble $C \subseteq V$ est un dominant localisateur de G si C est un dominant de G et C sépare $V - C$. Un ensemble $C \subseteq V$ est un code identifiant de G si C est un dominant de G et C sépare V . On désigne par $\gamma_L(G)$ la cardinalité minimale d'un dominant localisateur de G , et par $M_1(G)$ la cardinalité minimale d'un code identifiant du graphe G , dit aussi nombre de code identifiant.

Dans ce mémoire on a étudié la conjecture proposé par F. Foucaud qui concerne une borne supérieure du nombre de code identifiant à savoir : $M_1(G) \leq \left\lceil n - \frac{n}{\Delta} \right\rceil$. Comme $\gamma_L(G) \leq M_1(G)$ on s'est demandé si elle est vraie pour le nombre de domination localisatrice. Par conséquent on s'est intéressé aux graphes dont la structure est simple pour vérifier sa validité.

Abstract

Let $G = (V, E)$ be a simple graph of order n , with vertex set V and edge set E .

The problem of domination in graphs is to find a set of vertices C such that each vertex of $V - C$ has at least one adjacent vertex in C , which is called dominating set, the minimum cardinality of a dominating set of a graph G is denoted $\gamma(G)$ and it said the domination number. In a more general, a set $C \subseteq V$ is a locating-dominating set of G , if C is a dominating set of G , and C separates $V - C$. A set $C \subseteq V$ is a identifying code of G , if C is a dominating set of G , and C separates V . Denote by $\gamma_L(G)$ the minimum cardinality of a locating-dominating set of G , and by $M_1(G)$, the minimum cardinality of an identifying code of G .

In this thesis we studied the conjecture proposed by **F. Foucaud** which concerns an upper bound of the number of identifying code namely: $M_1(G) \leq \left\lceil n - \frac{n}{\Delta} \right\rceil$. As $\gamma_L(G) \leq M_1(G)$, the natural question is, whether it is true for the locating domination number. Therefore we are interested in graphs whose structure is simple to check its validity.

TABLE DES MATIERES

REMERCIEMENTS

RESUME

TABLE DES MATIERES

LISTE DES ILLUSTRATIONS GRAPHIQUES

INTRODUCTION	10
1. Généralités sur les graphes	12
1.1. Introduction	12
1.2. Définitions et notations	12
1.2.1. Graphes	12
1.2.2. Sous-graphe	13
1.2.3. Voisinages	14
1.2.4. Chaines, Cycles et arbres	14
1.2.5. Distance et boule	15
1.2.6. Quelques graphes particuliers	15
1.3. La domination dans les graphes	20
1.3.1. Dominant	20
1.3.2. Dominant localisateur	20
1.3.3. Code identifiant	21
1.4. Exemples d'application	23
2. Quelques résultats existants concernant les deux paramètres	26
2.1. Introduction	26
2.2. Bornes associées au nombre de domination localisatrice	26
2.2.1 Nombre de domination localisatrice dans les chaines et les cycles finis	27

2.2.2 Nombre de domination localisatrice dans les arbres	28
2.3. Bornes associées au nombre de code identifiant	32
2.3.1. Nombre de code identifiant des cycles	34
2.3.2. Nombre de code identifiant des chaines	36
2.3.2. Nombre de code identifiant dans les arbres	38
3. Contribution a l'étude de la conjecture de FOUCAUD, cas: des chaines, des cycles et de quelques arbres	42
3.1. Introduction	42
3.2. Validité de la borne pour le nombre de domination localisatrice	42
3.2.1. Cas des cycles et des chaines	43
3.2.2. Cas de quelques arbres	44
3.3. Validité de la borne pour le nombre de code identifiant	48
3.3.1. Cas des cycles	48
3.3.2. Cas des chaines	49
3.2.4. Cas des arbres	49
CONCLUSION	53
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	54

LISTE DES ILLUSTRATIONS GRAPHIQUES

Figure 1.1	Graphe simple $G = (V,E)$	13
Figure 1.2	$G[S]$ le graphe induit par S .	13
Figure 1.3	Chaîne P_9	15
Figure 1.4	Cycle C_6	15
Figure 1.5	Graphe biparti complet $K_{3,4}$	16
Figure 1.6	Etoile $K_{1,5}$	17
Figure 1.7	Double étoile $S_{3,2}$	17
Figure 1.8	Arbre T enraciné en r	18
Figure 1.9	ToK_1 couronne de l'arbre T	18
Figure 1.10	Arbre T_3^4	19
Figure 1.11	Arbres $T(k) \in T$ avec $k=1,\dots,5$.	19
Figure 1.12	Exemple de dominant	22
Figure 1.13	Exemple de dominant localisateur	22
Figure 1.14	Exemple de code identifiant	23
Figure 1.15	Les processeurs $p_1;p_2;p_3$ permettent d'identifier de façon unique chaque processeur du réseau.	24
Figure 2.1	Dominant localisateur dans T_4^3 , T_2^4 , et T_2^5 .	30
Figure 2.2	Partition de V .	34
Figure 2.3	Code identifiant de l'arbre T_3 .	40

Introduction

La recherche opérationnelle peut être définie comme l'ensemble des méthodes et techniques rationnelles orientées vers la recherche de la meilleure façon d'opérer des choix en vue d'aboutir au résultat visé ou au meilleur résultat possible.

Ce domaine fait largement appel au raisonnement mathématique (logique, probabilités, analyse des données) et à la modélisation des processus. Il est fortement lié à l'ingénierie des systèmes, ainsi qu'au management du système d'information.

La théorie des graphes est un domaine combinant mathématiques discrètes et informatique. Son histoire remonte peut-être aux travaux d'Euler au *XVIII*ème siècle et trouve son origine dans l'étude de certains problèmes, tels que le célèbre problème des ponts de Königsberg qui consiste à déterminer s'il existe un parcours tel qu'il permettrait de faire le tour de la ville, et ce en partant d'un quartier au choix, en ne traversant qu'une seule et unique fois chaque pont de cette ville et de revenir au point de départ, ou encore celui du voyageur de commerce ainsi que le problème de coloriage de cartes. La théorie des graphes s'est alors développée dans diverses disciplines telles que la chimie, la biologie, les sciences sociales. Depuis le début du *XX*ème siècle, elle constitue une branche à part entière des mathématiques, grâce aux travaux de König, Menger, Cayley puis de Berge et d'Erdős.

De manière générale, un graphe permet de représenter la structure, les connexions d'un ensemble complexe en exprimant les relations entre ses éléments : réseaux de communication, réseaux routiers, interaction de diverses espèces animales, circuits électriques... etc Les graphes constituent donc une méthode de pensée qui permet de modéliser une grande variété de problèmes en se ramenant à l'étude de sommets et d'arcs. Les derniers travaux en théorie des graphes sont souvent effectués par des informaticiens, du fait de l'importance qu'y revêt l'aspect algorithmique.

Le concept de la domination trouve son origine dans le jeu d'échec, le principe est de couvrir (dominer) l'ensemble des cases par certaines pièces du jeu. L'idée semble remonter au *XVI*ème siècle en Inde . En 1862, D. JAENISH posa le problème suivant: Déterminer le nombre de reines à placer sur l'échiquier de telle manière que chaque case

soit occupée en un seul mouvement par l'une des reines. Au fait, ce problème est un problème de domination, on associe au jeu un graphe où les sommets sont les différents cases de l'échiquier et on met une arête si le déplacement de la reine est possible sinon on ne met pas d'arête, le nombre de reines est égale à la cardinalité minimal d'un sous ensemble dominant dans le graphe associe (graphe des reines).

Le problème de domination fait partie de la famille des problèmes combinatoires en théorie des graphes. Sa formulation simple, a incité beaucoup de chercheurs à investir dans le domaine algorithmique afin de permettre sa résolution qui est en général un problème très difficile (NP-complet). A cet effet, que se soit en économie, en industrie ou autres, il s'intéresse aux différentes situations relevant du domaine de la prise de décision.

Notre recherche a pour objet général, l'étude du problème de domination localisatrice et code identifiant qui généralise la notion de la domination dans les graphes.

Le contenu de cette thèse est reparti en trois chapitres.

Nous introduisons dans le premier chapitre les définitions de base ainsi que les notations usuelles dans le domaine de la théorie des graphes utilisées dans ce mémoire. A la fin du chapitre nous parlerons sur des exemples d'applications.

Dans le deuxième chapitre nous présenterons quelques bornes et les valeurs exactes du nombre de domination localisatrice $\gamma_L(G)$ et du nombre de code identifiant, $M_1(G)$ pour certaines classes de graphes particulières.

Nous nous intéressons dans le troisième chapitre à étudier la validité de la conjecture de F. Foucaud $M_1(G) \leq \lceil n - \frac{n}{\Delta} \rceil$ qui concerne la borne supérieure du nombre de code identifiant dans certaines classes.

CHAPITRE 1

GENERALITES SUR LES GRAPHES

1.1 Introduction

Dans ce chapitre on rappelle d'abord quelques notions fondamentales et définitions relatives aux graphes auxquels nous intéresserons dans la suite de ce mémoire. Ensuite nous étudierons deux variantes de la domination dans les graphes, à savoir la domination localisatrice et les codes identifiants. Enfin, nous donnerons un aperçu sur les exemples d'applications.

1.2 Définitions et notations

1.2.1 Graphe

- Un **graphe** $G = (V, E)$ non orienté est constitué d'un ensemble fini de sommets V et d'un ensemble d'arêtes E . Le nombre de sommets de G est appelé **ordre** de G noté généralement n .

Une arête entre les sommets u et v dans V est une paire de sommets que l'on notera par uv . Si uv est une arête, alors on dit que les sommets u et v sont adjacents et que l'arête uv est incidente à ces deux sommets.

- Une arête de la forme uu est appelée **boucle**.
- Un graphe d'ordre 1 est dit **trivial**, sinon il est **non trivial**.
- Un graphe G est **fini** si $V(G)$ et $E(G)$ sont finis. Autrement, il est **infini**.

- Un graphe G est **simple** si toutes les arêtes de $E(G)$ sont distinctes (G n'a aucune arête multiple), et si aucune arête ne contient le même sommet deux fois (G n'a aucune boucle).

Exemple 1.1. la Figure 1.1 illustre un graphe simple non trivial $G = (V, E)$ d'ordre 8 avec : $V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ et $E(G) = \{af, ab, ac, ae, be, bg, bd, cd, dg, gh\}$, les sommets a et b sont adjacents, l'arête ac est incidente à a et c .

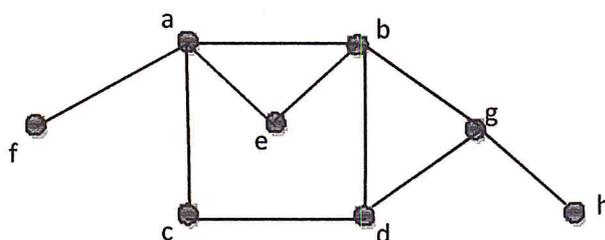


FIGURE 1.1. Graphe simple $G = (V, E)$.

