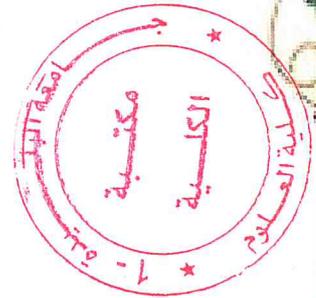


République Algérienne Démocratique et Populaire  
 Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique  
 Université Saad Dahlab Blida1



Faculté des sciences  
 Département de Mathématiques  
 En vue d'obtenir le diplôme de Master



Spécialité : Recherche Opérationnelle

Thème :

**NOMBRE CHROMATIQUE ET NOMBRE CHROMATIQUE ÉQUITABLE D'UN GRAPHE**

Mémoire présenté par :

MERAKECHI Souhila TISSELI Fatma Zohra

Soutenu le 16/07/2017, devant le jury composé de :

Dr. AMROUCHE Karim	(MCB) U.d'Alger 3	Président
Dr. BENDRAOUCHE Mohamed	(MCA) USD.Blida1	Promoteur
M <sup>me</sup> . KERDJOUDJ Samia	(MAA) USD.Blida1	Examinatrice

2016/2017

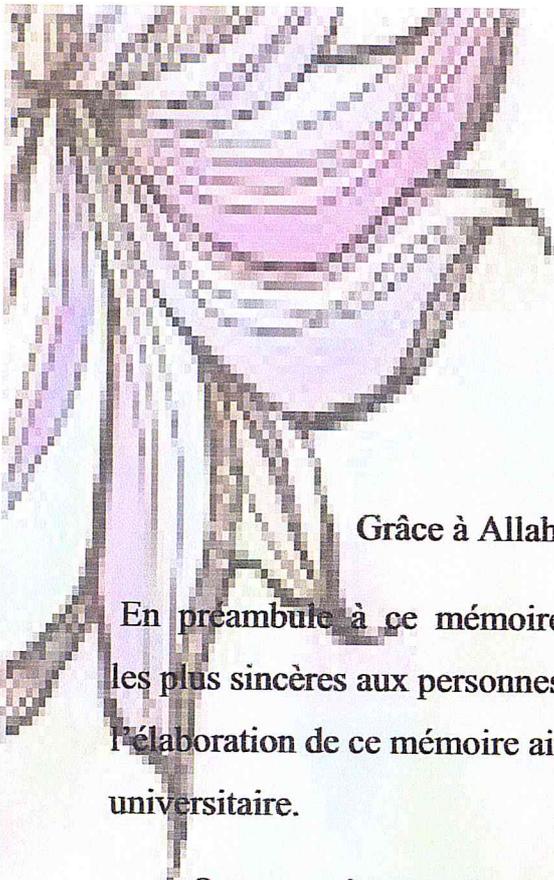
## Résumé

Dans ce mémoire, nous avons étudié les nombres chromatique et chromatique équitable d'un graphe. Après avoir donné les concepts de base de la théorie des graphes, des définitions et motivations ainsi que des propriétés de ces nombres ont été présentés. Une introduction sur la théorie de la complexité est aussi présentée dans ce travail. Un état de l'art de quelques cas polynomiaux est reporté. Nous avons ensuite étudié ces nombres pour quelques graphes particuliers. Comme ces problèmes sont NP-difficiles, nous avons présenté des algorithmes d'approximation et des bornes inférieures et supérieures pour la résolution de ces problèmes.



## Abstract

In this memory, we have studied the chromatic and the chromatic equitable numbers of a graph. After providing the basics of graph theory, definitions and motivations as well as properties of these numbers have been presented. An introduction to the complexity theory is also provided, in this work. We then have considered these numbers for particular graphs. A literature review of some polynomial cases is presented for both problems. As these two problems are NP-hard, some approximation algorithms as well as some lower and upper bounds are devised for the resolution of these problems.



## Remerciements

Grâce à Allah, nous avons abouti à la concrétisation de ce travail.

En préambule à ce mémoire, nous souhaiterons adresser nos remerciements les plus sincères aux personnes qui nous ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu'à la réussite de cette formidable année universitaire.

On remercie notre promoteur Dr BENDRAOUCHE Mohamed pour avoir accepté de nous encadrer tout au long de ce travail, pour son amabilité, sa disponibilité, son aide, ses conseils et suggestions et le temps qu'il a bien voulu nous consacrer malgré ses charges académiques et professionnelles.

Que tout enseignant nous ayant fait bénéficier de son savoir durant tout notre cursus universitaire, trouve ici l'expression de notre profonde gratitude.

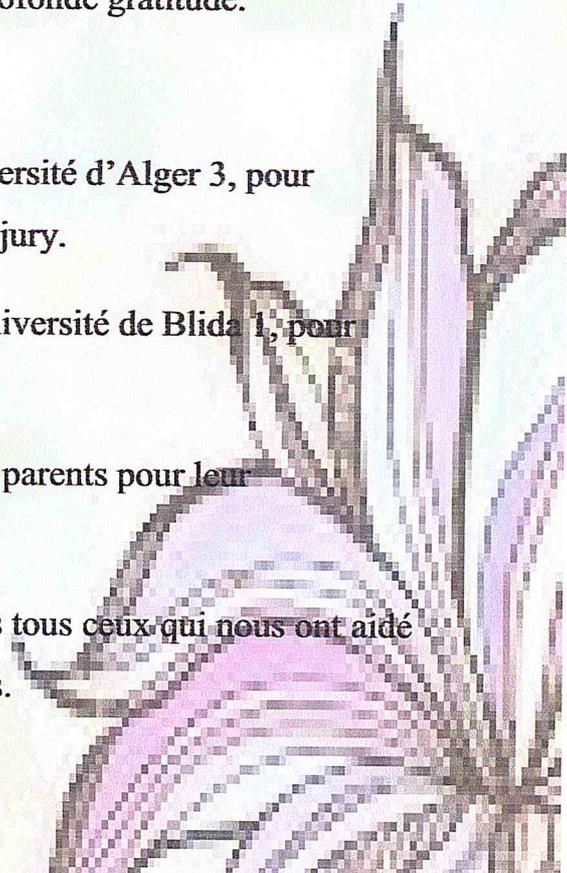
Nous remercions le membre de jury :

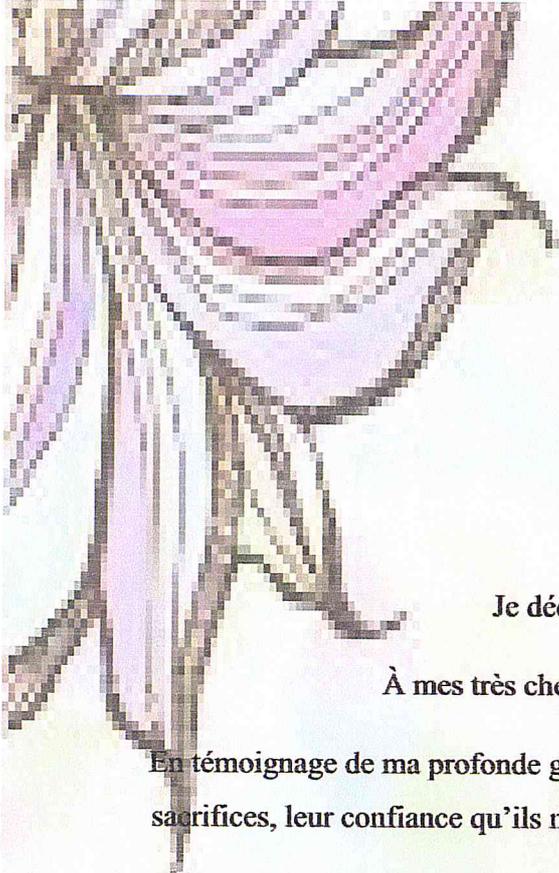
Dr K. AMROUCHE, Maître de conférences B à l'université d'Alger 3, pour l'honneur qu'il nous fait en acceptant la présidence du jury.

Madame S. KERDJOUDJ, Maître Assistante A à l'université de Blida 1, pour avoir accepté de juger ce travail.

Nous n'oublions pas nos familles, et spécialement nos parents pour leur contribution, leur soutien et leur patience.

Enfin, nous ne saurons oublier dans ces remerciements tous ceux qui nous ont aidé pour mener à bien ce travail dans de bonnes conditions.





## Dédicaces

Je dédie ce modeste travail

À mes très chers parents que Allah les garde

En témoignage de ma profonde gratitude et mon incontestable reconnaissance, pour leurs sacrifices, leur confiance qu'ils m'accordent et tout l'amour dont ils m'entourent.

À mes sœurs « Khadidja » et « Bouchra » et mes frères « Youcef » et « Khaled » mon époux « Abdelkader ».

À toute ma famille et ma belle famille.

À mon binôme Souhila.

Et à tous ceux qui me sont chers.

Qu'Allah vous garde.

TISSALI Fatma Zohra





## Dédicaces

Je dédie ce modeste travail

À mes très chers parents que Allah les garde

En témoignage de ma profonde gratitude et mon incontestable reconnaissance, pour leurs sacrifices, leur confiance qu'ils m'accordent et tout l'amour dont ils m'entourent.

À mes sœurs « Zahia », « Chafica », « Nabila », « Soraya », « Hamida » et « Chahinez » et mes frères « Roudoine » et « Soufiane ».

À toute ma famille.

À mon binôme Fatma Zohra.

Et à tous ceux qui me sont chers.

Qu'Allah vous garde.

MERAKECHI Souhila



# Tables des matières

<b>Introduction générale</b>	11
<b>Chapitre 1 : Concepts fondamentaux de la théorie des graphes et de la complexité</b>	
1. Théorie des graphes	12
1.1 Graphes non orientés	12
1.1.1 Définitions	12
1.1.2 Définition de quelques graphes	12
1.1.3 Quelques classes de graphes	18
1.1.4 Stable et cliques	20
1.1.5 Graphes partiels et sous-graphes	20
1.2 Graphes orientés	21
1.2.1 Définition	21
1.2.2 Quelques graphes particuliers	21
2. Théorie de la complexité	24
2.1 Concepts de base	24
2.2 Complexité des algorithmes	25
2.3 Complexité des problèmes	25
2.4 Classes de complexité P et NP	26
2.5 Réduction polynomiale	26
<b>Chapitre 2 : Nombre chromatique</b>	
1. Concepts de base	30
2. Quelques propriétés du nombre chromatique	30
3. Etat de l'art sur le nombre chromatique	31
3.1 Nombre chromatique pour quelques graphes	31
3.2 Liste de quelques cas polynomiaux connue dans la littérature	31
4. Encadrement du nombre chromatique	32
4.1 Bornes inférieures pour $\chi(G)$	32
4.2 Bornes supérieures pour $\chi(G)$	33

5. Coloration d'un graphe triangulé	35
6. Coloration d'un graphe de comparabilité	36
7. Application de la coloration	36

### **Chapitre 3 : Nombre chromatique équitable**

1. Motivation	47
2. Définition	47
3. Exemples	47
4. Quelques propriétés du nombre chromatique équitable	51
5. Etat de l'art sur le nombre chromatique équitable	52
5.1. Coloration équitable de quelques classes des graphes	52
5.2. Liste de quelques cas polynomiaux connue dans la littérature	54
6. Bornes sur le nombre chromatique équitable et la conjecture de la coloration équitable	55
6.1. Bornes inférieures	55
6.2. Bornes supérieure	56
7. Application du nombre chromatique équitable	59

### **Chapitre 4 : Les méthodes de résolution approchées**

1. Les Méthodes de résolution approchée pour le nombre chromatique	61
2. Les Méthodes de résolution approchée pour le nombre chromatique équitable	62
3. Déroulements des algorithmes	65
3.1 Déroulements de l'algorithme de <b>Greedy-color</b> pour le calcul approché de $\chi(G)$	65
3.2 Déroulements de l'algorithme de <b>SL</b> pour le calcul approché de $\chi(G)$	67
3.3 Déroulements de l'algorithme de <b>Naive</b> pour le calcul approché de $\chi_e(G')$	69
3.4 Déroulements de l'algorithme de <b>CreateSubgraph</b> pour le calcul approché de $\chi_e(G')$	72

### **Conclusion et perspectives**

### **Bibliographie**

## Liste des figures et des tableaux

<b>Figure 1.1</b> Un graphe et la construction de son graphe adjoint	13
<b>Figure 1.2</b> Un exemple d'illustration de la connexité	13
<b>Figure 1.3</b> Un graphe contenant des chaines	15
<b>Figure 1.4</b> Graphe $R_3$	16
<b>Figure 1.5</b> Graphe $W_7$	16
<b>Figure 1.6</b> Graphe $G_7$	17
<b>Figure 1.7</b> Graphe planaire extérieur	18
<b>Figure 1.8</b> Graphe d'intervalle	20
<b>Figure 1.9</b> Un exemple d'illustration de la forte connexité	22
<b>Figure 1.10</b> Un exemple d'illustration de la composante fortement connexe	23
<b>Figure 1.11</b> Géographie de la classe NP	27
<b>Figure 2.1</b> Le Graphe $G$ des incompatibilités (Stockage agricole)	37
<b>Figure 2.2</b> La coloration propre de graphe $G$ des incompatibilités (Stockage agricole)	38
<b>Figure 2.3</b> La coloration propre de graphe complémentaire $\bar{G}$ des compatibilités (Stockage agricole)	38
<b>Figure 2.4</b> Coloration propre des sommets (produits chimiques)	40
<b>Figure 2.5</b> Graphe représentatif de l'exemple de tournage des films	41
<b>Figure 2.6</b> Coloration propre de graphe de l'exemple de tournage des films	42
<b>Figure 2.7</b> Graphe représentatif de l'exemple d'emploi de temps 1.	43
<b>Figure 2.8</b> Coloration propre de graphe représentatif de l'exemple d'emploi de temps 1.	44
<b>Figure 2.9</b> Graphe représentatif de l'exemple d'emploi de temps 2.	45
<b>Figure 3.1</b> Le graphe étoile $K_{1,5}$	47
<b>Figure 3.2</b> Une coloration propre de $G$	49
<b>Figure 3.3</b> Une coloration équitable de $G$	49
<b>Figure 4.1</b> un exemple d'application de l'algorithme Greedy-color.	66

<b>Figure 4.2</b> un exemple d'application de l'algorithme SL.	68
<b>Figure 4.3</b> Un exemple illustratif de l'algorithme de Naive.	71
<b>Figure 4.4</b> Un exemple illustratif de l'algorithme CreateSubgraph.	73
<b>Tableau 2.1</b> Graphes dont le nombre chromatique se calcule en temps polynomiale	32
<b>Tableau 2.2</b> Tableau de stockage agricole de sept produits	37
<b>Tableau 2.3</b> Tableau de tournage des films	41
<b>Tableau 2.4</b> Tableau des modules ayant des étudiants en commun	43
<b>Tableau 2.5</b> Tableau de stage des enseignants	44
<b>Tableau 3.1</b> Graphes dont le nombre chromatique équitable se calcule en temps polynomiale	55

## Introduction Générale

La théorie des graphes a connu un essor spectaculaire ces dernières années, en partie due aux importances entre les aspects théoriques et algorithmiques du domaine et les nouveaux enjeux scientifiques. Les graphes jouent un rôle prépondérant dans la recherche en sciences et technologies de l'informatique, ainsi qu'en bio-informatique par exemple. Ils apparaissent également comme des composants essentiels de beaucoup de théories mathématiques plus anciennes.

L'une des premières sources d'inspiration de la théorie des graphes a été le problème des quatre couleurs, qui est resté ouvert pendant plus d'un siècle avant d'être prouvé par Appel et Haken [26]. De nombreux aspects de la coloration des graphes ont depuis été étudiés, apportant de profonds résultats mathématiques. Si ce domaine est toujours aussi vivant, cela tient en grande partie à ce que la coloration des graphes permet de modéliser beaucoup de problèmes pratiques, notamment issus des domaines technologiques connaissant un fort développement, par exemple les réseaux de télécommunication.

Une coloration d'un graphe  $G$  est une partition de l'ensemble des sommets en classes, de sorte que les sommets d'une classe quelconque sont deux à deux non adjacents. Les éléments d'une classe ont la même couleur. Le plus petit nombre de classes est appelé le nombre chromatique et est noté  $\chi(G)$ . Sa détermination est un problème NP-difficile [22] et est l'un des problèmes les plus étudiés en optimisation combinatoire en raison de ses multiples applications (la planification des horaires, l'allocation des ressources, etc.) et de la complexité de sa résolution. De nombreuses méthodes de résolutions ont été proposées pour résoudre le problème de coloration des graphes. Elles peuvent être réparties en trois catégories : les méthodes exactes dont le temps de calcul croît exponentiellement avec le nombre de sommets du graphe, les méthodes constructives qui donnent rapidement une approximation de la solution optimale du problème, et les méta-heuristiques qui fournissent de meilleurs résultats mais au prix d'algorithmes plus complexes et plus gourmands en temps de calcul.

La notion de la coloration équitable est introduite par Meyer [1]. Une coloration équitable d'un graphe  $G$  est une coloration propre de  $G$  avec la contrainte que les cardinalités d'une paire de classes diffèrent d'au plus 1. Le plus petit nombre de classes vérifiant cette contrainte s'appelle le nombre chromatique équitable et est noté  $\chi_e(G)$ . Sa détermination est aussi un problème NP-difficile [12].

Ce mémoire est composé de quatre chapitres :

Dans le premier chapitre nous avons décrit les éléments de base de la théorie des graphes et la théorie de la complexité. Le deuxième chapitre est consacré à l'étude du nombre chromatique où nous avons présenté des définitions et des exemples d'applications pour ce paramètre. Le chapitre 3 concerne l'étude du nombre chromatique équitable. Des définitions et des d'exemples ainsi qu'un ensemble de propriétés sont établis. Un état de l'art de chacun des deux problèmes est présenté. Dans le dernier chapitre, des méthodes de résolutions de ces problèmes ont été proposées. Une conclusion termine ce mémoire.

**Chapitre 1**

**Concepts fondamentaux de la théorie  
des graphes et de la théorie de  
la complexité**

### 1. Théorie des graphes

Dans ce premier chapitre, nous rappelons toutes les définitions de théorie des graphes nécessaires à une bonne compréhension de la suite du mémoire, en particulier nous redonnons les notions de certaines classes de graphes que nous rencontrerons souvent dans les chapitres suivants. Nous donnons également un aperçu de la théorie de la complexité des algorithmes en insistant sur les notions fondamentales de classes de problèmes P et NP

#### 1.1 Graphes non orientés

##### 1.1.1 Définitions.

- Un graphe simple  $G = (V, E)$  est défini par un ensemble fini  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  dont les éléments sont appelés sommets (vertices en anglais), et par un ensemble fini  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  dont les éléments sont appelés arêtes (edge en anglais).
- Une arête  $e$  de l'ensemble  $E$  est définie par une paire non ordonnée de sommets distincts, appelés les extrémités de  $e$ . Si l'arête  $e$  a pour extrémités  $a$  et  $b$  on écrit  $e = \{a, b\}$  et on dira que ces sommets sont adjacents, et que l'arête  $e$  est incidente aux sommets  $a$  et  $b$ .
- Deux arêtes sont adjacentes si elles ont une extrémité commune.
- On appelle ordre d'un graphe  $G = (V, E)$  le nombre de sommets  $n = |V|$  de ce graphe.
- On appelle taille d'un graphe  $G = (V, E)$  le nombre des arêtes  $m = |E|$  de ce graphe.
- On appelle degré d'un sommet  $v$ , et on note  $d(v)$ , le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet.
- Le plus petit degré d'un graphe  $G$  dit degré minimum est noté  $\delta(G)$  et le plus grand degré dit degré maximum est noté  $\Delta(G)$ .
- Le degré d'un graphe est le degré maximum de tous ses sommets.

