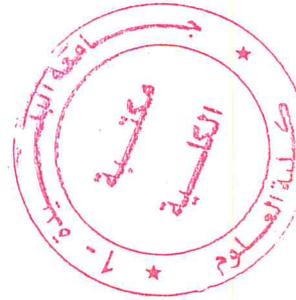


MA-510-66-1

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

Université de Blida 1
Faculté des sciences
Département de Mathématiques



Mémoire de Master en Statistiques

Thème:

Estimation du quantile extrême et ses applications en Finance et Assurance

Présenté par: MOUSLI Yamina

Soutenue le 10 Juillet 2017: devant le jury composé de :

TAMI Omar	Université de Blida 1	M.A.A.	Président
FRIHI Redouane	Université de Blida 1	M.A.A.	Examineur
LAIDI Mohamed	ENST, Alger	M.A.A.	Examineur
RASSOUL Abdelaziz	ENSH, Blida	M.C.A.	Rapporteur

Année universitaire: 2016/2017

MA-510-66-1

Remerciements

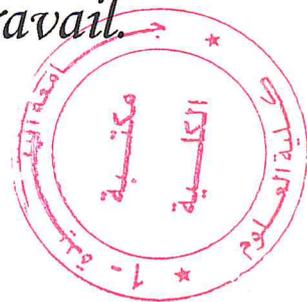
Nous tenons à remercier ALLAH le tout puissant de nous avoir donné le courage pour réaliser et terminer ce travail, nous remercions nos familles pour leur soutien moral et encouragements.

Un grand remerciement à notre promoteur Monsieur A. Rassoul

sans oublier les enseignants, qui eux aussi nous ont encouragé pour la réalisation de notre travail et surtout les enseignants du département de mathématiques.

Nous remercions beaucoup toutes nos amies de leur soutien moral.

Nous remercions toute personne de proche ou de loin qui nous a aidé pour la réalisation de ce modeste travail.



Résumé :

L'objectif principal de ce mémoire est l'étude et la modélisation d'événements rares et l'estimation de quantiles extrêmes, à travers différents types de modèles. La théorie des valeurs extrêmes, permettent de proposer des estimateurs semi paramétrique, pour les quantiles et pour les queues des distributions. L'application de ces estimateurs seront appliqués pour estimer la valeur de mesure de risque appelé VaR (Value at Risk) qui peut se définir comme le quantile déterminant la plus grande perte que peut subir un portefeuille et Expected Shortfall (ES) comme la moyenne des mauvais cas. On va quantifier deux mesures de risque sur des lois simulées et on va appliquer sur l'indices boursier SP500.

Abstract :

The main objective of this thesis is the study and modeling of rare events and the estimation of extreme quantiles, through different types of models. The theory of extreme values allows us to propose a semi parametric estimators for the quantiles and for the tails of the distributions. The application of these estimators will be applied To estimate the value of risk that is called the VaR (Value at Risk), which can be defined as the quantile of the greatest loss that a portfolio can sustain and Expected Shortfall (ES) as the average worst case. We will quantify the two risk measures on simulated laws and apply them to the S P500 stock market indices.

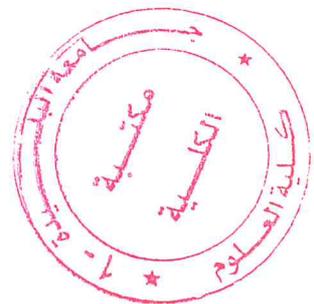


TABLE DES MATIÈRES

1	Théorie des valeurs extrêmes	13
1.1	Statistique d'ordre (SO)	14
1.2	Distribution conditionnelle des excès	18
1.3	Caractérisation des Domaines d'attraction	20
1.3.1	Fonctions à variation régulière	20
1.3.2	Domaine d'attraction de Fréchet	21
1.3.3	Domaine d'attraction de Weibull	22
1.3.4	Domaine d'attraction de Gumbel	22
1.4	Caractérisation générale	23
1.5	Estimation des paramètres	24
1.5.1	Estimation de l'indice de queue sous le modèle de type Paréto	24
1.5.1.1	Estimateur de Hill	24
1.5.1.2	Estimateur des moments	26
1.5.2	Estimateurs du couple (γ, σ)	27
1.5.2.1	Estimateurs par la méthode des moments	27
1.5.2.2	Estimateurs par la méthode des moments pondérés	27
1.5.2.3	Estimation par la méthode du maximum de vraisemblance	28
2	Estimation de quantiles extrêmes	29
2.1	Quantile d'ordre p	29
2.2	Fonction des quantiles	29
2.3	Intervalles de confiance des quantiles empirique	30
2.4	Approche basée sur un estimateur d'indices positifs	30
2.5	Approche basée sur un estimateur d'indices quelconques	31

2.6	Approche basée sur la méthode des excès	32
2.7	Approche par la loi des valeurs extrêmes	32
2.8	Estimation des paramètres par la méthode du maximum de vraisemblance	33
2.9	Estimation des paramètres par la méthode des moments pondérés	34
2.10	Approche par la loi des excès	35
2.10.1	Estimation des paramètres par la méthode du maximum de vraisemblance	36
2.10.2	Estimation des paramètres par la méthode des moments	36
2.10.3	Estimation des paramètres par la méthode des moments pondérés .	36
2.10.4	Estimation des paramètres par l'estimateur DEdH(Dekkers, Einmahl et de Haan)	37
2.11	Approche semi-paramétrique	38
2.11.1	Lois à queues lourdes	38
2.11.1.0.1	Estimateur de Hill	39
2.11.1.0.2	Estimateur de Zipf	40
2.11.2	Lois à queue de type Weibull	40
2.11.2.0.1	Estimation de l'indice de queue de type Weibull .	41
2.12	Estimation de quantiles conditionnels extrêmes	41
3	Application des quantiles extrêmes aux mesures du risques	43
3.1	Mesures de risque actuariel	43
3.2	Mesures de risque de Wang	43
3.3	Estimation de la VaR (Value at Risk)	44
3.4	Expected shortfall	45
3.5	Méthodes de calcul de la Value at Risk	46
3.5.1	Les Méthodes Paramétriques	46
3.5.1.1	La VaR Gaussienne	46
3.5.1.1.1	La distribution gaussienne	46
3.5.2	Les Méthodes Non Paramétriques	46
3.5.2.1	Les méthodes de Monte Carlo	47
3.5.2.2	VaR historique	49
3.5.2.3	Méthode des noyaux	49
3.5.2.3.1	Estimateur à noyau	50
3.5.3	Les Méthodes Semi-Paramétriques	50
3.5.3.1	Estimation de la VaR par la TVE	50
3.6	Estimation de la VaR par le modèle GARCH	51

3.6.1	Modèle $GARCH(p, q)$	52
3.6.2	Propriétés du modèle $GARCH(p, q)$	53
3.6.2.0.1	Propriétés 1 : Unicité et stationnarité	53
3.6.2.0.2	Propriétés 2 : Le moment d'ordre un	53
3.6.2.0.3	Propriété 3 : la corrélation	53
3.6.2.0.4	Propriété 4 : La variance non conditionnelle	53
3.6.2.0.5	Propriété 5 : Le moment centré d'ordre 4	54
3.6.2.1	Le modèle $GARCH(1.1)$	56
3.6.2.1.1	Propriétés du modèle $GARCH(1.1)$	56
3.6.3	Estimation de la VaR pour un modèle GARCH	57
4	Resultats de simulations et applications	59
4.0.1	La VaR Gaussienne	59
4.0.2	Estimation de la VaR par la TVE	60
4.1	Indice S&P500	61
4.1.1	Analyse descriptive de l'indice financier	61
4.1.2	Analyse descriptive des logarithmes des rendements de l'indice financier	63
4.1.3	La VaR normale	63
4.1.4	La VaR par la méthode POT	64
4.1.5	La VaR la méthode des blocs	64
4.1.6	La VaR historique	64

TABLE DES FIGURES

1.1	Densité de la distribution des valeurs extrêmes pour différentes valeurs de γ :-1,0,1.	16
1.2	La distribution de Gumbel correspond à $\gamma = 0$	16
1.3	Densité de distribution de Fréchet pour $\gamma=0.5$ (noir),1(bleu),2(rouge)	17
1.4	Densité de distribution de Weibull pour $\gamma=0.5$ (noir), 1(bleu), 2(rouge)	18
1.5	La densité associée à la distribution de Paréto Généralisée $\gamma = 0$ (noir), $\gamma = 1$ (bleu), $\gamma = -1$ (rouge).	19
1.6	Estimateur de Hill	25
4.1	Histogramme de l'indice SP500.	62
4.2	Fonction de répartition de SP500.	63

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Un événement extrême est un événement qui a une faible probabilité de se produire mais qui, lorsqu'il se produit, prend de très petites ou de très grandes valeurs et a un grand impact. On notera la différence avec un événement rare qui, par définition, est un événement dont la probabilité d'occurrence est faible. Le fait qu'un événement soit rare n'implique pas qu'il soit extrême ; il est dépourvu de la notion de quantifiabilité (petites ou grandes valeurs). A l'inverse, tout événement extrême est rare au sens où il a une faible probabilité de se produire.

Etudier l'occurrence de ces événements est de première importance pour les assurances ou les financiers. la mesure et la gestion des risques sont devenus des enjeux majeurs pour les opérateurs de marchés financiers, des actuaires,... etc.

A partir de ces accidents catastrophiques on peut se poser quelques questions. D'abord on voudrait trouver le seuil pour lequel la probabilité de ce que le seuil soit dépassé vaille une valeur q imposée. On voudrait aussi connaître la probabilité pour que la valeur annuelle, la plus haute, soit supérieure à un certain seuil avec une probabilité q donnée. Et le plus intéressant de ce rapport est cherché un estimateur de la moyenne de distribution à queue lourde dans le cas de moment d'ordre deux infinie est par définition est estimé l'espérance de la lois à queue lourde.

Donc dans la première chapitre on va étudier, tout d'abord, les propriétés des statistiques d'ordre. Ensuite, on va étudier les distributions d'extrêmes généralisées, dont quelques propriétés. D'après on définit la fonction à variation régulière et la condition de second ordre, la distribution à queue lourde et Weibull. Ensuite on lance d'estimateur de l'indice (Hill,1975) de distribution à queue lourde et leur estimateur de quantile (Weissman,1978). Enfin on donne l'estimateur de moyenne de distribution à queue lourde.

Dans la deuxième chapitre, on a présenté des méthodes pour estimation des quantiles extrêmes : estimateur naturel basé sur le quantile empirique, méthode des blocs (Bloc

Maxima), méthode POT (Peak Over Threshold), estimateur de Hill, estimateur de Pickands, estimateur des moments et ce à partir d'un modèle de régression exponentielle.

Au troisième chapitre on introduit la notion de mesure de risque VaR (Value at Risk) et ES(expected shortfall), pour cela, on a commencé par définir la VaR et ES puis, on a donné les différentes méthodes pour la calculer : paramétrique, non paramétrique, semi paramétrique et à la fin on a estimé la VaR par le modèle GARCH.

Le dernier chapitre consiste à simuler quelques lois et estimer la VaR et ES et donner une application sur l'indices SP500 par méthodes POT, BM et VaR historique à partir des données réelles. On a terminé par simuler un échantillon de loi normale et calculer la VaR et ES à partir des méthodes utilisées précédemment.

en Mer du Nord (Inondation de 1953).

- Assurance : survenue des sinistres d'intensité exceptionnelle (ouragan Katrina en 2005, importants incendies en risques industriels, sinistres graves en responsabilité civile automobile) qui peuvent avoir des conséquences négatives sur les résultats et la solvabilité des organismes d'assurance.
- Finance : fortes variations du cours d'actifs financiers, gestions du risque opérationnel des banques (crise des subprimes, fin des années 2000).

1.1 Statistique d'ordre (SO)

Définition 1.1 Soit un échantillon $X = (X_1, \dots, X_n)$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (IID), avec une distribution de probabilité F . On définit aussi la fonction de répartition empirique par :

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{(X_i \leq x)}. \quad (1.1)$$

Où $1_{(X_i \leq x)}$: c'est la fonction indicatrice, elle est définie par :

$$1_{(X_i \leq x)} = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i \leq x. \\ 0 & \text{si } X_i \geq x. \end{cases}$$

Si $\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)|$ converge presque sûrement vers 0, alors on dit que $F_n(x)$ est un estimateur de la fonction de répartition F .

Définition 1.2 La statistique d'ordre de l'échantillon (X_1, \dots, X_n) est le réarrangement croissant (aléatoire IID) de (X_1, \dots, X_n) telle que : $(X_1 \leq \dots \leq X_n)$

que l'on note $(X_{(1,n)}, \dots, X_{(n,n)})$. En particulier, on note : $X_{(1,n)} = \min_{1 \leq i \leq n} (X_i)$ et $M_n = X_{(n,n)} = \max_{1 \leq i \leq n} (X_i)$. on obtient :

1. La distribution du maximum $F_{X_{(n,n)}}$ de la statistique d'ordre extrême M_n est donné par : $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} F_{M_n}(x) &= p(X_{(n,n)} \leq x) = [F(x)]^n. \quad (1.1) \\ f_{X_{(n,n)}}(x) &= n[F(x)]^{n-1} f(x). \end{aligned}$$

2. La distribution du minimum $F_{X_{(1,n)}}$ de la statistique d'ordre extrême $X_{(1,n)}$ est donnée par : $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} p(X_{(1,n)} \leq x) &= 1 - [1 - F(x)]^n. \quad (1.2) \\ f_{X_{(1,n)}}(x) &= n[1 - F(x)]^{n-1} f(x). \end{aligned}$$

Où $F(x)$ est la fonction de distribution des X_i et f est la densité des X_i .

Définition 1.3 Soient F_1 et F_2 deux fonctions de distribution. On dit que F_1 et F_2 sont du même type si et seulement si il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que :

$$F_1(ax + b) = F_2(x).$$

Theorem 1.1 (Fisher et Tippett (1928) Gnedenko (1943))

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires (IID) avec $P(X_1 \leq x) = F(x)$, S'il existe deux suites normalisantes réelles $(a_n > 0, n \geq 1)$, et $(b_n \in \mathbb{R}, n \geq 1)$ et une loi non-dégénérée H telle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_{n,n} \leq a_n x + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n). \quad (1.3)$$

$$= H(x), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1.4)$$

H est une fonction non-dégénérée défini par :

$$H_\gamma(x) = \begin{cases} \exp(-(1 + \gamma x)^{-1/\gamma}), & \gamma \neq 0, 1 + \gamma x > 0. \\ \exp(-\exp(-x)), & \gamma = 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

Avec γ appelé l'indice de queue ou indice des valeurs extrêmes (paramètre de forme).