1.2.2 Sous-graphe

Soit $S \subseteq V$ un sous-ensemble de sommets de G . Le **sous-graphe** de G induit par S , noté par $G[S]$, est le graphe $G[S] = (S, E_S)$, où E_S est l'ensemble d'arêtes de E ayant les deux extrémités dans S . Pour le graphe de l'exemple 1.1, le sous-graphe induit par $S = \{b, d, g\}$ est illustré dans la Figure 1.2.

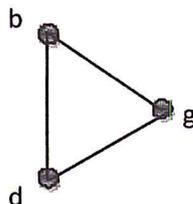


FIGURE 1.2. le graphe induit par S .

1.2.3 Voisinages

- L'ensemble des sommets adjacents à un sommet v de G , qu'on note $N_G(v)$, est appelé l'ensemble des **voisins** de v , où **voisinage ouvert** de v dans G et $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$ est appelé le **voisinage fermé** de v .
- Pour un sous-ensemble $S \subset V$, $N_G(S) = \bigcup_{v \in S} N_G(v)$ est le voisinage ouvert de S et $N_G[S] = N_G(S) \cup \{S\}$ est le voisinage fermé de S .
- Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Le **degré** d'un sommet $v \in V$, noté $d_G(v)$, est égal au cardinal de son voisinage ouvert. (i.e. $d_G(v) = |N_G(v)|$). On note par $\delta(G)$ et $\Delta(G)$ le **degré minimum** et le **degré maximum** dans G , respectivement.
- Un sommet de degré nul est dit sommet **isolé** et un sommet de degré un est dit sommet **pendant (feuille)**. On note l'ensemble des sommets pendants de G par $L(G)$. Un sommet adjacent à un sommet pendant est appelé sommet **support** et l'ensemble des sommets supports de G est noté par $S(G)$.

Dans la figure 1.1 on a :

$$N_G(a) = \{f, b, e, c\}, N_G[a] = \{a, f, b, e, c\}, L(G) = \{f, h\}, S(G) = \{a, g\}$$

$$d_G(d) = 3, \delta(G) = 1, \Delta(G) = 4.$$

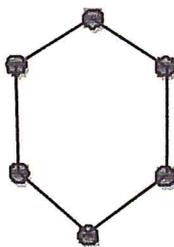
1.2.4 Chaînes, cycles et arbres

- Une **chaîne** dans un graphe $G = (V, E)$ est une séquence finie de sommets (v_1, v_2, \dots, v_n) , telle que pour tout $1 \leq i \leq n - 1$, $e_i = v_i v_{i+1} \in E$.

L'entier $n - 1$ représente la longueur de la chaîne et les sommets v_1 et v_n sont appelés extrémités de la chaîne. Une chaîne qui n'utilise pas deux fois la même arête est dite **simple**. Une chaîne qui ne passe pas deux fois par le même sommet est dite **élémentaire**. Une chaîne simple élémentaire induite par n sommets est noté par \mathbf{P}_n . En effet, la chaîne \mathbf{P}_9 représentée dans la Figure 1.3.

FIGURE 1.3. Chaîne P_9 .

- Un **cycle** C_n de longueur n dans un graphe G est une chaîne élémentaire $(v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1})$ dont les extrémités v_1, v_{n+1} sont confondues.

FIGURE 1.4. Cycle C_6 .

1.2.5 Distance et boule

- La **distance** entre deux sommets u et v dans un graphe G , notée $d_G(u, v)$ (ou simplement $d(u, v)$), est la plus courte chaîne entre u et v dans G . (Si une telle chaîne n'existe pas, alors la distance entre u et v est infinie).
- Soit v un sommet de G . Nous notons par $B_r(v)$ la **boule** de rayon r et de centre v qui est formée par tous les sommets de V qui sont à distance inférieure ou égale à r de v . Par conséquent, il est clair que $N[v] = B_1(v)$.

1.2.6 Quelques graphes particuliers

- Un graphe G est dit **connexe** si pour toute paire de sommets du graphe, il existe une chaîne les reliant. Une **composante connexe** d'un graphe est un sous-graphe maximal (au sens de l'inclusion) connexe.

- Le graphe **complet** d'ordre n , noté K_n est le graphe simple dans lequel tous les sommets sont de degré $n - 1$. Ainsi deux sommets quelconques de K_n sont adjacents.
- Un graphe est **biparti** s'il existe une partition de $V(G)$ en deux sous ensembles non vides A et B , tel que chaque arête de $E(G)$ contient un sommet de A et un sommet de B , en d'autres termes, A et B sont deux ensembles de G disjoints, stables (i.e. $G[A]$ (resp. $G[B]$) ne contient pas d'arêtes) et non vides.
- On appelle graphe **biparti complet**, un graphe biparti tel que pour tout sommet $u \in V_1$ et $v \in V_2$, $uv \in E$. Si $|V_1| = p$ et $|V_2| = q$, alors le graphe biparti complet est noté $K_{p,q}$.

Exemple 1.2. le graphe biparti complet $K_{3,4}$ de la Figure 1.5.

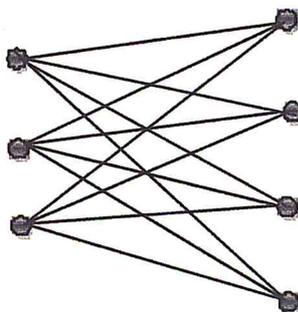
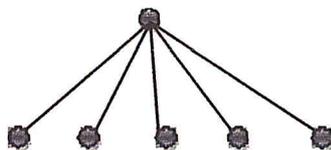


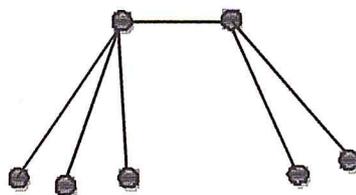
FIGURE 1.5. Graphe biparti complet $K_{3,4}$.

- Un cas particulier d'un graphe biparti complet dans lequel $|V_1| = 1$ et $|V_2| = s$ est appelé étoile (**a star**) et est notée $K_{1,s}$. Le sommet de V_1 est appelé centre de l'étoile.

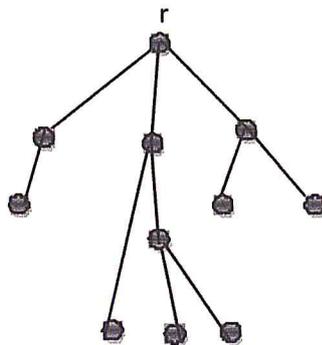
En effet le graphe de la Figure 1.6 illustre l'étoile $K_{1,5}$.

FIGURE 1.6. Etoile $K_{1,5}$.

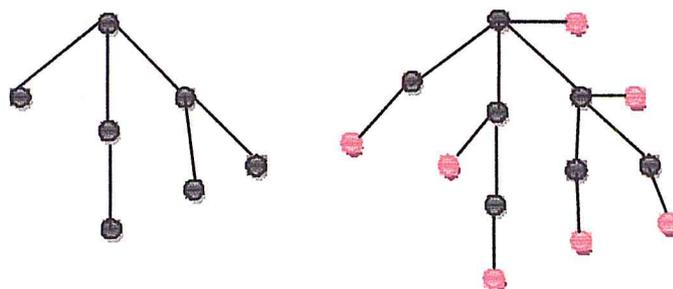
- Une **double étoile** (a star double) notée $S_{p,q}$ est le graphe obtenu à partir de deux étoiles $K_{1,p}$ et $K_{1,q}$ en ajoutant une arête reliant les deux centres. Voir la Figure 1.7.

FIGURE 1.7. Double étoile $S_{3,2}$.

- Un graphe **acyclique** est un graphe ne contenant pas de cycles, est appelé aussi forêt. Une forêt connexe est appelé un arbre, en général un **arbre** est noté par T . Il est parfois commode de considérer un sommet spécial dans un arbre, un tel sommet est appelé **racine**. Un arbre pendu T avec une racine r fixé est un arbre enraciné en r . Les Figures 1.6, 1.7 et 1.8, sont des arbres. Dans la Figure 1.8 suivante, le sommet r est la racine de l'arbre T ayant 6 sommets pendants.

FIGURE 1.8. Arbre T enraciné en r .

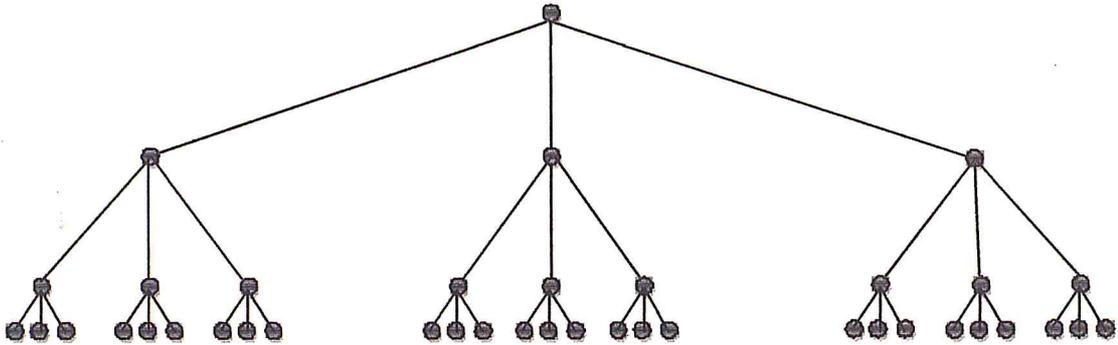
- Une **couronne d'un arbre** T d'ordre n noté par ToK_1 , est obtenu à partir de T et n sommets ajoutés en reliant par une arête tout sommet $v \in V(T)$ à un sommet ajouté. Il est clair que l'ordre de la couronne est $2n$. A titre d'exemples le graphe de la Figure 1.9 qui illustre l'arbre T et sa couronne ToK_1 .

FIGURE 1.9. Un arbre T et sa couronne ToK_1 .

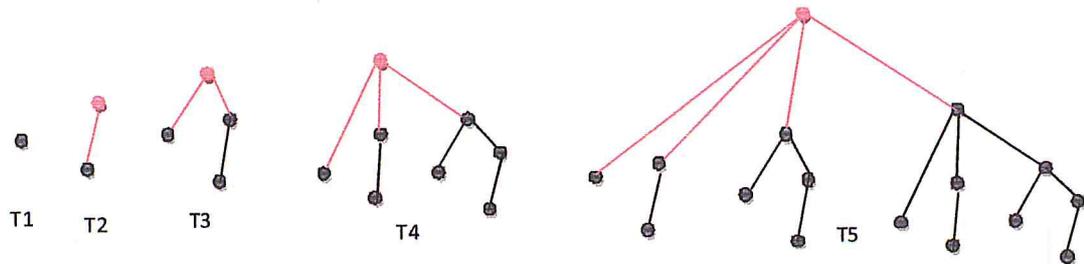
- Les **arbres** T_h^k sont des arbres k -aires complets à h niveaux et n sommets tels que :

$$n = k^0 + k^1 + k^2 + \dots + k^{h-1} = \frac{k^h - 1}{k - 1}.$$

et chaque sommet a exactement k sommets fils (premiers descendants). Le premier sommet par lequel on pend l'arbre est dit racine de l'arbre. Un exemple d'un arbre complet T_4^3 est illustré dans la Figure 1.10.