Dans toute la suite de ce mémoire on considèrera que les graphes simples et pour simplification on omettra le mot simple.

##### 1.1.2 Définitions de quelques graphes particuliers

###### Graphes complémentaires.

**Définition 1.1.** Le graphe complémentaire (complement graph) d'un graphe  $G = (V, E)$  est le graphe  $\bar{G} = (V, \bar{E})$  où  $e \in \bar{E}$  si et seulement si  $e \notin E$ .

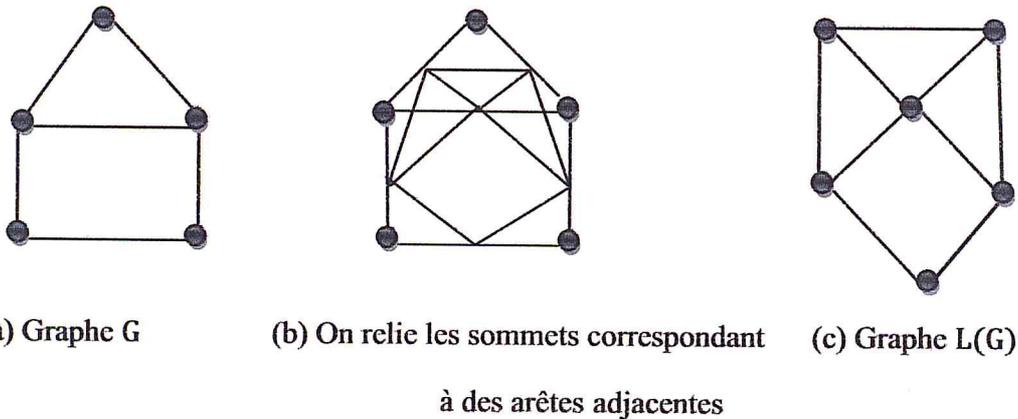
C'est-à-dire : Une arête appartient au graphe complémentaire  $\bar{G}$  si elle n'appartient pas au graphe initial  $G$ .

###### Graphe adjoint (graphe représentatif des arêtes).

**Définition 1.2** Le graphe adjoint (line graph) d'un graphe  $G = (V, E)$  est le graphe noté  $L(G)$  tel que :  $V_{L(G)} = E(G)$ .

Deux sommets de  $L(G)$  sont adjacents si et seulement si les arêtes correspondantes dans  $G$  sont adjacentes.

**Exemple 1.3**



**Figure 1.1** Un graphe et la construction de son graphe adjoint.

**La connexité**

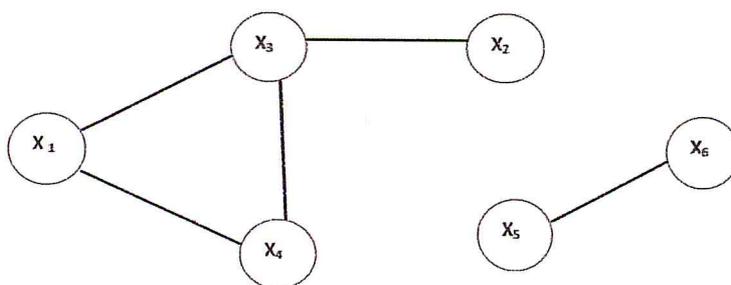
**La notion de connexité**

On définit la connexité dans un graphe, par la relation entre deux sommets de la manière suivante:

**Définition 1.4** Soit  $G$  un graphe. Deux sommets  $x$  et  $y$  de  $G$  ont une relation de connexité si et seulement s'il existe une chaîne entre  $x$  et  $y$  ou bien  $x=y$ .

**Exemple 1.5**

Soit le graphe  $(G)$  suivant



**Figure 1.2** Un exemple d'illustration de la connexité

- il existe une chaîne entre le sommet  $x_1$  et  $x_2$  notée  $C=(x_1, x_3, x_2)$ . Alors  $x_1$  et  $x_2$  ont une relation de connexité.
- il n'existe pas de chaînes entre le sommet  $x_1$  et  $x_5$ , alors  $x_1$  et  $x_5$  n'ont pas une relation de connexité.

### Les composantes connexes.

**Définition 1.6** On appelle composante connexe un ensemble de sommets, qui ont deux à deux la relation de connexité, de plus tout sommet en dehors de la composante n'a pas de relation de connexité avec les sommets de cette composante.

#### Exemple 1.7

Dans le graphe  $G$  de la figure 1.2

- les sommets  $x_1, x_2, x_3, x_4$  ont deux à deux la relation de connexité, donc l'ensemble  $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  forme ainsi la première composante connexe, on la note  $C_1$ .

- l'ensemble  $\{x_5, x_6\}$  forme la deuxième composante connexe, on la note  $C_2$ . On constate que les sommets de  $C_1$  n'ont pas de relation de connexité avec les sommets de  $C_2$ .

### Graphes connexes.

**Définition 1.8** Un graphe est connexe (connected) si pour toute paire de sommets il est possible de passer de l'un à l'autre par une suite de sommets adjacents.

Un graphe est connexe s'il a une seule composante connexe.

Un graphe non connexe se décompose en composantes connexe

### Graphes complets.

**Définition 1.9** Un graphe complet (complete graph) est un graphe dont tous les sommets sont deux à deux adjacents. Un graphe complet d'ordre  $n$  est noté  $K_n$ .

### Graphes réguliers.

**Définition 1.10** Un graphe est dit régulier (regular graph) si tous les sommets ont le même degré. Si le degré commun est  $k$ , alors le graphe est  $k$ -régulier. Un graphe 3-régulier est dit graphe cubique.

### Cycles et chaînes

**Définition 1.11** La chaîne (path) d'ordre  $n$ , noté  $P_n$ , est le graphe connexe dont tous les sommets sont de degré 2, sauf les deux extrémités de la chaîne qui sont de degré 1.

La longueur d'une chaîne est le nombre d'arêtes qui la constituent.

#### Exemple 1.12

Le graphe ci-dessous contient entre autres les chaînes

$(v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_5, v_5)$  et  $(v_4, e_4, v_3, e_2, v_2, e_1, v_1)$ .

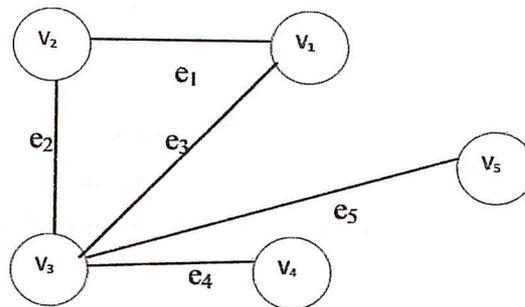


Figure 1.3 Un graphe contenant des chaînes

**Définition 1.13** Le cycle (cycle) d'ordre  $n$ , noté  $C_n$ , est le graphe connexe dont tous les sommets sont de degré 2.

### Graphes eulériens.

**Définition 1.14** On appelle cycle eulérien d'un graphe  $G$  un cycle passant une et une seule fois par chacune des arêtes de  $G$ .

**Définition 1.15** Un graphe est dit eulérien s'il possède un cycle eulérien.

**Définition 1.16** On appelle chaîne eulérienne d'un graphe  $G$  une chaîne passant une et une seule fois par chacune des arêtes de  $G$ .

**Définition 1.17** Un graphe ne possédant que des chaînes eulériennes est semi-eulérien. Plus simplement, on peut dire qu'un graphe est eulérien (ou semi-eulérien) s'il est possible de dessiner sans lever le crayon et sans passer deux fois sur la même arête.

### Graphes hamiltoniens

**Définition 1.18** On appelle cycle hamiltonien d'un graphe  $G$  un cycle passant une et une seule fois par chacun des sommets de  $G$ . Un graphe est dit hamiltonien s'il possède un cycle hamiltonien.

**Définition 1.19** On appelle chaîne hamiltonienne d'un graphe  $G$  une chaîne passant une et une seule fois par chacun des sommets de  $G$ .

**Définition 1.20** Un graphe ne possédant que des chaînes hamiltoniennes est semi-hamiltonien.

Contrairement aux graphes eulériens, il n'existe pas de caractérisation simple des graphes (semi-hamiltoniens). On peut énoncer quelques propriétés et conditions suffisantes :

- Un graphe connexe est eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.
- Un graphe possédant un sommet de degré 1 ne peut pas être hamiltonien.
- Un sommet dans un graphe est de degré 2, alors les deux arêtes incidentes à ce sommet doivent faire partie du cycle hamiltonien.

### Graphes subdivision de wheel

**Définition 1.25** On définit le graphe « Broken Spoke Wheel » noté  $G_n$  le graphe obtenu à partir de la Roue  $W_n$  en subdivisant chaque arête  $\{u, c_i\}$  en deux arêtes  $\{u, v_i\}$  et  $\{v_i, c_i\}$ .

**Exemple 1.26**

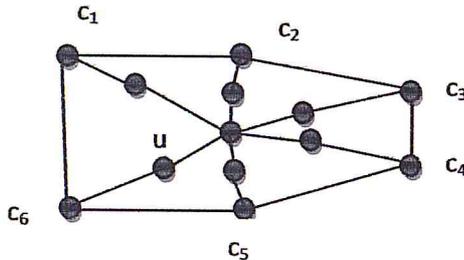


Figure 1.6 Graphe  $G_7$

### Graphe Comet

**Définition 1.27** Un graphe d'un seul cycle et tous les chemins se terminant sur ce cycle s'appellent un graphe « comet ».

### Graphes k-dégénéré

**Définition 1.28** Un graphe est k-dégénéré (k-degenerate graph), si tout sous-graphe de G possède au moins un sommet de degré inférieur ou égal à k, et la dégénérescence d'un graphe est le plus petit k tel qu'il est k-dégénéré.

### Graphes planaires.

**Définition 1.29** On dit qu'un graphe est planaire (planar graph) si on peut le dessiner dans le plan de sorte que ses arêtes ne se croisent pas.

### Graphes planaires extérieurs.

**Définition 1.30** Un graphe non orienté est planaire extérieur (outer-planar) s'il peut être dessiné dans le plan sans croisements des arêtes, de telle façon que tous les sommets appartiennent à la face extérieure du tracé, autrement dit qu'aucun sommet ne soit entouré par des arêtes. On démontre qu'un graphe G est planaire extérieur si et seulement si le graphe formé en ajoutant à G un nouveau sommet et toutes les arêtes le reliant aux sommets de G est un graphe planaire.

**Exemple 1.31**

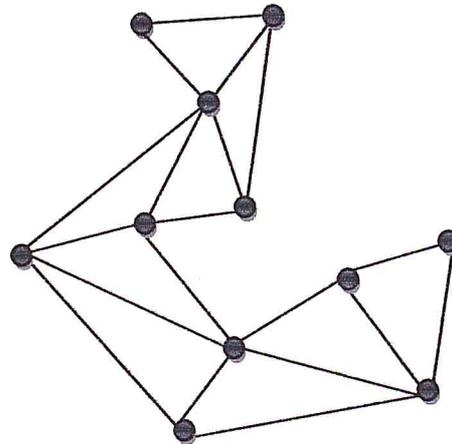


Figure 1.7 Graphe planaire extérieur

**1.1.3 Quelques classes de graphes**

**Graphes bipartis, arbres et forêts**

**Graphes k-partite**

**Définition 1.32** Un graphe  $G$  est appelé  $k$ -partite ( $k$ -partite graph) si l'ensemble de tous ses sommets peut être partitionné en  $k$  stables  $V_1, V_2, \dots, V_k$ . Les termes graphe biparti et triparti sont utilisés pour décrire les graphes  $k$ -partite pour  $k$  égal 2 et 3, respectivement. Un graphe  $k$ -partite est appelé complet si tout sommet  $v \in V_i$  est adjacent à tous les sommets de  $V_j$  pour toute paire  $i, j$  tel que  $i \neq j$ . Le symbole  $K_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  est utilisé pour décrire le graphe  $k$ -partite complet, avec des tailles de partition égales à  $|V_i| = n_i$  pour  $i = 1, 2, \dots, k$ .

**Graphes bipartis**

**Définition 1.33** Un graphe est biparti (bipartite graph) si ses sommets peuvent être divisés en deux ensembles  $X$  et  $Y$ , de sorte que toutes les arêtes du graphe relient un sommet dans  $X$  à un sommet dans  $Y$ . Autrement dit de sorte que  $X$  et  $Y$  sont des stables.

**Définition 1.34** Un graphe biparti est dit complet (ou encore est appelé une biclique) si chaque sommet de  $X$  est relié à chaque sommet de  $Y$ .

**Définition 1.35** Un graphe biparti est dit birégulier si tous les sommets de  $X$  ont le même degré, et si tous les sommets de  $Y$  ont le même degré.

**Définition 1.36** Une étoile est le graphe biparti complet  $K_{1,k}$ , ( $k \geq 1$ ).

**Arbres**

**Définition 1.37** On appelle arbre (tree) tout graphe connexe sans cycles. Un graphe sans cycles est appelé une forêt (forest).

## Graphes parfait

### Graphes triangulés

**Définition 1.38** Un graphe est triangulé si tous ses cycles de plus de 3 sommets contiennent au moins une corde (arête reliant deux sommets non adjacents d'un cycle).

**Définition 1.39** Un séparateur est un sous-ensemble  $W$  de sommets dans un graphe connexe  $G = (V, E)$  tel que le graphe  $G[V - W]$  est non connexe.

**Définition 1.40** Un sommet  $v$  est dit simplicial si son voisinage  $N(v)$  est une clique (le voisinage  $N(v)$  étant l'ensemble des sommets adjacents à  $v$ ).

**Théorème 1.41** Un graphe connexe est triangulé si et seulement si tout séparateur minimal est une clique.

**Théorème 1.42** Tout graphe triangulé autre qu'une clique contient au moins deux sommets simpliciaux non adjacents.

Algorithme de reconnaissance (Fulkerson et Gross, 1969)

1. Poser  $G' = G$ .
2. Si  $G'$  est vide alors  $G$  est triangulé : STOP
3. Si  $G'$  ne contient pas de sommet simplicial alors  $G$  n'est pas triangulé.
4. Ôter un sommet simplicial de  $G'$  et retourner à 2.

Un schéma d'élimination parfait est un ordre  $v_1 < \dots < v_n$  des sommets tel que  $v_i$  est simplicial dans  $G[v_1, \dots, v_n]$  ( $n = |V|$ ).

**Théorème 1.43** Un graphe est triangulé si et seulement s'il possède un schéma d'élimination parfait.

### Cas particuliers de graphes triangulés

#### Graphes scindés.

**Définition 1.44** Un graphe scindé (split graph) est un graphe dont l'ensemble des sommets peut être partitionné en deux sous ensembles, dont l'un est un stable et l'autre est une clique.

#### Graphes d'intervalles.

**Définition 1.45** Un graphe d'intervalle (interval graph) est le graphe d'intersection d'un ensemble d'intervalles de la droite réelle  $I_1, \dots, I_n$ , i.e. chaque sommet représente un intervalle et une arête relie deux sommets  $i$  et  $j$ ,  $i \neq j$ , lorsque les intervalles correspondants s'intersectent ( $I_i \cap I_j \neq \emptyset$ ).

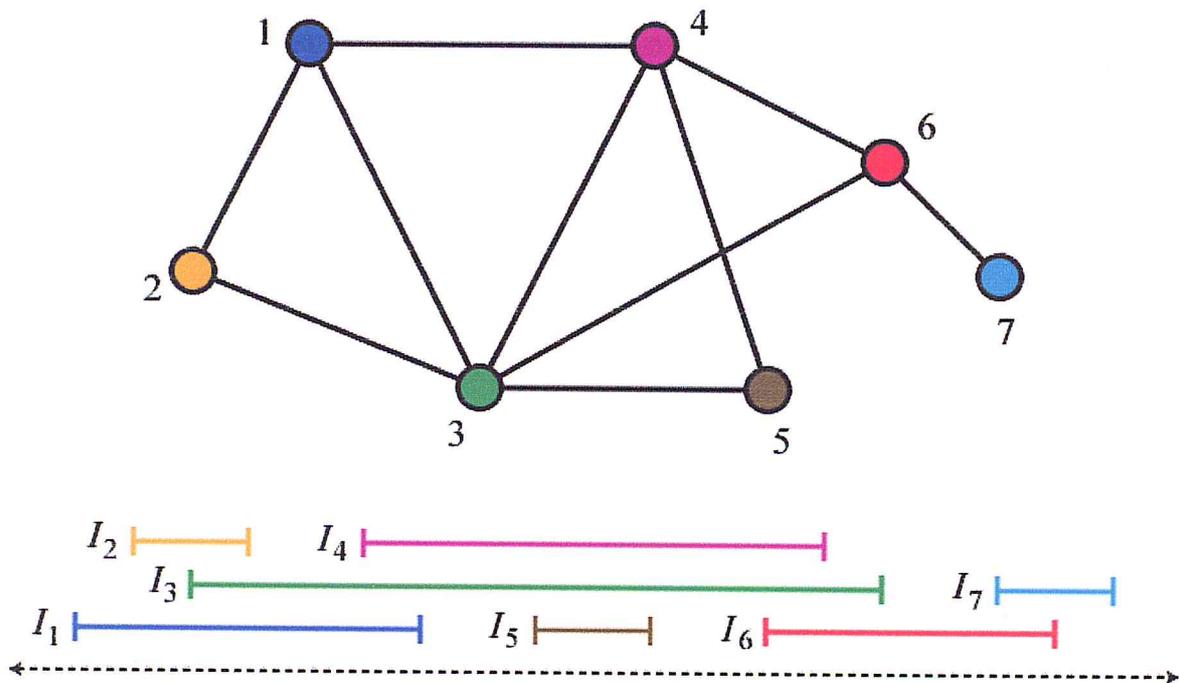


Figure 1.8 Graphe d'intervalle

#### 1.1.4 Stables et cliques

**Définition 1.46** Un stable (stable set ou independent set) est un sous-ensemble de sommets non adjacents 2 à 2. Le cardinal du plus grand stable est le nombre de stabilité de  $G$ , on le note  $\alpha(G)$ .

**Définition 1.47** Une clique (clique) d'un graphe  $G$  est un sous graphe complet de  $G$ .

L'ordre maximum d'une clique dans  $G$  est noté  $w(G)$ .

#### 1.1.5 Graphes partiels et sous graphes.

Soit  $G = (V, E)$  un graphe.

**Définition 1.48** Un graphe  $G' = (V', E')$  est un graphe partiel de  $G = (V, E)$ , si  $E'$  est inclus dans  $E$ .

**Définition 1.49** Soit  $G = (V, E)$  un graphe. Un graphe  $G' = (V', E')$  est dit un sous graphe de  $G$  si  $V'$  est inclus dans  $V$  et  $E'$  est inclus dans  $E$ . Pour un sous-ensemble de sommets  $A$  inclus dans  $V$ , le sous-graphe (subgraph) de  $G$  induit par  $A$  est le graphe  $G = (A, E(A))$  dont l'ensemble des sommets  $A$  et l'ensemble des arêtes  $E(A)$  est formé de toutes les arêtes de  $G$  ayant leurs deux extrémités dans  $A$ . Il est noté  $G = [A]$ .

Autrement dit, on obtient  $G'$  en enlevant un ou plusieurs sommets au graphe  $G$ , ainsi que toutes les arêtes incidentes à ces sommets.

## 1.2 Graphes orientés.

### 1.2.1. Définitions.

En donnant un sens aux arêtes d'un graphe, on obtient un digraphe (ou graphe orienté). Le mot «digraphe» est la contraction de l'expression anglaise «directed graph». Un graphe orienté  $G = (V, E)$  est défini par un ensemble fini  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  dont les éléments sont appelés sommets, et par un ensemble fini  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$  dont les éléments sont appelés arcs. Un arc  $u$  de l'ensemble  $U$  est défini par une paire ordonnée de sommets. Lorsque  $u = (a, b)$ , on dit que l'arc  $u$  va de  $a$  à  $b$ . On dit aussi que  $a$  est l'extrémité initiale et  $b$  l'extrémité finale de  $u$ .