Cette loi est appelée loi des valeurs extrêmes généralisée (GEV), on obtient la forme la plus générale de la distribution des valeurs extrêmes généralisées (GEV) :

$$H_{\gamma, \mu, \sigma}(x) = \exp \left\{ - \left[1 + \gamma \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-1/\gamma} \right\}, \gamma \neq 0, 1 + \gamma \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) > 0. \quad (1.6)$$

En introduisant les paramètres de localisation μ et σ un paramètre d'échelle

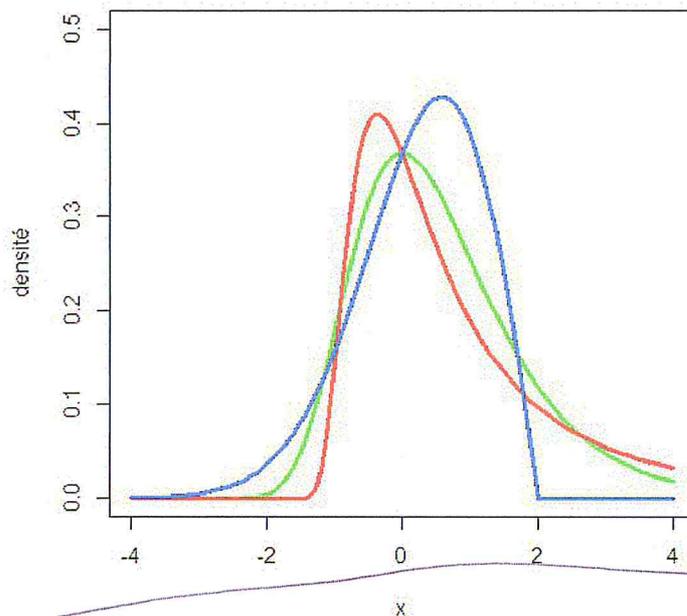


FIGURE 1.1 – Densité de la distribution des valeurs extrêmes pour différentes valeurs de gamma :-1,0,1.

alors H est du même type qu'une des trois lois suivantes :

— Type 1 : *Gumbel* :

$$H(x) = \Lambda(x) = \exp(-e^{-x}), \quad \gamma = 0, x \in \mathbb{R}.$$

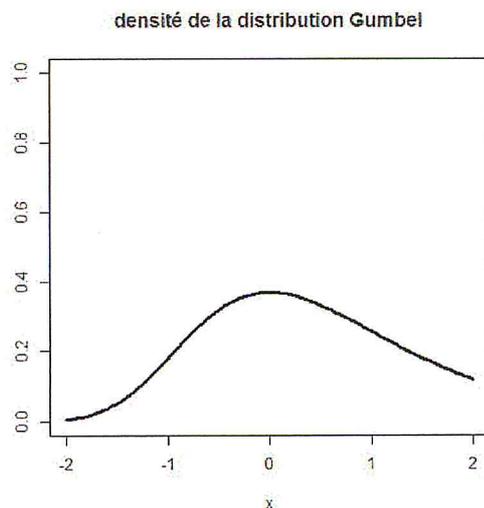


FIGURE 1.2 – La distribution de Gumbel correspond à $\gamma = 0$.

La distribution de Gumbel correspond à $\gamma = 0, GEV(0, 1, 0) = Gumbel$.

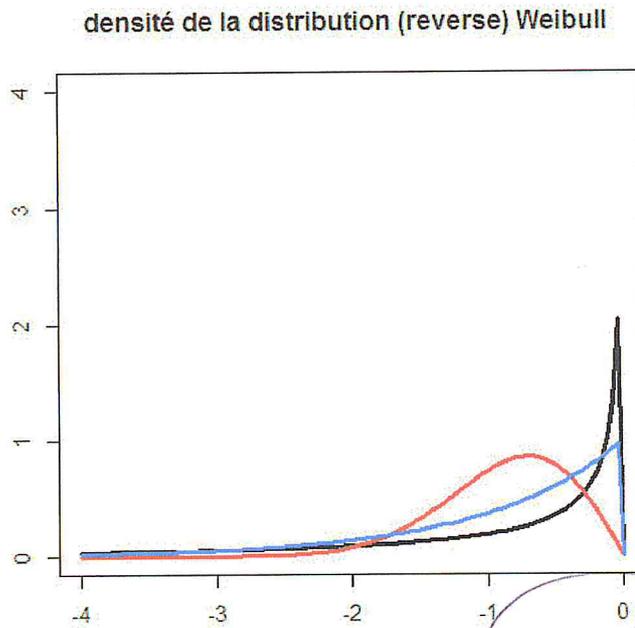


FIGURE 1.4 – Densité de distribution de Weibull pour gamma=0.5(noir), 1(bleu), 2(rouge)

1.2 Distribution conditionnelle des excès

L'idée d'utiliser un nombre croissant de statistiques d'ordre de l'échantillon a en suite été plus largement développée dans le cadre de l'approche, via l'approximation de la loi des excès . Plus précisément, soit $u < x_F$

$$x_F = \sup \{x \in \mathbb{R}, F(x) < 1\}$$

le point terminal à droite de la distribution F) et F_u la fonction de répartition des excès définie par :

$$F_u(y) = P(Y \leq y | X > u) = p(X - u \leq y | X > u) = \frac{F(u + y) - F(u)}{\bar{F}(u)}$$

avec

$$\bar{F}(u) = 1 - F(u), y \geq 0.$$

Ce qui équivaut à :

$$F_u(x) = P(X \leq x | X > u) = \frac{F(x) - F(u)}{\bar{F}(u)}.$$

pour $x \geq u$. F_u décrit la loi de X sachant $\{X > u\}$.

Theorem 1.2 Si F appartient à l'un des trois domaines d'attraction de la loi des valeurs extrêmes (Fréchet, Gumbel ou Weibull), alors il existe une fonction $\alpha(u)$ strictement

positive et un $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\lim_{u \uparrow x_F} \sup_{0 \leq y \leq x_F - u} |F_u(y) - G_{\gamma, \sigma(u)}(y)| = 0. \tag{1.7}$$

ou $G_{\gamma, \sigma}$ la distribution de paréto généralisée (GPD) ou la fonction de répartition de la loi de Paréto Généralisée définie par :

$$G_{\gamma, \sigma}(y) = \begin{cases} 1 - (1 + \gamma y / \sigma)^{-1/\gamma} & \text{si } \gamma \neq 0, \sigma > 0. \\ 1 - (\exp(-y/\sigma)) & \text{si } \gamma = 0, \sigma > 0. \end{cases} \tag{1.8}$$

pour $y \in [0, x_F - u]$ si $\gamma \geq 0$ et $y \in [0, \min(-\sigma/\gamma, x_F - u)]$ si $\gamma < 0$. la (GPD) a les propriétés suivantes :

$$E(Y) = \frac{\sigma}{1 - \gamma}, \quad \gamma < 1.$$

$$V(Y) = \frac{\sigma^2}{(1 - \sigma)^2 (1 - 2\sigma)}, \quad \gamma < 1/2.$$

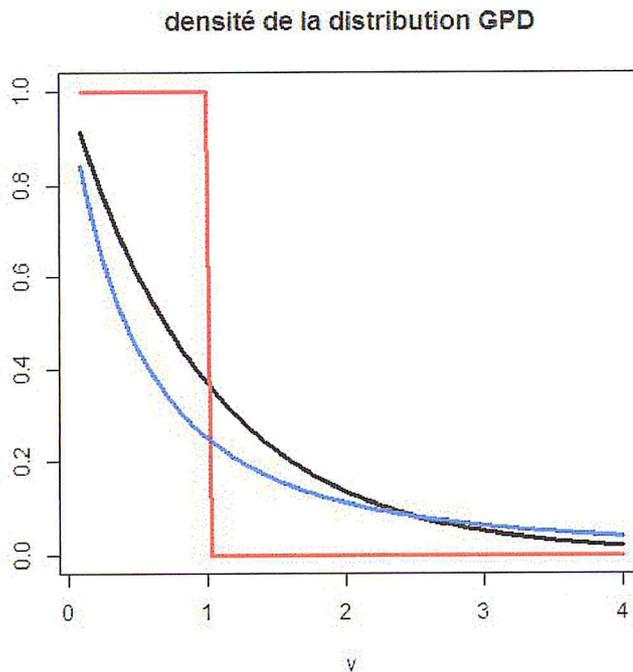


FIGURE 1.5 – La densité associée à la distribution de Paréto Généralisée $\gamma = 0$ (noir), $\gamma = 1$ (bleu), $\gamma = -1$ (rouge).

1.3 Caractérisation des Domaines d'attraction

1.3.1 Fonctions à variation régulière

Définition 1.4 Une fonction $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable est à variation régulière à l'infini si et seulement si, il existe un réel α tel que pour tout $x > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g(tx)}{g(t)} = x^\alpha.$$

Et on note $g \in RV_\alpha$, α est appelé indice de la fonction à variation régulière g .

Remarque 1.1 Dans le cas particulier où $\alpha = 0$, on dit que g est à variation lente à l'infini, c'est à dire

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g(tx)}{g(t)} = 1, \forall x > 0.$$

Les fonctions à variation lente sont génériquement notées $l(x)$.

Conséquence Une fonction $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable est à variation régulière d'indice α au voisinage de 0 notée ($g \in RV_\alpha^0$), si pour tout $x > 0$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(tx)}{g(t)} = x^\alpha.$$

c'est à dire $g(1/x)$ est à variation régulière d'indice $-\alpha$ à l'infini.

Lemme 1.1 Inverse d'une fonction à variation régulière

- Si g est à variation régulière d'indice $\alpha > 0$ à l'infini, alors $g^\leftarrow(x)$ est à variation régulière d'indice $1/\alpha > 0$ à l'infini.
- Si g est à variation régulière d'indice $\alpha < 0$ à l'infini, alors $g^\leftarrow(1/x)$ est à variation régulière d'indice $-1/\alpha > 0$ à l'infini.

Proposition 1.1 Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $g \in RV_\alpha$, Alors il existe une fonction à variation lente l à l'infini telle que :

$$\forall x > 0, g(x) = x^\alpha l(x). \quad (1.9)$$

Ce résultat montre que l'étude des fonctions à variation régulière à l'infini se ramène à celle des fonctions à variation lente. Parmi les fonctions à variation lente, on peut citer :

- les fonctions possédant une limite strictement positive à l'infini ;
- les fonctions de la forme $g : x \mapsto |\log x|^\beta, \beta \in \mathbb{R}$,
- les fonctions g telles que

$$\exists M > 0, \forall x \geq M, g(x) = c + dx^{-\beta} (1 + o(1)). \quad (1.10)$$

ou $\alpha, \beta > 0$ et $d \in \mathbb{R}$, L'ensemble de ces fonctions g est appelé classe de Hall.

Remarque 1.2 On déduit de la Proposition que F appartient au domaine $D(H_\gamma), \gamma > 0$ si et seulement si $x_F = \infty$ et $\bar{F}(x) = x^{-1/\gamma} l_F(x)$ ou l_F est une fonction à variation lente à l'infini.

Theorem 1.3 Représentation de Karamata

Toute fonction à variation lente l à l'infini s'écrit sous la forme

$$l(x) = c(x) \exp\left(\int_1^x \Delta(t) t^{-1} dt\right). \quad (1.11)$$

ou $c(\cdot) > 0$ et $\Delta(\cdot)$ sont deux fonctions mesurables telles que :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} c(x) = c_0 \in]0, \infty[\text{ et } \lim_{x \rightarrow \infty} \Delta(x) = 0$$

si la fonction $c(\cdot)$ est une constante, alors on dit que l est normalisée.

Proposition 1.2 Pour toute fonction à variation lente l à l'infini, on a :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(l(x))}{\log(x)} = 0. \quad (1.12)$$

1.3.2 Domaine d'attraction de Fréchet

Précisons que dans toute la suite, nous noterons par : $\bar{F}(\cdot) = 1 - F(\cdot)$, la fonction de survie de F , La fonction $Q(\cdot)$ est l'inverse généralisée de F , définie par

$$Q(s) = \bar{F}^{\leftarrow}(s) = \inf\{x \in \mathbb{R}, F(x) \geq s\}, 0 < s \leq 1,$$

$Q(\cdot)$ est aussi appelée fonction de quantile associée à la distribution F

On définit également la fonction de quantile de queue par

$$U(x) = Q(1 - 1/x), x > 1$$

Theorem 1.4 La fonction de distribution F ayant pour point terminal x_F appartient au domaine d'attraction de Fréchet $D(H_\gamma), \gamma > 0$ si et seulement si $x_F = +\infty$ et \bar{F} est à variation régulière d'indice $-1/\gamma$ à l'infini i.e. :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(tx)}{\bar{F}(x)} = x^{-1/\gamma}. \quad (1.13)$$

Les suites de normalisation a_n et b_n sont données dans ce cas par :

$$a_n = F^{\leftarrow}(1 - 1/n) = U(n) \text{ et } b_n = 0, \forall n > 0.$$

Theorem 1.5 On déduit de la Proposition que F appartient au domaine $D(H_\gamma), \gamma > 0$ si et seulement si $x_F = \infty$ et $\bar{F}(x) = x^{-1/\gamma} l_F(x)$ ou l_F est une fonction à variation lente à l'infini.

TABLE 1.1 – tableau de quelques lois de Fréchet

Domaine d'attraction	Fréchet
lois	Cauchy Pareto Student Burr Loggamma

1.3.3 Domaine d'attraction de Weibull

Theorem 1.6 Une fonction de distribution F avec un point terminal x_F appartient au domaine d'attraction de Weibull $D(H_\gamma)$, $\gamma < 0$, si et seulement si x_F est fini et la fonction de répartition F^* définie par :

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0. \\ F(x_F - 1/x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

appartient au domaine d'attraction de Fréchet avec un indice des valeurs extrêmes $-\gamma > 0$, c'est-à-dire que \bar{F}^* est une fonction à variation régulière d'indice $1/\gamma$ à l'infini et on note ($\bar{F}^* \in RV_{1/\gamma}$). dans ce cas un choix possible pour les suites a_n et b_n est :

$$a_n = x_F - F^{\leftarrow}(1 - 1/n) \text{ et } b_n = x_F.$$

Remarque 1.3 On déduit du Théorème précédent que F appartient au domaine de Weibull $D(H_\gamma)$, $\gamma < 0$, si et seulement si $x_F = \infty$ et $\bar{F}(x) = (x_F - x)^{-1/\gamma} l((x_F - x)^{-1})$ ou $l \in RV_0$. De manière équivalente, la fonction quantile $Q(1 - s)$ s'écrit :

$$Q(1 - s) = x_F - s^{-\gamma} l(1/s), l \in RV_0. \tag{1.14}$$

TABLE 1.2 – tableau de quelques lois de Weibull

Domaine d'attraction	Weibull
lois	Uniforme Beta

1.3.4 Domaine d'attraction de Gumbel

Theorem 1.7 La fonction de distribution F avec un point terminal x_F appartient au domaine d'attraction de Gumbel $D(H_\gamma)$, $\gamma = 0$. si et seulement s'il existe un réel z , $z <$

$x_F \leq \infty$ tel que

$$\bar{F}(x) = c(x) \exp \left(- \int_z^x \frac{g(t)}{a(t)} dt \right), z < x \leq x_F. \tag{1.15}$$

ou $c(\cdot)$ et $g(\cdot)$ sont des fonctions mesurables positives satisfaisant $c(x) \rightarrow c > 0, g(x) \rightarrow 1$ lorsque $x \uparrow x_F$, et $a(\cdot)$ est une fonction positive absolument continue est :

$$a(x) = \int_x^{x_F} \frac{\bar{F}(t)}{\bar{F}(x)} dt, x < x_F. \tag{1.16}$$

la fonction $a(\cdot)$ est appelée fonction auxiliaire.

TABLE 1.3 – tableau de quelque lois de Gumbel

Domaine d'attraction	Gumbel
lois	<i>Gumbel</i>
	<i>Exponentielle</i>
	<i>Lognormale</i>
	<i>Gamma</i>
	<i>Weibull</i>

1.4 Caractérisation générale

Theorem 1.8 Soit $\gamma \in \mathbb{R}$, les assertions suivantes sont équivalentes

1. F appartient au domaine d'attraction de H_γ
2. IL existe une fonction positive $a(\cdot)$ telle que pour tout $x > 0$.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U(tx) - U(t)}{a(t)} = D_\gamma(x) = \begin{cases} \frac{x^\gamma - 1}{\gamma} & \text{si } \gamma \neq 0. \\ \log x & \text{si } \gamma = 0. \end{cases} \tag{1.17}$$

3. il existe une fonction positive $f(\cdot)$ telle que pour tout vérifiant : $1 + \gamma x > 0$,

$$\lim_{t \uparrow x_F} \frac{\bar{F}(t + xf(t))}{\bar{F}(t)} = \begin{cases} (1 + \gamma x)^{-1/\gamma} & \text{si } \gamma \neq 0. \\ e^{-x} & \text{si } \gamma = 0. \end{cases} \tag{1.18}$$

Proposition 1.3 Soit $\gamma \in \mathbb{R}, F \in D(H_\gamma)$ si et seulement si pour tous $x > 0, y > 0, y \neq 1$.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U(tx) - U(t)}{U(ty) - U(t)} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{x^\gamma - 1}{y^\gamma - 1} & \text{si } \gamma \neq 0. \\ \frac{\log x}{\log y} & \text{si } \gamma = 0. \end{array} \right\} \tag{1.19}$$

1.5 Estimation des paramètres

1.5.1 Estimation de l'indice de queue sous le modèle de type Paréto

Les distributions F dans Le domaine de Fréchet ($\gamma > 0$) sont dites de type Paréto et ont la propriété suivante :

$$\bar{F}(x) = x^{-1/\gamma} l_F(x) \quad \text{avec } \gamma > 0. \quad (1.20)$$

ou de manière équivalente la fonction de quantile de queue $U \in RV_\gamma$, ie

$$U(x) = Q(1 - 1/x) = x^\gamma l_U(x). \quad (1.21)$$

l_F et l_U sont deux fonctions à variation lente à l'infini.