FIGURE 1.10. Arbre T_4^3 .

- Soit \mathcal{T} est une famille d'arbres composée des arbres suivant :
 - $T(1)$ est l'arbre formé d'un seul sommet dit racine,
 - $T(2)$ est obtenu à partir de $T(1)$ en ajoutant un nouveau sommet dit racine relié au sommet de $T(1)$, ainsi de suite...
 - $T(k)$ est obtenu à partir $T(1), \dots, T(k-1)$ en ajoutant un sommet dit racine relié aux racines des arbres $T(1), \dots, T(k-1)$.

FIGURE 1.11. Arbres $T(k) \in \mathcal{T}$ avec $k = 1, \dots, 5$.

Le nombre de sommets d'un arbre $T(k)$ de \mathcal{T} est égal à 2^{k-1} .

Rappelons que tous les graphes considérés dans ce manuscrit sont simples et non orientés.

1.3 La domination dans les graphes

1.3.1 Dominant

- Un sommet $v \in V$ domine (ou couvre) un sommet u si $u \in N[v]$. (c-à-d, u est à distance au plus 1 de v) .
- Soit $C, C' \subseteq V$, on dit que C domine (ou couvre) C' si tous les sommets de C' sont dominés par au moins un sommet de C .
- Un ensemble $C \subseteq V$ est un **dominant** (ou code couvrant) de G , si C domine V .
- Dans la littérature, il existe d'autres définitions équivalentes aux dominants dans les graphes. En voici quelques unes:
 - * Un ensemble $C \subseteq V$ est un dominant si pour tout sommet $v \in V; |N[v] \cap C| \geq 1$.
 - * Un ensemble $C \subseteq V$ est un dominant si pour tout sommet $v \in V, N[v] \cap C \neq \emptyset$.
 - * Un sous ensemble C de V est dit **dominant** de G , si tout sommet x de $V - C$ est adjacent à au moins un sommet de C ,
- La cardinalité minimale d'un ensemble dominant de G est appelée nombre de domination, elle est notée par $\gamma(G)$
- Deux sommets u, v de V sont séparés par un sommet $x \in V$, si x domine exactement un seul des deux sommets u ou v .
- Soit $C, C' \subseteq V$, on dit que C **sépare** C' , si pour toute paire $\{u, v\}$ de sommets de C' , u et v sont séparés par au moins un sommet de C .

1.3.2 Dominant localisateur

- Un ensemble $C \subseteq V$ est un **dominant localisateur** de G si C est un dominant de G et C sépare $V - C$.

- En d'autres termes, pour tout sommet $v \in V$, $N[v] \cap C \neq \emptyset$, et pour toute paire $\{u, v\}$ de sommets de $V - C$, $N(u) \cap C \neq N(v) \cap C$.
- On désigne par $\gamma_L(G)$ la cardinalité minimale d'un dominant localisateur de G , dit aussi nombre de domination localisatrice.

1.3.3 Code identifiant

- Un ensemble $C \subseteq V$ est un **code identifiant** de G si C est un dominant de G et C sépare V .
- En d'autres termes, pour chaque sommet $v \in V$, $N[v] \cap C \neq \emptyset$, et pour toute paire $\{u, v\}$ de sommets de V , $N[u] \cap C \neq N[v] \cap C$.
- Pour un code identifiant C de G , et pour un sommet $v \in V$, l'ensemble $I_C(v) = N[v] \cap C$ est appelé ensemble identifiant de v .
- On peut donner une définition alternative d'un code identifiant de la façon suivante. Soit un graphe $G = (V, E)$, un ensemble $C \subseteq V$ est un code identifiant de G si pour tout sommet $v \in V$, $I_C(v) \neq \emptyset$, et si pour toute paire de sommets distincts $u, v \in V$, $I_C(u) \neq I_C(v)$.
- On désigne par $M_1(G)$ la cardinalité minimale d'un code identifiant du graphe G , dit aussi nombre de code identifiant.

Remarque 1.3. Dans un graphe G , tout code identifiant est un dominant localisateur, et tout dominant localisateur est un dominant. L'inverse n'est pas vrai en général. Par conséquent, on peut facilement obtenir la chaîne d'inégalités suivante:

$$\gamma(G) \leq \gamma_L(G) \leq M_1(G).$$

Remarque 1.4. Tout graphe n'admet pas forcément un code identifiant. En effet, s'il existe deux sommets $u, v \in V$, tels que $N[u] = N[v]$. Alors il est impossible de séparer ces deux sommets (u et v sont appelés jumeaux).

Remarque 1.5. *Les graphes admettant un code identifiant sont appelés les graphes sans jumeaux.*

Les figures 1.12 ,1.13 et 1.14 donnent des exemples de dominant, dominant localisateur et de code identifiant. Les sommets grisés appartient à ces ensembles, et les ensembles identifiant chaque sommet sont entre accolades.

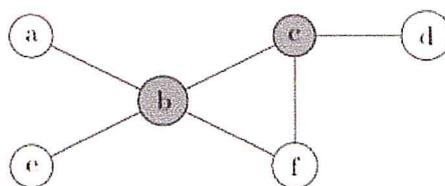


FIGURE 1.12. Exemple d'un dominant.

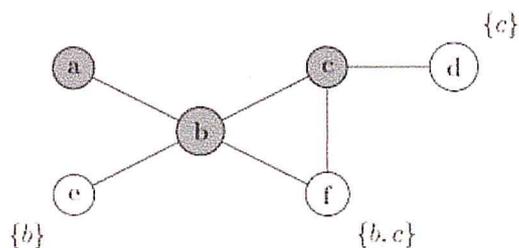


FIGURE 1.13. Exemple de dominant localisateur.

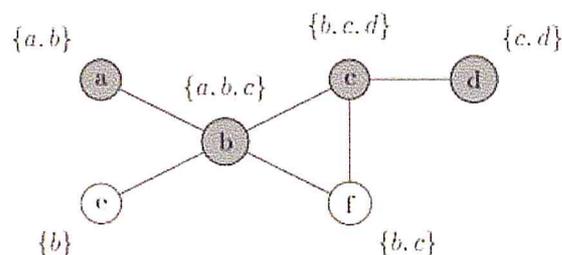


FIGURE 1.14. Exemple de code identifiant.

On remarque que le dominant n'est pas un dominant localisateur, car les sommets a et e ne sont pas séparés. De même, le dominant localisateur n'est pas un code identifiant, car les sommets c et f ne sont pas séparés.

1.4 Exemples d'application

Les codes identifiants ont de nombreuses applications. Nous présentons brièvement deux exemples d'application parmi les plus importantes :

- Exemple 1: Détection d'erreurs dans un système multiprocesseurs.

Une première application consiste en la détection des erreurs dans un système multiprocesseurs. Supposons que chaque processeur p d'un réseau soit capable d'exécuter une procédure $test(p)$, qui s'applique à p ainsi qu'aux processeurs voisins de p . Cette procédure teste le bon fonctionnement de p et de ses voisins, et ne retourne qu'une information de type binaire : par exemple, 0 si une défaillance a été détectée sur p ou sur l'un de ses voisins, et 1 sinon. En supposant qu'à tout moment, au plus un processeur du réseau soit défectueux, le problème est de déterminer un sous-ensemble de processeurs C tel que :

- si au moins un des processeurs de C renvoie 0 après l'exécution de $test$, alors il y a un unique processeur défectueux dans le réseau, que nous sommes en mesure de localiser d'après les résultats des exécutions de $test$ sur C .

– si tous les processeurs de C renvoient 1 après l'exécution de test, alors tous les processeurs du réseau sont en bon état de marche.

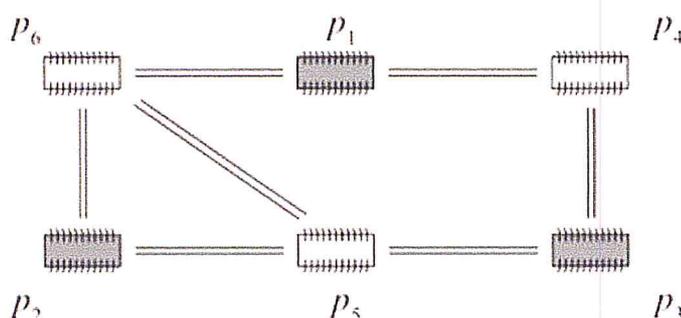


FIGURE 1.15. Les processeurs $p_1; p_2; p_3$ permettent d'identifier de façon unique chaque processeur du réseau. Les processeurs $p_4; p_5; p_6$ couvrent bien le réseau mais ne permettent pas d'identifier de façon unique ses processeurs : nous ne pouvons pas distinguer le cas p_5 défectueux du cas p_6 défectueux si l'on prend $C = \{p_4; p_5; p_6\}$.

Il est facile de voir qu'un sous-ensemble de processeurs C vérifié ces deux conditions si et seulement si l'ensemble des sommets correspondant C est un code identifiant du graphe simple associé au réseau multiprocesseurs (voir Figure 1.15).

En effet, la deuxième condition garantit le fait que si aucun processeur de C ne détecte de défaillance, alors aucun processeur du réseau n'est défectueux, cela équivaut à dire que C est un code couvrant du graphe associé au réseau. La première condition équivaut, elle, à dire que C est un code séparateur du graphe. En effet, le sous-ensemble I de processeurs de C ayant renvoyé 0 après l'exécution de test est l'ensemble des processeurs de C voisins du processeur défectueux p : c'est l'ensemble identifiant de p . Dire que $I = I(p, C)$ détermine de façon unique p équivaut à dire que C est un code séparateur du graphe du réseau.

- Exemple 2: Detection d'incendie dans un bâtiment.

Une deuxième application est en fait plus générale et elle consiste à appliquer la

notion d'ensembles dominants localisateurs et de codes identifiant pour la localisation d'incendie dans un bâtiment.

Considérons un bâtiment modélisé par un graphe où les sommets représentent les pièces ou les zones du bâtiment, et les arêtes représentent le voisinage de deux pièces. Un capteur capable de détecter un danger à sa proximité est placé dans certaines pièces.