#### Degré d'un sommet d'un digraphe

**Définition 1.50** Soit  $v$  un sommet d'un graphe orienté.

On note  $d^+(v)$  le degré extérieur du sommet  $v$ , c'est-à-dire le nombre d'arcs ayant  $v$  comme extrémité initiale.

On note  $d^-(v)$  le degré intérieur du sommet  $v$ , c'est-à-dire le nombre d'arcs ayant  $v$  comme extrémité finale. On définit aussi le degré :  $d(v) = d^+(v) + d^-(v)$

**Définition 1.51** On appelle tournoi un digraphe complet.

### 1.2.2 Quelques graphes particuliers

#### Graphes de comparabilité

**Définition 1.52** Un graphe est de comparabilité si on peut orienter ses arêtes de façon transitive, c'est-à-dire de telle sorte que s'il existe un arc de  $i$  vers  $j$  et un arc de  $j$  vers  $k$ , alors il existe également un arc de  $i$  vers  $k$ .

**Algorithme permettant de déterminer si  $G=(X,U)$  est un graphe de comparabilité.**

1.  $F \neq \emptyset$

2. Tant que  $F \neq E$  faire Choisir une arête  $e$  dans  $E-F$ , donner une orientation à  $e$  et compléter cette orientation pour assurer une orientation transitive de  $G$ . Si une arête doit être orientée dans les deux sens, STOP :

$G$  n'est pas de comparabilité.

Sinon, rajouter à  $F$  toutes les arêtes nouvellement orientées.

Si  $F = E$  alors STOP :

$G$  est de comparabilité.

### Chemins et circuits

**Définition 1.53** Dans un graphe orienté, un chemin conduisant du sommet  $a$  au sommet  $b$  est une suite ayant pour éléments alternativement des sommets et des arcs, commençant par  $a$  et se terminant par  $b$ , et telle que chaque arc est encadré à gauche par son sommet origine et à droite par son sommet destination.

**Définition 1.54** On appelle distance entre deux sommets d'un graphe orienté la longueur du plus petit chemin les reliant.

**Définition 1.55** Les notions de chaînes et cycles dans les graphes orientés sont définies de la même manière que dans les graphes non orientés. Un circuit est un cycle dont tous les arcs sont dans le même sens.

### Arborescence

**Définition 1.56** Une arborescence est un arbre comportant un sommet particulier, nommé racine de l'arborescence à partir duquel il existe un chemin unique vers tous les autres sommets.

### Graphe arbre binaire

**Définition 1.57** un graphe arbre binaire (binary tree) est une structure de données arborescente dans laquelle chaque sommet a au plus deux enfants, qui sont appelés l'enfant gauche et l'enfant droit.

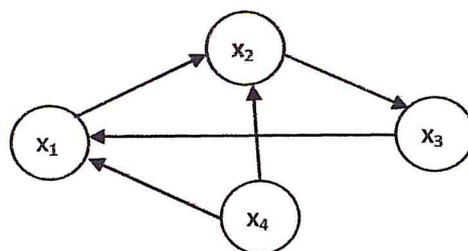
### La forte connexité

#### La notion de forte connexité

On définit la forte connexité dans un graphe par une relation entre deux sommets de la manière suivante

**Définition 1.58** Deux sommets  $x$  et  $y$  ont une relation de forte connexité si et seulement si il existe un chemin de  $x$  à  $y$  et un chemin de  $y$  à  $x$ , ou bien  $x=y$ .

**Exemple 1.59** Soit le graphe  $G=(X,U)$  ci-dessous.



**Figure 1.9** Un exemple d'illustration de la forte connexité.

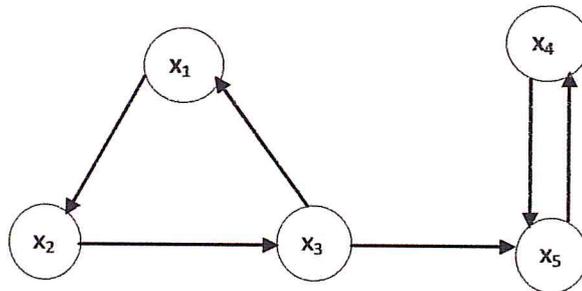
- On a un chemin du sommet  $x_1$  à  $x_3$  et un chemin du sommet  $x_3$  au sommet  $x_1$  alors  $x_1$  et  $x_3$  ont une relation de forte connexité.

- On a un chemin du sommet  $x_4$  à  $x_3$ , mais on n'a pas de chemins du sommet  $x_3$  au sommet  $x_4$  alors  $x_4$  et  $x_3$  n'ont pas de relation de forte connexité.

### Les composantes fortement connexes

**Définition 1.60** On appelle composante fortement connexe un ensemble de sommets, qui ont deux à deux la relation de forte connexité, de plus tout sommet en dehors de la composante n'a pas de relation de forte connexité avec tous les éléments de cette composante.

**Exemple 1.61** Soit le graphe  $G=(X, U)$  suivant:



**Figure 1.10** Un exemple d'illustration de la composante fortement connexe.

- Les sommets  $x_1, x_2, x_3$  ont deux à deux la relation de forte connexité, donc l'ensemble  $\{x_1, x_2, x_3\}$  forme ainsi la 1<sup>ère</sup> composante fortement connexe, on la note  $C_1$ .

- L'ensemble  $\{x_4, x_5\}$  forme la composante fortement connexe, on la note  $C_2$ .

On constate que les sommets de  $C_1$  n'ont pas de relation de forte connexité avec les sommets de  $C_2$ .

### Graphes fortement connexes

**Définition 1.62** Un graphe  $G$  est dit fortement connexe si tous ses sommets ont deux à deux la relation de forte connexité, autrement dit si  $G$  contient une seule composante fortement connexe.

### Exemple 1.63

- le graphe  $G$  précédant contient deux composantes fortement connexes  $C_1=G[\{x_1, x_2, x_3\}]$  et  $C_2=G[\{x_4, x_5\}]$ , le graphe n'est pas fortement connexe.

- Si on ajoute l'arc  $(x_5, x_3)$  au graphe précédant, le graphe obtenu contient une seule composante fortement connexe  $C=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ , alors il est fortement connexe.

### Algorithme de marquage pour la recherche des composantes fortement connexes

- Choisir un sommet quelconque  $a$  de  $G$  et le marquer par (+) et (-).
- Marquer par (+) tout sommet successeur non marqué d'un sommet marqué (+).
- Marquer par (-) tout sommet prédécesseur non marqué d'un sommet marqué par (-).

Le sous graphe engendré par les sommets marqués (+) et (-) à la fois forme la composante fortement connexe contenant le sommet a.

- Supprimer cette composante fortement connexe et reprendre l'algorithme.

### 2. Théorie de la complexité

La théorie de la complexité est une branche de mathématiques et d'informatique ayant pour cadre l'étude de la difficulté intrinsèque des problèmes algorithmiques, et qui vise à classer ces problèmes en fonction de cette difficulté. Ici, les mots «complexité» et «difficulté» ne se rapportent pas à la mise au point d'un algorithme de résolution, ou aux concepts avancés auxquels il peut faire appel (comme une structure de données élaborée), mais plutôt à la quantité de ressources à utiliser pour résoudre le problème.

#### 2.1 Concepts de base

##### Définition 1.64

Un **problème** est une question générale possédant des paramètres dont la valeur n'est pas connue.

Une **instance** d'un problème est obtenue en affectant une valeur à chacun de ses paramètres.

La **taille** d'une instance désigne généralement la quantité de cases mémoires nécessaires pour décrire les paramètres.

Pour une fonction donnée  $g(n)$ , la notation  $O(g(n))$  signifie :  $O(g(n)) = \{f(n) : 0 \leq f(n) \leq cg(n), \forall n \geq n_0\}$ , pour certaines constantes positives  $c$  et  $n_0$ .

##### Exemple 1.65

Le problème du voyageur de commerce (Traveling salesman problem en abrégé TSP) consiste, étant donné un ensemble de villes séparées par des distances connues, à trouver le plus court chemin qui relie toutes les villes, en ne passant qu'une seule fois par chaque ville. Une instance du TSP est donc un ensemble de  $n$  points (représentant les villes) définis chacun par un couple de coordonnées et la taille de cette instance est  $2n+1$  (il faut une case mémoire pour chaque coordonnée des  $n$  points et une autre pour stocker l'entier  $n$ ).

Le problème consiste à trouver une permutation  $\sigma$  sans cycles de  $n$  objets ou ville telle que

$$\sum_{i=1}^n d_i \sigma_i \text{ soit minimum. C'est un problème difficile en } O(n^2 2^n).$$

Parmi les problèmes qui nous intéressent, il existe généralement deux grands types de problèmes :

##### Problèmes de décision :

**Définition 1.66** Un problème de décision est un problème auquel la réponse est oui ou non. Il est représenté génériquement par une instance (données) et par une question.

### 2.4 Classes de complexité P et NP

#### La classe P (polynomial)

Un problème de décision est dans la classe P (polynomial) si pour chacune de ses instances, dont la taille est  $n$ , il existe un réel positif  $k$  tel qu'il peut être résolu par un algorithme de complexité temporelle  $O(n^k)$ , c'est-à-dire qu'il peut être décidé en temps polynomial. Les problèmes de la classe P sont dits faciles. Ce sont ceux que l'on sait résoudre efficacement.

#### La classe NP (Non déterministe polynomial)

Elle regroupe tous les problèmes de décision qui peuvent être résolus en temps polynomial par des algorithmes non déterministes. Un algorithme est dit non déterministe s'il comporte des instructions de choix. Pour ces algorithmes, si à chaque instruction, le bon choix est effectué, le temps de calcul est polynomial. Si au contraire tous les choix sont énumérés l'algorithme devient déterministe et son temps de calcul devient exponentiel. De façon informelle, un problème de décision appartient à la classe NP si on peut vérifier en un temps polynomial, qu'une solution proposée (ou devinée) permet d'affirmer que la réponse est 'oui'.

**Remarque 1** Naturellement, si on peut résoudre un problème avec un algorithme polynomial, on peut aussi vérifier en temps polynomial que la solution fournie est bien une solution, par conséquent  $P \subset NP$ .

### 2.5 Réduction polynomiale

On dit qu'un problème de décision (D) se réduit polynomialement à un problème de décision (D') s'il existe une application  $f$  qui transforme chaque instance  $I$  de (D) en une instance  $I'$  de (D') telle que :

- $f$  est polynomiale c'est à dire la construction de  $I'$  est polynomiale par rapport à la taille  $I$ .
- La réponse est oui pour  $I$  si et seulement si la réponse est oui pour  $I'$ .

Si un problème (D) se réduit polynomialement à un problème (D') on note  $D \leq_p D'$

On dit aussi que (D) n'est pas plus difficile que (D').

Par exemple, le problème consistant à élever un nombre au carré se réduit au problème plus général de multiplication de deux nombres (ici, aucune transformation n'est nécessaire).

Une réduction est polynomiale lorsque le processus de transformation peut se faire en temps polynomial.

**Exemple 1.71** On doit montrer que le problème de décision de cycle hamiltonien (HC) se réduit polynomialement à un problème de décision de PVC (TSP)

-Soit  $I$  une instance du problème HC c'est-à-dire : un graphe  $G = (V, E)$ , Construisons une instance  $I'$  du problème TSP comme suit :  $G' = (V, E')$  est le graphe complet de  $G$  tel que :

$$d(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } e \in E \\ 2 & \text{si } e \in E' \setminus E \end{cases}, \text{ un seul } k=n.$$

- Il est clair que la construction de  $I'$  est polynomiale par rapport à la taille de  $I$ .

- montrons que la réponse par rapport à HC est oui pour  $I \Leftrightarrow$  la réponse par rapport à TSP est oui pour  $I'$

C'est-à-dire on doit montrer que s'il existe un cycle hamiltonien dans  $G \Leftrightarrow \exists$  un tour  $T$  dans  $G'$  de longueur  $l(T) \leq n$  ou  $l(T) = \sum_{e \in T} d(e)$ .

$\Rightarrow$ ) Supposons qu'il existe un cycle hamiltonien  $C$  dans  $G$  donc  $C$  est un tour qu'on note  $T$  dans  $G'$   $l(T) = n \leq n$ .

Inversement : s'il existe un tour  $T$  dans  $G'$  tel que  $l(T) \leq n \Rightarrow$  tous les arêtes du tour sont dans  $E$  sinon  $l(T)$  serait  $> n$ .

**Propriété 1.72** La réduction est une relation transitive  $D_1 \leq_p D_2$  et  $D_2 \leq_p D_3 \Rightarrow D_1 \leq_p D_3$ .

### Classe NP-Complet

La classe NP-Complet est composée des problèmes les plus difficiles de NP. On dit qu'un problème est NP-Complet si sa résolution en temps polynomial entraînerait la résolution en temps polynomial de tout problème de NP.

Un problème de décision  $D$  est dit NP-Complet s'il vérifie les deux conditions suivantes :

- $D$  appartient à la classe NP,
- Tous les problèmes de la classe NP se réduisent polynomialement à  $D$ .

**Remarque 1.73** Tout problème d'optimisation combinatoire dont le problème de décision associé est NP-complet est NP-difficile.

La classe des problèmes de décision NP peut être partitionnée en 3 sous classe : les problèmes de la classe P, les problèmes NP-Complet et les autres, voir la Figure 1.11.

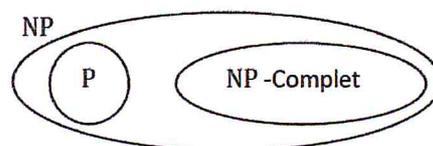


Figure 1.11 Géographie de la classe NP

### **Preuve de NP-Complétude**

Pour montrer qu'un problème de décision (D) est NP-complet on procède en 3 étapes:

Etape 1: montrer que le problème (D)  $\in$  NP.

Etape 2 : choisir un problème (D')  $\in$  NP connu pour être NP-complet

Etape 3: montrer que (D') se réduit polynomialement à (D).

### **Conjecture fondamentale $P \neq NP$**

On a vu dans la remarque 1 que  $P \subseteq NP$ , mais on ne sait pas si P est égale ou non à NP. S'il s'avérait que  $P=NP$ , alors on pourrait résoudre tous les problèmes de la classe NP en un temps polynomial. Or, les problèmes NP-Complets sont très fréquents et pour aucun d'entre eux on a réussi à trouver un algorithme polynomial le résolvant.

La communauté scientifique pense que  $P \neq NP$ , mais ce n'est pas prouvé et que cette conjecture reste un problème ouvert depuis 1971.

# **Chapitre 2**

## **Le nombre chromatique**

## Chapitre 2 : le nombre chromatique

---

Dans le deuxième chapitre on redonne la définition et quelques propriétés de nombre chromatique. Ainsi que des bornes inférieurs et supérieurs pour encadrer ce nombre et on termine ce chapitre avec des exemples d'applications sur ce paramètre.

### 1. Concepts de base

**Définition 2.1** Une  $k$ -coloration propre d'un graphe  $G = (V, E)$  est une application  $c: V \rightarrow \{1, \dots, k\}$  telle que pour toute arête  $\{u, v\}$  de  $G$   $c(u) \neq c(v)$ . Les éléments de  $\{1, \dots, k\}$  sont appelés couleurs. Ceci est équivalent à dire qu'une  $k$ -coloration de  $G$  est une partition de  $V$  en  $k$ -stables.

**Définition 2.2** Le nombre chromatique d'un graphe  $G$  est le plus petit entier  $k$  tel que  $G$  soit  $k$ -colorable et est noté  $\chi(G)$ .

En générale le problème de la détermination de nombre chromatique est un problème NP-difficile [15].

### Définition 2.3

Un graphe  $G$  est  $k$ -colorable si  $G$  admet une  $k$ -coloration propre.

### 2. Quelques propriétés du nombre chromatique

#### Propriétés 2.4

- Tout graphe  $k$ -colorable est nécessairement  $(k+1)$ -colorable.
- Un graphe  $G$  est 1-colorable si et seulement si  $E = \emptyset$ .

**Proposition 2.5** Si  $H$  est un sous-graphe de  $G$  alors  $\chi(H) \leq \chi(G)$ .

**Proposition 2.6** Soit  $G$  un graphe non connexe

$$\chi(G) = \max_i \{\chi(C_i), C_i \text{ composante connexe de } G\}.$$

#### Preuve

D'après la proposition 2.5,  $\chi(G) \geq \max_i \{\chi(C_i), C_i \text{ composante connexe de } G\}$ . Soit  $C_1, C_2, \dots, C_k$  les composantes connexes de  $G$ . Pour  $1 \leq i \leq k$ , soit  $c_i$  une coloration propre de  $C_i$  avec les couleurs  $1, 2, \dots, \chi(C_i)$ . Considérons  $c$  définie par  $c(v) = c_i(v)$  si  $v \in C_i$ . Comme il n'y a pas d'arêtes entre deux composantes connexes différentes,  $c$  est une coloration propre de  $G$ . Ainsi  $\chi(G) \leq \max_i \{\chi(C_i), C_i \text{ composante connexe de } G\}$ .

Dans la suite, nous considérons la plupart du temps que les graphes sont connexes.

### 3. Etat de l'art sur le nombre chromatique

#### 3.1 Nombre chromatique pour quelques graphes

##### **Graphe complet.**

Dans un graphe complet, comme tous les sommets sont adjacents, il faut une couleur différente par sommet.

On en déduit le résultat suivant :

**Propriété 2.7** Le nombre chromatique d'un graphe complet est égal à l'ordre de ce graphe.

##### **Les étoiles.**

Le nombre chromatique d'une étoile est égal à 2.

On donne une couleur pour le sommet centre et un autre couleur pour les sommets voisins.

##### **Graphe biparti.**

Le nombre chromatique d'un graphe biparti est inférieur ou égal à 2.

**Proposition 2.8** Un graphe  $G = (V, E)$  est biparti si et seulement s'il est 2-colorable.

##### **Les arbres.**

Les arbres sont des graphes bipartis, donc le nombre chromatique des arbres est égal à 2.

##### **Cycle élémentaire.**

Le nombre chromatique d'un cycle élémentaire  $C_n$

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 3 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

##### **Graphe roue.**

Pour les valeurs paires de  $n$ , le graphe  $W_n$  a un nombre chromatique égal à 3 : les sommets du cycle  $C_{n-1}$  peuvent être colorés avec deux couleurs et le centre se voit attribuer la troisième couleur. Pour  $n$  impair le graphe à  $n$  un nombre chromatique égal à 4 : les sommets du cycle  $C_{n-1}$  nécessitent trois couleurs et le centre se voit attribuer la quatrième couleur.

#### 3.2 Liste de quelques cas polynomiaux connue dans la littérature.

La majorité des résultats polynomiaux connus dans le domaine de la coloration sont donnés dans le tableau 2.1. La colonne "complexité" désigne la complexité temporelle d'un algorithme qui, pour un graphe donné, donne sa coloration optimale.

Famille de Graphes	$\chi(G)$	Complexité
Etoile $K_{1,n}$	2	$O(n)$
Roue $W_n, n=2k+1$	4	$O(n)$
Roue $W_n, n=2k$	3	$O(n)$
Broken Spoke wheel $G_n$	3	$O(n)$
Graphe complet $K_n$	$N$	$O(n)$
Cycle $C_n, n=2k+1$	3	$O(n)$
Cycle $C_n, n=2k$	2	$O(n)$
Chaîne $P_n$	2	$O(n)$
Comet $C_{r,s}$	2	$O(n)$
Graphe Scindé Complet	$n+1$	$O(n+r)$
Reel $R_n, n=2k$	3	$O(n)$
Reel $R_n, n=2k+1$	4	$O(n)$
Arbre binaire $T_t$	2	$O(n)$

**Tableau 2.1 [8]** Graphes dont le nombre chromatique se calcule en temps polynomial.

### 4. Encadrement du nombre chromatique

#### 4.1 Bornes inférieures pour $\chi(G)$

La proposition 2.5 appliquée à la plus grande clique de  $G$ , nous donne immédiatement :

**Proposition 2.9** Pour tout graphe  $G$ ,  $\chi(G) \geq w(G)$ .

La taille maximale d'une clique  $w(G)$  est une borne inférieure de  $\chi(G)$ . Malheureusement, ce n'est pas un bon indicateur du nombre chromatique. Car on peut construire un graphe  $G$  ayant  $w(G)=2$  et  $\chi(G)=k, k \geq 2$ .