Un estimateur naturel de F est sa fonction de répartition empirique $F_n(x)$ définie par :

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n 1_{\{X_j \leq x\}}.$$

Le quantile empirique associé à F est donné par :

$$Q_n(s) = \inf \{x \in \mathbb{R}, F_n(x) \geq s\}, 0 < s < 1.$$

1.5.1.1 Estimateur de Hill

La définition de la fonction de distribution F de type Paréto peut être écrite comme :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(tx)}{\bar{F}(x)} = x^{-1/\gamma}, \forall x > 1.$$

Ce qui peut être interprété comme $p(X/t > x/X > t) \rightarrow x^{-1/\gamma}$, quand $t \rightarrow \infty$ et $x > 1$.

Et si on note $Y_j(t)$ les excès relatifs au-delà de t , ie $Y_j(t) = X_i/t$ avec $X_i > t$ tel que i est t l'indice du j -ème excès dans l'échantillon originel et $j = 1, \dots, N_t$ représente le nombre d'excès

En formant la log vraisemblance basée sur les excès $Y_1(t), \dots, Y_{N_t}(t)$ conditionnellement à N_t on obtient :

$$\log L(Y_1(t), \dots, Y_{N_t}(t)) = -N_t \log \gamma - \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \sum_{j=1}^{N_t} \log Y_j(t).$$

alors

$$\frac{d \log L}{d \gamma} = -\frac{N_t}{\gamma} + \frac{1}{\gamma^2} \sum_{j=1}^{N_t} \log Y_j(t) = 0 \Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{N_t} \sum_{j=1}^{N_t} \log Y_j(t).$$

Pour $1 < k_n < n$ ou $k_n \rightarrow \infty$, choisissons pour le niveau d'excès t la valeur de la statistique d'ordre $X_{n-k_n,n}$ et remplaçons N_t par k_n , on obtient l'estimateur de Hill défini par :

$$\widehat{\gamma}_{k_n}^H = \frac{1}{k_n} \sum_{j=1}^{k_n} \log X_{n-j+1,n} - \log X_{n-k_n,n} = \frac{1}{k_n} \sum_{j=1}^{k_n} j(\log X_{n-j+1,n} - \log X_{n-j,n}). \quad (1.22)$$

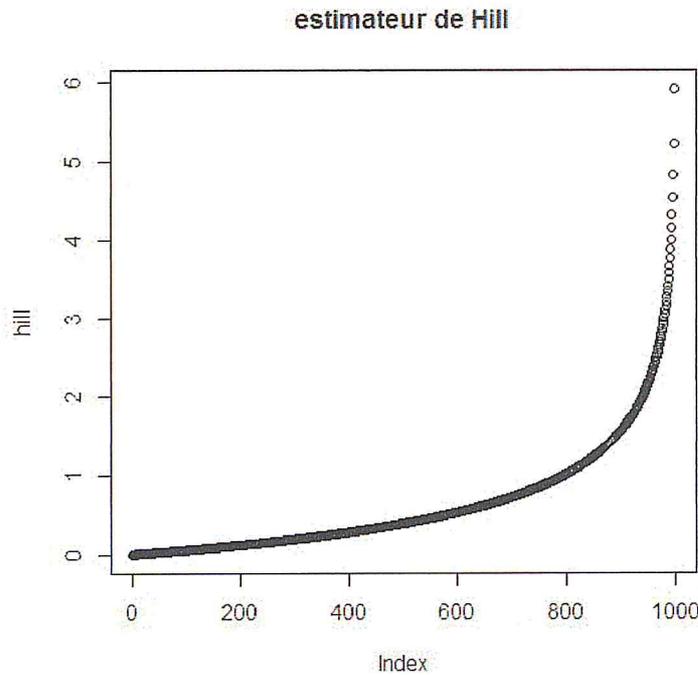


FIGURE 1.6 – Estimateur de Hill

Définition 1.5 (Variation régulière du second ordre) Soit $F \in D(H_\gamma)$, $\gamma > 0$, on dit que F est à variation régulière du second d'ordre à l'infini si elle satisfait les conditions équivalentes suivantes :

- Il existe une constante réelle $\rho \leq 0$ et une fonction de signe constant $A^*(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$, telles que pour tout $x > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(tx)/\overline{F}(t) - x^{-1/\gamma}}{A^*(t)} = x^{-1/\gamma} \frac{x^\rho - 1}{\rho}. \quad (1.23)$$

- Il existe une constante réelle $\rho \leq 0$ et une fonction de signe constant $A(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$, telles que pour tout $x > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(U(tx)/U(t)) - x^\gamma}{A(t)} = x^\gamma \frac{x^\rho - 1}{\rho}. \tag{1.24}$$

On peut interpréter $(x^\rho - 1)/\rho = \log x$ dans le cas où $\rho = 0$.

Theorem 1.9 (Propriétés asymptotiques de l'estimateur de Hill) Soit $k_n, n \geq 1$ une suite d'entiers telle que $1 \leq k_n < n, k_n \rightarrow \infty$ et $k_n/n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

- **Consistance faible** : L'estimateur $\widehat{\gamma}_{k_n}^H$ converge en probabilité vers γ .
- **Consistance forte** : Si de plus $k_n/\log \log n \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$, alors $\widehat{\gamma}_{k_n}^H$ converge presque sûrement vers γ .
- **Normalité asymptotique** : Si la 2-ième condition de (Variation régulière du second ordre) est satisfaite avec $\sqrt{k_n}A(n/k_n) \rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ quand $n \rightarrow \infty$, alors

$$\sqrt{k_n}(\widehat{\gamma}_{k_n}^H - \gamma) \xrightarrow{D} N(\lambda/(1-\rho), \gamma^2).$$

Proof. références : Beirlant et al (1996), (Danielsson et al 2001 Gomes et Oliveira, 2001). ■

Remarque 1.4 d'après la normalité asymptotique de Hill, si $\sqrt{k_n}A(n/k_n) \rightarrow 0$, on peut écrire :

$$\sqrt{k_n}(\widehat{\gamma}_{k_n}^H/\gamma - 1) \xrightarrow{D} N(0, 1).$$

Ainsi, un intervalle de confiance au niveau $(1 - \alpha)$ pour l'estimation de γ est donné par :

$$\left(\widehat{\gamma}_{k_n}^H \left(1 + k_n^{-1/2} z_{1-\alpha/2}\right)^{-1}, \widehat{\gamma}_{k_n}^H \left(1 + k_n^{-1/2} z_{1-\alpha/2}\right)^{-1} \right).$$

où z_α est le quantile d'une loi normale standard au niveau α .

1.5.1.2 Estimateur des moments

Cet estimateur propose une extension de l'estimateur de Hill appelée estimateur des moments, qui lui est valable quel que soit le signe de l'indice de queue, i.e $\gamma \in \mathbb{R}$) et qui est défini comme suit :

$$\widehat{\gamma}_{k_n}^M = M_{k_n}^{(1)} + 1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\left(M_{k_n}^{(1)}\right)^2}{M_{k_n}^{(2)}} \right)^{-1}.$$

ou

$$M_{k_n}^{(r)} = \frac{1}{k_n} \sum_{j=1}^{k_n} (\log X_{n-j+1,n} - \log X_{n-j,n})^r, r = 1, 2.$$

notons que $M_{k_n}^{(1)}$ correspond à l'estimateur des moments (l'estimateur de Hill) $\widehat{\gamma}_{k_n}^M$.

Theorem 1.10 Supposons que $F \in D(H_\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $k_n/n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$

- (Consistance faible) : Alors $\widehat{\gamma}_{k_n}^M \xrightarrow{p} \gamma$ quand $n \rightarrow \infty$.
- (Consistance forte) : Si de plus $k_n/(\log n)^\delta \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$, pour un certains $\delta > 0$, alors $\widehat{\gamma}_{k_n}^M \xrightarrow{p.s} \gamma$ quand $n \rightarrow \infty$.
- (Normalité asymptotique) : Sous certaines conditions sur la loi F .

$$\sqrt{k_n}(\widehat{\gamma}_{k_n}^H - \gamma) \xrightarrow{D} N(0, \sigma_M^2) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

ou

$$\sigma_M^2 = \begin{cases} 1 + \gamma^2 & \text{si } \gamma > 0. \\ (1 + \gamma^2) (1 - 2\gamma) \left(4 - 8 \frac{1-2\gamma}{1-3\gamma} + \frac{(5-11\gamma)(1-2\gamma)}{(1-3\gamma)(1-4\gamma)} \right) & \text{si } \gamma < 0. \end{cases} \quad (1.25)$$

Proof. Pour plus de détails on peut se référer dans Beirlant et al (1996). ■

1.5.2 Estimateurs du couple (γ, σ)

1.5.2.1 Estimateurs par la méthode des moments

Dans le cas d'une distribution de Paréto Généralisée (GPD) $g_{\gamma, \sigma}$ l'estimateur par la méthode des moment est basé sur le fait que

$$E \left[\left(1 + \frac{\gamma X}{\sigma} \right)^r \right] = \frac{1}{1 - r\gamma} \quad \text{si } 1 - r\gamma > 0.$$

Il en découle de l'expression des paramètres en fonction des deux premiers moments μ_1 et μ_2

$$\gamma = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\mu_1^2}{\mu_2 - \mu_1^2} \right) \quad \text{et} \quad \sigma = \frac{1}{2} \mu_1 \left(\frac{\mu_1^2}{\mu_2 - \mu_1^2} + 1 \right).$$

En remplaçant dans les expressions précédentes μ_1 et μ_2 par leurs versions empiriques nous obtenons l'estimateur des moments $(\widehat{\gamma}_{k_n}^{MOM}, \widehat{\sigma}_{k_n}^{MOM})$ du couple (γ, σ) définis comme suit

$$\widehat{\gamma}_{k_n}^{MOM} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\overline{X}^2}{\overline{X^2} - \overline{X}^2} \right) \quad \text{et} \quad \widehat{\sigma}_{k_n}^{MOM} = \frac{1}{2} \overline{X} \left(\frac{\overline{X}^2}{\overline{X^2} - \overline{X}^2} + 1 \right)$$

ou \overline{X} et $\overline{X^2}$ sont les estimateurs empiriques des moments d'ordre 1 et 2 de l'échantillon.

1.5.2.2 Estimateurs par la méthode des moments pondérés

utilisant les deux moments pondérés v_0 et v_1 avec $v_s = E \left[X \left(1 - g_{\gamma, \sigma}(X) \right)^s \right]$. Nous avons :

$$\forall s > \gamma - 1, v_s = \frac{\sigma}{(s+1)(s-\gamma+1)}.$$

En notant

$$P_n = \frac{1}{k_n} \sum_{j=0}^{k-1} X_{n-j,n} - X_{n-k_n,n} \quad \text{et} \quad Q_n = \frac{1}{k_n} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{j}{k_n} (X_{n-j,n} - X_{n-k_n,n}).$$

P_n et Q_n sont respectivement les moments empiriques correspondant à v_0 et v_1 , les estimateurs de γ et σ sont alors

$$\widehat{\gamma}_{k_n}^{PWM} = \frac{P_n - 4Q_n}{P_n - 2Q_n} = 1 - \left(\frac{P_n}{2Q_n} - 1 \right)^{-1}$$

et

$$\widehat{\sigma}_{k_n}^{PWM} = \frac{2P_n Q_n}{P_n - 2Q_n} = P_n \left(\frac{P_n}{2Q_n} - 1 \right)^{-1}.$$

1.5.2.3 Estimation par la méthode du maximum de vraisemblance

La fonction de log-vraisemblance est obtenue à partir de la loi GPD $g_{\gamma,\sigma}$ ce qui donne :

$$\log(L(\gamma, \sigma)) = -k_n \log(\sigma) - \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)_{i-1}^{k_n} \log\left(1 + \frac{\gamma}{\sigma} Z_i\right).$$

avec $1 + \gamma Z_i/\sigma > 0$ pour $i = 1, \dots, k_n$ sinon $L(\gamma, \sigma) = -\infty$.

L'estimateur du maximum de vraisemblance est cependant peu utilisé en pratique car il pose des problèmes numériques et il est peu performant sur des échantillons de petite taille ($n < 500$)

Il est préférable dans ce cas d'estimer les paramètres par l'une des autres méthodes précédentes.

CHAPITRE 2

ESTIMATION DE QUANTILES EXTRÊMES

Dans l'analyse des extrêmes, une exigence typique consiste à trouver les grandes valeurs de sorte que les probabilités de les dépasser soient très faibles (c-à-d proches de zéro). Ces quantités sont appelées quantiles extrêmes car l'ordre de ces quantiles tend vers zéro lorsque la taille n de l'échantillon tend vers l'infini. Nous nous sommes donc intéressés à l'estimation des quantiles extrêmes p .

2.1 Quantile d'ordre p

Définition 2.1 Soit X une variable aléatoire d'une distribution F . On suppose que F est continue, Le quantile d'ordre p est vérifié :

$$F(x_p) = p(X < x_p) = p. \quad \text{ou } p \in [0, 1].$$

x_p : est un le quantile d'ordre p . par définition le quantile d'ordre p c'est la fonction inverse de F c'est-à-dire $x_p = F^{-1}(p)$.

2.2 Fonction des quantiles

Si on a F est une fonction continue et monotone alors F est bijective donc F^{-1} existe.

Définition 2.2 Soit X une variable aléatoire et X_1, X_2, \dots, X_n un échantillon de X .

$$Q(p) = F^{-1}(p) = \inf\{x; F(x) \geq p\} \quad \text{avec } p \in [0, 1].$$

"la fonction des quantiles s'appelle la fonction inverse générale".

L'estimateur de $Q(p)$ est la fonction des quantiles empirique :

$$Q_n(p) = \inf \{x; F_n(x) \geq p\} \quad \text{avec } p \in [0, 1]$$

Où F est la distribution empirique. Il est défini par la statistique d'ordre :

$$Q_n(p) = X_{i,n} \quad \text{où } \frac{i-1}{n} \leq p \leq \frac{i}{n}.$$

2.3 Intervalles de confiance des quantiles empirique

Proposition 2.1 (*Intervalles de confiance 1*) :soit $p \in]0, 1[$ supposons que la loi de X_1 possède une densité f continue en x_p et telle que $f(x_p) > 0$.

On suppose de plus que $k(n) = np + o(\sqrt{n})$ c-à-d $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(n)}{n} = p$. Alors, on à la convergence en loi suivante :

$$\frac{\sqrt{n}(X_{(k(n),n)} - x_p)(f(x_p))}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(0, 1).$$

Alors soit $\alpha > 0$, pour calculer l'intervalle de confiance $1-\alpha$ on procède de la façon suivante, on veut :

$$1 - \alpha = P(|N(0, 1)|).$$

Donc l'intervalle de confiance de x_p , de niveau asymptotique $1-\alpha$ est l'intervalle aléatoire :

$$\left[X_{(k(n),n)} \pm \delta \frac{\sqrt{p(1-p)}}{f(X_{(k(n),n)}\sqrt{n})} \right].$$

ou δ est le quantile d'ordre $1 - \frac{\alpha}{2}$ de la loi $N(0, 1)$.

Proposition 2.2 (*Intervalles de confiance 2*) :soit $p \in]0, 1[$, soit δ est le quantile d'ordre $1 - \frac{\alpha}{2}$ de la loi $N(0, 1)$. On considère par suite que on a les entiers $i_n = \left[np + \sqrt{n}\delta\sqrt{p(1-p)} \right]$ et $j_n = \left[np + \sqrt{n}\delta\sqrt{p(1-p)} \right]$. Pour n assez grand les entiers i_n et j_n sont compris entre 1 et n . De plus l'intervalle aléatoire :

$$\left[X_{(i(n),n)}, X_{(j(n),n)} \right].$$

est un intervalle de confiance pour x_p de niveau asymptotique $1 - \alpha$.