Le but est de minimiser le nombre de capteurs nécessaires afin de localiser un danger éventuel. La localisation est effectuée en comparant les ensembles identifiants de chaque sommet à l'ensemble des capteurs ayant détecté le danger.

Si les capteurs ont trois états possibles (positions) capablent de distinguer entre aucun danger, un danger dans une pièce voisine et un danger dans la même pièce. Dans ce cas un ensemble de capteurs formant un ensemble de dominant localisateur suffit pour localiser d'une manière unique la position du danger. Si les capteurs n'ont que deux états possibles capablent de distinguer entre un danger à proximité (dans la même pièce ou dans la pièce voisine) et pas de danger, alors un ensemble de capteurs formant un code identifiant est nécessaire pour localiser le danger. Le danger est loca par la vérification des capteurs qui sont en état alarme, comme cet ensemble est unique pour tout sommet, alors la localisation du danger est immédiate.

CHAPITRE 2

**QUELQUES RESULTATS EXISTANTS
CONCERNANT LES DEUX PARAMETRES $\gamma_L(G)$
et $M_1(G)$**

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous donnons quelques bornes et quelquefois les valeurs exactes du nombre de domination localisatrice $\gamma_L(G)$ et du nombre de code identifiant, $M_1(G)$ pour certaines classes de graphes particulières.

2.2 Bornes associées au nombre de domination localisatrice

Etant donné un graphe G , beaucoup de chercheurs se sont intéressés à la détermination de la valeur exacte du nombre de domination localisatrice de G , $\gamma_L(G)$. Comme le problème de détermination de ce paramètre est un problème NP-Complet, c-à-d difficile à résoudre. Les chercheurs se sont penchés sur les bornes qui encadrent le plus possible ce paramètre.

Théorème 2.1 (Slater [1]). *Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté connexe à n sommets avec $n \geq 2$, si $C \subseteq V$ est un dominant localisateur, alors*

$$|C| + 2^{|C|} \geq n + 1$$

et si C est de cardinalité minimale, alors

$$|C| = \gamma_L(G) \leq n - 1$$

est un dominant localisateur pour C_{5n+3} , pour P_{5n+3} , pour C_{5n+4} et P_{5n+4} . Premièrement, on considère les cycles. Soit C un dominant localisateur de C_p avec $p = 5n+1$ ou $p = 5n+2$. par symétrie on peut supposer que $v_{5n+1} \in C$. En appliquant le lemme 2.3 pour chaque $\{v_{5j+1}, v_{5j+2}, v_{5j+3}, v_{5j+4}, v_{5j+5}\}$ pour $0 \leq j \leq n-1$, on a $\gamma_L(C_{5n+1}) = \gamma_L(C_{5n+2}) = 2n+1$. Pour C_{5n+3} et C_{5n+4} , appliquant le lemme 2.4 à tout dominant localisateur C . Alors par symétrie on peut supposer que $v_{5n+3} \in C$ et ou bien $v_{5n+2} \in C$ ou $v_{5n+1} \in C$. Comme précédemment appliquant le lemme 2.3 à $\{v_{5j+1}, v_{5j+2}, v_{5j+3}, v_{5j+4}, v_{5j+5}\}$

$$\text{pour } 0 \leq j \leq n-1, \text{ on a } \gamma_L(C_{5n+3}) = \gamma_L(C_{5n+4}) = 2n+2.$$

Pour la chaîne P_p , avec $p = 5n+r, 0 \leq r \leq 4$. Soit C un dominant localisateur de P_p . On sait que $|C| \leq 2n+1$. Si $r = 1$ ou 2 et $|C| \leq 2n+2$ avec $r = 3$ ou 4 , on montre que $|C \cap \{v_1, v_2, v_3, v_4\}| \geq 2$. Comme C domine v_1 , alors $|C \cap \{v_1, v_2\}| \neq \emptyset$. Si $v_2 \in C$, alors en appliquant le lemme 2.4 et si $v_1 \in C$ on a aussi $|C \cap \{v_2, v_3, v_4\}| \neq \emptyset$ car C domine v_3 . Notons par symétrie que $|C \cap \{v_p, v_{p-1}, v_{p-2}, v_{p-3}\}| \geq 2$. Maintenant si on applique le lemme 2.3 à chaque $\{v_{5i}, v_{5i+1}, v_{5i+2}, v_{5i+3}, v_{5i+4}\}$ pour $1 \leq i \leq j$, on a $|C \cap \{v_1, v_2, \dots, v_{5j+4}\}| \geq 2j+2$. En particulier $|C \cap \{v_1, v_2, \dots, v_{5n-1}\}| \geq 2n$. Si $p = 5n+1$ (resp. $p = 5n+2$), alors un des sommets v_{5n} et v_{5n+1} (resp. un des sommets $v_{5n}, v_{5n+1}, v_{5n+2}$) est dans C car C domine v_{5n+1} . Donc $|C| \geq 2n+1$ et $\gamma_L(P_p) = 2n+1$. Si $p = 5n+3$ ou $p = 5n+4$, alors on a $|C \cap \{v_p, v_{p-1}, v_{p-2}, v_{p-3}\}| \geq 2$ et donc $|C| \geq 2n+2$ et $\gamma_L(P_p) = 2n+2$. \square

2.2.2 Nombre de domination localisatrice dans les arbres

Théorème 2.5 (Slater [1]). *Pour tout arbre T d'ordre n , on a*

$$\gamma_L(T) \geq \frac{n}{3}.$$

Preuve. Soit T un arbre d'ordre n avec au plus $n-1$ arêtes, et soit C un dominant localisateur de G . Supposons que $|C| \leq \frac{n}{3}$. Il est clair qu'au plus $\frac{n}{3}$ sommets de $V-C$ ont $|N(v) \cap C| = 1$ et donc au moins $\frac{2n}{3}$ sommets de $V-C$ ont $|N(v) \cap C| \geq 2$. Mais ceci implique que le nombre d'arêtes de T est au moins n , contradiction. \square

Les auteurs M.Blidia, M. Chellali, F. Maffray, J. Moncel et A. Semri ont amélioré la borne du théorème 2.5.

Théorème 2.6 (Blidia et al.[4]). *Pour tout arbre T d'ordre $n \geq 3$ avec l sommets pendants et s sommets supports, on a*

$$\gamma_L(T) \geq \frac{(n + l - s + 1)}{3}.$$

Cas particuliers

1°/Famille des arbres T_h^k

Théorème 2.7 (Bertrand et al. [8]). *Pour $k \geq 2$, on a*

$$\gamma_L(T_h^k) = \left\lceil \frac{k^2 n}{k^2 + k + 1} \right\rceil$$

Preuve. Soit T_h^k un arbre k -aire complet à h niveaux et soit C le dominant localisateur de cardinalité minimum de T_h^k . Alors on a :

- Si $h \equiv 1(\text{mod } 3)$ alors la racine est dans C .
- Si une ligne i avec $i \neq 1$ et $i \equiv h(\text{mod } 3)$, alors chaque sommet de la ligne $i - 1$ a exactement $k - 1$ de ses k sommets fils dans C .
- Si une ligne i avec $i \equiv h - 1(\text{mod } 3)$, alors C contient tous les sommets de cette ligne
- Si une ligne i avec $i \equiv h - 2(\text{mod } 3)$, alors cette ligne ne contient pas de sommets dans C .

La figure 2.1 : illustre ces constructions en trois petits arbres complets.

Nous pouvons calculer le nombre de sommets de C et déterminer $\gamma_L(T_h^k)$ pour tout h et k :

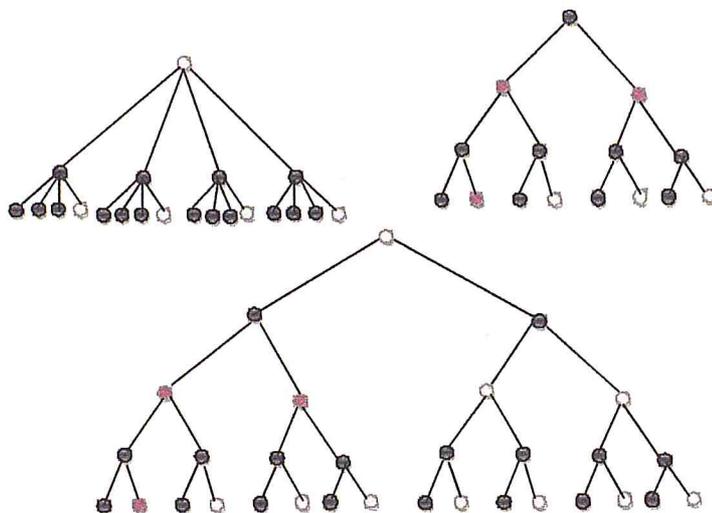


FIGURE 2.1. Dominant localisateur dans T_3^4 , T_4^2 , et T_5^2 .

- Si $h = 3s$, aucun sommet dans les lignes 1, 4, ..., $h - 2$ n'est un sommet de C , tous les sommets dans les lignes 2, 5, ..., $h - 1$ sont des sommets de C , et une partition $(k - 1)/k$ des sommets dans les lignes 3, 6, ..., h sont des sommets de C . Donc:

$$\begin{aligned}
 |C| &= k^1 + k^4 + \dots + k^{h-2} + \frac{k-1}{k}(k^2 + k^5 + \dots + k^{h-1}) \\
 &= k^2(1 + k^3 + \dots + k^{h-3}) = k^2 \frac{k^h - 1}{k^3 - 1} \\
 &= \frac{k^2}{k^2 + k + 1} \frac{k^h - 1}{k - 1} = \frac{k^2 n}{k^2 + k + 1} = \left\lceil \frac{k^2 n}{k^2 + k + 1} \right\rceil.
 \end{aligned}$$

- Si $h = 3s + 1$, la racine est dans C , et aucun sommet dans les lignes 2, 5, ..., $h - 2$ n'est un sommet de C , tous les sommets dans les lignes 3, 6, ..., $h - 1$ sont des sommets de C , et une partition $(k - 1)/k$ des sommets dans les lignes 4, 7, ..., h sont des sommets de C . Donc:

$$\begin{aligned}
 |C| &= 1 + k^2 + k^5 + \dots + k^{h-2} + \frac{k-1}{k}(k^3 + k^6 + \dots + k^{h-1}) \\
 &= 1 + k^3 + k^6 + \dots + k^{h-1} = \frac{k^{h+2} - 1}{k^3 - 1} \\
 &= \frac{k^2(k^h - 1) + (k^2 - 1)}{(k - 1)(k^2 + k + 1)} = \frac{k^2 n + k + 1}{k^2 + k + 1} = \left\lceil \frac{k^2 n}{k^2 + k + 1} \right\rceil.
 \end{aligned}$$