Le calcul de cette borne  $w(G)$  lui-même est un NP-difficile.

#### Exemple 2.10

Soit la suite des graphes  $G_k$  ( $k \geq 2$ ) définie par :

## Chapitre 2 : le nombre chromatique

---

$$\chi(C_{2k+1})=3= \Delta+1.$$

La différence  $(\Delta+1)-\chi(G)$  peut être large.

**Exemple 2.15** L'étoile  $G=K_{1,t}$  ( $t \geq 2$ ).

$$\chi(K_{1,t})=2 \text{ et } \Delta+1=t+1. \text{ Donc } \Delta+1-\chi(K_{1,t})=t-1 \quad t \geq 1.$$

Ce qui montre que la borne n'est pas aussi meilleur pour certaines classes de graphes.

**Proposition 2.16** Soit  $G=(V, E)$  un graphe simple, alors

$$\chi(G) \leq |V(G)|+1-\alpha(G).$$

Cette borne peut être atteinte par exemple

Pour le graphe  $G=K_{1,3}$  on a  $|V(G)|=4$ ,  $\alpha(G)=3$  et  $\chi(G)=2$ .

$$\chi(G)=2=4+1-3$$

**Preuve :** Considérons  $S$  un stable de  $V$  de cardinalité  $\alpha(G)$ . Une coloration possible des sommets consiste à colorer les sommets de  $S$  d'une même couleur et les  $|V(G)|-\alpha(G)$  autres sommets de couleurs toutes différentes. On en déduit que :  $\chi(G) \leq 1+(|V(G)|-\alpha(G))$ .

**Théorème 2.17** Pour tout graphe  $G$  connexe d'ordre  $n$  et de taille  $m$ , on a :

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}.$$

**Preuve.**

Considérons  $S_1, S_2, \dots, S_{\chi(G)}$  une partition minimum de  $V$  en stables.

Il est à noter que  $\forall i, j$  avec  $i \neq j$ , il existe une arête entre  $S_i$  et  $S_j$ . En effet s'il n'existe aucune arête entre  $S_i$  et  $S_j$  alors on peut mettre les sommets de  $S_i \cup S_j$  dans un même stable. Ce qui diminue  $\chi(G)$  par une unité ce qui impossible.

Donc le nombre de  $G$  est  $m \geq 1/2\chi(G)(\chi(G)-1)$ . Ce qui donne le résultat après étude de cette inégalité

$$\chi^2 - \chi - 2m \leq 0 \quad (*)$$

L'inégalité (\*) est vérifiée si  $\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$ .

**Théorème 2.18** (Halin 1967). Si  $G$  est  $k$ -dégénéré alors  $\chi(G) \leq k+1$ .

**Proposition 2.19** Soit  $G$  un graphe sans triangles. Alors  $\chi(G) \leq 3(\Delta(G)+1)/4$ .

### Preuve

Posons  $k = (\Delta(G) + 1)/4$ . Soit  $(V_1, V_2, \dots, V_k)$  la partition de  $V(G)$  en  $k$  ensemble tels que le nombre d'arêtes internes (i.e. avec les deux extrémités dans une même partie) est minimum. Pour tout  $i$ , le graphe  $G_i$  induit par  $V_i$  est de degré maximum au plus 3. En effet, supposons qu'un sommet  $x$  d'une des parties, disons  $V_1$ , ait 4 voisins dans  $V_1$ . Alors une autre partie, disons  $V_2$ , contient au moins  $4k \geq \Delta(G) + 1$  voisins ce qui est impossible. Ainsi la partition  $(V_1 - x, V_2 + x, \dots, V_k)$  a moins d'arêtes interne que  $(V_1, V_2, \dots, V_k)$  ce qui contredit la minimalité de celle-ci. Ainsi  $\Delta(G_i) \leq 3$  et  $G_i$  ne contient pas de 3-clique car c'est un sous-graphe de  $G$ . Donc par le théorème de Brooks,  $\chi(G) \leq 3$ .

Ainsi en colorant les  $G_i$  avec des ensembles de couleurs distinctes, on obtient une  $3k$ -coloration de  $G$ .

En fait, la borne supérieure adéquate est la suivante.

**Conjecture 2.20 (Reed 1998).** Pour tout graphe  $G$ ,  $\chi(G) \leq \left\lceil \frac{\Delta(G) + w(G) + 1}{2} \right\rceil$ .

Dans le cas où  $w \in \{\Delta, \Delta + 1\}$ , cette conjecture est triviale. Le théorème de Brooks établit cette conjecture pour  $w = \Delta - 1$ .

Cette conjecture reste encore ouverte. Mais, si elle vraie, alors elle sera meilleure que la borne de Brooks puisque :

$$w \leq \Delta + 1 ; \left\lceil \frac{\Delta + 1 + w}{2} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{\Delta + 1 + \Delta + 1}{2} \right\rceil = \Delta + 1.$$

### Graphes planaires.

On rappelle le théorème des 4 couleurs est :

**Théorème 2.21 [1] (Appel et Haken 1977)** Tout graphe planaire est 4-colorable.

La preuve de ce théorème est très compliquée. Elle consiste en une réduction à un certain nombre de graphes (plus de 1000) pour lequel le théorème a été prouvé à l'aide d'un calcul par ordinateur.

**Théorème 2.22 [9] (Grotzsch, 1959)** tout graphe planaire sans triangle est 3-colorable.

### 5. Coloration d'un graphe triangulé $G = (V, E)$ .

#### Algorithme

- Déterminer un schéma d'élimination parfait  $v_1 < \dots < v_n$ .
- Colorer  $G$  séquentiellement selon l'ordre inverse  $v_n < \dots < v_1$ , en utilisant pour chaque sommet le plus petit numéro de couleur possible.

### 6. Coloration d'un graphe de comparabilité.

#### Algorithme de coloration minimale des sommets d'un graphe de comparabilité.

1. Déterminer une orientation transitive de  $G$  (par exemple à l'aide de l'algorithme cité dans le chapitre 1), et poser  $i := 1$ .
2. Tant qu'il existe encore des sommets à colorer faire donner la couleur  $i$  à tous les sommets sans prédécesseur,

Ôter ces sommets du graphe,

Poser  $i := i+1$

### 7. Application de la coloration.

#### 7.1 Les couleurs de l'incompatibilité.

On doit former des groupes avec des 'individus'  $s_1, s_2, \dots, s_n$ . Mais ces individus présentent certaines incompatibilités. Les groupes formés ne doivent contenir que des individus non incompatibles. On se fixe pour objectif de former un nombre minimum de groupes en respectant les incompatibilités entre individus. On représente la situation par un graphe, les sommets sont les individus, deux individus sont reliés par une arête si et seulement s'ils sont incompatibles. Un groupe formé d'individus compatibles est un ensemble de sommets stable (aucune arête du graphe ne relie deux sommets d'un tel ensemble). La question que l'on se pose s'énonce donc ainsi en termes de théorie des graphes : "quel est le nombre minimal de parties dans une partition des sommets constituée uniquement de parties stables" ?

Ce nombre est aussi le nombre chromatique du graphe. Une partition des sommets en parties stables fournit en effet une coloration du graphe (une couleur par partie de la partition) et réciproquement une coloration du graphe fournit une partition en parties stables (chaque partie de la partition est définie par une couleur).

On ramène donc ces situations d'incompatibilité au problème de la détermination d'un nombre chromatique.

##### 7.1.1 Stockage agricole.

Un paysan stocke dans ses hangars divers produits (engrais, carburant, paille,... que l'on nommera ici  $a, b, c, d, e, f, g$ ). L'Europe, aux exigences draconiennes, lui impose de stocker dans des endroits différents certains produits, selon le tableau suivant :

	A	b	C	D	e	f	G
A		*	*	*			*
B	*		*	*	*		*

## Chapitre 2 : le nombre chromatique

C	*	*		*	*		
D	*	*	*			*	
E		*					
F			*	*			*
G	*	*				*	

**Tableau 2.2** Tableau de stockage agricole de sept produits

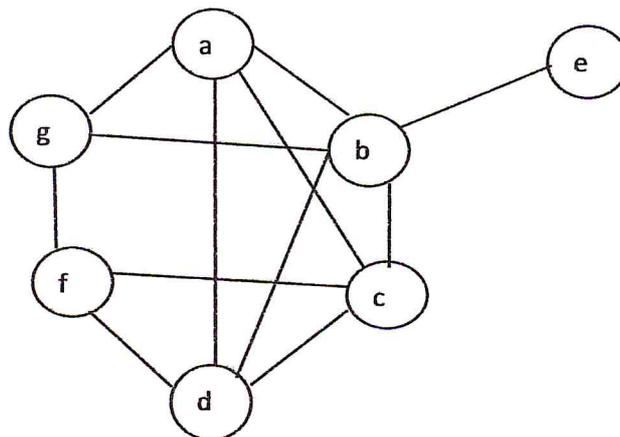
Lecture de la ligne 1 : **a** ne peut être stocké ni avec **b**, ni avec **c**, ni avec **d**, ni avec **g**.

Avec combien de hangars notre paysan devra-t-il encore s'endetter ?

1. Résoudre la question avec le graphe des incompatibilités.
2. Résoudre la question avec le graphe des compatibilités.

**Résolution.**

- 1- On représente chaque produit à stocker par un sommet d'un graphe  $G$ , deux sommets étant reliés par une arête si et seulement si les deux produits ne peuvent être stockés ensemble. Deux sommets sont donc reliés si et seulement s'ils doivent être stockés dans des hangars différents. Les produits qui peuvent stockés ensemble définissent donc une partie stable de graphe et le nombre minimum de hangars est le nombre chromatique du graphe.



**Figure 2.1** Le graphe  $G$  des incompatibilités (Stockage agricole)

Le graphe  $K_4$  (les sommets **a**, **b**, **c**, **d**) est un sous-graphe de  $G$  donc  $\chi(G) \geq 4$  et 4 couleurs suffisent. Et comme  $\chi(G)$  est le plus petit entier  $k$  tel que  $G$  soit  $k$ -colorable, alors  $\chi(G) = 4$ .

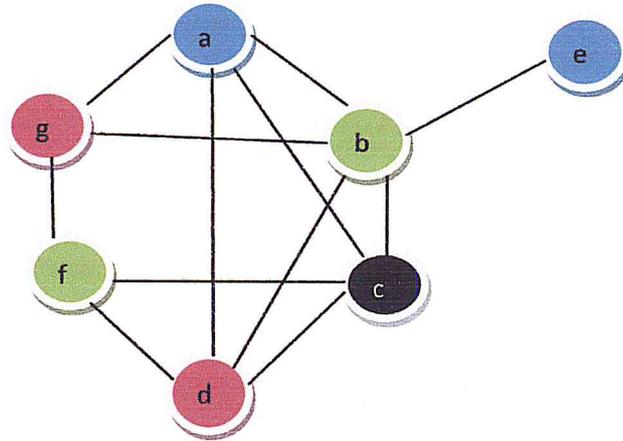


Figure 2.2 La coloration propre de G (Stockage agricole)

2- On fait le même raisonnement mais en passant aux notions "complémentaires".

Le graphe complémentaire  $\bar{G}$  de celui que l'on vient d'utiliser est le suivant

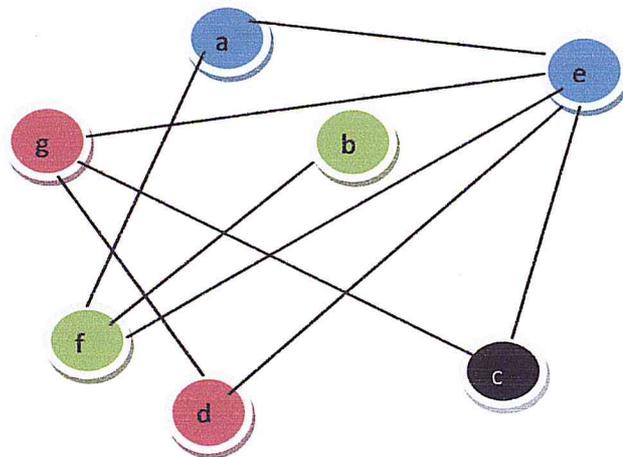


Figure 2.3 La coloration propre de graphe complémentaire  $\bar{G}$  (Stockage agricole).

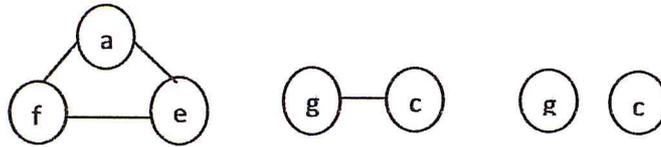
Des produits  $p_1, p_2, \dots, p_h$  peuvent être placés dans le même hangar si et seulement si le graphe  $\bar{G}$  contient le graphe complet de sommets  $p_1, p_2, \dots, p_h$ . On cherche donc, pour résoudre le problème, à écrire le graphe  $\bar{G}$  comme une réunion de cliques sans sommets communs, le nombre de cliques étant le plus petit possible.

La partie stable  $\{a, b, c, d\}$  du graphe  $\bar{G}$  montre qu'il faudra au moins quatre hangars puisque deux produits d'une même partie stable ne peuvent pas être dans le même hangar.

Or  $\bar{G}$  est la réunion des quatre cliques

## Chapitre 2 : le nombre chromatique

---



Donc le minimum cherché est 4.

### 7.1.2 Produits chimiques

Une entreprise qui fabrique des produits chimiques doit les acheminer à destination par voie ferrée. Mais certains de ces produits ne peuvent voyager dans le même wagon, car leur présence à peu de distance pourrait provoquer des dégâts importants (mélange en cas d'accident, émanation gazeuses ...).

Cependant, pour des raisons d'économie, le nombre total de wagons doit être le plus faible possible.

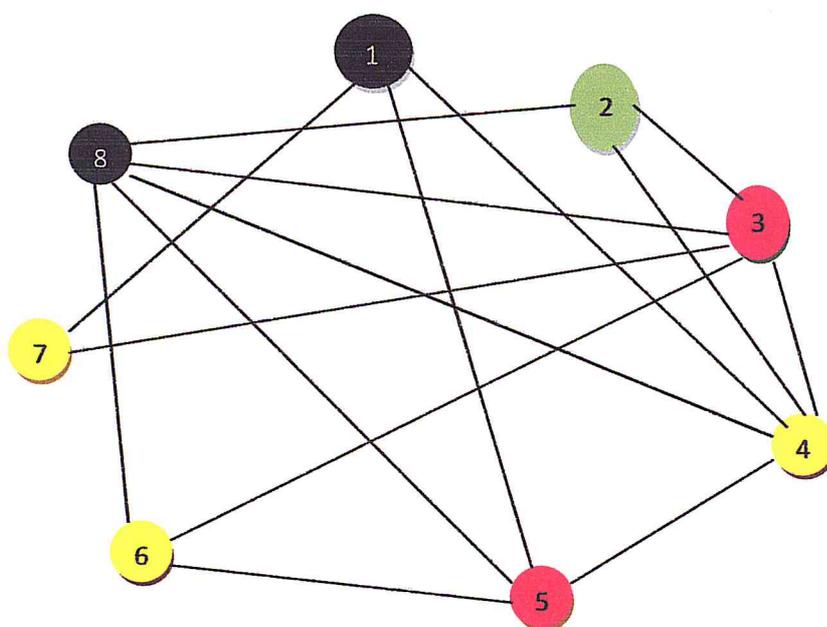
Nommons P1, P2, ..., et P8 les Huit produits à transporter.

Ne peuvent voyager dans le même wagon : P1 et P7 ; P2, P3, P4, et P8 ; P5, P6 et P8 ; P1, P4 et P5 ; P3 et P7 ; P6 et P3.

Quel est le nombre minimal de wagons à utiliser pour ce transport ? Quels seront les produits stockés dans le même wagon ?

Pour le savoir, dessinons un graphe où les sommets vont correspondre aux produits à transporter et les arêtes marqueront les incompatibilités (une arête de P1 à P7, une arête de P2 à P3, de P2 à P4, etc.). Puis effectuons une coloration de ce graphe.

Le résultat obtenue est le suivant (On a noté simplement les numéros des produits. Les couleurs utilisées sont le noir, le jaune, le vert et le rouge. La coloration ci-après n'est pas la seule possible)



**Figure 2.4** Coloration propre des sommets (produits chimiques).

Nous pouvons en conclure que quatre wagons seront nécessaires et que pourront voyager ensemble:

P1 et P8      P3 et P5      P4, P6 et P7      P2 voyagera seul.

**Remarque 2.23** On pouvait voir dès début qu'il faudrait au moins quatre wagons car le graphe comporte un sous-graphe complet d'ordre 4, celui formé par P2, P3, P4 et P8.

Le nombre chromatique du graphe était inférieur à 6 car le degré maximal des sommets est 5, c'est le cas des sommets P3, P4 et P8. Donc un encadrement de  $\chi(G)$  était  $4 \leq \chi(G) \leq 6$ .

Autrement dit on pouvait prévoir dès début qu'il faudrait entre 4 et 6 wagons.

### 7.1.3 Tournage des films

Plusieurs intermittents du spectacle sont convoqués pour participer au tournage de sept films, que l'on désigne par les lettres A, B, C, D, E, F et G.

Ils doivent participer aux films selon les données du tableau ci-dessous :

	A	B	C	D	E	F	G
Figurant	Jean	Luc	Luc	Jean	Max	Léon	Jean
Figurante	Anne	Anne	Lio	Anne	Lio	Bea	Lio
Preneur de son	Louis	Louis	Jo	Théo	Jo	Louis	Louis
Cadreur	Greg	Marc	Greg	Marc	Stef	Stef	Stef

## Chapitre 2 : le nombre chromatique

Scripte	Isa	Marie	Marie	Isa	Ada	Ada	Marie
---------	-----	-------	-------	-----	-----	-----	-------

Tableau 2.3 Tableau de tournage des films.

Tous doivent absolument participer aux films pour lesquels ils sont convoqués.

Une journée de tournage coutant très cher, il faut si possible tourner plusieurs films en même temps et en un minimum de jours.

Quelle solution pouvez-vous proposer ? Autrement dit, quels films pourra-t-on tourner en même temps(en parallèle) pour gagner du temps ?

Solution : nous allons désigner les films par leurs lettres. Et nous joindrons par des arêtes les films impossibles à tourner en même temps parce qu'une même personne doit y participer. Donc les films dont les tournages simultanés sont incompatibles.

Par exemple A et C sont incompatibles parce que Greg doit participer à ces deux films. De même que B, F et G à cause de Louis.

On obtient le graphe suivant

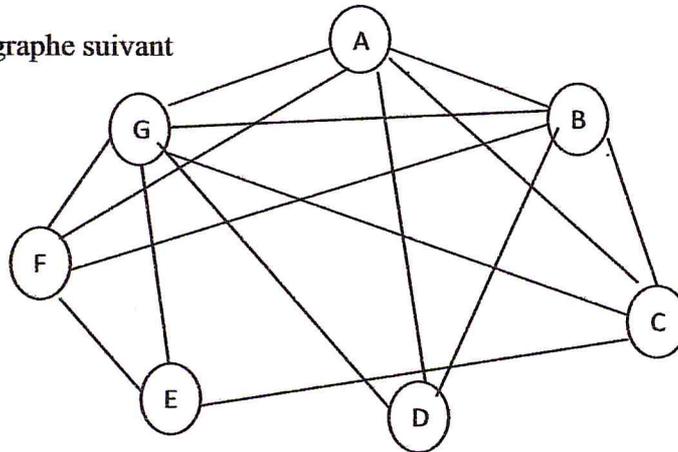


Figure 2.5 Graphe représentatif de l'exemple de tournage des films.