2.4 Approche basée sur un estimateur d'indices positifs

On estimer le quantile extrême a partir de l'estimateur de Hill de γ en extrapolant le long de la droite du « Paréto quantile plot » d'équation :

$$y = \log X_{n-k_n, n} + \widehat{\gamma}_{k_n}^H \left(x + \log \frac{k_n + 1}{n + 1} \right).$$

de point d'origine $(\log((n + 1)/(kn + 1)), \log X_{n-kn, n})$, Ceci conduit en prenant $x = -\log \alpha_n$ à un estimateur le plus connu d'un quantile extrême :

$$q(\alpha_n) = F^{\leftarrow}(1 - \alpha_n) = Q(1 - \alpha_n) = U(1/\alpha_n).$$

introduit par Weissman (1978) :

$$\widehat{q}_{k_n}^H(\alpha_n) = X_{n-k_n, n} \left(\frac{k_n + 1}{(n + 1)\alpha_n} \right). \quad (2.1)$$

Nous avons déjà vu que l'estimateur de Hill est valable uniquement dans le domaine de Fréchet (indices positifs $\gamma > 0$), on a :

$$\begin{aligned} \overline{F}^{\leftarrow}(1 - \alpha_n) &= U(1/\alpha_n) = \alpha_n^{-\gamma} l_U(1/\alpha_n) && \text{avec } \alpha_n \leq 1/n. \\ \overline{F}^{\leftarrow}(1 - \beta_n) &= U(1/\beta_n) = \beta_n^{-\gamma} l_U(1/\beta_n) && \text{avec } \beta_n \geq 1/n. \end{aligned}$$

alors pour β_n suffisamment petit, on a :

$$\overline{F}^{\leftarrow}(\alpha_n) \simeq \overline{F}^{\leftarrow}(\beta_n) \left(\frac{\beta_n}{\alpha_n} \right)^\gamma.$$

Si en remplaçant $\overline{F}^{\leftarrow}(\beta_n)$ par son estimateur naturel $X_{n-[n\beta_n], n}$, γ par un estimateur quelconque d'indices positifs noté $\widehat{\gamma}_{k_n}^+$, et $\beta_n = (k_n + 1)/(n + 1)$ et $\widehat{\gamma}_{k_n}^+ = \widehat{\gamma}_{k_n}^H$.

On obtient aussi l'estimateur général de type Weissman(1978) défini par :

$$\widehat{q}_{k_n}^W(\alpha_n) = X_{n-[n\beta_n], n} \left(\frac{\beta_n}{\alpha_n} \right)^{\widehat{\gamma}_{k_n}^+}. \quad (2.2)$$

2.5 Approche basée sur un estimateur d'indices quelconques

En utilisant l'estimateur des moments ont proposé d'estimer $q(\alpha_n) = U(1/\alpha_n)$ pour $\alpha_n \rightarrow 0$ comme suit :

$$\widehat{q}_{k_n}^M(\alpha_n) = X_{n-K_n, n} + \widehat{a} \left(\frac{k_n}{n} \right) \frac{\left(\frac{n}{k_n} \alpha_n \right)^{-\widehat{q}_{k_n}^M} - 1}{\widehat{q}_{k_n}^M}. \quad (2.3)$$

avec

$$\widehat{a}(k_n/n) = X_{n-K_n, n} \widehat{\gamma}_{k_n}^H \max(1 - \widehat{q}_{k_n}^M, 1).$$

2.6 Approche basée sur la méthode des excès

Cette méthode s'appuie sur le fait que la distribution des excès au-delà d'un seuil élevé u peut être approchée par une loi GPD généralisée : $F_U(x) \approx g_{\gamma, \sigma}(x)$. soit N_u le nombre d'observations X_{j1}, \dots, X_{jN_u} .

On dépassant u et notons $Y_i = X_{ji} - u \geq 0$. On ajuste une loi GPD $g_{\gamma, \sigma}$ aux excès Y_1, \dots, Y_{N_u} pour obtenir les estimateurs $\widehat{\gamma}$ et $\widehat{\sigma}$ des paramètres de forme et d'échelle. nous pouvons estimer la queue $\bar{F} = 1 - F(u)$ par

$$\widehat{\bar{F}}(x) = \frac{N_u}{n} \left(1 + \widehat{\gamma} \frac{x-u}{\widehat{\sigma}} \right)^{-1/\widehat{\gamma}_n}, \quad x \geq u. \quad (2.3)$$

On a :

$$\widehat{q}_{N_u, n}(\alpha_n) = u + \frac{\widehat{\sigma}}{\widehat{\gamma}} \left(\left(\frac{n}{N_u} \alpha_n \right)^{\widehat{\gamma}_n} - 1 \right). \quad (2.4)$$

Si on note $(\widehat{\gamma}_{k_n}^{POT}, \widehat{\sigma}_{k_n}^{POT})$ les estimateurs $(\widehat{\gamma}_{k_n}^{MOM}, \widehat{\sigma}_{k_n}^{MOM})$ ou $(\widehat{\gamma}_{k_n}^{PWM}, \widehat{\sigma}_{k_n}^{PWM})$ du couple (γ, σ) , on obtient l'estimateur des quantiles extrêmes suivant :

$$\widehat{q}_{k_n}^{POT}(\alpha_n) = X_{n-k_n, n} + \frac{\widehat{\sigma}_{k_n}^{POT}}{\widehat{\gamma}_{k_n}^{POT}} \left(\left(\frac{n}{N_u} \alpha_n \right)^{\widehat{\gamma}_{k_n}^{POT}} - 1 \right), \quad \text{pour } \alpha_n < \frac{k_n}{n}. \quad (2.5)$$

2.7 Approche par la loi des valeurs extrêmes

Pour estimer les quantiles extrêmes on a l'approximation suivante :

$$p \left(\frac{Y_{n,n} - b_n}{a_n} \leq y \right) = F^n(a_n y + b_n) \approx H_\gamma(y). \quad (2.6)$$

Ou de façon équivalente :

$$p(Y_{n,n} \leq z) \approx H_\gamma \left(\frac{z - b_n}{a_n} \right). \quad (2.7)$$

Dans la suite on introduit :

$$H_{\gamma, a_n, b_n} = H_\gamma \left(\frac{z - b_n}{a_n} \right).$$

On peut réécrire l'équation comme suit

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \log(F(a_n y + b_n)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \log(1 - \bar{F}(a_n y + b_n)) = \log(H_\gamma(y)). \\ \bar{F}(a_n y + b_n) &\approx \frac{1}{n} \log(H_\gamma(y)). \end{aligned}$$

Ce qui équivaut à :

$$\bar{F}(y) = \frac{1}{n} \log \left(H_\gamma \left(\frac{y - b_n}{a_n} \right) \right) = \frac{1}{n} \log \left(H_{\gamma, a_n, b_n}(y) \right).$$

On obtient ainsi une approximation de la fonction de survie en queue :

$$\bar{F}(y) = \frac{1}{n} \left(1 + \gamma \left(\frac{y - b_n}{a_n} \right) \right)^{1/\gamma}. \quad (2.8)$$

Que l'on peut prolonger à $\gamma = 0$ en faisant tendre $\gamma \rightarrow 0$ dans l'équation précédent ce qui donne :

$$\bar{F}(y) = \frac{1}{n} \exp \left(\frac{y - b_n}{a_n} \right).$$

On souhaite estimer des quantile ce qui nous permet d'approcher le quantile par $q(\alpha)$ par

$$q(\alpha) = b_n + \frac{a_n}{\gamma} \left(\left(\frac{1}{n\alpha} \right)^\gamma - 1 \right). \quad (2.9)$$

on a alors :

$$q(\alpha) = b_n - a_n \log(n\alpha).$$

On obtient ainsi un estimateur du quantile extrême donné dans la définition suivante :

Définition 2.3 *L'estimateur du quantile extrême de la loi GEV est défini par :*

$$\widehat{q}_n^{gev}(\alpha_n) = \widehat{b}_n + \frac{\widehat{a}_n}{\widehat{b}_n} \left(\left(\frac{1}{n\widehat{a}_n} \right)^{\widehat{\gamma}_n} - 1 \right).$$

Où $(\widehat{\alpha}_n, \widehat{b}_n, \widehat{\gamma}_n)$ sont respectivement des estimateurs des paramètres (a_n, b_n, γ) .

On a alors :

$$\widehat{q}_n^{gev}(\alpha) = \widehat{b}_n - \widehat{a}_n \log(n\alpha).$$

2.8 Estimation des paramètres par la méthode du maximum de vraisemblance

La fonction de log-vraisemblance s'écrit comme suivant :

$$\log(L(\gamma, a_n, b_n)) = -m \log(a_n) - \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right) \sum_{i=1}^m \log \left(1 + \gamma \left(\frac{Z_i - b_n}{a_n} \right) \right) - \sum_{i=1}^m \log \left(1 + \gamma \left(\frac{Z_i - b_n}{a_n} \right) \right)^{1/\gamma}.$$

Avec

$$1 + \gamma \left(\frac{Z_i - b_n}{a_n} \right) > 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}.$$

2.9 Estimation des paramètres par la méthode des moments pondérés

On définit le moment pondéré d'ordre r par :

$$\mu_r = E\left(ZH_{\gamma, a_n, b_n}^r(Z)\right).$$

Cette quantité existe pour $\gamma < 1$ et est donnée par :

$$\mu_r = \frac{1}{r+1} \left(b_n - \frac{a_n}{\gamma} (1 - (r+1)^\gamma \Gamma(1-\gamma)) \right).$$

où Γ est la fonction gamma d'Euler définie pour tout $t > 0$ par :

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} u^{t-1} \exp(-u) du.$$

En utilisant la formule précédente, trois moments pondérés suffisent pour calculer a_n, b_n et γ . En effet, on a :

$$\begin{aligned} \mu_0 &= b - \frac{a_n}{\gamma} (1 - \Gamma(1-\gamma)). \\ 2\mu_1 - \mu_0 &= -\frac{a_n}{\gamma} (1 - 2^\gamma) \Gamma(1-\gamma). \\ \frac{3\mu_2 - \mu_0}{2\mu_1 - \mu_0} &= \frac{3\gamma - 1}{2^\gamma - 1}. \end{aligned}$$

Ainsi en remplaçant respectivement $\mu_r, r \in \{0, 1, 2\}$ par son estimateur empirique :

$$\widehat{\mu}_{r,n} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Z_{i,m} \left(\frac{i-1}{m} \right)^r.$$

où les $Z_{1,m}, \dots, Z_{m,m}$ sont les statistiques ordonnées associées à l'échantillon Z_1, \dots, Z_m et en résolvant le système précédent, on obtient les estimateurs des moments pondérés des paramètres a_n, b_n et γ .

2.10 Approche par la loi des excès

L'approche par la loi des excès est basée sur l'idée suivante. On a pour tout $y > 0$ la relation :

$$\bar{F}(u + y) = \bar{F}(u)\bar{F}_u(y).$$

Si on effectue le changement de variable $Z = u + y$, alors l'approximation de la queue de distribution donne :

$$\bar{F}(Z) = \bar{F}(u)\bar{F}_u(Z - u) \simeq \bar{F}(u)\bar{g}_{\gamma,\sigma}(Z - u).$$

Où $\bar{g}_{\gamma,\sigma}$ est la fonction de survie de la loi de Pareto généralisée $g_{\gamma,\sigma}$. On introduit alors la probabilité

épasse le seuil $u, p = p(Y > u) = \bar{F}(u)$, d'où :

$$\bar{F}(Z) \simeq p \bar{g}_{\gamma,\sigma}(z - \bar{F}^{\leftarrow}(p)).$$

On obtient ainsi pour $\gamma \in \mathbb{R}$ une approximation de la fonction de survie en queue :

$$\bar{F}(Z) \simeq p \left(1 + \gamma \left(\frac{Z - \bar{F}^{\leftarrow}(p)}{\sigma} \right) \right)^{1/\gamma}. \quad (2.10)$$

Le cas $\gamma = 0$ peut être vu comme le cas limite $\gamma \rightarrow 0$ dans l'équation précédent :

$$\bar{F}(Z) \simeq p \exp\left(\frac{Z - \bar{F}^{\leftarrow}(p)}{\sigma}\right).$$

On souhaite estimer des quantiles, or par définition du quantile. il faut inverser la fonction de survie de l'équation précédent ce qui donne :

$$q(\alpha) = \bar{F}^{\leftarrow}(p) + \frac{\sigma}{\gamma} \left(\left(\frac{\alpha}{p} \right)^\gamma - 1 \right). \quad (2.11)$$

et dans le cas $\gamma = 0$ on fait tendre $\gamma \rightarrow 0$ dans l'équation précédent ce qui donne :

$$q(\alpha) = \bar{F}^{\leftarrow}(p) - \alpha \log\left(\frac{\alpha}{p}\right). \quad (2.12)$$

Définition 2.4 L'estimateur du quantile extrême de la loi GPD est défini par :

$$\widehat{q}_n^{gpd}(\alpha_n) = Y_{n-k_{n+1,n}} + \frac{\widehat{\sigma}_n}{\widehat{\gamma}_n} \left(\left(\frac{k_n}{na_n} \right)^{\widehat{\gamma}_n} - 1 \right)$$

où $\widehat{\gamma}_n$ et $\widehat{\sigma}_n$ sont des estimateurs des paramètres de forme et d'échelle.

pour estimer γ et σ . on présentera quatre grandes méthodes très utilisées en pratique sur un échantillon Z_1, \dots, Z_{k_n} . IID de loi DPD $g_{\gamma,\sigma}$:

2.10.1 Estimation des paramètres par la méthode du maximum de vraisemblance

La fonction de log-vraisemblance est obtenue à partir de la loi GPD $g_{\gamma,\sigma}$ donne :

$$\log(L(\gamma, \sigma)) = k_n \log(\sigma) - \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)_{i=1}^{k_n} \log\left(1 + \frac{\gamma}{\sigma} Z_i\right).$$

avec

$$1 + \gamma Z_i > 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, k_n\} \quad \text{sinon } L(\gamma, \sigma) = \infty.$$

2.10.2 Estimation des paramètres par la méthode des moments

La méthode des moments fut introduite pour estimer les paramètres de la loi GPD, pour que l'espérance et la variance d'une variable aléatoire Z de loi GPD $g_{\gamma,\sigma}$ existent il faut que $\gamma < 1/2$. Dans ce cas on a :

$$E(Z) = \frac{\sigma}{1-\gamma} \quad \text{et} \quad \text{VAR}(Z) = \frac{\sigma^2}{(1-\gamma)(1-2\gamma)}.$$

On peut alors facilement exprimer les paramètres de la loi GPD γ et σ en fonction de l'espérance et de la variance de Z , soit :

$$\gamma = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{E(Z)^2}{\text{VAR}(Z)}\right) \quad \text{et} \quad \sigma = \frac{E(Z)}{2} \left(1 + \frac{E(Z)^2}{\text{VAR}(Z)}\right).$$

Ainsi en remplaçant $E(Z)$ et $\text{VAR}(Z)$ par leurs estimateurs empiriques :

$$\bar{Z} := \frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} Z_i \quad \text{et} \quad S^2(Z) := \frac{1}{k_n - 1} \sum_{i=1}^{k_n} (Z_i - \bar{Z})^2.$$

On obtient les estimateurs des moments de γ et σ soit :

$$\hat{\gamma}_n^{(m)} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\bar{Z}^2}{S^2(Z)}\right) \quad \text{et} \quad \hat{\sigma}_n^{(m)} = \frac{\bar{Z}}{2} \left(1 + \frac{\bar{Z}^2}{S^2(Z)}\right).$$