- Si $h = 3s + 2$, aucun sommet dans les lignes $3, 6, \dots, h - 2$ n'est un sommet de C , tous les sommets dans les lignes $1, 4, \dots, h - 1$ sont des sommets de C , et une partition $(k - 1)/k$ des sommets dans les lignes $2, 5, \dots, h$ sont des sommets de C . Donc:

$$\begin{aligned} |C| &= 1 + k^3 + k^6 + \dots + k^{h-2} + \frac{k-1}{k}(k + k^4 + \dots + k^{h-1}) \\ &= k(1 + k^3 + \dots + k^{h-2}) = k \frac{k^{h+1} - 1}{k^3 - 1} \\ &= \frac{k^2(k^h - 1) + (k - 1)}{(k - 1)(k^2 + k + 1)} = \frac{k^2 n + k}{k^2 + k + 1} = \left\lceil \frac{k^2 n}{k^2 + k + 1} \right\rceil. \end{aligned}$$

Dans tous les cas on a $|C| = \left\lceil \frac{k^2 n}{k^2 + k + 1} \right\rceil$

□

2° / *Famille des arbres* $T(k) \in \mathcal{T}$

Théorème 2.8. *Pour tout arbre* $T(k)$, *on a*

$$n = 2^{k-1}.$$

et

$$\gamma_L(T(k)) = 2^{k-2}. \text{ pour tout } k \geq 2.$$

Preuve. Soit $T(k) \in \mathcal{T}$,

On a

$$\begin{aligned} |V(T(k))| &= \sum_{i=1}^{k-1} |V(T(i))| + 1 = \sum_{i=1}^{k-2} |V(T(i))| + 1 + |V(T(k-1))| \\ &= |V(T(k-1))| + |V(T(k-1))| = 2|V(T(k-1))|. \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} |V(T_k)| &= 2^1 |V(T_{k-1})| = 2^2 |V(T_{k-2})| \\ &= 2^3 |V(T_{k-3})| = \dots = 2^{k-1} |V(T_1)| \end{aligned}$$

Avec $|V(T(1))| = 2^0 = 1$.

D'ou

$$n = |V(T(k))| = 2^{k-1}.$$

On peut remarquer facilement que l'arbre $T(k)$ est obtenu à partir de deux fois l'arbre $T(k-1)$ en ajoutant une arête reliant les racines de chacun des deux $T(k-1)$. Donc

$$\gamma_L(T(k)) = 2\gamma_L(T(k-1)).$$

Et pour tout $k \geq 2$ on a

$$\gamma_L(T(k)) = 2\gamma_L(T(k-1)) = 2^2\gamma_L(T(k-2)) = \dots = 2^{k-2}\gamma_L(T(2))$$

Avec $\gamma_L(T(2)) = 2^0 = 1$. D'ou

$$\gamma_L(T(k)) = 2^{k-2}. \text{ pour tout } k \geq 2$$

□

2.3 Bornes associées au nombre de code identifiant

Etant donné un graphe sans jumeaux G , beaucoup de chercheurs se sont intéressés à la détermination de la valeur exacte du nombre de code identifiant de G , $M_1(G)$. Comme le problème de détermination de ce paramètre est un problème NP-Complet, c-à-d difficile à résoudre. Les chercheurs se sont penchés sur les bornes qui encadrent le plus possible le paramètre en question. Une première borne inférieure est obtenue en remarquant que chaque sommet du graphe a un code identifiant différent qui correspond à un sous-ensemble non vide de sommets du code. Si le code C considéré contient k éléments, il y a donc au plus $2^k - 1$ sous-ensembles non vide de C , ce qui nous ramène à la borne suivante :

Théorème 2.9 (Karpovsky et al. [6]). *Soit G un graphe sans jumeaux d'ordre n , alors on a*

$$M_1(G) \geq \lceil \log_2(n+1) \rceil.$$

Preuve. En effet, soit C un code identifiant de cardinalité minimale, c-à-d $|C| = M_1(G)$, comme chaque sommet du graphe a un voisinage dans le code identifiant différent qui correspond à un sous-ensemble non vide de sommets du code et le nombre de sous ensembles possibles de C est $2^{|C|} - 1$, on déduit que $n \leq 2^{|C|} - 1$, d'où $M_1(G) = |C| \geq \log_2(n + 1)$ et par conséquent $M_1(G) \geq \lceil \log_2(n + 1) \rceil$ car $M_1(G)$ est un entier. \square

Théorème 2.10 (Charon et al. [9]). *Soit G un graphe sans jumeaux possédant au moins une arête. Alors on a*

$$M_1(G) \leq n - 1.$$

Théorème 2.11 (Karpovsky et al. [6]). *Soit $G = (V, E)$ un graphe simple, connexe, d'ordre n et de degré maximum Δ , alors on a*

$$M_1(G) \geq \frac{2n}{\Delta + 2}.$$

Preuve. Soit $C \subset V$ un code identifiant de G de cardinalité k . On partitionne l'ensemble des sommets V en quatre sous ensembles (comme c'est indiqué dans la figure 2.2).

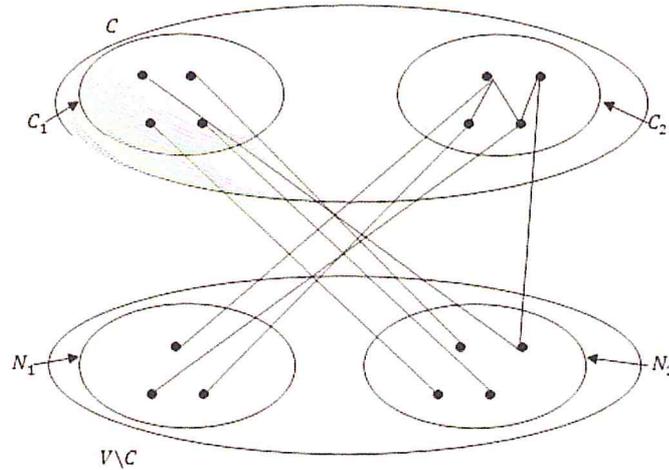
$$C_1 = \{x \in C : |I_C(x)| = 1\}, \quad C_2 = \{x \in C : |I_C(x)| \geq 2\},$$

$$N_1 = \{x \in V - C : |I_C(x)| = 1\}, \quad N_2 = \{x \in V - C : |I_C(x)| \geq 2\}.$$

On obtient $|C_1| + |C_2| = k$ (1) et $|C_1| + |N_1| \leq k$ (2). Soit m , le nombre d'arêtes entre C et $V - C = N_1 \cup N_2$. Chaque sommet de C_2 est lié par au moins un autre sommet de C_2 et il n'est pas possible de lier deux sommets de C_2 seulement entre eux, car ceci implique qu'ils ont le même code identifiant et ils ne seraient pas séparés, ainsi au moins l'un entre eux doivent être lié à un sommet de C_2 et il y'a ainsi au moins $\frac{2|C_2|}{3}$ arêtes. Donc on a

$$m \leq k \cdot \Delta - 2 \cdot \frac{2|C_2|}{3} = k \cdot \Delta - \frac{4|C_2|}{3}.$$

Il n'y a pas d'arêtes entre un sommet de C_1 et un autre sommet de C . Il y a au moins $2|N_2|$ arêtes entre C et N_2 puisque chaque sommet de N_2 a au moins 2 voisins dans C . Et il y'a exactement $|N_1|$ arêtes entre C et N_1 puisque chaque sommet de N_1 a un seul voisin dans C , donc on a: $m \geq |N_1| + 2|N_2|$. Ceci nous donne $k \cdot \Delta - \frac{4|C_2|}{3} \geq |N_1| + 2|N_2|$,

FIGURE 2.2. Partition de V .

et donc $k.\Delta \geq \frac{4|C_2|}{3} + |N_1| + 2|N_2|$.

Comme par (1) $|C_2| = k - |C_1|$, alors on obtient

$$k.\Delta \geq k - |C_1| + |N_1| + 2|N_2| + \frac{|C_2|}{3}.$$

Maintenant par (2) : $-|C_1| \geq |N_1| - k$. Ainsi :

$$k.\Delta \geq 2(|N_1| + |N_2|) + \frac{|C_2|}{3}$$

$$k.\Delta \geq 2(n - k) + \frac{|C_2|}{3}$$

$$k.(\Delta + 2) \geq 2n + \frac{|C_2|}{3} \geq 2n$$

$$k \geq \frac{2n}{\Delta + 2} \text{ et } M_1(G) \geq \frac{2n}{\Delta + 2}$$

□

2.3.1 Nombre de code identifiant des cycles

Le cycle à n sommets sera désigné par C_n et ses sommets par v_0, v_1, \dots, v_{n-1} . Nous allons distinguer deux cas, le cas où n est pair, et le cas où n est impair.

Théorème 2.12 (Bertrand et al. [7]). *Pour tout entier pair $n \geq 6$, on a*

$$M_1(C_n) = \frac{n}{2}$$

Preuve. Soit C_n un cycle pair. D'après le théorème 2.11 ; on a:

$$M_1(C_n) \geq \frac{n}{2} \dots \dots (1)$$

.Pour obtenir l'égalité on doit vérifier l'inégalité suivante : $M_1(C_n) \leq \frac{n}{2}$. Soit C un code identifiant.

Le cycle C_n a un code identifiant formé des sommets

$$V_C = \{v_i, v_{i+2} \text{ où } i = 0, \dots, n-2\}.$$

Alors on a $|C| = \frac{n}{2}$.

Donc

$$M_1(C_n) \leq |C| = \frac{n}{2} \dots \dots (2).$$

D'après (1) et (2), on a l'égalité $M_1(C_n) = \frac{n}{2}$ □

Il est clair que

$$M_1(C_4) = 3$$

Théorème 2.13 (Gravier et al. [11]). *Pour tout entier impair $n \geq 5$, on a*

$$\frac{n+1}{2} + \frac{\text{pgcd}(3, n) - 1}{2} \leq M_1(C_n) \leq \frac{n+1}{2} + 1.$$

Théorème 2.14 (Gimbel et al. [11]; Gravier et al. [12]). *Pour tout entier impair $n \geq 7$, on a*

$$M_1(C_n) = \frac{n+1}{2} + 1.$$

Preuve. Soit $n \geq 7$ un entier impair, d'après le théorème 2.13 il suffit de prouver qu'il ne peut pas exister de code identifiant de C_n de cardinalité $\frac{n+1}{2}$. Par l'absurde, supposons qu'il existe un code identifiant C de C_n de cardinalité $\frac{n+1}{2}$. Dans ce cas, il y a au moins deux sommets dans C qui sont consécutifs sur le cycle. Sans perte de généralité,

nous supposons que ces sommets sont v_1 et v_2 . Pour séparer v_1 de v_2 , soit v_0 soit v_3 appartiennent aussi à C . Sans perte de généralité, nous supposons que $v_3 \in C$. Alors on a $|I_C(v_2)| = 3$, et pour chaque $c \in C - \{v_2\}$ il y a au plus un sommet ayant $\{c\}$ comme ensemble identifiant. Ceci nous donne

$$3|C| \geq \sum_{i=0}^{n-1} |I_C(v_i)| \geq 1 \times 3 + (|C| - 1) \times 1 + (n - |C|) \times 2.$$

Puisque $|C| = (n + 1)/2$, alors il y a égalité et on a : Pour tout $c \in C - \{v_2\}$ il y a au plus un sommet ayant $\{c\}$ comme ensemble identifiant . (1) En particulier, $v_0 \notin C$ (considérer $c = v_1$), $v_4 \notin C$, et $v_5 \notin C$ (considérer $c = v_3$). Pour que v_5 soit dominé, nous avons besoin $v_6 \in C$. Si $n = 7$ alors il y a une contradiction car $I_C(v_5) = I_C(v_6) = \{v_6\}$. Sinon, $n \geq 9$ et v_7 doit appartenir à C pour séparer v_5 de v_6 . Ensuite, $v_8 \in C$ pour séparer v_6 de v_7 , ce qui reporte la contradiction sur v_7 , qui viole la condition (1). \square

Pour compléter l'étude des cycles impairs, il est utile de préciser que $M_1(C_5) = 3$. Et C_3 n'admet pas de code identifiant.