Ce graphe contient un sous-graphe complet d'ordre 4, donc  $\chi(G) \geq 4$  (1)

On peut colorer ce graphe avec 4 couleurs, donc  $\chi(G) \leq 4$  (2)

De (1) et (2), on obtient :  $\chi(G)=4$ .

Nous allons réaliser une coloration de ce graphe

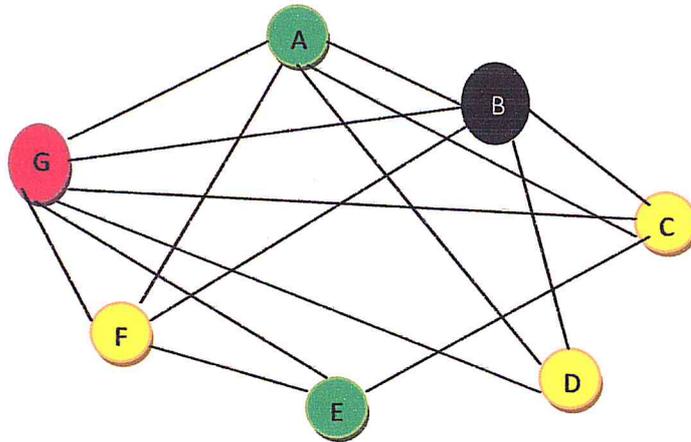


Figure 2.6 Coloration propre de graphe de l'exemple de tournage des films.

Cette coloration permet de conclure que les films A et E pourront être tournés simultanément, ainsi que les films C, D, F et enfin B devra être tourné séparément, seul, comme le film G.

### 7.2 Emploi de temps.

Un ensemble de classes  $C_1, C_2, \dots, C_n$  qui doivent être enseignées durant la semaine. Une journée est divisée en périodes qui peuvent être 1.5 h dans les universités, 1h dans les écoles. Il existe des contraintes d'incompatibilité entre les classes.

$\{C_i, C_j\} \in E$  si et seulement si ne peuvent pas avoir lieu dans une même période.

Le problème consiste à trouver le nombre minimum de période afin d'assurer l'enseignement de ces classes.

En terme de la théorie des graphes ce problème est équivalent à la recherche du nombre chromatique du graphe  $G = (V, E)$ . Où  $V$  correspond avec les classes et  $\{C_i, C_j\} \in E$  si et seulement si les classes  $C_i$  et  $C_j$  ne peuvent pas être enseignées dans une même période.

#### 7.2.1 Emploi de temps 1.

Sept modules sont proposés à des étudiants. Les étudiants peuvent s'inscrire dans les modules de leur choix. Le tableau ci-dessous indique les modules ayant des étudiants en commun.

	Topologie	groupes	anneaux	informatique	Arithmétique	analyse	Graphes
Topologie		*	*	*		*	*
Groupes	*		*				*
Anneaux	*	*		*			
Informatique	*		*		*	*	
Arithmétique				*		*	

## Chapitre 2 : le nombre chromatique

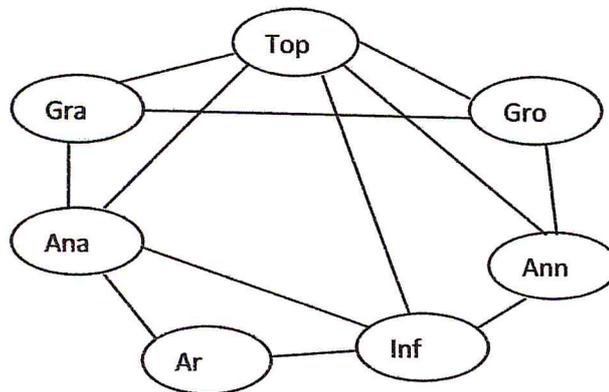
Analyse	*			*	*		*
Graphes	*	*				*	

**Tableau 2.4** Tableau des modules ayant des étudiants en commun.

Chaque cours occupe une plage de deux heures dans la semaine. Combien de telles plages faut-il prévoir pour que les étudiants puissent suivre tous les cours auxquels ils se sont inscrits (remarque : les profs sont différents sur chaque module) ?

**Résolution.**

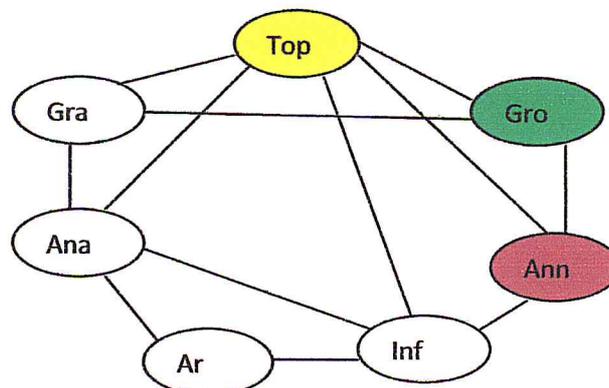
On représente chaque module par un sommet. Deux sommets reliés si et seulement s'ils ont un étudiant commun, donc deux sommets sont reliés si et seulement s'ils doivent occuper des plages horaires distinctes. Le nombre de plage horaire minimum est donc le nombre chromatique de graphe.



**Figure 2.7** Graphe représentatif de l'exemple d'emploi de temps1.

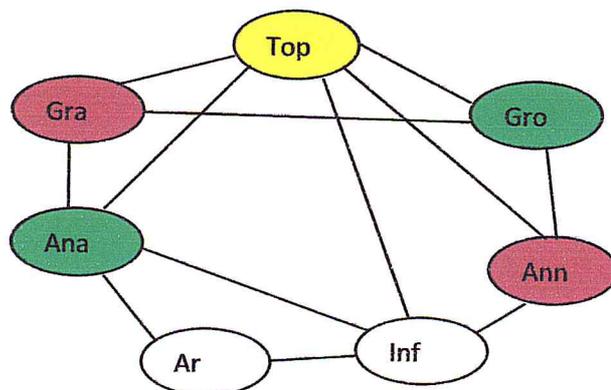
Le graphe présent des triangles donc son nombre chromatique est d'au moins trois.

Supposons que trois couleurs suffisent. On a déjà nécessairement trois couleurs sur les sommets du triangle **Topo, Gro, Ann** :



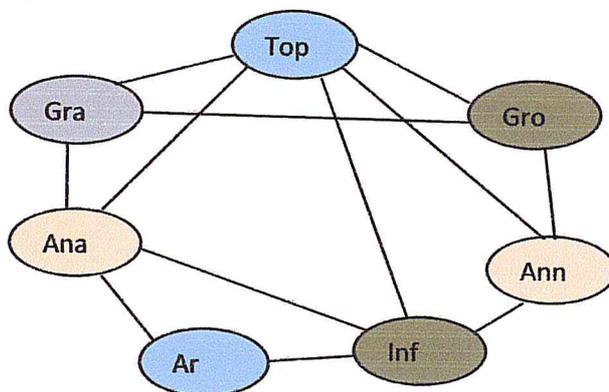
## Chapitre 2 : le nombre chromatique

**Gra** étant liés à **Top** et à **Gro** doit alors porter la couleur 3. Et **Ana** étant lié à **Top** et à **Gra** devra porter la couleur 2 :



Et **Inf** qui est lié à **Top**, **Ann** n'a plus de couleur disponible. Il faut donc au moins quatre couleurs.

Quatre couleurs suffisent :



**Figure 2.8** Coloration propre de graphe représentatif de l'exemple d'emploi de temps1.

### 7.2.2 Emploi de temps2.

Nous sommes à l'IUFM (Institut universitaire de formation des maîtres). Des enseignants doivent assurer des stages de formation auprès des étudiants de mathématiques. Pour certains stages, plusieurs enseignants doivent intervenir simultanément. Voici les stages à assurer, chacun durant une journée :

José et Bruno	Bruno et Martin	Kevin, Bruno et Enzo	Martin et Enzo	José et Saïd	Bruno et Saïd	José, Saïd et Martin	Kevin, Martin et Saïd
Géométrie dans l'espace	Géométrie plane	Suites	Probabilités	Informatique	Statistiques	Fonctions	Graphes

**Tableau 2.5** Tableau de stage des enseignants.

Il s'agit bien sûr d'organiser ces stages de la façon la plus rationnelle possible, en un minimum de jours, chaque enseignant devant évidemment assister aux stages qu'il co-anime.

## Chapitre 2 : le nombre chromatique

En désignant chaque discipline par ses initiales, nous obtenons le graphe ci-dessous, les arêtes correspondant évidemment aux incompatibilités. Par exemple géométrie dans l'espace (GE sur le graphe) sont reliés par une arête car, à cause de Bruno, ces deux formations ne peuvent avoir lieu simultanément.

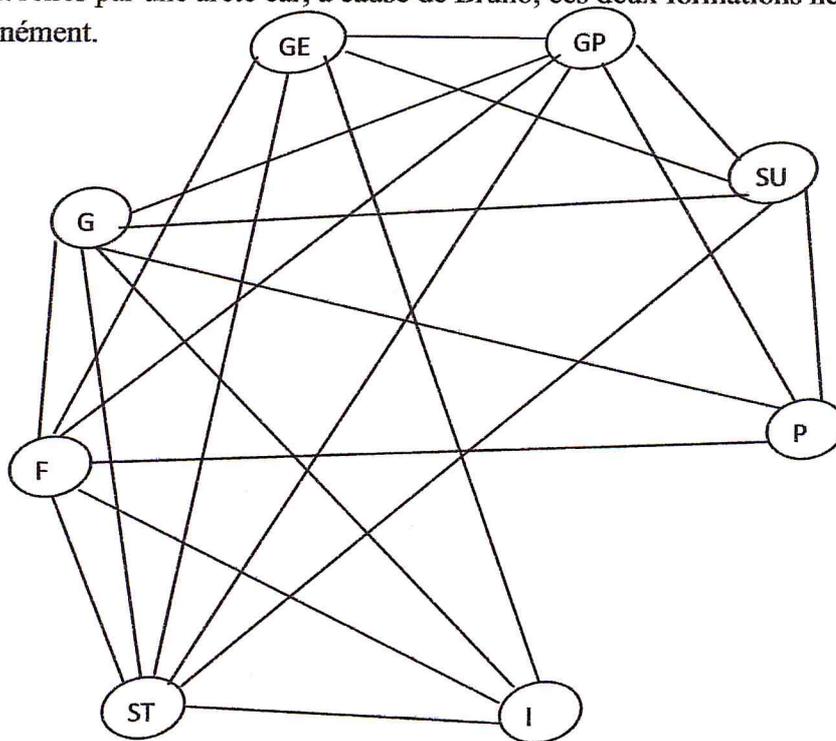


Figure 2.9 Graphe représentatif de l'exemple d'emploi de temps 2.

Il en est de même (autre exemple) de probabilités (P), et fonctions (F) à cause de Martin.

Il faut ensuite colorer ce graphe.

La coloration donc quatre jours pour organiser ce stage.

Une coloration possible est la suivante :

Sommets	GP	ST	F	G	SU	GE	P	I
Couleurs	B	V	R	N	R	N	V	B

Donc on pourra placer le même jour :

- géométrie plane et informatique
- Statistique et probabilités
- Fonctions et suites
- Graphe et géométrie dans l'espace

## **Chapitre 3**

# **Le nombre chromatique équitable**

## Chapitre3 : Nombre chromatique équitable

### 1. Motivation.

Une application de la coloration équitable est le problème de la collecte des ordures placées dans des routes, présenté par Meyer [14]. Sachant qu'il existe quelques routes dont la collecte des ordures ne peut pas être faite dans le même jour, déterminer une affectation de l'un des six-jours de la semaine de travail à chaque route. Ce problème peut être modélisé par la coloration d'un graphe  $G = (V, E)$  où l'ensemble des sommets de  $G$  correspond à l'ensemble des routes. Deux sommets sont reliés lorsque les collectes des ordures des routes correspondantes ne peuvent pas être faites le même jour. En termes de la théorie des graphes le problème est alors équivalent à la détermination de six-coloration propre du graphe  $G$ . Dans des situations pratiques il serait souhaitable de faire la collecte d'un nombre de route approximatif pour chaque jour de la semaine du travail, ceci suggère l'introduction du nombre chromatique équitable défini comme suit.

### 2. Définition

Soit  $G = (V, E)$  un graphe.

$G$  est dit  $k$ -équitablement colorable si l'ensemble de ses sommets peut être partitionnée en  $k$  stables  $V_1, V_2, \dots, V_k$  tel que l'écart entre  $|V_i|$  et  $|V_j|$  ne dépasse pas 1 pour tout  $i \neq j$ . (\*)

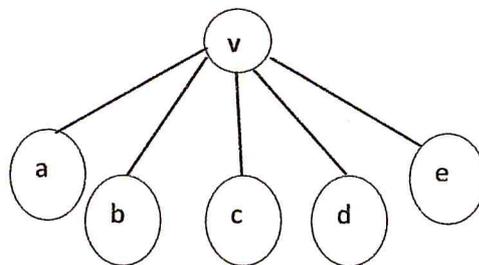
$\{V_1, V_2, \dots, V_k\}$  est alors appelée une  $k$ -coloration propre équitable. Le plus petit entier  $k$  tel que  $G$  soit  $k$ -équitablement colorable s'appelle le nombre chromatique équitable de  $G$  et est noté  $\chi_e(G)$ .

Noter qu'une coloration propre équitable de  $G$  est une coloration propre vérifiant (\*).

Le problème cité dans la motivation revient à la détermination d'une six-coloration équitable du graphe  $G$ . Si le problème est de déterminer le nombre minimum de jours pour collecter les ordures, sachant que l'écart entre le nombre de routes parcourues par jour est équivalent à la recherche du nombre chromatique équitable du graphe  $G$  comme il a été défini plus haut.

### 3. Exemples

**Exemple 3.1** Soit le graphe étoile  $K_{1,5}$



**Figure 3.1** le graphe étoile  $K_{1,5}$

## Chapitre 3 : Nombre chromatique équitable

Coloration propre du graphe  $G = K_{1,5}$

On colore le sommet  $v$  avec la couleur 1, et les voisins de  $v$  par la couleur 2. On obtient une 2-coloration propre  $C$  de ce graphe définie par  $c(v)=1$  et  $c(x)=2$  pour tout sommet  $x$  du graphe. Ceci implique que  $\chi(G)=2$ .

La coloration  $C$  ainsi définie n'est pas une coloration équitable car

$|V_1|=1, |V_2|=5$ , ce qui entraîne :  $||V_1|-|V_2||=4>1$ .

Où  $V_i$  est l'ensemble des sommets de couleur  $i$ . Calculons le nombre chromatique équitable du graphe  $G$ . Soit  $C'$  la coloration propre de  $G$  définie par:  $c'(v)=1, c'(a)=c'(b)=2, c'(c)=c'(d)=3, c'(e)=4$ . On vérifie bien que  $C'$  est une 4-coloration équitable de  $G$ , donc

$\chi_e(G) \leq 4$ . Montrons que  $\chi_e(G) \geq 4$ . Remarquons d'abord que  $\chi_e(G) \geq \chi(G)=2$ . Il reste donc à montrer que  $G$  ne peut pas avoir une 3-coloration équitable. Par l'absurde supposons que  $G$  admet une 3-coloration équitable  $C$  utilisant les couleurs 1, 2 et 3. Comme le sommet  $v$  est adjacent à tous les autres donc  $v$  doit avoir une couleur que nous supposons sans perte de généralités que c'est la couleur 1. Donc les 5 autres sommets doivent partager les 2 couleurs restantes 2 et 3.

On a 2 possibilités:

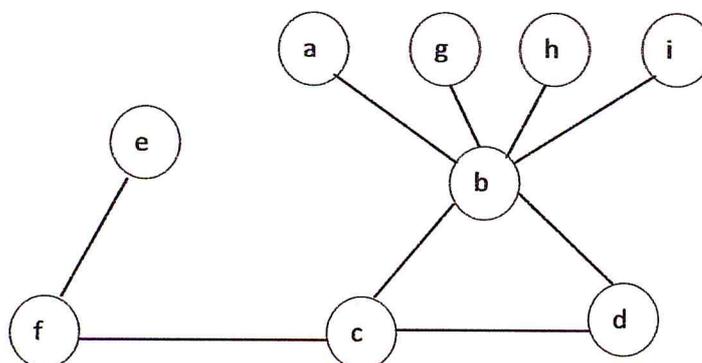
La première possibilité: Pour ces 5 sommets, il y a une couleur utilisée 2 fois et l'autre 3 fois.

La deuxième possibilité: Pour ces 5 sommets, une couleur est utilisée 1 fois et l'autre 4 fois.

Dans la première possibilité l'écart entre la couleur 1 et la couleur utilisée 3 fois implique que  $C$  n'est pas équitable.

Dans la deuxième possibilité l'écart entre le nombre de fois où la couleur 2 est utilisée et le nombre de fois où la couleur 3 est utilisée implique que  $C$  n'est pas équitable. Contradiction. Conclusion  $G$  n'admet pas de 3-colorations équitables donc  $\chi_e(G) \geq 4$ . Et par conséquent  $\chi_e(G)=4$ .

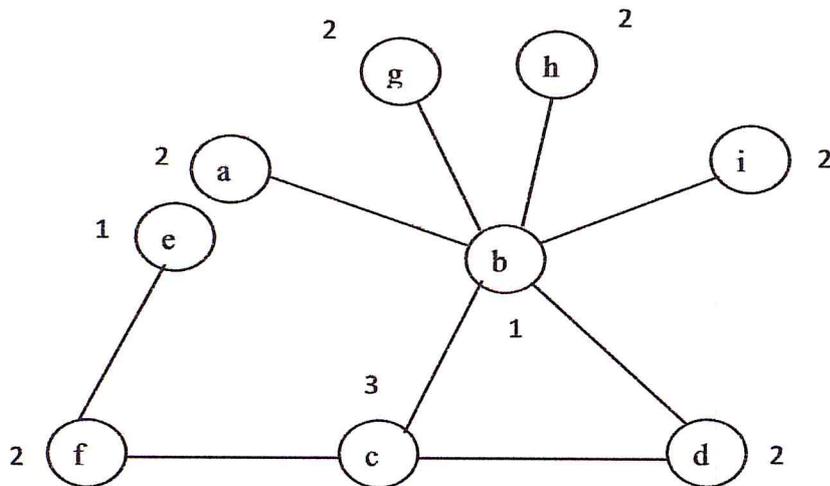
**Exemple 3.2** Soit  $G$  le graphe suivant:



Le graphe  $G$

## Chapitre 3 : Nombre chromatique équitable

Une 3-coloration propre de  $G$  est représentée sur la figure suivante:



**Figure 3.2** Une coloration propre de  $G$ .

Ce graphe contient un triangle ( $K_3$ ), donc  $\chi(G) \geq 3$  (1)

Puisque  $G$  admet une 3-coloration propre donc  $\chi(G) \leq 3$  (2)

De (1) et (2), on a :  $\chi(G)=3$ .