2.10.3 Estimation des paramètres par la méthode des moments pondérés

On utilise une méthode basée sur les moments pondérés pour estimer les paramètres de la loi GPD. Soit μ_r le moment pondéré d'ordre r de la loi GPD $g_{\gamma,\sigma}$ défini par :

$$\mu_r := E\left(Z \left(1 - g_{\gamma,\sigma}(Z)\right)^r\right) = \frac{\sigma}{(1+r)(1+r-\gamma)} \quad \text{avec} \quad \gamma < 1/r.$$

On peut facilement exprimer les paramètres de la loi *GPD* γ et σ en fonction de μ_0 et μ_1 , soit :

$$\gamma = \frac{\mu_0 - 4\mu_1}{\mu_0 - 2\mu_1} \quad \text{et} \quad \sigma = \frac{2\mu_0\mu_1}{\mu_0 - 2\mu_1}.$$

Ainsi en remplaçant respectivement $\mu_r, r \in \{0, 1\}$ par son estimateur empirique :

$$\widehat{\mu}_{r,n} = \frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} \left(1 - \frac{i}{1+k_n}\right)^r Z_{i,k_n}.$$

Où les $Z_{1,m}, \dots, Z_{m,m}$ sont les statistiques ordonnées associées à l'échantillon Z_1, \dots, Z_m , on obtient les estimateurs des moments pondérés des paramètres γ et σ , soit :

$$\widehat{\gamma}_n^{mp} = \frac{\widehat{\mu}_{0,n} - 4\widehat{\mu}_{1,n}}{\widehat{\mu}_{0,n} - 2\widehat{\mu}_{1,n}} \quad \text{et} \quad \widehat{\sigma}_n^{mp} = \frac{2\widehat{\mu}_{0,n}\widehat{\mu}_{1,n}}{\widehat{\mu}_{0,n} - 2\widehat{\mu}_{1,n}}.$$

2.10.4 Estimation des paramètres par l'estimateur DEdH (Dekkers, Einmahl et de Haan)

Les paramètres de la loi *GPD* est estimée comme suit. Soit $(k_n)_{n>0}$, une suite d'entiers avec $0 < k_n < n$, on a comme estimateur de $\gamma \in \mathbb{R}$:

$$\widehat{\gamma}_n^M = M_{k_n}^{(1)} + 1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(M_{k_n}^{(1)})^2}{M_{k_n}^{(2)}}\right)^{-1}. \quad (2.13)$$

où

$$M_{k_n}^{(r)} = \frac{1}{k_n - 1} \sum_{i=1}^{k_n-1} (\log(Z_i))^r, \quad r \in \mathbb{R}.$$

L'estimateur $\widehat{\gamma}_n^M$ est une généralisation de l'estimateur de Hill permettant d'estimer $\gamma \in \mathbb{R}$.

Ils proposent également d'estimer $\sigma > 0$ par :

$$\widehat{\sigma}_n = \widehat{Y}_{n-k_n+1,n} M_n^{(1)} \left(1 - \widehat{\gamma}_n^M + M_n^{(1)}\right).$$

Si on insère ces deux estimateurs dans l'estimateur du quantile extrême de la loi *GPD*, on obtient l'estimateur *DEdH* donné par :

Définition 2.5 Soit $(k_n)_{n>0}$ une suite d'entiers avec $0 < k_n < n$, l'estimateur DEdH est défini par :

$$\widehat{q}_n^M(\alpha_n) = Y_{n-k_n+1,n} + Y_{n-k_n+1,n} \frac{M_n^{(1)}(1 - \widehat{\gamma}_n^M + M_n^{(1)})}{\widehat{\gamma}_n^M} \left(\left(\frac{k_n}{np_n} \right)^{\widehat{\gamma}_n^M} - 1 \right). \tag{2.14}$$

2.11 Approche semi-paramétrique

Le plus connu des estimateurs de quantiles extrêmes basé sur une approche semi-paramétrique est l'estimateur de Weissman, On verra qu'il repose sur l'estimation de $\gamma > 0$ Comme estimateur de l'indice des valeurs extrêmes $\gamma > 0$. on citera le plus connu d'entre eux qui est l'estimateur de Hill ainsi que l'estimateur de Zipf qui est basé sur une approche par moindres carrés.

2.11.1 Lois à queues lourdes

Dans le domaine d'attraction de Fréchet, l'approche semi-paramétrique est basée sur la définition de la fonction quantile, Pour tout $\gamma > 0$, on a :

$$\begin{aligned} q(\alpha_n) &= \alpha_n^{-\gamma} l(\alpha_n^{-1}) \quad \text{avec } l \in RV_0 \dots \dots \dots (1).2.15 & (2.1) \\ q(\beta_n) &= \beta_n^{-\gamma} l(\beta_n^{-1}) \quad \text{avec } l \in RV_0 \dots \dots \dots (2). \end{aligned}$$

En divisant (2) par (1) et à l'aide de la définition d'une fonction à variations lentes, si α_n est suffisamment petite et $\beta_n < \alpha_n$ on obtient l'approximation suivante :

$$q(\beta_n) \simeq q(\alpha_n) \left(\frac{\alpha_n}{\beta_n} \right)^\gamma.$$

Définition 2.6 L'estimateur de Weissman est défini par :

$$\widehat{q}_n^W(\beta_n) = Y_{n-[n\alpha_n],n} \left(\frac{\alpha_n}{\beta_n} \right)^{\widehat{\gamma}_n}. \tag{2.16}$$

Le terme $(\alpha_n/\beta_n)^{\widehat{\gamma}_n}$ est le terme servant à l'extrapolation L'estimateur de Weissman repose sur l'estimation de $\gamma > 0$, Le plus connu de ces estimateurs étant l'estimateur de Hill.

2.11.1.0.1 Estimateur de Hill On introduit le logarithme dans l'équation précédent, ce qui donne :

$$\log(q(\beta_n) - \log(q(\alpha_n))) \simeq \gamma \log(\alpha_n/\beta_n).$$

On choisit comme précédemment, $\alpha_n = k_n/n$ et on considère plusieurs valeurs pour β_n . $\beta_n = i/n$ avec $i = 1, \dots, k_n - 1$ tout en ayant $\beta_n < \alpha_n$. On obtient alors :

$$\log q(i/n) - \log(q(k_n/n)) \simeq \gamma \log(k_n/i).$$

Ainsi en estimant les quantiles par leurs équivalents empiriques on obtient :

$$\log(Y_{n-i+1,n}) - \log(Y_{n-k_n+1,n}) \simeq \gamma \log(k_n/i). \tag{2.17}$$

En sommant de part et d'autre sur $i = 1, \dots, k_n - 1$, on obtient :

$$\gamma \simeq \frac{\sum_{i=1}^{k_n-1} \log(Y_{n-i+1,n}) - \log(Y_{n-k_n+1,n})}{\sum_{i=1}^{k_n-1} \log(k_n/i)}.$$

Le dénominateur se réécrit $\log(k_n^{k_n-1}/(k_n-1)!)$. On obtient alors l'estimateur de Hill.

Définition 2.7 soit $(k_n)_{n>1}$ une suites d'entiers avec $1 < k_n \leq n$, estimateur de Hill est défini par :

$$H_n(k_n) = \frac{1}{k_n - 1} \sum_{i=1}^{k_n-1} \log(Y_{n-i+1,n}) - \log(Y_{n-k_n+1,n})$$

Theorem 2.1 Propriétés asymptotiques de l'estimateur de Hill : Soit $(k_n)_{n>1}$ une suites d'entiers telle que $1 < k_n \leq n, k_n \rightarrow \infty$ et $k_n/n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$: alors $H_n(k_n)$ converge en probabilité vers γ (consistance faible), et si de plus $k_n/\log \log n \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$, alors $H_n(k_n)$ onverge presque sûrement vers γ (consistance forte).

Theorem 2.2 Normalité asymptotique de l'estimateur de Hill :

Soit $(k_n)_{n>1}$ une suites d'entiers telle que $1 < k_n \leq n, k_n \rightarrow \infty$ et $k_n/n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Si de plus la condition de second ordre est satisfaite avec $\sqrt{k_n}b(n/k_n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$ alors :

$$\sqrt{k_n}(H_n(k_n) - \gamma) \xrightarrow{d} N(0, \gamma^2).$$

2.11.1.0.2 Estimateur de Zipf

Définition 2.8 Soit $(k_n)_{n>1}$ une suites d'entiers telle que $1 < k_n \leq n$, l'estimateur de Zipf est défini par :

$$\widehat{\gamma}_n^Z = \frac{\frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} (\log(\frac{k_n+1}{i}) - \frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} \log(\frac{k_n+1}{i})) \log(Y_{n-i+1,n})}{\frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} (\log(\frac{k_n+1}{i}))^2 (\frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} (\log(\frac{k_n+1}{i}))^2)}. \quad (2.18)$$

2.11.2 Lois à queue de type Weibull

On a d'après la définition de la fonction quantile pour les lois à queue de type Weibull pour tout $\beta > 0$:

$$q(\alpha) = (\log(\alpha))^\beta l(-\log(\alpha)) \quad \text{avec} \quad l \in RV_0.$$

Ce qui donne en passant au logarithme :

$$\frac{\log q(\alpha)}{\log \log(1/\alpha)} = \beta + \frac{\log l(\log(1/\alpha))}{\log \log(1/\alpha)}.$$

et après la définition du fonction à variation lente :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log l(\log(1/\alpha))}{\log \log(1/\alpha)} = 0.$$

on en déduit que lorsque $\alpha \rightarrow 0$:

$$\log q(\alpha) \approx \beta \log \log(1/\alpha). \quad (2.19)$$

si on a (k_n) une suite intermédiaire d'entiers, alors on a :

$$\log q(\alpha_n) \approx \beta \log \log(1/\alpha_n) \dots (1). \quad (2.20)$$

$$\log q(k_n/n) \approx \beta \log \log(n/k_n) \dots (2). \quad (2.21)$$

En soustrayant l'équation à l'équation (1) on obtient :

$$\log(q(\alpha_n)) \approx \log q(k_n/n) + \beta (\log \log(1/\alpha_n) - \log \log(n/k_n)).$$

On applique alors la fonction exponentielle, ce qui donne :

$$q(\alpha_n) \approx q(k_n/n) \left(\frac{\log(1/\alpha_n)}{\log(n/k_n)} \right)^\beta. \quad (2.22)$$

Le quantile $q(k_n/n)$ se trouve dans l'échantillon, on peut alors l'estimer par son estimateur empirique soit la statistique d'ordre $Y_{n-k_n+1,n}$. Puis on remplace β par un estimateur quelconque β_n

estimant $\beta > 0$. Ce qui nous permet d'obtenir l'estimateur de Beirlant.

Définition 2.9 *L'estimateur de Beirlant est défini par :*

$$\widehat{q}_n^B(\alpha_n) = Y_{n-k_n+1,n} \left(\frac{\log(1/\alpha_n)}{\log(n/k_n)} \right)^{\widehat{\beta}_n}. \quad (2.23)$$

2.11.2.0.1 Estimation de l'indice de queue de type Weibull

Définition 2.10 *Soit $(k_n)_{n>1}$ une suites d'entiers telle que $1 < k_n \leq n$, l'estimateur de Beirlant est défini par :*

$$\widehat{\beta}_n^B = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{k_n-1} \log \log(n/i) - \log \log(n/k_n) \right)} \sum_{i=1}^{k_n} \left(\log(Y_{n-i+1,n}) - \log(Y_{n-k_n+1,n}) \right). \quad (2.24)$$

La forme de cet estimateur est très proche de celle de l'estimateur de l'indice des valeurs extrêmes proposé par Hill . En effet, seul le terme de normalisation (dénominateur) diffère.

Un autre estimateur est proposé dans Beirlant et al. où β est estimé par :

$$\widehat{\beta}_n^B = \frac{\log(n/k_n) - 1}{Y_{n-k_n+1,n} k_n - 1} \sum_{i=1}^{k_n} \left(\log(Y_{n-i+1,n}) - \log(Y_{n-k_n+1,n}) \right).$$

2.12 Estimation de quantiles conditionnels extrêmes

Définition 2.11 *Le quantile conditionnel extrême d'ordre $1 - \alpha_n$ de $F(\cdot \setminus x)$ est défini par :*

$$q(\alpha_n \setminus x) := \overline{F}^{\leftarrow}(\alpha_n \setminus x) \quad \text{avec} \quad \alpha_n \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty.$$

Définition 2.12 *L'estimateur du quantile conditionnel extrême est défini par :*

$$\widehat{q}_n^{\text{gpd}}(\alpha_n \setminus x) = \widehat{u}_n(x) + \frac{\widehat{\sigma}_n(x)}{\widehat{\gamma}_n(x)} \left(\left(\frac{k_n}{n\alpha_n} \right)^{\widehat{\gamma}_n(x)} - 1 \right).$$

où $\widehat{\gamma}_n(x)$, $\widehat{u}_n(x)$ et $\widehat{\sigma}_n(x)$ sont des estimateurs respectifs de $\gamma(x)$, $u(x)$ et de $\sigma(x)$.

Définition 2.13 *L'estimateur de Weissman adapté au cas conditionnel est défini par :*

$$\widehat{q}_n^W(\beta_n \setminus x) = \widehat{q}_n(\alpha_n \setminus x) \left(\frac{\alpha_n}{\beta_n} \right)^{\widehat{\gamma}_n(x)}.$$

où dans ce cas $\widehat{q}_n(\alpha_n|x)$ correspond à l'estimation d'un quantile conditionnel choisi dans un sous-échantillon des observations prises dans un voisinage de x .

Afin d'estimer des quantiles extrêmes conditionnels le but est alors comme précédemment d'estimer $\gamma(x)$, $u(x)$ et $\sigma(x)$.

CHAPITRE 3

APPLICATION DES QUANTILES EXTRÊMES AUX MESURES DU RISQUES

3.1 Mesures de risque actuariel

Définition 3.1 Soit X une variable aléatoire désignant un montant de perte. Une mesure de risque (Prime) est une fonctionnelle ρ faisant correspondre à un risque X (perte) une valeur positive $\rho[X]$ éventuellement infinie. Pour autant que ρ soit normalisée (ie. $\rho[0]=0$), $\rho[X]$ est le montant minimum qui, additionné à la perte en début de période rend la couverture de X « acceptable ». Elle représente donc le capital à déterminer pour faire face à une perte financière de montant X . De grandes valeurs de $\rho[X]$ indiqueront que X est « dangereux ».

Définition 3.2 Un portefeuille (en finance) désigne une collection d'actifs financiers détenus par un établissement ou un individu. Ce peut aussi désigner des valeurs mobilières détenues à titre d'investissements, de dépôt, de provision ou de garantie.

Remarque 3.1 La définition précédente nous permet d'établir que l'espérance, la variance ou l'écart type sont des mesures de risque.

3.2 Mesures de risque de Wang

Nous avons la moyenne du risque ou prime nette définie par :

$$\pi := E(X) = \int_0^{\infty} \bar{F}(X) dx.$$

la fonction de survie $\bar{F} = 1 - F$ est la fonction de survie de la variable aléatoire positive X .

On introduit la fonction croissante $g : [0, 1] \mapsto [0, 1]$ telle que $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$, appelée la fonction de distorsion, qui est définie par

$$\pi(g, F) := \int_0^\infty g(\bar{F}(X)) dx.$$

Cette mesure de risque a été introduite par Wang (1996) et est cohérente si et seulement si la fonction de distorsion correspondante g est concave. En choisissant une fonction de distorsion convenable g , nous regroupons dans le Tableau ci-dessous certaines mesures de risque avec les paramètres ρ, α, ζ , et κ sont appelés paramètres de distorsion.

TABLE 3.1 – Exemples de mesures de risque

Mesure de risque	Paramètre	Fonction de distorsion
Value-at-Risk	$Var_\alpha, 0 \leq \alpha < 1$	$g(x) = 1_{[\alpha, \infty]}(x)$.
Conditionnal Tail Expectation	$CTE_\alpha, 0 \leq \alpha < 1$	$g(x) = \min(x/\alpha, 1)$.
La prime ajustée	$PRA_\rho, 1 \leq \rho < \infty$	$g(x) = x^{1/\rho}$
Mesure de risque Look-back	$LB_\zeta, 0 < \zeta \leq 1$	$g(x) = x^\zeta (1 - \zeta \ln x)$.
Wang Transform	$WT_\kappa, 0 \leq \kappa < \infty$	$g(x) = \phi(\phi^{-1}(x) + \kappa)$.