2.3.2 Nombre de code identifiant des chaînes

La chaîne finie à n sommets, $G = P_n$ a un ensemble de sommets $V = \{1, \dots, n\}$ et un ensemble d'arêtes $E = \{\{i, i + 1\} : 1 \leq i \leq n - 1\}$.

Dans le paragraphe suivant, nous établissons la valeur exacte de $M_1(P_n)$.

Théorème 2.15 (Gimbel et al. [12]; Bertrand et al. [7]). *Pour tout entier $n \geq 1$,*

$$M_1(P_n) = \begin{cases} \frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ impair, et } n \geq 1 \\ \frac{n}{2} + 1 & \text{si } n \text{ pair, et } n \geq 4 \end{cases}$$

Preuve. Le cas $n = 1$ est trivial. Considérons maintenant un code identifiant C de P_n , où $n \geq 3$, au plus $|C|$ sommets i peuvent avoir $|I_C(i)| = 1$ (sinon, au moins deux d'entre eux ne peuvent pas être séparés) et les autres sommets doivent être couverts par au moins deux sommets de C , donc on a l'inégalité suivante:

$$1 \cdot |C| + 2 \cdot (n - |C|) \leq \sum_{c \in C} |N[c]| \leq 3|C|,$$

ce qui conduit à $|C| \geq \frac{n}{2}$ (1)

1°/ **n entier impair**, $n \geq 3$: Par (1), on obtient $|C| \geq \frac{n+1}{2}$. D'autre part,

$$C = \{1, 3, \dots, n\}$$

contient $\frac{n+1}{2}$ sommets de C et est un code identifiant: tous les sommets de code identifiant sont dominés par eux-mêmes, tous sommets i de $V - C$ sont dominés par les sommets $i - 1 \in C$ et $i + 1 \in C$.

2°/ **n entier pair**, $n \geq 4$: (1) donne $|C| \geq \frac{n}{2}$. Essayons de prendre comme code identifiant des sommets non consécutifs : $C = \{1, 3, \dots, n - 1\}$, ceci est impossible car $I_C(n - 1) = I_C(n) = \{n - 1\}$. Par conséquent, si $|C| = \frac{n}{2}$, il doit y avoir, au moins une fois deux sommets consécutifs dans C , soient i et $i + 1$ les deux consécutifs. Nécessairement, $i - 1$ ou $i + 2$ est aussi un sommet de C (sinon, $I_C(i) = I_C(i + 1) = \{i, i + 1\}$), ce qui signifie qu'au moins une fois, nous avons au moins trois sommets consécutifs dans C . Considérons maintenant les quatres sommets consécutifs $j, j + 1, j + 2, j + 3$. Parmi eux, au moins deux doit être des sommets de C , sinon $j - 1$ et $j + 4$ sont des sommets de C , car $j + 1$ et $j + 2$ doivent être couverts et séparés par C .

Enfin, considérons le cas où trois sommets consécutifs sont dans C ,

$$i - 1, i, i + 1, 2 \leq i \leq n - 1.$$

Chaque groupe de quatre sommets à droite de $i + 1$,

$$\{i + 2, i + 3, i + 4, i + 5\}, \dots, \{i + 4k - 2, i + 4k - 1, i + 4k, i + 4k + 1\}, k \geq 0, n - 3 \leq i + 4k + 1 \leq n,$$

contient au moins deux sommets de C . La même chose est vraie pour les groupes à gauche de $i - 1$,

$$\{i - 2, i - 3, i - 4, i - 5\}, \dots, \{i - 4k' + 2, i - 4k' + 1, i - 4k', i - 4k' - 1\}, k' \geq 0, 1 \leq i - 4k' - 1 \leq 4.$$

Mise à part les sommets $i - 1, i, i + 1$ de C , et ces groupes de quatre sommets, qui tout en remontant aux sommets $3 + 4k + 4k'$, au moins $3 + 2k + 2k'$ sommets sont dans C ,

nous pouvons avoir des sommets supplémentaires aux deux extrémités de la chaîne P_n . A chaque extrémité, on peut avoir:

- aucun sommet;
- ou un sommet qui n'est pas nécessairement dans C .
- ou deux sommets, l'un d'eux est nécessairement dans C (pour couvrir l'extrémité de la chaîne).
- ou trois sommets, deux d'entre eux étant nécessairement dans C (pour couvrir et séparer l'extrémité de la chaîne de son voisin).

Ainsi, aux deux extrémités, on peut avoir $a = 1, 3$ ou 5 autres sommets souvenez-vous que n est même contenant, dans le meilleur des cas, $b = 0, 1$, ou 3 sommets dans C , respectivement.

Cela montre que la cardinalité d'un code identifiant est au moins

$$3 + 2k + 2k' + b = \frac{(5 + 4k + 4k' + a) + (2b - a + 1)}{2} = \frac{(n + 2) + (2b - a + 1)}{2} \geq \frac{n + 2}{2}$$

D'autre part, $C = \{1, 3, \dots, n - 7, n - 5, n - 3, n - 2, n - 1\}$. Le code identifiant contient $\frac{n}{2} + 1$ sommets et : les premiers $\frac{n}{2} - 2$ sommets de code sont dominés par eux-mêmes et , $I_C(n - 3) = \{n - 3, n - 2\}$, $I_C(n - 2) = \{n - 3, n - 2, n - 1\}$, $I_C(n - 1) = \{n - 2, n - 1\}$, et pour les sommets i de $V - C$ sont dominés par $i - 1 \in C$ et $i + 1 \in C$, sauf le sommet n qui est couvert par $n - 1 \in C$ □

2.3.3 Nombre de code identifiant dans les arbres

Théorème 2.16 (Bertrand et al. [8]). *Si T est un arbre d'ordre $n \geq 3$, alors*

$$M_1(T) \geq \frac{3(n + 1)}{7}.$$

E est atteinte pour une infinité de valeurs de n .

Preuve. Supposons que $T = (V, E)$ est un arbre à n sommets et que C est un code identifiant dans T . Soit E' l'ensemble des arêtes ayant leurs deux extrémités dans C et

$e' = |E'|$. Pour tout $v \in V$, soit

$$f(v) = |\{c \in C : d(v, c) = 1\}|$$

et $C^* = \{c \in C : f(c) = 0\}$. En regardant les arêtes qui relie un sommet de $V - C$ et un sommet de C , ou deux sommets de C , nous voyons que :

$$\sum_{v \in V} f(v) \leq |E| + e' \leq n - 1 + e' \dots (1)$$

De toute évidence,

$$\sum_{c \in C - C^*} f(c) = 2e' \dots (2)$$

Enfin, il y a au plus $|C - C^*|$ sommets v de $V - C$, avec $f(v) = 1$. et donc

$$\sum_{v \in V} f(v) \geq 2|V - C| - |C - C^*| + \sum_{c \in C - C^*} f(c) \dots (3)$$

En combinant (1), (2) et (3), nous obtenons :

$$n - 1 \geq 2n - 3|C| + |C^*| + \frac{1}{2} \sum_{c \in C - C^*} f(c)$$

Nous estimons maintenant la somme sur le côté droit. Si $F = (C - C^*, E')$ alors une composante connexe de F de i sommets contribue $2(i - 1)$ à la somme, pour la moyenne $f(c)$ dans cette composante est $2(i - 1)/i$. Comme C est un code identifiant, la taille de chaque composant connexe de F est au moins trois, et la moyenne globale de $f(c)$ pour $c \in C - C^*$ est au moins $4/3 = 2(i - 1)/i$ pour $i = 3$, d'où $\sum_{c \in C - C^*} f(c) \geq 4/3 |C - C^*|$.

Donc on obtient

$$n - 1 \geq 2n - 3|C| + |C^*| + \frac{2}{3}(|C| - |C^*|) \geq 2n - \frac{7}{3}|C|$$

Et pour n'importe quelle valeur de n , on peut construire un arbre avec n sommets qui admet un code identifiant de taille $\frac{3(n+1)}{7}$. \square

Exemple où la borne est atteinte: Soit T_k ($k \geq 2$) un arbre est obtenue à partir de k couronnes disjointes de P_3 . En reliant chaque centre c_i de P_3 par les $(k - 1)$ nouveaux sommets x_i par les arêtes $x_i c_i$ et $x_i c_{i+1}$, $i = 1, \dots, k - 1$. Alors $n = 7k - 1$,

et $M_1(T_k) = 3k = \frac{3(n+1)}{7}$. Un exemple ou $k = 3$ est illustré dans la figure 2.3.

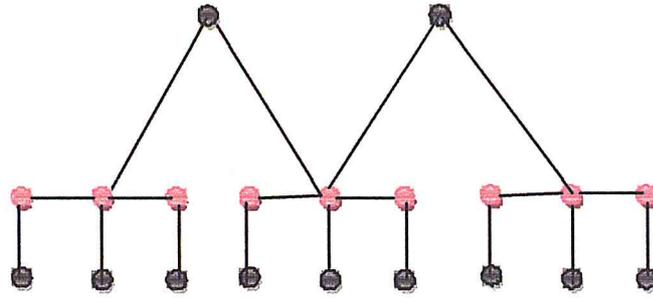


FIGURE 2.3. Code identifiant de l'arbre T_3 . les sommets de code sont en rouge.

Le Théorème 2.17 améliore la borne inférieure du Théorème 2.16.

Théorème 2.17 (Blidia et al.[4]). *Si T est un arbre de l'ordre $n \geq 4$ alors*

$$M_1(T) \geq \frac{3(n + l - s + 1)}{7}.$$

Aussi cette borne est atteinte pour une infinité de valeurs de n .