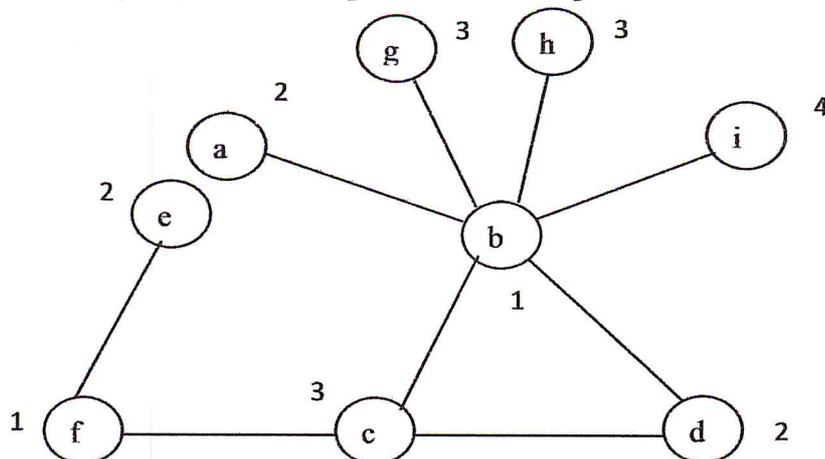
Calculons  $\chi_e(G)$ . Soit  $V_i$  l'ensemble des sommets de couleur  $i$ .

La coloration précédente, représentée sur le graphe n'est pas une coloration équitable car

$$|V_2|=6, |V_1|=2.$$

$$||V_2|-|V_1||=6-2=4>1.$$

Une coloration équitable de  $G$  est représentée sur la figure suivante:



**Figure 3.3** Une coloration équitable de  $G$ .

## Chapitre3 : Nombre chromatique équitable

Ceci entraîne que  $\chi_e(G) \leq 4$  (1)

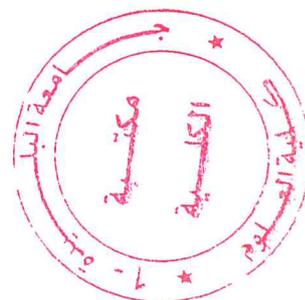
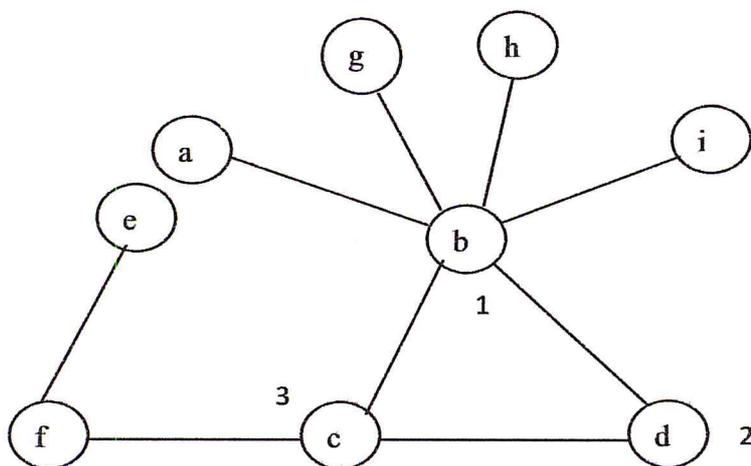
D'autre part  $\chi_e(G) \geq \chi(G) = 3$  (2)

De (1) et (2) on obtient  $3 \leq \chi_e(G) \leq 4$ .

Montrons que  $\chi_e(G) = 4$ .

Par l'absurde. Supposons que  $\chi_e(G) = 3$ , donc il existe une 3-coloration équitale C de G utilisant les couleurs 1, 2 et 3.

Sans perdre de généralité, on suppose que le triangle b-d-c est coloré avec les couleurs 1, 2, 3 respectivement. Voir la figure ci-dessous.



Considérons l'ensemble  $A = \{a, g, h, i\}$ . Puisque le sommet b est coloré avec 1 et tous les sommets de A sont adjacents à b donc l'ensemble A est coloré avec les couleurs 2 et 3. On a donc 3 possibilités des proportions utilisées de ces deux couleurs par les sommets de A. Possibilité 1: 0 sommets pour une couleur et 4 sommets pour l'autre, Possibilité 2: 1 sommet pour une couleur et 3 sommets pour l'autre, Possibilité 3: 2 sommets pour chacune des deux couleurs. Dans la suite on montre que chacune de ces 3 possibilités entraîne une contradiction.

Notons par  $V_j(C)$  l'ensemble des sommets de G colorés avec la couleur j, par rapport à la 3-coloration équitale C ( $j=1, 2, 3$ ). La couleur 1 est présente en b et elle peut être présente au plus une autre fois et ceci dans  $\{e, f\}$ , donc  $|V_1(C)| \leq 2$  (1).

Supposons qu'on a la Possibilité 1. Soit i la couleur qui est utilisée pour les 4 sommets ( $i=2$  ou  $i=3$ ). Donc  $|V_i(C)| \geq 4$  (2). De (1) et (2) on en déduit  $||V_i(C)| - |V_1(C)|| > 1$ , contradiction.

Si la Possibilité 2 est vraie, soit i la couleur utilisée 3 fois ( $i=2$  ou  $i=3$ ). La couleur i est déjà présente dans le triangle b-d-c donc  $|V_i(C)| \geq 4$ . Avec le même argument que précédemment on obtient une contradiction.

## Chapitre 3 : Nombre chromatique équitable

Supposons que la Possibilité 3 est satisfaite. Donc chacune des 2 couleurs est présente 2 fois dans A. Notons que l'une de ces 2 couleurs, disons i est présente entre les sommets e et f. Comme cette couleur i est aussi présente dans le triangle b-d-c, alors  $|V_i(C)| \geq 4$  ce qui donne aussi une contradiction avec le fait que C est une coloration équitable.

Conclusion:  $\chi_e(G)=4$ .

### 4. Quelques propriétés du nombre chromatique équitable

**Propriété 3.3**  $K_{n,n}$  (n impair) n'est pas n-équitablement colorable.

**Preuve.** (par l'absurde)

Supposons que  $K_{n,n}$  (n impair) est n-équitablement colorable C. Soit  $V_1, V_2, \dots, V_n$  une partition de  $K_{n,n}$  en n stables.

On a  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, |V_i| = 2$ . En effet :

Dans le cas contraire on a les 2 cas possibles.

Première cas :  $\exists V_i$  tel que :  $|V_i|=1$

Alors  $\forall i \neq 1, |V_i| \leq 2$ .

$$\sum_{i=1}^n |V_i| = |V_1| + \sum_{i \neq 1} |V_i|$$

$$2n \leq 1 + 2(n-1).$$

$2n \leq 2n-1$ . Contradiction

Deuxième cas :  $\exists V_s, |V_s| \geq 3$ , alors  $\forall i \neq s, |V_i| \geq 2$ .

$$\sum_{i=1}^n |V_i| = |V_s| + \sum_{i \neq s} |V_i|$$

$$2n \geq 3 + 2(n-1)$$

$2n \geq 2n+1$ . Contradiction

On en déduit alors que  $\forall i \in \{1, \dots, n\}, |V_i| = 2$ .

Posons  $K_{n,n} = (X, Y, E)$ .

Puisque C est aussi une coloration propre, chaque  $V_i$  comporte 2 éléments qui sont dans X, soit dans Y.

## Chapitre 3 : Nombre chromatique équitable

Puisque  $n$  est impair, ceci impliquera l'existence d'un certain  $V_i$  de cardinalité 2 dont l'un de ses éléments est dans  $X$  et l'autre est dans  $Y$ . Contradiction avec le fait que  $C$  est une coloration propre.

Conclusion :  $G$  n'admet pas une coloration  $n$ -coloration équitable.

On rappelle que dans la coloration propre on a la propriété suivante :

Tout graphe  $k$ -colorable est nécessairement  $(k+1)$ -colorable.

Cette propriété n'est pas vraie en général, dans le cas de la coloration équitable. Par exemple :

$K_{3,3}$  est équitablement 2-colorable mais n'est pas équitablement 3-colorable.

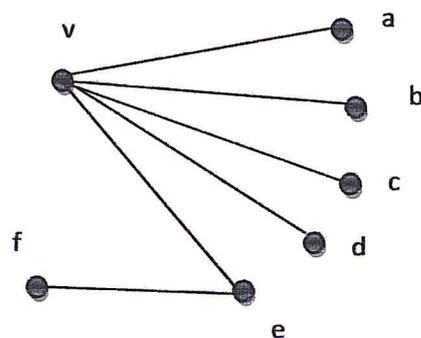
$K_{7,7}$  est équitablement  $k$ -colorable pour  $k=2, 4, 6$  et  $k \geq 8$ , mais n'est pas équitablement colorable pour  $k=3, 5$  et  $7$ .

Rappelons que la proposition 2.5 stipule que le nombre chromatique d'un sous graphe  $H$  d'un graphe  $G$  est inférieur ou égal le nombre chromatique de  $G$ . Cette proposition n'a pas d'analogue pour le nombre chromatique.

### Propriété 3.4

La proposition 2.5 n'est pas en général vraie pour le nombre chromatique équitable.

### Exemple 3.5



Le graphe  $G$

On a  $\chi_e(G)=3$ .

Pour le sous-graphe  $H$  engendré par  $\{v, a, b, c, d, e\}$  on a :  $\chi_e(G)=4$ .

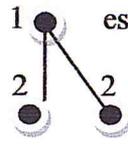
## 5. Etat de l'art sur le nombre chromatique équitable

### 5.1 Coloration équitable de quelques graphes

#### Etoiles (star graph)

$n=1$ ,  $\chi_e(K_{1,1}) = \chi(K_{1,1}) = 2$ .

Pour  $n=2$ , une coloration propre utilise au moins 2 couleurs, donc  $\chi_e(K_{1,2}) \geq 2$  (1)

D'autre part la coloration  est une 2-coloration équitable, donc  $\chi_e(K_{1,2}) \leq 2$  (2)

De (1) et (2), on obtient :  $\chi_e(K_{1,2}) = 2$ .

Avec la même démarche on a la généralisation suivante :

$$\chi_e(K_{1,n}) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1.$$

Où  $\lceil x \rceil$  désigne la partie entière supérieure de  $x$ .

### Arbres.

Pour les arbres W.Meyer [14] a montré le résultat suivant :

**Théorème 3.6 [10].** Si  $T$  est un arbre avec degré maximum  $\Delta(T)$ , alors  $\chi_e(T) \leq \left\lceil \frac{\Delta(T)}{2} \right\rceil + 1$ .

**Théorème 3.7 [2].** Un arbre  $T$  avec  $t$  sommets est 3-équitablement colorable si  $t \geq 3\Delta(T) - 8$  ou si  $t = 3\Delta(T) - 10$ .

**Théorème 3.8 [4].** Soit  $T$  un arbre non nul comme  $||X| - |Y|| \leq 1$ . Alors  $T$  est équitablement  $k$ -colorable si et seulement si  $k \geq 2$ .

**Théorème 3.9 [4].** Soit  $T = T(X, Y)$  un arbre tel que  $||X| - |Y|| > 1$ . Alors  $T$  est équitablement  $k$ -colorable si et seulement si  $k \geq \max \left\{ 3, \left\lceil \frac{|T| + 1}{\alpha(T - N[v]) + 2} \right\rceil \right\}$ , où  $v$  est un sommet arbitraire.

### Les graphes bipartis

**Proposition 3.10 [4].** Soit  $G = G(X, Y)$  un graphe biparti connexe. Alors  $\chi_e(G) = 2$  si et seulement si  $||X| - |Y|| \leq 1$ .

**Théorème 3.11 [4].** Soit  $G = G(X, Y)$  un graphe biparti avec  $g$  sommets. Si  $G$  a  $r$  composants et  $r \geq g/f$  pour un entier positif  $f$ , alors  $G$  est équitablement  $f$ -colorable.

### Graphes cubiques

**Théorème 3.12 [8].** Soit  $G$  un graphe cubique connexe, dont le nombre chromatique est 3.  
Alors  $\chi_e(G) = 3$ .

## Chapitre3 : Nombre chromatique équitable

### Graphes planaires

**Corollaire 3.13 [17].** Chaque graphe planaire  $G = (V, E)$  sans  $C_4$  avec un degré maximum au plus 8 et  $|G| \geq 21$  est équitablement 7-colorable.

**Lemme 3.14 [17].** Chaque graphe planaire  $G = (V, E)$  sans  $C_4$  avec degré maximum au plus 8 est équitablement 8-colorable.

### Les graphes adjoints

**Théorème 3.15 [20]** Si  $G$  est un graphe adjoint, alors

$$\chi_e(G) = \chi(G).$$

### 5.2 Liste de quelques cas polynomiaux connue dans la littérature.

Famille de Graphes	$\chi_e(G)$	Complexité
Etoile $K_{1,n}$	$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$	$O(n)$
Roue (wheel) $W_n$ , $n=2k+1$	$\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil + 1$	$O(n)$
Roue $W_n$ , $n=2k$	$\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil + 1$	$O(n)$
Broken Spoke wheel $G_n$	$\begin{cases} 3 & \text{pour } n \leq 7 \\ 4 & \text{ailleurs} \end{cases}$	$O(n)$
Graphe complet $K_n$	$n$	$O(n)$
Cycle $C_n$ $n=2k+1$	3	$O(n)$
Cycle $C_n$ $n=2k$	2	$O(n)$
Chaîne $P_n$	2	$O(n)$
Comet $C_{r,s}$	$\begin{cases} 2 & \text{pour } r=2 \text{ et } s=2k \text{ ou } r=1. \\ \max \left\{ 3, \left\lceil \frac{r+s+2}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{(s-1)}{2} \right\rceil + 2 \right\} & \text{ailleurs.} \end{cases}$	$O(n)$
Graphe scindé complet	$n + \left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil$	$O(n+r)$
Reel $R_n$ , $n=2k$	$\begin{cases} 3 & \text{pour } n=2 \text{ ou } n=4. \\ 4 & \text{ailleurs.} \end{cases}$	$O(n)$
Reel $R_n$ ,	4	$O(n)$

## Chapitre3 : Nombre chromatique équitable

$n=2k+1$		
Arbre binaire $T_t$	$\min\{3,t\}$	$O(n)$

**Tableau 3.1 [8]** Graphes dont le nombre chromatique équitable se calcule en temps polynomial.

**Théorème 3.16 [8]** Le problème de décision si  $\chi_e(G) \leq 3$  est NP-Complet même si le graphe  $G$  est le graphe adjoint d'un graphe cubique.

**Preuve.**

Soit le problème de décision suivant

Le problème (D) :

Instance : soit  $G$  un graphe cubique.

Question :  $\chi'(G) \leq 3$  ? Est un problème NP-Complet.

**Définition 3.17** Le nombre chromatique des arêtes de  $G$  ou Indice chromatique est le nombre minimal de couleur nécessaire pour réaliser la coloration des arêtes d'un graphe  $G$ . et noté  $\chi'(G)$ .

Faisons une réduction polynomial de (D) au problème de décision suivant (D').

Problème (D')

Instance : soit  $G'=L(G)$ , c'est le graphe adjoint du graphe  $G$ .

Question  $\chi_e(G') \leq 3$  ?

Il est clair que (D')  $\in$  NP-Complet Marek Kubale [12] a démontré le résultat suivant :

$$\chi'(G) \leq 3 \Leftrightarrow \chi_e(G') \leq 3.$$

Ce qui la démonstration du théorème.

### 6. Bornes sur le nombre chromatique équitable et la conjecture de la coloration équitable

#### 6.1 Bornes inférieures

**Proposition 3.18 [8]** Si  $G$  est un graphe simple, alors  $\chi_e(G) \geq \chi(G)$ .

Cette borne est très pauvre pour les étoiles pour lesquelles la différence

$$\chi_e(K_{1,n}) - \chi(K_{1,n}) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 - 2 = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1.$$

Peut être arbitrairement grand pour  $n \rightarrow \infty$

## Chapitre 3 : Nombre chromatique équitable

Le résultat suivant est démontré dans [12]

**Proposition 3.19 [8]** Si  $G$  est un graphe et  $v$  est un sommet quelconque de  $G$ , on a :

$$\chi_e(G) \geq \left\lceil \frac{n+1}{\alpha(G-N[v])+2} \right\rceil.$$

Où  $\alpha(G-N[v])$  est le nombre de stabilité de  $G-N[v]$ .

**Preuve.**

Supposons maintenant que  $G$  soit coloré de manière équitable et qu'un sommet  $v$  est coloré, par exemple avec la couleur 1. Le nombre total de sommets coloré avec 1 est au plus  $\alpha(G-N[v])+1$ , où  $N[v]$  est le voisin fermé. Puisque la coloration est équitable, le nombre de sommets colorés avec toute autre couleur est au plus  $\alpha(G-N[v])+2$ . Ainsi

$$(n+1 / \alpha(G-N[v])+2) \leq \chi_e(G).$$

De cette propriété on tire la deuxième borne inférieure pour le nombre chromatique équitable

**Proposition 3.20** Soit  $G=(V, E)$  un graphe.

Une borne inférieure de  $\chi_e(G)$  est donnée par la formule :

$$\max_{v \in V} \left\lceil \frac{n+1}{\alpha(G-N[v])+2} \right\rceil \leq \chi_e(G).$$

### 6.2 Bornes supérieures

A notre connaissance, la première borne supérieure pour le nombre chromatique équitable est par le théorème de Hajnal-Szemerédi dont l'énoncé est :

**Théorème de Hajnal-Szemerédi 3.21 [8]** Tout graphe  $G$  peut être coloré équitablement avec  $k$  couleurs pour  $k \geq \Delta(G) + 1$ .

**Théorème 3.22 [8]** Pour tout graphe  $G$

$$\chi_e(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Le Théorème 3.4, de Meyer montre que le nombre chromatique équitable n'est pas directement lié au nombre chromatique.

Meyer s'est inspiré du théorème de Brooks de la coloration propre, et proposa la conjecture suivante en 1973, connu dans la littérature sous le nom : conjecture de la coloration équitable (en anglais equitable coloring conjecture, en abrégé ECC-conjecture).

**ECC-conjecture.** Soit  $G$  un graphe connexe. Si  $G$  n'est ni un graphe complet, ni un cycle impair, alors  $\chi_e(G) \leq \Delta(G)$ .

## Chapitre 3 : Nombre chromatique équitable

- Meyer a réussi à vérifier la conjecture pour les graphes avec 6 sommets ou moins.
- En 1983, Bollobas et Guy [2] ont vérifié la conjecture pour les arbres.
- Chen et Lih [4] ont Prouvé la validité de la conjecture de Meyer pour les cas où  $\Delta(G) \leq 3, \Delta(G) \geq |V|/2$
- Lih et Wu [12] ont prouvé que la conjecture de la coloration équitable est vraie pour tous les graphes bipartis.
- Yap et Zhang [12] ont prouvé la conjecture de Meyer pour les graphes planaire extérieurs, pour les graphes planaires  $G$  avec  $\Delta(G) \geq 13$ , et pour les graphes  $G(V, E)$  avec  $\Delta(G) \geq 1 + |V|/3$ .
- Wang et Zhang [13] considéraient une classe de graphes plus large, à savoir les graphes  $r$ -partite. Ils ont prouvé que la conjecture de Meyer est vraie pour les graphes complets de cette classe.

**Théorème 3.23 [20]** Soit  $K_{n_1, n_2, \dots, n_r}$  un graphe  $r$ -partite complet, où  $r > 1$ . Alors

$$\chi_e(K_{n_1, n_2, \dots, n_r}) \leq \Delta(K_{n_1, n_2, \dots, n_r}).$$

Ce théorème implique le suivant

**Corollaire 3.24**  $\chi_e(K_{n_1, n_2, \dots, n_r}) = r$  si et seulement si  $|n_i - n_j| \leq 1$  pour toute  $i$  et  $j$ .

Une formule explicite pour le nombre chromatique équitable est connue pour tous les graphes  $r$ -partite complets  $K_{n_1, n_2, \dots, n_r}$ . Il été dérivé par lam et al.