3.3 Estimation de la VaR (Value at Risk)

La VaR (de l'anglais value at risk, mot à mot : « valeur à risque », ou « valeur en jeu ») est une notion utilisée généralement pour mesurer le risque de marché d'un portefeuille d'instruments financiers. Elle correspond au montant de pertes qui ne devrait être dépassé qu'avec une probabilité donnée sur un horizon temporel donné.

Un portefeuille (en finance) désigne une collection d'actifs financiers détenus par un établissement ou un individu. Ce peut aussi désigner des valeurs mobilières détenues à titre d'investissements, de dépôt, de provision ou de garantie.

Définition 3.3 Soit $0 < p < 1$, F est la distribution de la perte X d'un investissement dans une période de temps donnée. Les valeurs typiques pour $1 - p$ sont $1 - p = 0.95$ et $1 - p = 0.99$.

La VaR est le quantile d'ordre $1 - p$ défini par :

$$VaR_p = F^{-1}(1 - p). \tag{3.1}$$

Où F^{-1} est la fonction inverse de F (dans le cas où F n'est pas inversible, on utilise l'inverse généralisé).

Notons

$$\begin{aligned} x_p &= F^{-1}(1-p) \\ &= \inf\{x \in \mathbb{R}; F(x) \geq 1-p\}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Définition 3.4 (Mesure de risque cohérente) Une mesure de risque est une fonctionnelle ρ faisant correspondre à un risque X un nombre positif noté $\rho(X)$ éventuellement infini, est dite cohérente et si elle satisfait les caractéristiques suivantes :

A1: *Monotonie si :*

$$X > Y \xrightarrow{p.s.} \rho(X) > \rho(Y).$$

A2: *Sous-additivité si :*

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y).$$

A3: *Homogénéité si :*

$$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X) \quad \text{pour } \lambda > 0.$$

A4: *Invariance par translation si :*

$$\rho(X + a) = \rho(X) + a.$$

3.4 Expected shortfall

Définition 3.5 L'expected shortfall ou ES mesure la taille moyenne des pertes sachant que celle-ci dépasse la VaR

$$\begin{aligned} ES_p &= E[X | X > VaR_p(X)]. \\ &= E[X + VaR_p(X) - VaR_p(X) | X > VaR_p(X)]. \\ &= VaR_p(X) + E[X - VaR_p(X) | X > VaR_p(X)]. \end{aligned}$$

Exemple 3.1 L'Expected shortfall est une mesure de risque cohérente. Par contre la VaR n'est pas une mesure de risque cohérente car elle ne vérifie pas la condition de sous-additivité.

3.5 Méthodes de calcul de la Value at Risk

3.5.1 Les Méthodes Paramétriques

Le risque de marché correspond à un risque de perte des portefeuilles des investisseurs dû aux variations des marchés financiers : marchés des instruments de base (actions, obligations, devises, matières premières), mais aussi marchés des produits dérivés (contrats à terme, options). Pour gérer le risque de marché, il faut donc mesurer de manière précise ce risque extrême. La mesure qui répond à cela est la *VaR* (Value at Risk).

3.5.1.1 La VaR Gaussienne

3.5.1.1.1 La distribution gaussienne Une distribution est gaussienne si l'expression de sa densité est

$$\phi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (3.2)$$

Nous notons alors $X \sim N(\mu, \sigma)$ et nous avons les propriétés

$$\begin{aligned} E[X] &= \mu. \\ \text{Var}[X] &= \sigma^2. \end{aligned}$$

Lorsque μ et σ valent respectivement 0 et 1, nous parlons de distribution normale centrée et réduite $N(0, 1)$, Φ la fonction de répartition. Le lien entre les lois de probabilité $N(\mu, \sigma)$ et $N(0, 1)$ est donné par la relation suivante :

$$N(\mu, \sigma) = \mu + \sigma N(0, 1).$$

De manière classique, le choix du modèle paramétrique se porte sur la loi Normale. Supposons donc que les rentabilités du portefeuille $R_{t|t+T}$ soient issues, d'une variable aléatoire Gaussienne : ainsi, F est définie par $N(\mu, \sigma^2)$, avec μ l'espérance et σ^2 est la variance.

Nous obtenons ainsi à partir de l'équation (3.2), $\Phi\left(\frac{\text{VaR}_p - \mu}{\sigma}\right) = p$, ou Φ est la fonction de répartition de la loi Normale centrée réduite.

Définition 3.6 La *VaR Gaussienne* est définie de la manière suivante :

$$\boxed{\text{VaR}_p = \mu + \sigma\Phi^{-1}(p)}.$$

Les paramètres μ et σ sont donnés par leurs estimateurs du maximum de vraisemblance.

3.5.2 Les Méthodes Non Paramétriques

Le principe général des méthodes non paramétriques d'estimation et de prévision de la Value at Risk est que l'on impose à priori aucune distribution paramétrique.

3.5.2.1 Les méthodes de Monte Carlo

Notons X un vecteur aléatoire de dimension de loi μ sur l'espace probabilisé (Ω, F, P) .

On considère une fonction

$$\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R},$$

où l'on sait seulement évaluer $\Phi(x)$ en tout point x de \mathbb{R}^d .

Un réel x_p étant fixé, le but est de générer un échantillon iid X_1, \dots, X_N tel que pour tout i :

$$X_i \sim L(X | \Phi(x) > x_p).$$

Une probabilité p très petite fixée ; En proposant de calculer le quantile extrême x_p tel que

$$P(\Phi(x) > x_p) = p.$$

par deux méthodes :

1. **Méthode de Monte Carlo classique** : cette méthode consiste à :

- Simuler un échantillon *IID*. X_1, \dots, X_N , de loi μ .
- Ordonner les variables aléatoires de sorte que

$$\Phi(X_{(1,N)}) < \Phi(X_{(2,N)}) < \dots < \Phi(X_{(N,N)}).$$

- Considérer l'estimateur

$$x_p^{mc} = \Phi(X_{([(1-p)N], N)}).$$

Si la fonction de répartition

$$F(y) = P(\Phi(X) < y).$$

admet une dérivée non nulle au point q , alors on peut montrer que le biais est en $o(1/N)$ et l'écart quadratique de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \text{Var}(\widehat{x}_p^{mc}) &= \frac{p(1-p)}{N+2} \frac{1}{f^2(q)} + o(1/N). \\ &\approx \frac{1}{N} \frac{p}{f^2(q)}. \end{aligned}$$

2. **Méthode basée sur un algorithme** :

Nous proposons l'algorithme suivant :

Simuler un échantillon iid X_1, \dots, X_N de loi est initialiser

$$X_1^1 = X_1, \dots, X_N^1 = X_N.$$

Noter

$$L_m = \min(\Phi(X_1^m), \dots, \Phi(X_N^m)), \quad \text{pour } m = 1, 2, \dots$$

et définir

$$X_j^{m+1} = \begin{cases} X_j^m & \text{si } \Phi(X_j^m) > L_m; \\ X^* \sim L(X|\Phi(x) > L_m), & \text{si } \Phi(X_j^m) = L_m; \end{cases}$$

En notant

$$M = \max\{m : L_m \leq x_p\},$$

Ce maximum étant par convention égal à 0 si $L_1 > x_p$;

L' échantillon $X_1, \dots, X_N = X_1^{M+1}, \dots, X_N^{M+1}$ est iid de loi approximativement égale à $\mathcal{L}(X|\Phi(x) > x_p)$.

En utilisant l'algorithmme ci-dessus, il suffit de noter :

$$m = \left\lceil \frac{\log(p)}{\log\left(1 - \frac{1}{N}\right)} \right\rceil \approx [N \log(p)].$$

et estimer le quantile x_p par

$$\widehat{x}_p = L_m.$$

Proposition 3.1 *Si la variable $\Phi(x)$ admet une densité $f(x_p)$ non nulle en x_p , alors l'erreur quadratique est asymptotiquement bornée comme suit :*

$$\frac{p^2(-\log(p) - 2)}{f^2(x_p)} \leq \lim_{N \rightarrow \infty} N.E \left[(\widehat{x}_p - x_p)^2 \right] \leq \frac{p^2(-\log(p) + 2)}{f^2(x_p)}.$$

On a estimation proposée par x_p est bien plus précise que celle offerte par l'estimateur Monte Carlo classique x_p^{mc} , puisque :

$$VaR(\widehat{x}_p) \approx \frac{1}{N} \frac{p^2 \log(p)}{f^2(x_p)} \ll VaR(\widehat{x}_p^{mc}) \approx \frac{1}{N} \frac{p}{f^2(x_p)}.$$

3.5.2.2 VaR historique

Cette technique non paramétrique utilise uniquement la distribution

Il suffit de disposer des données historiques d'une distribution F pour ca...

Supposons qu'on dispose d'un historique de longueur n . Cela veut dire qu'on a pour chaque date $t = \{t-1, \dots, t-n\}$ une observation de F , on obtient un échantillon $(X_{t-1}, \dots, X_{t-n})$ de variables aléatoires IID, puis on estime F par sa distribution empirique,

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1_{\{X_k \leq x\}}.$$

On a le théorème de Glivenko-Cantelli assure que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| = 0, p.s..$$

Ce qui nous permet d'estimer le quantile $F^{-1}(1-p)$ et par la suite de calculer la VaR par

$$VaR_p = F^{-1}(1-p) = X_{(i,n)}, \quad p \in \left] \frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right[$$

Où $X_{(1,n)} < X_{(2,n)} < \dots < X_{(n,n)}$ sont les statistiques d'ordre.

3.5.2.3 Méthode des noyaux

On a $K(x)$ une fonction associée à chaque observation de l'échantillon $X_1 < X_2 < \dots < X_n$.

Définition 3.7 Soit K une fonction intégrable définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

On dit que K est noyau si :

—

$$\int_{\mathbb{R}} K(u) du = 1.$$

— si $K > 0$, le noyau K est dit positif.

— si $K(u) = K(-u)$, le noyau K est dit symétrique

Définition 3.8 Soit K est noyau, on dit que K est d'ordre r , $r \in \mathbb{N}^*$, si :

$$\int u^j K(u) du = 0, \quad \text{et} \quad \int u^{r+1} K(u) du \neq 0, \forall j = 1, \dots, r.$$

3.5.2.3.1 Estimateur à noyau L'estimation par noyau (ou méthode de Parzen-Rozenblatt) est une méthode non paramétrique d'estimation de la densité d'une variable aléatoire. Cette méthode permet d'obtenir une densité continue et constitue en ce sens une généralisation de la méthode de l'histogramme.

En effet, la fonction indicatrice utilisée pour l'histogramme est ici remplacée par une fonction continue (le noyau) et une somme de fonctions continues reste continue.

Définition 3.9 On appelle estimateur à noyau K de f l'estimateur donné par :

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-x_i}{h}\right).$$

où n est la taille de l'échantillon X , K est la fonction noyau et h est dit fenêtre ou bien le paramètre de lissage qui détermine son étendue.

Définition 3.10 L'estimateur à noyau de $F(x)$ est donnée par :

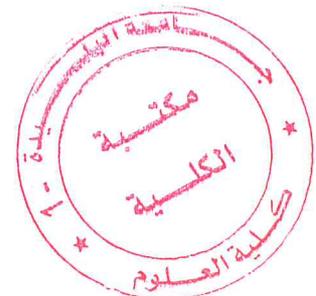
$$\widehat{F}(x) = \int_{-\infty}^x \widehat{f}(y) dy = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_I\left(\frac{x-x_i}{h}\right).$$

où

$$K_I(u) = \int_{-\infty}^u K(w) dw.$$

L'estimateur de la VaR_p peut être obtenu en inversant F ,

$$\widehat{VaR}_p = F^{-1}(1-p).$$



Sous les hypothèses précédentes, l'estimateur par noyau est l'estimateur non paramétrique qui converge le plus vite, ie à la vitesse $n^{-4/5}$ et pour un choix de h proportionnel à $n^{-4/5}$.

Les noyaux les plus couramment utilisés sont les suivants :

- Noyau rectangulaire : $K(u) = \frac{1}{2} 1_{[-1,1]}(u)$.
- Noyau triangulaire : $K(u) = (1 - |u|) 1_{[-1,1]}(u)$.
- Noyau gaussien : $K(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}$
- Noyau d'Epanechnikov : $K(u) = \frac{3}{4} (1 - u^2) 1_{[-1,1]}(u)$.

3.5.3 Les Méthodes Semi-Paramétriques

3.5.3.1 Estimation de la VaR par la TVE

1. VaR par la méthode des blocs :

Supposons que l'échantillon des maxima suit exactement une loi *GEV*, Le quantile extrême x_p est la *VaR*.

En remplaçant le paramètre γ par son estimateur :

(a) Approche par l'estimateur de Hill :

Le quantile extrême est donnée par :

$$\begin{aligned} \widehat{x}_p^H &= X_{(n-K)} \left(\frac{n}{K} (1-p) \right)^{-\zeta_{n,K}^H} \\ &= X_{(n-K)} + X_{(n-K)} \left[\left(\frac{n}{K} (1-p) \right)^{-\zeta_{n,K}^H} - 1 \right]. \end{aligned}$$

L'estimation de la Value at Risk est donnée par la formule suivante

$$\widehat{VaR} = X_{(n-K)} + X_{(n-K)} \left[\left(\frac{n}{K} (1-p) \right)^{-\gamma_{n,K}^H} - 1 \right].$$

Où $\gamma_{n,K}^H$ est l'estimateur de Hill.

(b) Approche par l'estimateur de Pickands

$$VaR_p = x_{K,p}^p = \frac{\left(\frac{K}{n(1-p)} \right)^{\gamma^p - 1}}{1 - 2^{-\gamma^p}} (X_{(n-K+1,n)} - X_{(n-2K+1,n)}) + X_{(n-K+1,n)}.$$

Où γ^p est l'estimateur de Pickands.

2. *VaR* par la méthode *POT* La *VaR* est calculé à partir de la loi asymptotique des extrêmes (Distribution de Pareto Généralisée *GPD*), obtenue en modifiant les pertes (ou profits) extrêmes par la méthode des excès. Ainsi, la VaR_p correspondant au modèle *GPD* inconditionnel, pour un horizon donné T et une certaine probabilité p , ou de façon équivalente à un niveau de confiance typiquement $1 - p = 0.95$ et $1 - p = 0.99$ est :

$$\widehat{VaR} = u + \frac{\widehat{\beta}}{\widehat{\zeta}} \left[\left(\frac{K}{N_u} (1-p) \right)^{-\widehat{\zeta}} - 1 \right].$$

Où $\widehat{\beta}$ et $\widehat{\zeta}$ représentent les estimateurs des paramètres de la loi *GPD*.

3.6 Estimation de la VaR par le modèle GARCH

En économétrie, les modèles *ARCH* (Auto Regressive Conditional Heteroskedasticity) sont utilisés pour caractériser et modéliser des séries chronologiques. Les modèles *ARCH*

sont employés couramment dans la modélisation de séries temporelles financières, qui comportent des volatilités variables c'est-à-dire des périodes agitées suivies par des périodes de calme relatif. Dans ces modèles, la variance conditionnelle au temps t est variable. Elle dépend par exemple du carré des réalisations précédentes du processus ou du carré des innovations.

Ce nombre important de paramètres peut conduire à la violation de la contrainte de non-négativité de la variance et poser des problèmes d'estimations. Dans cette perspective, une extension importante, le modèle autorégressif conditionnellement hétéroscédastique généralisé (*GARCH*), est suggérée par Bollerslev [1986]. Cette approche exige moins de paramètres à estimer que la formulation *ARCH*(p) pour modéliser les phénomènes de persistance des chocs. La variance conditionnelle de la variable étudiée est déterminée par le carré des p termes d'erreur passés et des q variances conditionnelles retardées.