L'exemple précédent est valable aussi pour cette dernière borne car $l = s$.

Comme cas particuliers des arbres, la famille des arbres T_h^k dont on a le résultat suivant:

Théorème 2.18 (Bertrand et al. [8]). *Soit T_h^k un arbre k -aire complet à h niveaux, alors*

- $M_1(T_h^2) = \lceil \frac{20n}{31} \rceil$

- Pour $k \geq 3$, on a:

$$M_1(T_h^k) = \left\lceil \frac{k^2 n}{k^2 + k + 1} \right\rceil$$

La preuve de ce théorème se fait presque similairement que celle du Théorème 2.7.

Aussi pour la famille des arbres $T(k) \in \mathcal{T}$, on a le résultat suivant:

Théorème 2.19. *Pour tout arbre $T(k)$ à $n = 2^{k-1}$ sommets. Alors*

- $M_1(T(3)) = 3.$

- $M_1(T(k)) = 2^{k-2}$. pour tout $k \geq 4.$

Preuve. Soit $T(k) \in \mathcal{T}$. On peut remarquer facilement que l'arbre $T(k)$ est obtenu à partir de deux fois l'arbre $T(k-1)$ en ajoutant une arête reliant les racines de chacun des deux $T(k-1)$. Donc

$$M_1(T(k)) = 2M_1(T(k-1))$$

Et pour tout $k \geq 4$ on a

$$\begin{aligned} M_1(T(k)) &= 2M_1(T(k-1)) \\ &= 2^2 M_1(T(k-2)) = \dots = 2^{k-4} M_1(T(4)) \end{aligned}$$

Avec $M_1(T(4)) = 4$. D'où

$$M_1(T(k)) = 2^{k-2}. \text{ pour tout } k \geq 4.$$

□

Question : Existe-t-il un ensemble dominant localisateur C de G tel que

$$|C| \leq \left\lceil n - \frac{n}{\Delta} \right\rceil?$$

Ceci revient à dire : est il vrai que $\gamma_L(G) \leq \left\lceil n - \frac{n}{\Delta} \right\rceil$? Au départ cette conjecture a été proposé par F. Foucaud dans [5] dans le cas du nombre de code identifiant, $M_1(G) \leq \left\lceil n - \frac{n}{\Delta} \right\rceil$. Comme $\gamma_L(G) \leq M_1(G)$, on s'est demandé si elle est vraie pour le nombre de domination localisatrice. Par conséquent on s'est intéressé aux graphes dont la structure est simple pour vérifier sa validité.

3.2.1 Cas des cycles et des chaines

Théorème 3.1. *Soit C_n un cycle et P_n une chaîne d'ordre $n \geq 3$, alors*

$$\gamma_L(C_n) = \gamma_L(P_n) \leq \left\lceil n - \frac{n}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

Preuve. Soit C_n un cycle à n sommets (respectivement: P_n chaîne), on sait d'après le théorème [1] du Chapitre 2 que :

$$\forall n \geq 3, \gamma_L(C_n) = \gamma_L(P_n) = \left\lceil \frac{2n}{5} \right\rceil$$

Sachant que $\Delta = 2$, on veut montrer que :

$$\gamma_L(C_n) = \gamma_L(P_n) \leq \left\lceil n - \frac{n}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

Considérons les cas suivantes :

- Si $n \equiv 0 [5]$. alors: $\frac{2n}{5} \leq n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}$, vu que $4n \leq 5n$ est vérifié $\forall n$.
- Si $n \equiv 1 [5]$ alors: $\frac{2n+3}{5} \leq \frac{n}{2}$, vu que $4n + 6 \leq 5n$ est vérifié $\forall n \geq 6$.
- Si $n \equiv 2 [5]$ alors: $\frac{2n+1}{5} \leq \frac{n}{2}$, vu que $4n + 2 \leq 5n$ est vérifié $\forall n \geq 2$.
- Si $n \equiv 3 [5]$ alors: $\frac{2n+4}{5} \leq \frac{n}{2}$, vu que $4n + 8 \leq 5n$ est vérifié $\forall n \geq 8$.
- Si $n \equiv 4 [5]$ alors: $\frac{2n+2}{5} \leq \frac{n}{2}$, vu que $4n + 4 \leq 5n$ est vérifié $\forall n \geq 4$.

$$\text{Donc : } \gamma_L(C_n) = \gamma_L(P_n) \leq \left\lceil n - \frac{n}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

□

3.2.2 Cas des arbres

Proposition 3.2. *Soit $K_{1,s}$ une étoile à $s + 1$ sommets et de degré maximum $\Delta = s$, alors on a:*

$$\gamma_L(K_{1,s}) = s \leq \left\lceil n - \frac{n}{\Delta} \right\rceil.$$

Preuve. Il est clair que

$$\gamma_L(K_{1,s}) = s \leq \left\lceil (s + 1) - \frac{s + 1}{s} \right\rceil = \left\lceil s - \frac{1}{s} \right\rceil$$

et

$$\left\lceil s - \frac{1}{s} \right\rceil = s - \frac{1}{s} + \frac{1}{s} = s,$$

alors

$$\gamma_L(K_{1,s}) = s \leq s \text{ est vérifiée } \forall s.$$

□

Proposition 3.3. *Soit $S_{p,q}$ une double étoile à $(p + q + 2)$ sommets et de degré maximum $\Delta = \max(p, q) + 1$, avec $p \geq 1, q \geq 1$, alors*

$$\gamma_L(S_{p,q}) \leq \left\lceil n - \frac{n}{\Delta} \right\rceil.$$

Preuve. Supposons sans perte de généralité que: $\max(p, q) = p$, donc $\Delta = p + 1$. alors on a :

$$\gamma_L(S_{p,q}) = p + q = n - 2.$$

Montrons que:

$$\gamma_L(S_{p,q}) \leq \left\lceil n - \frac{n}{\Delta} \right\rceil.$$

Il est clair que

$$n = p + q + 2 \leq 2p + 2$$

$$n \leq 2(p + 1)$$

$$\frac{n}{p + 1} \leq 2$$

donc

$$n - 2 \leq n - \frac{n}{p+1}$$

$$n - 2 \leq \left\lceil n - \frac{n}{p+1} \right\rceil.$$

□

Proposition 3.4. Soit T_h^k un arbre k -aire complet à h niveaux et

$$n = k^0 + k^1 + k^2 + \dots + k^{h-1} = \frac{k^h - 1}{k - 1}$$

sommets, alors

$$\gamma_L(T_h^k) = \left\lceil \frac{k^2 n}{k^2 + k + 1} \right\rceil \leq \left\lceil n - \frac{n}{\Delta} \right\rceil.$$

Preuve. On sait d'après le Théorème 2.7 du Chapitre 2 que : Pour tout $k \geq 2$,

$$\gamma_L(T_h^k) = \left\lceil \frac{k^2 n}{k^2 + k + 1} \right\rceil.$$

Sachant que $\Delta = k + 1$, on veut montrer que :

$$\gamma_L(T_h^k) \leq \left\lceil n - \frac{n}{k+1} \right\rceil.$$

Considérons les trois cas suivants:

- Si $h = 3s$: $\gamma_L(T_h^k) = \left\lceil \frac{k^2 n}{k^2 + k + 1} \right\rceil = \frac{k^2 n}{k^2 + k + 1}$ alors

$$\frac{k^2}{k^2 + k + 1} \frac{k^h - 1}{k - 1} \leq \frac{k^h - 1}{k - 1} \frac{k}{k + 1}$$

vu que

$$\frac{k^2}{k^2 + k + 1} \leq \frac{k}{k + 1}$$

$$k^3 + k^2 \leq k^3 + k^2 + k$$

$$k \geq 0 \text{ est vrai } \forall k$$

- Si $h = 3s + 1$: $\gamma_L(T_h^k) = \left\lceil \frac{k^2 n}{k^2 + k + 1} \right\rceil = \frac{k^2 n + k + 1}{k^2 + k + 1}$ alors

$$\frac{k^2 n + k + 1}{k^2 + k + 1} \leq \frac{k}{k + 1} n$$

vu que

$$k^3 n + k^2 + k + k^2 n + k + 1 \leq k^3 n + k^2 n + kn$$

$$k^2 + 2k + 1 \leq \frac{k^{h+1} - k}{k - 1}$$

$$k^3 + k^2 \leq k^{h+1} + 1 \text{ est vrai } \forall h \geq 3.$$

- Si $h = 3s + 2$: $\gamma_L(T_h^k) = \left\lceil \frac{k^2 n}{k^2 + k + 1} \right\rceil = \frac{k^2 n + k}{k^2 + k + 1}$ alors

$$\frac{k^2 n + k}{k^2 + k + 1} \leq \frac{k}{k + 1} n$$

vu que

$$k^3 n + k^2 + k^2 n + k \leq k^3 n + k^2 n + kn$$

$$k^2 + k \leq \frac{k^{h+1} - k}{k - 1}$$

$$k^3 \leq k^{h+1} \text{ est vrai } \forall h \geq 2.$$

Donc $\gamma_L(T_h^k) \leq \left\lceil n - \frac{n}{\Delta} \right\rceil \forall k \geq 2$ et $\forall h \geq 2$. □

Proposition 3.5. Soit T un arbre d'ordre n' , $T \circ K_1$ la couronne de T à $n = 2n'$ sommets, alors on a

$$\gamma_L(T \circ K_1) = n' \leq \left\lceil n - \frac{n}{\Delta} \right\rceil.$$

Preuve. On veut montrer que :

$$\gamma_L(T \circ K_1) = n' \leq \left\lceil 2n' - \frac{2n'}{\Delta} \right\rceil$$

au pire des cas (si T est une étoile alors le degré maximum de la couronne de T est $\Delta = n'$) donc: $\Delta \leq n'$ et l'inégalité est toujours vérifiée. \square

Proposition 3.6. Soit $T(k) \in \mathcal{T}$ un arbre à $n = 2^{k-1}$ sommets, et de degré maximum $\Delta = k - 1$, alors

$$\gamma_L(T(k)) < \left\lceil n - \frac{n}{\Delta} \right\rceil \text{ pour tout } k \geq 3.$$

Preuve. On sait d'après le Théorème 2.8 que $\gamma_L(T(k)) = 2^{k-2}$ pour tout $k \geq 2$.

Pour $k = 2$, on a $T(k) = P_2$, dans ce cas $\gamma_L(T(k)) = 1$ n'est pas inférieur à $2 - \frac{2}{1} = 0$.

Supposons que $k \geq 3$. Comme $\gamma_L(T(k)) = 2^{k-2}$, $n = 2^{k-1}$ et $\Delta = k - 1$,

$$\text{on a } n - \frac{n}{\Delta} = \frac{(k-2)2^{k-1}}{k-1}.$$

On peut voir facilement que si $k \geq 3$, $2^{k-2} \leq \frac{(k-2)2^{k-1}}{k-1}$.