**Théorème 3.25** Soit  $K_{n_1, n_2, \dots, n_r}$  un graphe  $r$ -partite complet avec  $r > 1$ . Si  $M$  est l'entier le plus grand tel que  $n_i \bmod M < \left\lceil \frac{n_i}{M} \right\rceil, i=1, \dots, r$ , alors  $\chi_e(K_{n_1, n_2, \dots, n_r}) = \sum_{i=1}^r \left\lceil \frac{n_i}{M+1} \right\rceil$ .

**Exemple 3.26** Considérons le graphe  $K_{3, 4, 8}$ . Le plus grand  $M$  tel que  $n_i \bmod M < \left\lceil \frac{n_i}{M} \right\rceil$ , pour

$$i=1, 2, 3, \text{ est égal } 3, \text{ donc } \chi_e(K_{3,4,8}) = \left\lceil \frac{3}{4} \right\rceil + \left\lceil \frac{4}{4} \right\rceil + \left\lceil \frac{8}{4} \right\rceil = 4.$$

- Wang et Zhang [20] ont vérifié la conjecture de la coloration équitable pour les graphes adjoints.

La conjecture de  $\Delta$ -coloration équitable (en anglais equitable  $\Delta$ -coloring conjecture, en abrégé E $\Delta$ CC-conjecture) suivante est plus forte que la conjecture de coloration équitable dans le sens que chaque graphe qui satisfait la  $\Delta$ -coloration équitable satisfait également la conjecture de coloration équitable.

**E $\Delta$ CC-Conjecture.** Un graphe connexe  $G$  est équitablement  $\Delta$ -colorable s'il est différent de  $K_m, C_{2m+1}$  et  $K_{2m+1, 2m+1}$  pour tout  $m \geq 1$ .

## Chapitre 3 : Nombre chromatique équitable

---

- Chen, Lih et Yan [6] ont prouvé que la conjecture est valable pour les graphes d'intervalle.

**Théorème 3.27 [6]** Soit  $G$  un graphe d'intervalle. Alors  $G$  est équitablement  $\Delta(G)$ -colorable.

- Lih and Wu [12] ont considéré la validité de la conjecture de la coloration  $\Delta$ -équitable pour les graphes bipartis.

**Théorème 3.28 [5].** Soit  $G=(V, E)$  un graphe biparti connexe. Si  $G$  est différent de n'importe quel graphe biparti complet  $K_{n,n}$ , alors  $G$  peut être équitablement colorable avec  $\Delta(G)$  couleurs.

**Théorème 3.29 [12].** Un graphe biparti  $G$  avec  $\Delta(G) \geq 2$  est équitablement  $\Delta(G)$ -colorable si et seulement si  $G$  n'est pas de  $K_{2m+1, 2m+1}$ .

**Théorème 3.30 [12].** Le graphe biparti complet  $K_{n,n}$  peut être coloré équitablement avec  $k$

couleurs si et seulement si  $\left\lfloor \frac{n}{\left\lfloor \frac{\Delta}{2} \right\rfloor} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{\left\lceil \frac{\Delta}{2} \right\rceil} \right\rfloor \leq 1$ .

**Théorème 3.31 [12].** Soit  $G(X, Y)$  un graphe biparti connexe avec  $\varepsilon$  arêtes. On suppose

$|X|=m \geq n=|Y|$  et  $\varepsilon < \left\lfloor \frac{m}{n+1} \right\rfloor (m-n) + 2m$ . Alors  $\chi_e(G) \leq \left\lfloor \frac{m}{n+1} \right\rfloor + 1$ .

- Chen, Ko et Lih [13] ont prouvé la conjecture pour les graphes scindés.

**Théorème 3.32** Soit  $G=(V, E)$  un graphe scindé. Alors  $G$  est équitablement  $\Delta(G)$ -colorable.

- Yap et Zhang [23, 22, 25] ont prouvé la conjecture pour les graphes planaire extérieur, pour les graphes planaire avec  $\Delta(G) \geq 13$ .

**Théorème 3.33 [23]** Soit  $G$  un graphe planaire extérieur connexe de degré  $\Delta \geq 3$ . Alors  $G$  est équitablement  $\Delta$ -colorable.

**Théorème 3.34 [25]** Soit  $G$  un graphe planaire du degré  $\Delta \geq 13$ . Alors  $G$  est équitablement  $\Delta$ -colorable.

- Nakprasit [16] prouvé la conjecture pour les graphes planaire avec  $\Delta(G) \geq 9$ .
- Chen, Lih et Wu [5] ont prouvé la conjecture pour les graphes réguliers.

**Théorème 3.35 [5]** Si la conjecture de coloration  $\Delta$ -équitable est vraie pour tous les graphes réguliers connectés du degré  $\Delta$ , alors il détient pour tous les graphes du degré  $\Delta$ .

Les graphes cubiques forment une classe spéciale de graphes réguliers. Le degré de chaque sommet dans un tel graphe est égal à 3. Il a été montré que tous les graphes cubiques peuvent être colorés équitablement avec au plus 3 couleurs [8].

## Chapitre 3 : Nombre chromatique équitable

---

**Théorème 3.36 [8]** Si  $G$  est un graphe simple connexe,  $G \neq K_n$  et  $\Delta(G) \geq 3$ , alors  $G$  est  $\Delta(G)$ -colorable au sens classique.

Si le nombre chromatique d'un graphe cubique connexe est égal à 2, le graphe est biparti. Nous savons que la ECC conjecture est valable pour ces graphes, donc  $\chi_e(G) \leq \Delta(G)$ .

Le théorème présenté ci-dessous conduit directement à la conclusion que le  $\Delta$ -ECC est vrai pour tous les graphes cubiques.

**Théorème 3.37 [5]** Soit  $G$  un graphe cubique connexe avec le nombre chromatique égal à 3, alors  $\chi_e(G) = 3$ .

La preuve de ce théorème est basée sur l'observation que chaque 3-coloration peut être rendue équitable sans ajouter d'autre couleur. Ce théorème et le théorème 3.34 impliquent le corollaire suivant :

**Corollaire 3.38** La conjecture de coloration  $\Delta$ -équitable est valable pour tous les graphes sous-cubiques.

- Lih et Bu ont prouvé que EACC conjecture est vraie pour chaque graphe planaire sans  $C_4$  et  $C_6$  avec un degré maximum au moins 6.
- Zhu et Bu [26] ont prouvé que la conjecture EACC est vraie pour chaque graphe planaire sans  $C_4$  et  $C_5$  avec un degré maximum d'au moins 7.
- Tan [19] a prouvé que la conjecture est valable pour chaque graphe planaire sans  $C_4$  avec un degré maximum d'au moins 7.
- De plus, la conjecture a été confirmée pour les graphes avec un degré maximum 3 [5,7].

### 7. Application sur le nombre chromatique équitable

Les applications sur la coloration équitable peuvent être trouvées dans les problèmes d'ordonnements et les problèmes d'emploi du temps. Considérons le problème de l'emploi du temps dans une institution académique (université, école,...) cité dans le chapitre précédent.

Si l'ensemble des salles est limité, on serait forcé à partitionner l'ensemble des sommets en stables, de taille plus proche que possible. Si l'écart entre le nombre de salles utilisées dans les différentes périodes est au plus 1. Le problème revient à chercher le nombre chromatique équitable dans le graphe  $G$ .

**Chapitre 4**  
**Les méthodes de résolution**  
**approchées**

### 1. Les Méthodes de résolution approchées pour le nombre chromatique

Puisque le problème de trouver le nombre chromatique est NP-difficile nous proposons dans ce chapitre, des méthodes approchées (appelées aussi **heuristiques**) pour le calcul de ce nombre.

Tous les algorithmes qui suivent sont basées sur l'algorithme glouton suivant. On suppose qu'on a un graphe  $G$  avec une séquence de sommets  $K=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ .

**Algorithme 1**[12] Algorithme Greedy-color.

**Début**

**Pour**  $v := v_1$  à  $v_n$  faire.

    Donner au sommet  $v$  la couleur la plus petite possible ;

**Fin pour;**

**Fin;**

Dans l'algorithme 2 suivant, la séquence des sommets fait partie des instructions de l'algorithme.

**Algorithme 2**[12] Algorithme Séquentiel.

**Début**

- Déterminer une séquence de coloration  $K$  de sommets de  $G$ .

- Appeler l'algorithme de Greedy-color ( $G, K$ ).

**Fin;**

**Algorithme 3**[12] Algorithme Random Sequence (RS-color( $G$ ));

**Début**

$K :=$  Une séquence aléatoire de sommets du graphe  $G$ ;

    Greedy-color ( $G, K$ );

**Fin;**

Le quatrième algorithme s'appelle LF-algorithm (Largest First Algorithm). Il a été introduit par Welsh and Powell [23].

**Algorithme 4[12]** Algorithme LF-color (G);

**Début**

K:= Les sommets de G ont arrangé en ordre croissant de leurs degrés.

Greedy-color (G, K).

**Fin ;**

**Algorithme 5[12]** Algorithme SL-color (G) ;

**Début**

K:= $\emptyset$

**Tant que**  $V \setminus K \neq \emptyset$  **faire**

Ajouter à K le sommet v avec le plus petit degré dans le sous-graphe généré par  $V \setminus K$ ;

**Fait ;**

Greedy-color (G,  $\bar{K}$ ) ( $\bar{K}$  désigne l'inversion de l'ordre de la séquence K).

**Fin ;**

## 2. Les Méthodes de résolution approchées pour le nombre chromatique équitable

Comme le calcul du nombre chromatique équitable d'un graphe est un problème NP-difficile, nous proposons deux méthodes approchées pour ce nombre. Elles sont basées sur l'algorithme SL présenté précédemment dans le cas du nombre chromatique.

**Algorithme Naive[12]**

**Début**

Colorer G avec l'algorithme SL ;

**Tant que** la coloration actuelle n'est pas équitable **faire**

**Début**

colmin := Le numéro de la couleur la moins fréquemment utilisée.

colmax := Le numéro de la couleur la plus fréquemment utilisée.

Trouver les sommets colorés avec les couleurs colmin et colmax.

**Si** il est possible de changer la couleur d'un sommet coloré avec colmax en colmin **alors**

Changer la couleur du sommet coloré avec colmax en colmin

**Sinon**

Assigner une nouvelle couleur à un certain sommet coloré avec colmax.

**Finsi ;**

**Fin ;**

**Fait ;**

**Fin ;**

L'algorithme suivant s'appuie sur l'idée d'échanger des couleurs dans des sous-graphes entiers induits par des sommets colorés avec les couleurs les plus utilisées et les moins utilisées.

La complexité de l'algorithme Naive est en  $O(n^4)$ . Les résultats donnés par cet algorithme sont basés sur la qualité de l'algorithme SL.

L'algorithme suivant basé sur l'idée d'échanger les couleurs dans le sous graphes induits les sommets colorés avec les couleurs la plus et la moins utilisées.

**Algorithme CreateSubgraph(G)[12]**

**Début**

min: = 0; {Variable pour stocker la valeur de colmin}

max: = 0; {Variable pour stocker la valeur de colmax}

P: = 0; {Index d'un tableau SWAPCOL}

Colorier le graphe G avec l'algorithme SL;

**Tant que** la coloration n'est pas équitable **faire**

**Début**

colmin: = numéro de la couleur la moins utilisée;

colmax: = numéro de la couleur la plus fréquemment utilisée;

**Si** ((colmin = min) et (colmax = max)) **ou** ((colmin = max) et (colmax = min)) **alors**

p: = p + 1;

**Sinon**

**Début**

P := 1;

Créer le sous-graphe induit par les sommets colorés avec colmin et colmax;

Énumérer ses composants avec 1, ..., sousgrnum;

Compter la différence entre la fréquence des couleurs colmax et colmin pour chaque composant et placer-le dans tableau SWAPCOL en ordre décroissant;

**Fin;**

**Si** ( $p \leq \text{sousgrnum}$ ) **et** ( $\text{SWAPCOL}[p] > 0$ ) **alors**

Echanger des couleurs dans le  $p^{\text{ieme}}$  composant

**Sinon**

Attribuer une nouvelle couleur à n'importe quel sommet coloré avec colmax ;

max: = colmax;

min: = colmin;

**Finsi ;**

**Fin ;**

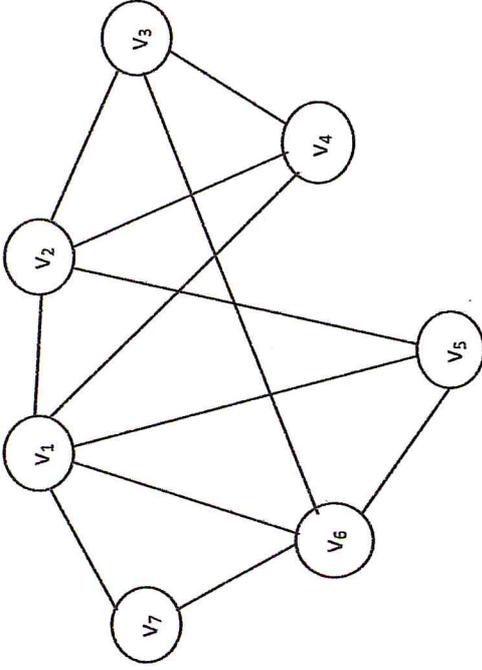
**Fait ;**

**Fin;**

Cet algorithme a une complexité de  $O(n^4)$  avec une constante un peu plus grande que celle de l'algorithme Naive [12].

### 3. Déroulements des algorithmes

#### 3.1 Déroulements de l'algorithme de Greedy-color pour le calcul approché de $\chi(G)$ où $G$ est le graphe suivant



Le graphe G

**Algorithme 1 :** Algorithme Greedy-color.

On choisit la séquence  $K = (v_2, v_3, v_4, v_1, v_5, v_7, v_6)$

**1<sup>er</sup> étape :** on colore  $v_2$  avec la couleur 1.

**2<sup>ème</sup> étape :** le plus petit numéro différent de 1 est 2, donc on colore  $v_3$  avec la couleur 2.

**3<sup>ème</sup> étape :** le plus petit numéro différent de 1 et 2 est 3, donc on colore  $v_4$  avec la couleur 3.

**4<sup>ème</sup> étape :** le plus petit numéro différent de 1 et 3 est 2, donc on colore  $v_1$  avec la couleur 2.

**5<sup>ème</sup> étape :** le plus petit numéro différent de 1 et 2 est 3, donc on colore  $v_5$  avec la couleur 3.

6<sup>ème</sup> étape : le plus petit numéro différent de 2 et 4 est 1, donc on colore  $v_7$  avec la couleur 1.

7<sup>ème</sup> étape : le plus petit numéro différent de 1, 2 et 3 est 4, donc on colore  $v_6$  avec la couleur 4.

Pour la séquence  $K = (v_2, v_3, v_4, v_1, v_5, v_7, v_6)$  la coloration propre obtenue par l'algorithme de Greedy-color est représenté sur la figure suivante :

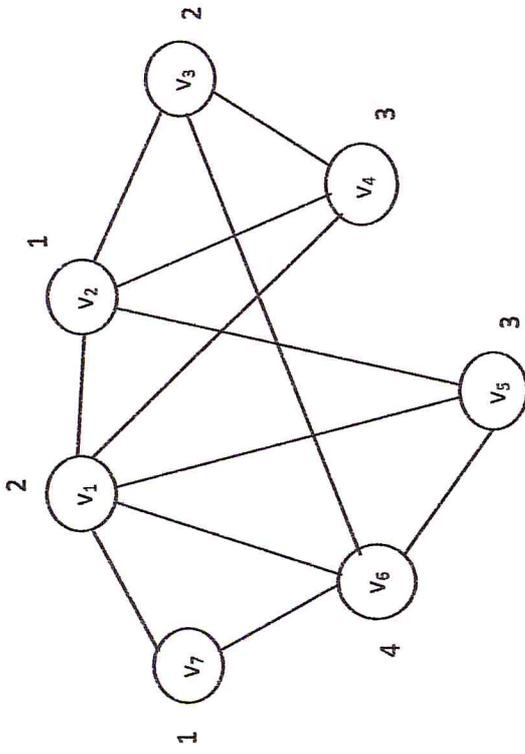


Figure 4.1 un exemple d'application de l'algorithme Greedy-color.

Si on choisie la séquence  $K' = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7)$  et avec le même algorithme, le nombre de couleurs trouvé est 3.

3.2 Déroutements de l'algorithme de SL pour le calcul approché de  $\chi(G)$

Algorithme 2 : Algorithme SL

Étape	K	V\K	Action
1 <sup>ère</sup>	$\emptyset$	V	On détermine le sommet v le plus bas degré dans le graphe G. On trouve $v=v_7$ .
2 <sup>ème</sup>	$\{v_7\}$	$V \setminus \{v_7\}$	On cherche v de plus bas degré dans le sous graphe G $[V \setminus \{v_7\}]$ On trouve le sommet $v=v_3$ . (voir Figure 2(a))
3 <sup>ème</sup>	$\{v_7, v_3\}$	$V \setminus \{v_7, v_3\}$	On cherche v de plus bas degré dans le sous graphe G $[V \setminus \{v_7, v_3\}]$ On trouve le sommet $v=v_4$ . (voir Figure 2(b))
4 <sup>ème</sup>	$\{v_7, v_3, v_4\}$	$V \setminus \{v_7, v_3, v_4\}$	On cherche v de plus bas degré dans le sous graphe G $[V \setminus \{v_7, v_3, v_4\}]$ On trouve le sommet $v=v_2$ . (voir Figure 2(c))
5 <sup>ème</sup>	$\{v_7, v_3, v_4, v_2\}$	$V \setminus \{v_7, v_3, v_4, v_2\}$	On cherche v de plus bas degré dans le sous graphe G $[V \setminus \{v_7, v_3, v_4, v_2\}]$ On trouve le sommet $v=v_1$ . (voir Figure 2(d))
6 <sup>ème</sup>	$\{v_7, v_3, v_4, v_2, v_1\}$	$V \setminus \{v_7, v_3, v_4, v_2, v_1\}$	On cherche v de plus bas degré dans le sous graphe G $[V \setminus \{v_7, v_3, v_4, v_2, v_1\}]$ On trouve le sommet $v=v_5$ . (voir Figure 2(e))
7 <sup>ème</sup>	$\{v_7, v_3, v_4, v_2, v_1, v_5\}$	$V \setminus \{v_7, v_3, v_4, v_2, v_1, v_5\}$	On cherche v de plus bas degré dans le sous graphe G $[V \setminus \{v_7, v_3, v_4, v_2, v_1, v_5\}]$ On trouve le sommet $v=v_6$ . (voir Figure 2(f))
8 <sup>ème</sup>	V	$\emptyset$	donc on arrête. On trouve la séquence $K = \{v_7, v_3, v_4, v_2, v_1, v_5, v_6\}$ . Par inversion $\bar{K} = \{v_6, v_5, v_1, v_2, v_4, v_3, v_7\}$ Application de Greedy-color (G, K). (voir Figure 2(g))