3.6.1 Modèle *GARCH*(p, q)

Notons que F est l'ensemble d'information tel que

$$\mathcal{F}_{t-1} = \sigma \{z_i : -\infty < i \leq t-1\}.$$

On considère un modèle linéaire autorégressif de rendement R_t à la date t exprimé sous la forme suivante :

$$R_t = E(R_t | \mathcal{F}_{t-1}) + \varepsilon_t.$$

Où ε_t est un bruit blanc faible, tel que $E(\varepsilon_t) = 0$ et $E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0$ si $s \neq t$,

Satisfaisant la condition de différence de martingale

$$E[\varepsilon_t | \mathcal{F}] = 0.$$

On suppose toujours que le processus ε_t peut s'écrire sous la forme :

$$\varepsilon_t = z_t \sigma_t.$$

Où z_t est un bruit blanc faible tel que $E(z_t) = 0$ et $Var(z_t) = \sigma_z^2$.

Soit

$$Var(R_t | F) = Var(\varepsilon_t | F) = \sigma_t^2.$$

Où σ_t^2 désigne la variance conditionnelle du processus R_t .

Afin de garantir la positivité de la variance conditionnelle, on suppose que $\beta_0 > 0, \beta_i > 0, i = 1, \dots, p, \gamma_j > 0, j = 1, \dots, q$.

Définition 3.11 Un processus ε_t satisfait une représentation GARCH(p, q) si

$$\begin{aligned}\varepsilon_t &= z_t \sigma_t. \\ \sigma_t^2 &= \beta_0 + \sum_{i=1}^p \beta_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \gamma_j \sigma_{t-j}^2.\end{aligned}$$

Où z_t est un bruit blanc faible et où $\beta_0 > 0, \beta_i > 0, i = 1, \dots, p, \gamma_j > 0, j = 1, \dots, q$.

3.6.2 Propriétés du modèle GARCH(p, q)

Les résidus ε_t du processus R_t , définis par le processus GARCH(p, q), satisfont les principales propriétés suivantes :

3.6.2.0.1 Propriétés 1 : Unicité et stationnarité

Theorem 3.1 Le processus GARCH(p, q) défini ci-dessus tel que $E(\varepsilon_t) = 0$ et $Cov(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0$ si $t \neq s$, est stationnaire si et seulement si

$$\sum_{i=1}^p \beta_i + \sum_{j=1}^q \gamma_j < 1.$$

3.6.2.0.2 Propriétés 2 : Le moment d'ordre un L'espérance de ε_t est égale à zéro

$$\begin{aligned}E[\varepsilon_t] &= E[z_t \sigma_t] = E[E(z_t \sigma_t \mid \mathcal{F})]. \\ &= E[\sigma_t E(z_t \mid \mathcal{F})] = E[\sigma_t E(z_t)] = E[\sigma_t 0] = 0.\end{aligned}$$

3.6.2.0.3 Propriété 3 : la corrélation On peut montrer que ε_t est non corrélée avec ε_{t+h} pour $h > 0$

$$\begin{aligned}E[\varepsilon_t \varepsilon_{t+h}] &= E[\varepsilon_t \sigma_{t+h} z_{t+h}] = E[E[\varepsilon_t \sigma_{t+h} z_{t+h} \mid \mathcal{F}]]. \\ &= E[\varepsilon_t \sigma_{t+h} E[z_{t+h} \mid \mathcal{F}]] = 0.\end{aligned}$$

3.6.2.0.4 Propriété 4 : La variance non conditionnelle Dans le but de calculer $E[\varepsilon_t^2]$, il est nécessaire de considérer une représentation alternative de ε_t^2 . Au début, on définit la variable :

$$Y_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2 = \sigma_t^2 (z_t - 1).$$

Utilisant la même démarche, on peut montrer que Y_t vérifie la propriété de martingale et que l'espérance est égale à zéro.

Nous procédons avec une autre représentation alternative et on écrit

$$\begin{aligned} \varepsilon_t^2 &= \sigma_t^2 + Y_t. \\ &= \beta_0 + \sum_{i=1}^p \beta_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \gamma_j \sigma_{t-j}^2 + Y_t. \\ &= \beta_0 + \sum_{i=1}^p \beta_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \gamma_j \sigma_{t-j}^2 - \sum_{j=1}^q \gamma_j Y_{t-j}^2 + Y_t. \end{aligned}$$

Si on note $B = \max(p, q)$, $\beta_i = 0$, pour $i > p$, et $\gamma_j = 0$, pour $j > q$.

On en déduit que :

$$\varepsilon_t^2 = \beta_0 + \sum_{i=1}^B (\beta_i + \gamma_j) \varepsilon_{t-i}^2 - \sum_{j=1}^q \gamma_j Y_{t-j}^2 + Y_t.$$

Utilisant la stationnarité où ($E[\varepsilon_t^2] = E[\varepsilon_{t+h}^2]$), a variance non conditionnelle s'écrit :

$$\begin{aligned} E[\varepsilon_t^2] &= \beta_0 + \sum_{i=1}^B (\beta_i + \gamma_j) E[\varepsilon_{t-i}^2] - \sum_{j=1}^q \gamma_j E[Y_{t-j}^2] + E[Y_t]. \\ &= \beta_0 + E[\varepsilon_t^2] \sum_{i=1}^B (\beta_i + \gamma_j). \end{aligned}$$

Finalement

$$E[\varepsilon_t^2] = \frac{\beta_0}{1 - \sum_{i=1}^B (\beta_i + \gamma_j)}.$$

3.6.2.0.5 Propriété 5 : Le moment centré d'ordre 4

Définition 3.12 La Kurtosis d'une variable aléatoire ε_t correspond à son moment centré d'ordre 4, c'est-à-dire

$$\mu_4 = E[(\varepsilon_t - \mu)^4].$$

La Kurtosis est une mesure de l'épaisseur des queues de distributions. On définit ainsi une nouvelle mesure : Le degré d'excès de Kurtosis.

$$\text{Degré d'excès de kurtosis} = E\left[\left(\frac{\varepsilon_t - \mu}{\sigma_t}\right)^4\right] - 3.$$

Cette dernière mesure est utilisée par rapport à la distribution normale, qui est considérée comme une distribution à queue plate, et qui possède un degré d'excès de Kurtosis normalisé à 0. Si la Kurtosis excède 3 (queues épaisses) la distribution est dite leptokurtique, si la Kurtosis est inférieure à 3, la distribution est dite platikurtique.

Considérons le cas de la kurtosis associée à la loi non conditionnelle dans un processus GARCH conditionnellement gaussien

Définition 3.13 $\varepsilon_t = \sigma_t z_t$ z_t IID $\sim N(0,1)$

Dans le cas, les moments conditionnels d'ordre 2 et 4 du processus ε_t sont liés :

$$E(\varepsilon_t^4 \setminus \mathcal{F}) = 3 [E(\varepsilon_t^2 \setminus \mathcal{F})]^2.$$

En effet, on rappelle que si une variable centrée Y suit une loi gaussienne, $E(Y^4) = 3\text{Var}(Y)^2$. Si l'on considère l'espérance des membres de cette équation, on aura :

$$\begin{aligned} E[E(\varepsilon_t^4 \setminus \mathcal{F})] &= E(\varepsilon_t^4). \\ 3E[E(\varepsilon_t^2 \setminus \mathcal{F})^2] &> 3\{E[E(\varepsilon_t^2 \setminus \mathcal{F})]\}^2 = 3[E(\varepsilon_t^2)]^2. \end{aligned}$$

Ainsi, on en déduit que la loi marginale de ε_t a des queues plus épaisses qu'une loi normale puisque :

$$E(\varepsilon_t^4) > 3[E(\varepsilon_t^2)]^2.$$

De plus, on peut calculer la kurtosis comme suit :

$$\begin{aligned} \text{Kurtosis} &= \frac{E(\varepsilon_t^4)}{E(\varepsilon_t^2)^2} = \frac{3[E(\varepsilon_t^2 \setminus \mathcal{F})^2]}{E(\varepsilon_t^2)^2}. \\ &= 3 \frac{E(\varepsilon_t^2)^2}{E(\varepsilon_t^2)^2} + \frac{3}{E(\varepsilon_t^2)^2} \left\{ [E(\varepsilon_t^2 \setminus \mathcal{F})^2] - E(\varepsilon_t^2)^2 \right\}. \\ &= 3 + \frac{3}{E(\varepsilon_t^2)^2} \left\{ [E(\varepsilon_t^2 \setminus \mathcal{F})^2] - E[E(\varepsilon_t^2 \setminus \mathcal{F})]^2 \right\}. \\ &= 3 + 3 \frac{\text{Var}[E(\varepsilon_t^2 \setminus \mathcal{F})]}{E(\varepsilon_t^2)^2}. \end{aligned}$$

La kurtosis est donc liée à une mesure de l'hétéroscédasticité conditionnelle.

Proposition 3.2 Si le processus satisfait une représentation GARCH(p, q) conditionnellement gaussienne, telle que :

$$\varepsilon_t = z_t \sigma_t.$$

$$\text{Var}(\varepsilon_t | F) = \sigma_t^2 = \beta_0 + \sum_{i=1}^p \beta_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \gamma_j \varepsilon_{t-j}^2.$$

Où z_t est un bruit blanc faible gaussien, alors (i) la loi marginale de ε_t a des queues plus épaisses qu'une loi normale (distribution leptokurtique) :

$$E(\varepsilon_t^4) \geq 3 [E(\varepsilon_t^2)]^2.$$

et (ii) son coefficients d'excès de kurtosis peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$\text{Excès de kurtosis} = \frac{E(\varepsilon_t^4)}{E(\varepsilon_t^2)^2} - 3 = 3 - \frac{\text{Var}[E(\varepsilon_t^2 | F)]}{E(\varepsilon_t^2)^2}.$$

3.6.2.1 Le modèle GARCH(1,1)

Un modèle GARCH(1,1) s'écrit de la façon suivante :

$$\varepsilon_t = z_t \sigma_t.$$

$$\sigma_t^2 = \beta_0 + \beta_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma_1 \sigma_{t-1}^2.$$

3.6.2.1.1 Propriétés du modèle GARCH(1,1) Les moments du modèle GARCH(1,1) peuvent s'avérer pour prendre les valeur suivantes :

1. $E(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = 0$.
2. Le moment d'ordre deux de ε_t est :

$$\text{Var}(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = \frac{\beta_0}{1 - \beta_1 - \gamma_1}.$$

si $0 < \beta_1 - \gamma_1 < 1$, et $\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0 \quad \forall t \neq s$.

3. Le moment d'ordre quatre de ε_t est

$$E(\varepsilon_t^4) = \frac{3\beta_0^2(1 + \beta_1 + \gamma_1)}{(1 - \beta_1 - \gamma_1)(1 - \beta_1^2 - 2\beta_1\gamma_1^2 - 3\beta_1^2)}.$$

si $0 < \beta_1 + \gamma_1 < 1$ et $3\beta_1^2 + 2\beta_1\gamma_1^2\beta_1^2 < 1$.

Ceci est vérifié quand $\beta_1 + \gamma_1$ est proche de un, et la valeur de β_1 n'est pas proche de zéro.

4. La kurtosis non conditionnelle est égale à :

$$kurtosis = \frac{E(\varepsilon_t^4)}{E(\varepsilon_t^2)^2} = \frac{3\beta_0^2(1 + \beta_1 + \gamma_1)^2(1 - \beta_1 - \gamma_1)}{1 - \beta_1^2 - 2\beta_1\gamma_1^2 - 3\beta_1^2}.$$

si $3\beta_1^2 + 2\beta_1\gamma_1^2\beta_1^2 < 1$, Quand $\gamma_1 = 0$, cette condition est la même que dans le modèle $GARCH(1, 1)$, mais si $\gamma_1 > 0$, β_1 doit être inférieure à $\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Par exemple, dans le cas où β_1 n'est pas proche de zéro et γ_1 est proche de un, alors la kurtosis n'existe pas.

5. La fonction d'autocorrélation (ACF) de ε_t est donnée par

$$\rho_1 = \frac{\beta_1(1 - \beta_1^2 - \beta_1\gamma_1)}{1 - \beta_1^2 - 2\beta_1\gamma_1}, \rho_s = (\beta_1 + \gamma_1)\rho_{s-1}. \quad \text{pour } s \geq 2.$$

On remarque que ρ_s dépend de β_1 et γ_1 . Si β_1 est suffisamment petit et $\beta_1 + \gamma_1$ est proche de un, donc il existe une fonction d'autocorrélation ACF décroissante tel que la kurtosis est finie.

3.6.3 Estimation de la VaR pour un modèle GARCH

La procédure d'estimation de cette approche conditionnelle est à deux étapes :

1. Estimation d'un modèle de type $GARCH$ pour les rentabilités

Supposons la dynamique de la chronique des rentabilités R_t est modélisée par :

$$R_t = \mu_t + \sigma Z_t.$$

Où μ_t est la moyenne conditionnelle à l'ensemble de l'information disponible, à savoir les données de rendements, jusqu'au temps $t - 1$ et Z_t désigne les innovations supposées identiquement et indépendamment distribuées IID , d'espérance $E(Z_t) = 0$ et de variance $V(Z_t) = 1$ et de fonction de repartition F_z .

Pour simplifier la présentation, nous supposons que la variance conditionnelle σ_t^2 de la chronique ajustée $\varepsilon_t = R_t - \mu_t$ est un processus $GARCH(1, 1)$:

$$\sigma_t^2 = \beta_0 + \beta_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma_1 \sigma_{t-1}^2.$$

Où $\beta_0 > 0$, $\beta_1 > 0$ et $\gamma > 0$. De plus, le processus *GARCH* est stationnaire au sens faible si et seulement si la somme des coefficients ($\beta_1 + \gamma$) est inférieure à 1.

Ainsi, pour la distribution gaussiennes et la distribution t-Student, les fonctions de *log* vraisemblance d'un échantillon de taille n sont respectivement (1) et (2) :

$$(1) \quad l(\theta) = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \log \sigma_t - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \frac{(R_t - \mu)^2}{\sigma_t}.$$

$$(2) \quad l(\theta) = n \left\{ \log \left(\frac{\Gamma(v+1)}{2} \right) - \log \left(\Gamma \left(\frac{v}{2} \right) \right) - \frac{1}{2} \log(\pi(v-2)) - \log(\sigma_t) \right\} \\ - \frac{(v+1)}{2} \sum_{t=1}^n \left[\log \left[1 + \frac{(R_t - \mu)^2}{\sigma_t \sqrt{(v-2)}} \right] \right].$$

Sous l'hypothèse de normalité de la loi conditionnelle des innovations, notre but est de trouver l'estimateur de maximum de vraisemblance (EMV) $\widehat{\theta} = (\widehat{\mu}, \widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_1, \widehat{\gamma})$ des paramètres inconnus ainsi que d'extraire les résidus standardisés

$$(Z_{t-n+1}, Z_{t-n+2}, \dots, Z_t) = \left(\frac{R_{t-n+1} - \widehat{\mu}_{t-n+1}}{\widehat{\sigma}_{t-n+1}}, \frac{R_{t-n+2} - \widehat{\mu}_{t-n+2}}{\widehat{\sigma}_{t-n+2}}, \dots, \frac{R_t - \widehat{\mu}_t}{\widehat{\sigma}_t} \right).$$

Où $\widehat{\mu}$ et $\{\widehat{\sigma}_{t-n+1}, \widehat{\sigma}_{t-n+2}, \dots, \widehat{\sigma}_t\}$ sont déterminés par la méthode pseudo Maximum de Vraisemblance (PMV).

L'estimation du quantile des résidus

Les résidus standardisés ainsi obtenus sont utiles pour vérifier si la spécification *GARCH* retenue est adéquate.

En particulier, les innovations doivent être *IID*. En général, cette hypothèse est plus plausible pour les innovations que pour la chronique des rendements.