D'où on a

$$\gamma_L(T(k)) \leq \left\lceil n - \frac{n}{\Delta} \right\rceil \text{ est vrai } \forall k \geq 3.$$

\square

3.3 Validité de la borne pour le nombre de code identifiant

Dans ce paragraphe, nous essayons de valider la conjecture suivante dans le cas de certains graphes particuliers.

Conjecture 3.7. Soit G un graphe connexe, non triviale et sans jumeaux à n sommets de degré maximum Δ , alors il existe une constante c tel que :

$$M_1(G) \leq n - \frac{n}{\Delta} + c \text{ avec } c \in \mathbb{R}^{+*}.$$

Au départ cette conjecture a été proposé F. Foucaud dans [5] comme suit

$$M_1(G) \leq \left\lceil n - \frac{n}{\Delta} \right\rceil.$$

La non validité de cette conjecture a conduit l'auteur à la reformuler

3.3.1 Cas des cycles

Proposition 3.8. *Soit C_n un cycle d'ordre n , alors on a*

$$M_1(C_n) \leq n - \frac{n}{2} + c.$$

Preuve. On sait que d'après le Théorème 2.12 et le Théorème 2.13 que:

$$M_1(C_n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair et } n > 4 \\ \frac{n+1}{2} + 1 & \text{si } n \text{ impair et } n \geq 7 \end{cases}.$$

On veut montrer que: $M_1(C_n) \leq n - \frac{n}{2} + c$.

- n pair et $n > 4$:

$$\frac{n}{2} \leq n - \frac{n}{2} + c \text{ est vérifiée } \forall c$$

- n impair et $n \geq 7$:

$$\frac{n+1}{2} + 1 \leq n - \frac{n}{2} + c$$

$$\frac{n}{2} + \frac{3}{2} \leq \frac{n}{2} + c \text{ est vérifiée } \forall c \geq \frac{3}{2}.$$

D'où la borne conjecturée est atteinte pour les cycles □

3.3.2 Cas des chaînes

Proposition 3.9. *Soit P_n une chaîne d'ordre n , alors on a*

$$M_1(P_n) \leq n - \frac{n}{2} + c.$$

Preuve. Soit P_n une chaîne à n sommets alors d'après le théorème 2.15 on a:

$$M_1(P_n) = \begin{cases} \frac{n}{2} + 1 & \text{si } n \text{ pair et } n \geq 4 \\ \frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ impair et } n \geq 3 \end{cases}.$$

On veut montrer que :

$$M_1(P_n) \leq n - \frac{n}{2} + c.$$

Si n pair et $n \geq 4$:

$$\frac{n}{2} + 1 \leq n - \frac{n}{2} + c \text{ est vérifié } \forall c \geq 1.$$

Si n impair et $n \geq 3$:

$$\frac{n+1}{2} \leq n - \frac{n}{2} + c, \text{ alors } \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \leq \frac{n}{2} + c \text{ est vérifiée } \forall c \geq \frac{1}{2}.$$

□

3.3.3 Cas de quelques arbres

Etoile

Proposition 3.10. *Soit $K_{1,s}$ une étoile à $n = s+1 \geq 3$ sommets et de degré maximum $\Delta = s$, alors on a :*

$$M_1(K_{1,s}) = s \leq n - \frac{n}{s} + c.$$

Preuve. On veut prouver que:

$$M_1(K_{1,s}) = s \leq s+1 - \frac{s+1}{s} + c.$$

alors

$$M_1(K_{1,s}) = s \leq s - \frac{1}{s} + c \text{ est vérifiée } \forall c \geq \frac{1}{s}.$$

□

Double étoile

Proposition 3.11. *Soit $S_{p,q}$ une double étoile à $n = (p+q+2)$ sommets et de degré maximum $\Delta = \max(p,q) + 1$, avec $p \geq 1, q \geq 1$, alors*

$$M_1(S_{p,q}) \leq n - \frac{n}{\Delta} + c.$$

Preuve. Supposons sans perte de généralité que :

$$\max(p,q) = p, \text{ donc } \Delta = p+1.$$

alors on a :

$$M_1(S_{p,q}) = p+q = n - 2..$$

Montrons que:

$$M_1(S_{p,q}) \leq n - \frac{n}{\Delta} + c.$$

Il est clair que

$$n - 2 \leq n - \frac{n}{p+1} + c = \frac{np}{p+1} + c$$

est vraie puisque

$$np + n - 2p - 2 \leq np + (p+1)c$$

$$n - 2 = p + q \leq 2p + (p+1)c$$

est toujours vraie $\forall p, q$ et $\forall c$. □

Famille des arbres T_h^k

Proposition 3.12. Soit T_h^k un arbre k -aire complet à h niveaux et n sommets,

$$M_1(T_h^k) = \left\lceil \frac{k^2 n}{k^2 + k + 1} \right\rceil \leq n - \frac{n}{\Delta} + c.$$

Preuve. On sait d'après le théorème 2.18 du Chapitre 2 que:

$$\begin{cases} M_1(T_h^2) = \left\lceil \frac{20n}{31} \right\rceil \\ M_1(T_h^k) = \left\lceil \frac{k^2 n}{k^2 + k + 1} \right\rceil \text{ pour } k \geq 3 \end{cases}$$

On veut montrer que :

$$M_1(T_h^k) \leq n - \frac{n}{\Delta} + c; \quad \forall h \geq 1; \forall k \geq 2$$

Pour $k = 2$: $\Delta = 3$, on a

$$\begin{aligned} M_1(T_h^2) &= \left\lceil \frac{20n}{31} \right\rceil \leq n - \frac{n}{3} + c \\ \left\lceil \frac{20n}{31} \right\rceil &\leq \frac{2n}{3} + c \text{ est vrai } \forall c. \end{aligned}$$

Pour $k \geq 3$:

$$M_1(T_h^k) = \left\lceil \frac{k^2 n}{k^2 + k + 1} \right\rceil \leq n - \frac{n}{\Delta} + c$$

La preuve se fait similairement que celle de la preuve du proposition 3.4.

Donc $M_1(T_h^k) \leq \left\lceil n - \frac{n}{\Delta} \right\rceil \forall k \geq 2, \forall h \geq 2$ et $\forall c$. □

Couronne d'un arbre

Proposition 3.13. Soit T un arbre d'ordre n' , on note par $T \circ K_1$ la couronne de l'arbre T à $n = 2n'$ sommets.

$$M_1(T \circ K_1) = n' \leq n - \frac{n}{\Delta} + c$$

Preuve. On veut montrer que :

$$M_1(T \circ K_1) = n' \leq 2n' - \frac{2n'}{\Delta} + c$$

au pire des cas (si T est une étoile alors le degré maximum de la couronne de T est $\Delta = n'$) donc: $\Delta \leq n'$ et l'inégalité est vérifiée $\forall c$. \square

Famille des arbres $T(k) \in \mathcal{T}$

Proposition 3.14. Soit $T(k)$ un arbre à $n = 2^{k-1}$ sommets, et de degré maximum

$\Delta = k - 1$ alors: pour tout $k \geq 4$

$$M_1(T(k)) = 2^{k-2} \leq n - \frac{n}{\Delta} + c$$

Preuve. On veut montrer que :

$$M_1(T_k) = 2^{k-2} \leq 2^{k-1} - \frac{2^{k-1}}{k-1} + c.$$

alors

$$(k-1)2^{k-2} \leq (k-2)2^{k-1} + c'$$

D'où la borne conjecturée est atteinte pour les arbres $T(k)$, $\forall c$. \square

Conclusion

Comme on a vu dans ce mémoire, les codes identifiants dans les graphes sont liés à la notion classique d'un dominant et à la variante dominant localisateur introduite dans [13]. En 1987 Slater [1] introduit les ensembles dominants localisateurs. La principale motivation de l'introduction de ce concept est l'étude de la protection contre les incendies. La notion de code identifiant a été introduite en 1998 par Karpovsky et al dans [6] et a été largement étudiée par la communauté des mathématiciens en théorie des graphes; les codes identifiants possèdent une propriété permettant l'identification unique de tous les sommets du graphe.

Ensuite on a étudié quelques bornes et résultats concernant les deux paramètres $\gamma_L(G)$ et $M_1(G)$. A la fin on a vérifié la validité de la conjecture de F. Foucaud [5] dans le cas du nombre de code identifiant et le cas du nombre de domination localisatrice pour certaines classes particulières de graphes. Comme perspectives, il est intéressant de montrer les conjectures citées pour d'autres classes de graphes par exemples, les arbres en général, les graphes bipartis etc...

RÉFÉRENCES

- [1] P.J. Slater, Domination and Location in Acyclic Graphs, *Networks*, 17 (1987) 55-64.
- [2] P.J. Slater, Dominating and Reference Sets in Graphs, *J. Mathematical and Physical Sciences*, 22 (1988) 445-455.
- [3] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, P.J. Slater, Fundamentals of Domination in Graphs. Marcel Dekker, New York, 1998.
- [4] M. Blidia, M. Chellali, F. Maffray, J. Moncel, A. Semri, Locating domination and identifying codes in trees. *Australasian Journal of Combinatorics*, 39 (2007) 219-232.
- [5] F. Foucaud, les codes identifiants dans certaines classes de graphes, Mémoire de Master de recherche, Université de Bordeaux 1, S. T, Juin 2009.
- [6] M. G. Karpovsky, K. Chakrabarty, and L. B. Levitin. On a new class of codes for identifying vertices in graphs. *IEEE Transactions on Information Theory*, 44:599 611, 1998.
- [7] N. Bertrand, I. Charon, O. Hudry, and A. Lobstein. Identifying and locating-dominating codes on chains and cycles. *European Journal of Combinatorics*, 25(7):969 987, 2004.
- [8] N. Bertrand, I. Charon, O. Hudry, and A. Lobstein. 1-identifying codes on trees. *Australasian Journal of Combinatorics*, 31:21 35, 2005.
- [9] I. Charon, O. Hudry, and A. Lobstein. Extremal cardinalities for identifying and locating-dominating codes in graphs. *Discrete Mathematics*, 307(3-5):356 366, 2007.
- [10] S. Gravier and J. Moncel. On graphs having a $V - \{x\}$ set as an identifying code. *Discrete Mathematics*, 307(3-5):432 434, 2007.

- [11] S. Gravier, J. Moncel, and A. Semri. Identifying codes of cycles. *European Journal of Combinatorics*, 27(5):767–776, 2006.
- [12] J. Gimbel, B. D. Van Gorden, M. Nicolescu, C. Umstead, and N. Vaiana. Location with dominating sets. *Congressus Numerantium*, 151:129–144, 2001.
- [13] P. J. Slater and D. F. Rall. On location domination numbers for certain classes of graphs. *Congressus Numerantium*, 45: 97–106, 1984.