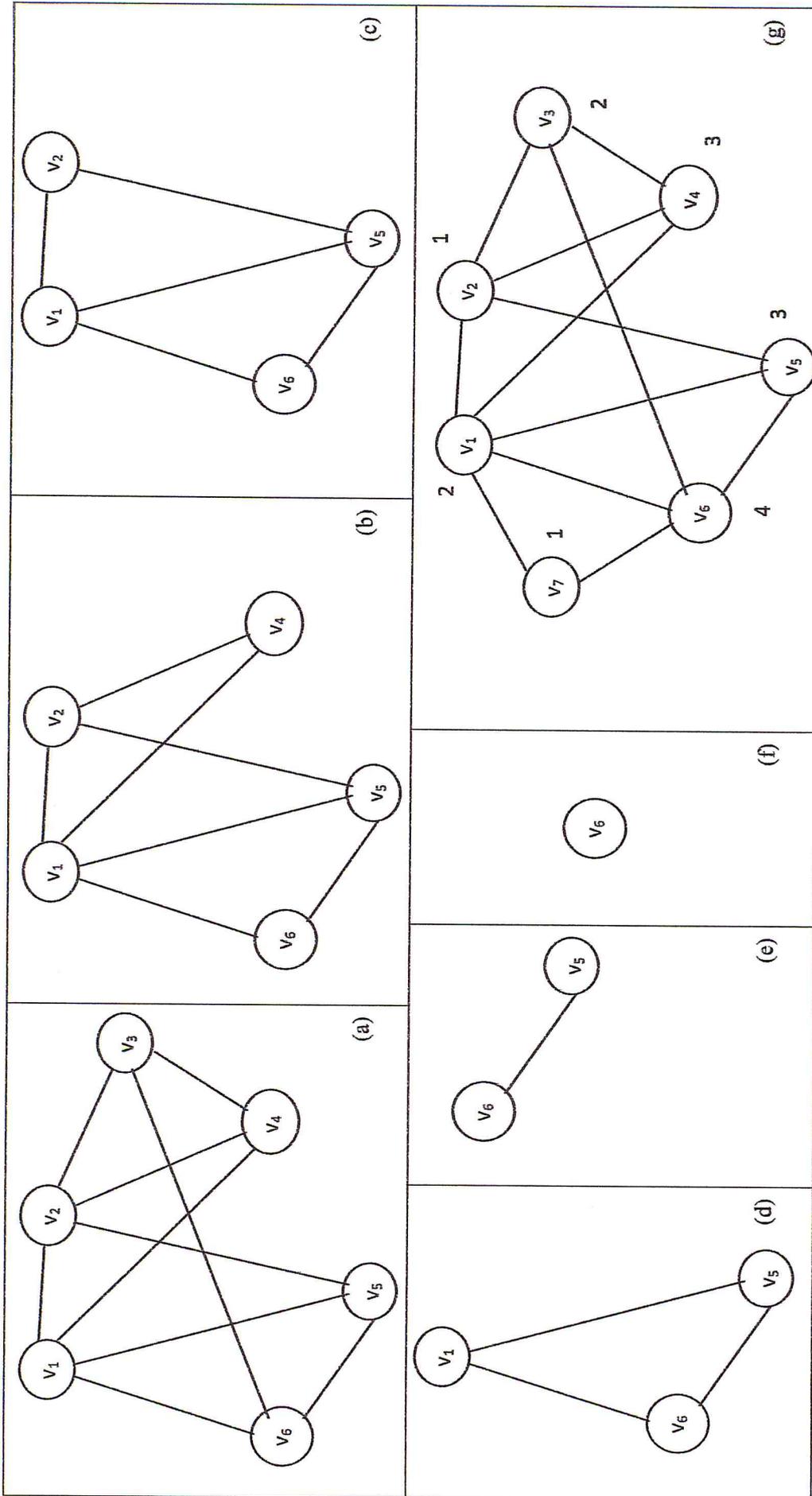
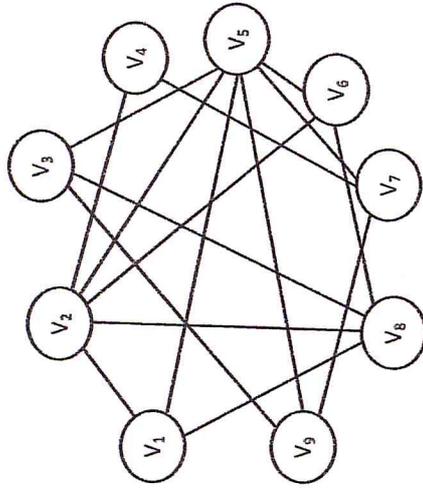


Figure 4.2 un exemple d'application de l'algorithme SL.

3.3 Déroutements de l'algorithme de Naive pour le calcul approché de  $\chi_c(G')$  où  $G'$  est le graphe suivant



Le graphe  $G'$ .

Algorithme 3 : Algorithme Naive

Etape	colmin	colmax	Coloration actuelle n'est pas équitabile	Condition (il est possible de changer la couleur d'un sommet coloré avec colmax en colmin)	Action
1 <sup>ère</sup>	----	----	----	----	Colorer $G'$ avec l'algorithme SL. (voir Figure 3(a))
2 <sup>ème</sup>	3	2	Oui car $\ V_2 - V_3\  > 1$	-Non, on ne peut pas changer la couleur des sommets $V_2$ avec la couleur 3, car les sommets de $V_2$ sont adjacents aux sommets de $V_3$	Trouver les sommets colorés avec 3 et 2 $c(v_2) = c(v_9) = 3$ . $c(v_3) = c(v_6) = c(v_7) = c(v_1) = 2$ .
3 <sup>ème</sup>	4	2	Oui car $\ V_2 - V_4\  > 1$	Oui	-Assigner une nouvelle couleur 4 au sommet coloré avec la couleur 2 (soit $v_6$ ) (voir Figure 3(b)) changer la couleur 2 de $v_1$ par la nouvelle couleur 4. (voir Figure 3(c))
4 <sup>ème</sup>		Non	Non		Arrêt d'algorithme

$V_i$  : L'ensemble des sommets colorés avec la couleur  $i$ .

$$V_1 = \{v_4, v_5, v_8\}$$

$$V_2 = \{v_1, v_3, v_6, v_7\}$$

$$V_3 = \{v_2, v_9\}$$

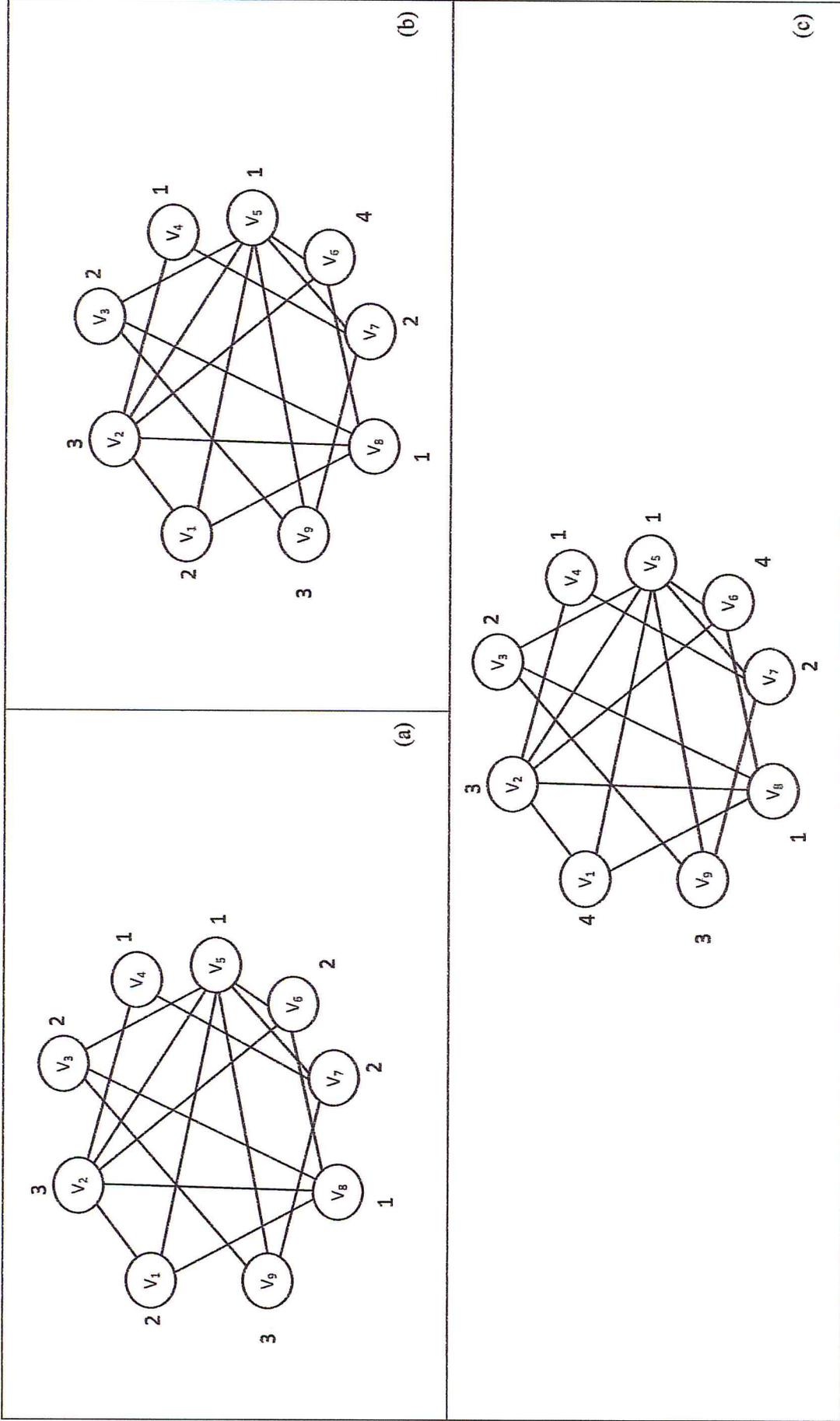


Figure 4.3 Un exemple illustratif de l'algorithme de Naive.

3.4 Déroutements de l'algorithme de CreateSubgraph pour le calcul approché de  $\chi_c(G')$

Algorithme 4 : Algorithme CreateSubgraph.

Etape	min	max	p	sousgrnum	colmin	colmax	Coloration n'est pas équitable	Condition	Action		
1 <sup>ère</sup>	0	0	0	---	---	---	---	---	Colorier le graphe G' avec l'algorithme SL (voir Figure 4(a))		
2 <sup>ème</sup>			1		3	2	Oui	Non [((colmin = min) et (colmax = max)) ou ((colmin = max) et (colmax = min))] est vérifiée	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Créer les sous-graphes induit par les sommets colorés avec 3 et 2. (voir Figure 4(b))</li> <li>- Énumérer ses composants avec 1,2 donc, sousgrnum=2 (voir Figure 4(c))</li> <li>- Compter la différence entre la fréquence des couleurs 2 et 3 pour chaque composant</li> </ul> Le 1 <sup>er</sup> composant : Fréquence(2)-Fréquence(3)=2-1=1 Le 2 <sup>ème</sup> composant : Fréquence(2)-Fréquence(3)=2-1=1 - Placer-le dans tableau SWAPCOL en ordre décroissant		
									<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>1</td> <td>1</td> </tr> </table> SWAPCOL	1	1
1	1										
3 <sup>ème</sup>			1	2				(p ≤ sousgrnum) et (SWAPCOL [ p]=1 > 0) est vérifiée	-Echanger les couleurs dans le 1 <sup>er</sup> composant (voir Figure 4(d))		
4 <sup>ème</sup>	3	2									
5 <sup>ème</sup>							Non		Arrêt d'algorithme		
									Le graphe G' est équitablement coloré (voir Figure 4(e))		

SWAPCOL : tableau contenant les valeurs de différence entre la fréquence de deux couleurs Colmax et Colmin pour chaque composant. Ces valeurs sont classées dans un ordre décroissant.

Subgrnum (sous grnum) : représente le nombre de composants de sousgraphes.

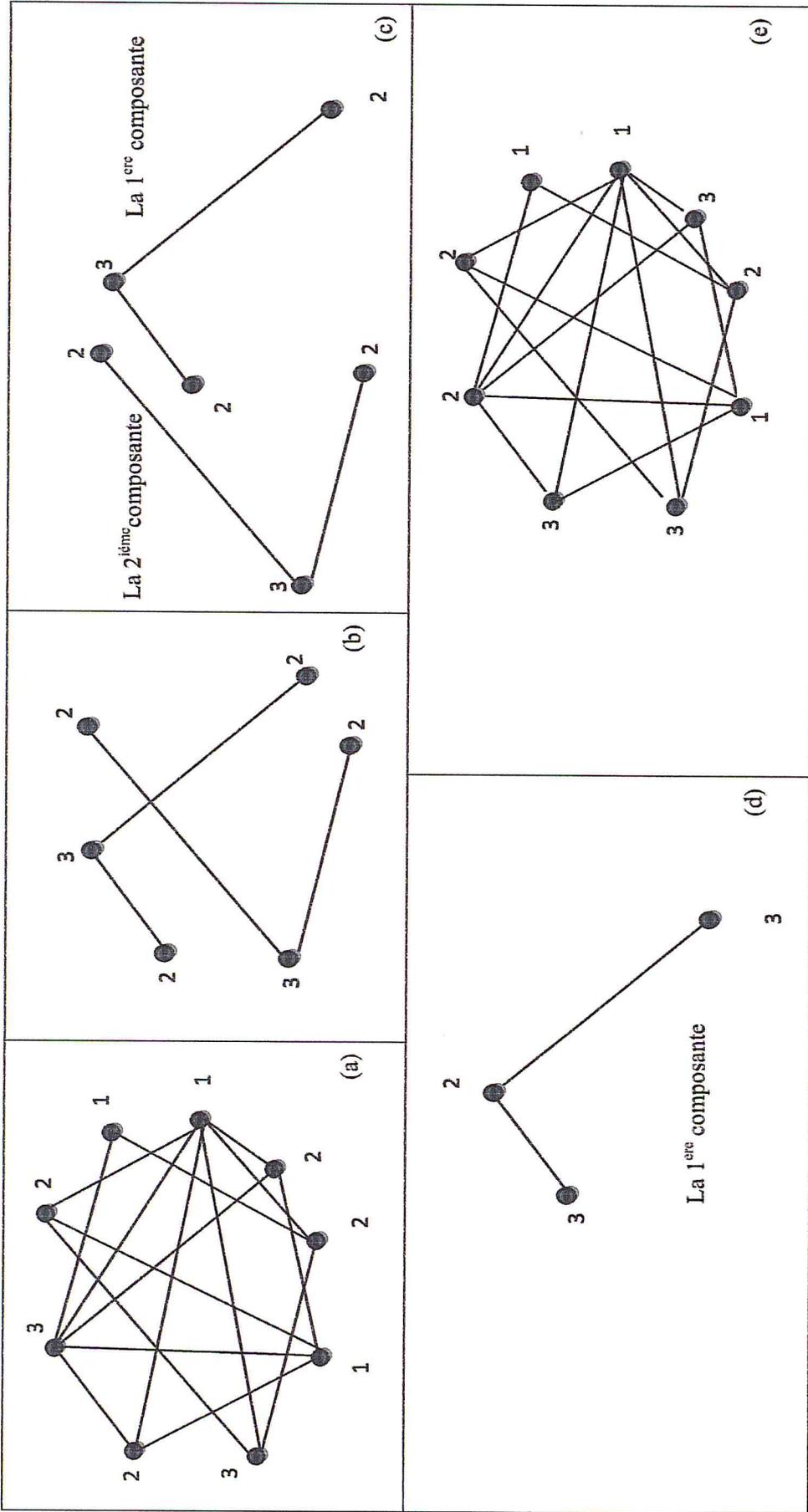


Figure 4.4 Un exemple illustratif de l'algorithme **CreateSubgraph**.

### Conclusion et perspectives

Dans ce mémoire nous avons étudié deux paramètres d'un graphe : le nombre chromatique et le nombre chromatique équitable.

Des définitions ainsi que des exemples ont été donnés pour bien éclaircir ces nombres, qui sont importants dans le domaine de la théorie des graphes. Ces deux paramètres ont été calculés pour certaines classes de graphes. Comme la détermination de chacun de ces paramètres est NP-difficile, nous avons cité une littérature de quelques graphes dont le calcul de ces nombres est polynomial. Des bornes inférieures et supérieures ont été présentées. Nous avons ensuite présenté des méthodes approchées pour la résolution de ces deux problèmes.

Ce travail ouvre beaucoup de pistes de recherche pour des nouveaux étudiants en Master de recherche opérationnelle, en particulier évaluer les performances des méthodes proposées et élaborer des méthodes de résolution exactes, comme les méthodes par séparation et évaluation et la programmation dynamique.

## Références :

- [1] K.Appel and W.Haken, Every planar map is four colorable. Part 1, Discharging, Illinois J.Math, 21, (1977), 429-490.
- [2] Bollobas, R.K.Guy, Equitable and proportional coloring of trees, J. Combin. Theory, ser. B 34 (1983), 177-186.
- [3] R.L.Brooks, On colouring the nodes of a network , Proc.Cambridge Philosophical Society, Math. Phys. Sci.,37,(1941) 194-197.
- [4] B.L.Chen, K.L.Lih, Equitable coloring of tree, Journal of Combinatorial Theory, series B 61 (1994), 83-87.
- [5] B.L.Chen, K.W.Lih, P.L.Wu, Equitable coloring and the maximum Degree, Eur.J.Combin. 15(5) (1994), 443-447.
- [6] B.L.Chen, K.W.Lih, J.H.Yan, A note on equitable coloring of interval graphs, manuscript, (1998).
- [7] B.L.Chen, C.H.Yan, Equitable  $\Delta$ -coloring of graphs, discrete Math. 312 (2012) 1512-1517.
- [8] H.Fumanczyk, Equitable Coloring of graph, in: Graph coloring, (M.Kubal,ed) American Mathematical Society Providence, Rhode Island (2004) 35-53.
- [9] H.Grotsch, Ein Deifarbensatz fur dreikreisfreie Netze auf der Kugel, Wiss . Z. Martin. Luther .Univ. Halle .Wittenberg Mat . Natur . Reihe 8 (1959) 102-120.
- [10] A. King, B. Reed, and A. Vetta . An upper bound for the chromatic number of line graphs. European Journal of Combinatorics, 28(8), 2007, 2182-2187.
- [11] Q.Lih, Y. Bu, Equitable list coloring of planar graphs without 4- et 6-cycles, Discret Math. 309 (2009) 280-287.
- [12] K.W.Lih, P.L.Wu, On equitable coloring of bipartite graphs, Discret Math. 151 (1-3) (1996), 155-160.
- [13] P.C.B.Lam, W.C.S.Shiu, C.S.Tong, Z.F.Zhang, on the equitable chromatic number of complete n-partite graphs, Discrete Applied Mathematics 113 (2001), 307-310.
- [14] W. Meyer, Equitable coloring, Amer. Math. Monthly 80 (1973), 920-922.
- [15] Michael R.Garey, David S.Johnson, Computers and intractability A Guide to the theory of NP-completeness, W.H.FREEMAN AND COMPANY New York (1979).
- [16] K.Nakprasit, Equitable colorings of planar graphs with maximum degree at least nine, Discrete Math. 312 (2012), 1019-1024.

- [17] K.Nakprasit, K. Nakprasit, Equitable coloring of planar graphs without short cycles. Theoretical Computer Science 465 (2012), 21-27.
- [18] C.Roux, Initiation à la théorie des graphes (2009).
- [19] X.Tan, Equitable  $\Delta$ -coloring of planar graphs without 4-cycles, School of Statistics and Mathematics, Shandong University of finance, Jinon, Shandong , 250014, China, (2010), 400-405
- [20] W. Wang, K.Zhang, Equitable colorings of line graphs and complete r-partite graphs, systems science and Mathematical sciences 13 (2000), 190-194.
- [21] D.J.Welsh, M.B.Powel: An upper bound for the chromatic number of the chromatic number of a graph and its application to timetabling problem, Comp.J.10 (1967), 85-86.
- [22] H.P.Yap, Y.Zhang, On equitable coloring of graph, preprint.
- [23] H.P.Yap, Y.Zhang, The equitable  $\Delta$ -coloring conjecture holds for outerplanar graphs, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica 25(2) (1997) 143-149.
- [24] X.Zhang, J.L.Wu, On equitable and equitable liste coloring of series-parallel graphs, Discrete Math. 312 (2011) 800-803.
- [25] Y.Zhang, H.P.Yap, Equitable colouring of planar graphs, J.Combin. Math. Combin. Comput. 27 (1998), 97-105.
- [26] J.Zhu, Y.Bu, Equitable list colorings of planar graphs without short cycles. Theoret. Comput. Sci, 407 (2008), 21-28.