Si c'est le cas, la GPD, fondée sur l'hypothèse *IID*, permettra d'estimer les queues de la loi de ces innovations. Par la suite, nous déduisons le quantile extrême $z_p = Var(Z)$. La première prévision naturelle de la variance conditionnelle à $t+1$ est donnée par : $(\widehat{\mu}, \widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_1, \widehat{\gamma})$

$$\widehat{\sigma}_t^2 = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \widehat{\gamma}_1 \widehat{\sigma}_{t-1}^2.$$

Où $\widehat{\varepsilon}_t = R_t - \widehat{\mu}$. Ainsi, la $\widehat{Var}_{p,t+1}$ est donné par :

$$\widehat{Var}_{p,t+1} = \widehat{\mu}_{t+1} + \widehat{Var}_p(Z) \widehat{\sigma}_{t+1} \\ \widehat{ES}_{p,t+1} = \widehat{\mu}_{t+1} + \widehat{ES}_p(Z) \widehat{\sigma}_{t+1}.$$

CHAPITRE 4

RESULTATS DE SIMULATIONS ET APPLICATIONS

Ce chapitre est consacré au calcul de mesures de risque VaR et ES pour des simulations des lois de probabilité, notamment les distributions à queues lourdes et application sur l'indice financier SP500.

4.0.1 La VaR Gaussienne

Dans le tableau ci-dessous sont indiqués la \widehat{VaR} et \widehat{ES} de la loi $N(0, 1)$ pour les différentes valeurs de p .

Dans le tableau ci-dessous sont indiqués la \widehat{VaR} et \widehat{ES} de la loi $N(2, 1.8)$ pour les différentes valeurs de p .

TABLE 4.2 – La VaR pour les différentes valeurs de p de loi $N(2, 1.8)$.

	$p = 0.9$	$p = 0.95$	$p = 0.99$
x_p	4.320857	4.776336	6.119907
VaR_p	9.635476	10.67061	14.03962
ES	19.31016	41.14706	53.50653

TABLE 4.1 – La VaR pour les différentes valeurs de p de loi $N(0, 1)$.

	$p = 0.9$	$p = 0.95$	$p = 0.99$
x_p	1.287749	1.810049	2.395771
VaR_p	4.847735	1.864791	2.376183
ES	19.31016	7.34945	9.57412

4.0.2 Estimation de la VaR par la TVE

La théorie des valeurs extrêmes donne deux méthodes principales ; la première est la méthode Blocs Maximas (*BM*) et la deuxième est la méthode de Peaks OverThreshold (*POT*).

Dans le tableau ci-dessous en distincts la \widehat{Var} et \widehat{ES} d' un échantillon de loi Burr ($\alpha = 0,66$ et $c = 2$) pour les différentes valeurs de n .

TABLE 4.3 – VaR et ES à partir d' un échantillon de loi Burr $\alpha = 0,66$ et $c = 2$.

n	500	1000	2000
Kopt	14	29	58
Hill	0.7070184	0.6273062	0.69.33475
Var	11.3802	9.606652	9.296982
POT	10.25522	8.921577	9.448376
ES	33.08612	30.54	25.29613

Dans le tableau ci-dessous en distincts la \widehat{Var} et \widehat{ES} d' un échantillon de loi fréchet ($\alpha = 0,66$) pour les différentes valeurs de n .

TABLE 4.4 – VaR et ES à partir d' un échantillon de loi fréchet $\alpha = 0,66$.

n	500	1000	2000
Kopt	15	34	53
Hill	0.7342271	0.8847931	0.7534451
VaR	10.72687	7.825414	9.348757
POT	9.316818	9.449674	9.462227
ES	30.84161	60.40373	30.73596

Dans le tableau ci-dessous en distincts la \widehat{Var} et \widehat{ES} d' un échantillon de loi paréto ($\alpha = 0,75$) pour les différentes valeurs de n .

TABLE 4.5 – VaR et ES à partir d' un échantillon de loi paréto $\alpha = 0.75$

n	500	1000	2000
Kopt	17	28	58
Hill	0.8128239	0.8695089	0.7905617
Var	10.01684	8.695089	10.21293
POT	11.21901	9.288336	10.29007
ES	29.57352	37.5724	36.6691

4.1 Indice S&P500

Le S&P500 est un indice boursier basé sur 500 grandes sociétés cotées sur les bourses américaines.

L'indice S&P500 a été créé en 1920, il est possédé et géré par Standard & Poor's l'une des trois principales sociétés de notation financière.

Les rendements quotidiens sont observés sur la période du 03/01/2000 au 27/07/2011.

L'objectif principal de cette étude est d'appliquer les différentes méthodes de calcul d'un quantile extrême.

Le logiciel R met à notre disposition des outils utiles pour réaliser l'analyse descriptive de l'indice S&P500 et calculer la *VaR* par les différentes méthodes.

4.1.1 Analyse descriptive de l'indice financier

La figure représente la série brute de l'indice S&P500 sur les 11 dernières années. La crise financière de 2008 est clairement visible en fin de série.

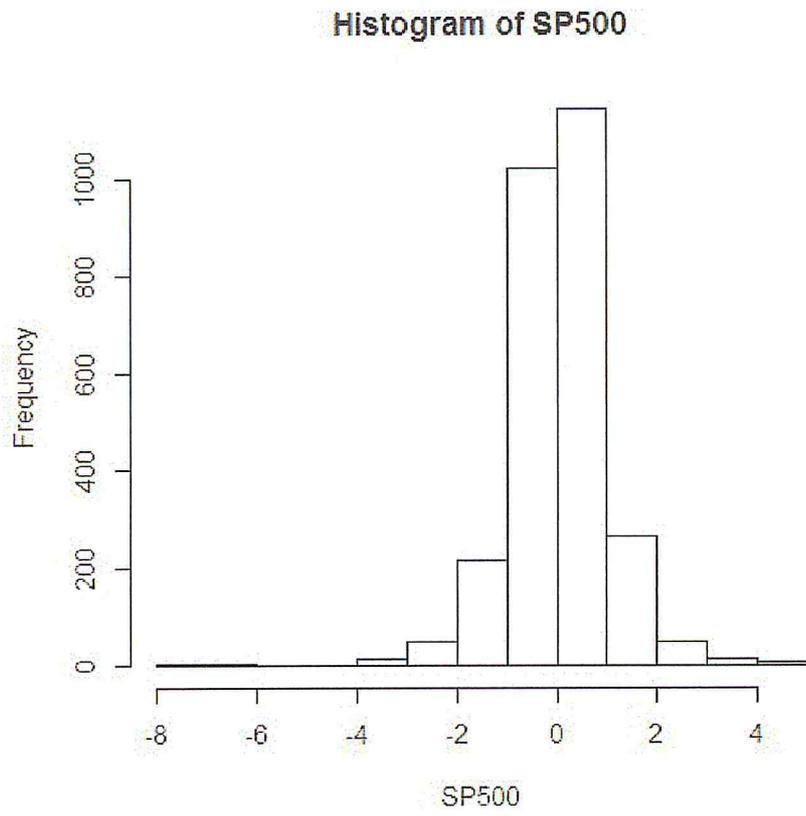


FIGURE 4.1 – Histogramme de l'indice SP500.

Fonction de répartition empirique de l'indice S&P500

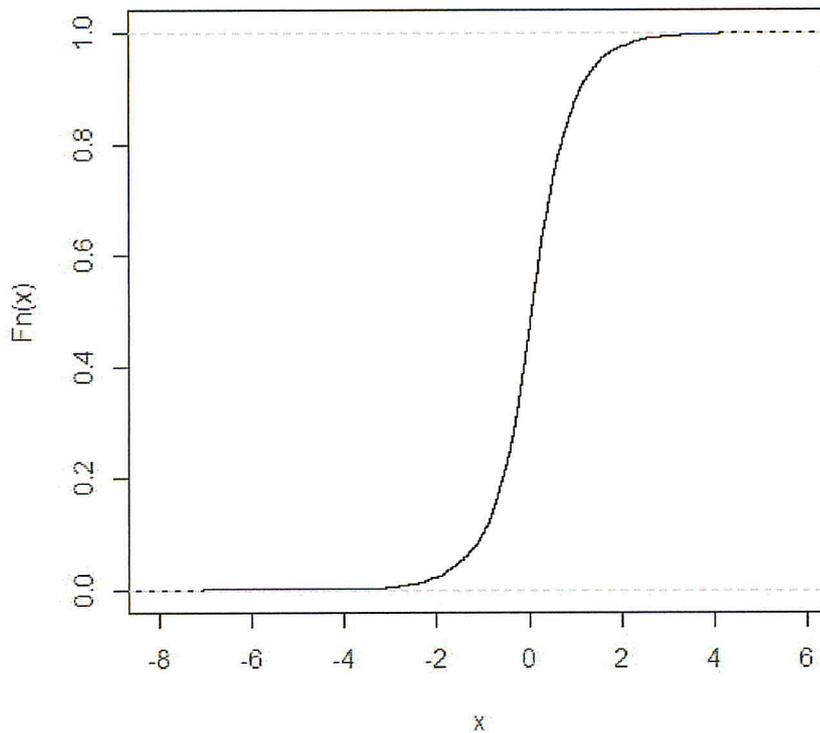


FIGURE 4.2 – Fonction de répartition de SP500.

4.1.2 Analyse descriptive des logarithmes des rendements de l'indice financier

L'objectif de la procédure suivante est d'obtenir une série des logarithmes des rendements puis calculer la VaR par des différentes méthodes.

Soit le prix d'un actif à la date t et le logarithme du rendement correspondant :

$$\begin{aligned} r_t &= \log(p_t) - \log(p_{t-1}). \\ &= \log(1 + R_t). \end{aligned}$$

Où $R_t = \frac{p_t - p_{t-1}}{p_{t-1}}$ désigne la variation relative des prix.

4.1.3 La VaR normale

Dans le tableau ci-dessous en n distincts la \widehat{Var} et \widehat{ES} d'un échantillon de loi $N(0, 1)$ pour les différentes valeurs de p de l'indice S&P500.

TABLE 4.7 – VaR et ES pour les différentes valeurs de p .

	$p = 0.9$	$p = 0.95$	$p = 0.99$
x_p	2.301777	3.060189	4.818405
VaR_p	2.301777	3.060189	4.818405
ES	13.97126	18.5343	30.67601

VaR et ES pour les différentes valeurs de p .

TABLE 4.6 – VaR et ES pour les différentes valeurs de p de loi $N(0,1)$ pour l'indice S&P500.

	$p = 0.9$	$p = 0.95$	$p = 0.99$
x_p	1.222477	1.60226	2.326635
VaR_p	1.151871	1.583765	2.380679
ES	6.344872	8.996129	14.4629

4.1.4 La VaR par la méthode POT

Dans le tableau ci-dessous en distincts la \widehat{VaR} et \widehat{ES} d' un échantillon par la méthode POT pour les différentes valeur de p de l'indice S&P500.

4.1.5 La VaR la méthode des blocs

Dans le tableau ci-dessous en distincts la \widehat{Var} et \widehat{ES} d' un échantillon par la méthode des blocs pour les différentes valeur de p de l'indice S&P500.

TABLE 4.8 – VaR et ES pour les différentes valeurs de p .

	$p = 0.9$	$p = 0.95$	$p = 0.99$
x_p	0.067699	0.098956	0.2061403
VaR_p	0.067699	0.098956	0.2061403
ES	5.463491	5.463491	5.463491

4.1.6 La VaR historique

Dans le tableau ci-dessous en distincts la \widehat{Var} et \widehat{ES} sur tout l'historique du s p500 pour les différentes valeurs de p

TABLE 4.9 – La VaR sur tout l'historique du s p500 pour les différentes valeurs de p

	$p = 0.9$	$p = 0.95$	$p = 0.99$
x_p	4.228896	5.489353	6.094653
VaR_p	1.98648	2.541462	2.985448
ES	7.863966	10.24894	12.00455

CONCLUSION GÉNÉRALE

L'objectif de ce ~~travail~~^{mémoire} est traité la théorie des valeurs extrêmes et quelques applications sous indépendance, et estimer des quantiles extrêmes pour des lois de type Pareto aussi bien que pour des lois à queue de type Weibull d'une même façon.

Ce modèle reposait sur un paramètre inconnu. Notre but premier fut de l'estimer, suite à quoi nous avons obtenu un nouvel estimateur des quantiles extrêmes utile dans des situations pratiques. Après avoir établi les lois asymptotiques de nos estimateurs on a pu illustrer leur efficacité sur des données simulées et sur un jeu de données réelles issu de l'hydrologie.

Ainsi d'estimer les mesures de risque classiques que sont la Value-at-Risk et expected shortfall dans le cas de pertes extrêmes et où l'on suppose également que la loi des pertes est à queue lourde et dépend d'une covariable aléatoire de dimension finie.

et enfin on va simuler la VaR (Value-at-Risk) et ES(Expected Shortfall) pour quelques lois et appliqué sur l'indice S&P500.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Apolloni, B., Pedrycz, W., Bassis, S., & Malchiodi, D. (2008). The puzzle of granular computing (Vol. 138). Springer.
- [2] Embrechts, P., Klüppelberg, C., & Mikosch, T. (1997). Modelling extremal events, volume 33 of Applications of Mathematics.
- [3] Fisher, R. A., & Tippett, L. H. C. (1928, April). Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* (Vol. 24, No. 2, pp. 180-190). Cambridge University Press.
- [4] Cochran, W. G. (1941). The distribution of the largest of a set of estimated variances as a fraction of their total. *Annals of Human Genetics*, 11(1), 47-52.
- [5] Gnedenko, B. (1943). Sur la distribution limite du terme maximum d'une serie aleatoire. *Annals of mathematics*, 423-453.
- [6] Resnick, L. B. (1987). The 1987 presidential address learning in school and out. *Educational researcher*, 16(9), 13-54.
- [7] Resnick, L. B. (1987). Education and learning to think. *National Academies*.
- [8] Tennant, R. W., Margolin, B. H., Shelby, M. D., Zeiger, E., Haseman, J. K., Spalding, J., ... & Minor, R. (1987). Prediction of chemical carcinogenicity in rodents from in vitro genetic toxicity assays. *Science(Washington)*, 236(4804), 933-941.
- [9] Galloway, S. M., Armstrong, M. J., Reuben, C., Colman, S., Brown, B., Cannon, C., ... & Rimpo, J. (1987). Chromosome aberrations and sister chromatid exchanges in Chinese hamster ovary cells : evaluations of 108 chemicals. *Environmental and molecular mutagenesis*, 10(S10), 1-35.
- [10] Galloway, S. M., Armstrong, M. J., Reuben, C., Colman, S., Brown, B., Cannon, C., ... & Rimpo, J. (1987). Chromosome aberrations and sister chromatid exchanges

- [25] Robinson, J., & Lee, V. H. (Eds.). (1987). Controlled drug delivery : fundamentals and applications (Vol. 29). Informa health care.
- [26] Hill, B. M. (1975). A simple general approach to inference about the tail of a distribution. *The annals of statistics*, 3(5), 1163-1174.
- [27] Reiff, P. H., Spiro, R. W., & Hill, T. W. (1981). Dependence of polar cap potential drop on interplanetary parameters. *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 86(A9), 7639-7648.
- [28] Peng, M. W., & Ilinitch, A. Y. (1998). Export intermediary firms : A note on export development research. *Journal of International Business Studies*, 609-620.
- [29] Csorgo, S., Deheuvels, P., & Mason, D. (1985). Kernel estimates of the tail index of a distribution. *The Annals of Statistics*, 1050-1077.
- [30] Aban, I. B., & Meerschaert, M. M. (2004). Generalized least-squares estimators for the thickness of heavy tails. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 119(2), 341-352.
- [31] Hosking, J. R., & Wallis, J. R. (1987). Parameter and quantile estimation for the generalized Pareto distribution. *Technometrics*, 29(3), 339-349.
- [32] Schultze, J., & Steinebach, J. (1996). On least squares estimates of an exponential tail coefficient. *Statistics & Risk Modeling*, 14(4), 353-372.
- [33] Kratz, M., & Resnick, S. I. (1996). The QQ-estimator and heavy tails. *Stochastic Models*, 12(4), 699-724.
- [34] Damoah, R., Spichtinger, N., Forster, C., James, P., Mattis, I., Wandinger, U., ... & Stohl, A. (2004). Around the world in 17 days-hemispheric-scale transport of forest fire smoke from Russia in May 2003. *Atmospheric Chemistry and Physics*, 4(5), 1311-1321.

