

**UNIVERSITE BLIDA 1**  
**Faculté des Sciences**  
Département de Mathématiques

# **THESE DE DOCTORAT**

En Mathématiques

## **CONTRIBUTION A LA METHODOLOGIE DE LA RECHERCHE EXPERIMENTALE**

Par

**Hichem ELMOSSAOUI**

Devant le jury composé de :

H. Ould Rouis	Maître de conférences, U. de Blida 1	Président
A. Hadj Sadok	Professeur, U. de Blida 1	Examineur
A. Rassoul	Maître de conférences, E.N.S.H., Blida	Examineur
D. Laissaoui	Maître de conférences, U. de Médéa	Examineur
H. Saggou	Professeur, U.S.T.H.B., Alger	Examineur
N. Oukid	Maître de conférences, U. de Blida 1	Rapporteur

**07 Septembre 2020**

## RESUME

La plupart des ingénieurs et techniciens améliorent leurs produits ou leurs processus de production à partir des expériences. Malheureusement, les stratégies couramment utilisées pour mener ces expériences sont souvent coûteuses et peu performantes et elles conduisent à de nombreuses expériences difficiles exploitables. Pour toutes ces raisons, de nombreux ingénieurs et techniciens font appel à la planification des expériences.

Les plans d'expériences permettent d'organiser au mieux les essais qui accompagnent une recherche scientifique ou des études industrielles. Ils sont applicables à de nombreuses disciplines et à toutes les industries à partir du moment où l'on recherche le lien qui existe entre une grandeur d'intérêt ( $y$ ) et des variables ( $x_i$ ). Elle a donc pour but de déterminer des modèles mathématiques reliant les grandeurs d'intérêt aux variables contrôlables.

Dans cette thèse, nous proposons de nouveaux plans d'expériences numériques fondées sur la théorie de processus stochastiques, particulièrement les processus ponctuels marqués. Ces plans sont basés à la fois sur la distribution des points dans le domaine expérimental et sur une certaine caractérisation des marques de ces points. Ils sont obtenus à partir de la méthode de Monte Carlo par chaîne de Markov (MCMC). Une étude détaillée sur la convergence de la chaîne de Markov a été réalisée. Une comparaison entre notre approche et celle donnée par d'autres plans numériques existants a été effectuée.

Enfin, nous présentons et, pour la première fois dans la littérature, une nouvelle application de la méthode des plans d'expériences pour modéliser un panneau photovoltaïque.

Ceci confirme l'importance des statistiques appliquées dans tous les domaines et plus particulièrement dans les énergies renouvelables.

**Mots clés :** Plans d'expériences, Plans d'expériences numériques, Processus Ponctuels, Processus Ponctuels Marqués, Monte Carlo par Chaîne de Markov (MCMC), Algorithme de Metropolis-Hastings.

## ABSTRACT

Most engineers and technicians improve their products or production processes based on experience. Unfortunately, the strategies commonly used to conduct these experiments are often expensive and inefficient, and they lead to many difficult exploitable experiments. For all of these reasons, many engineers and technicians rely on the planning of experiments.

The experimental designs make it possible to better organize the tests which accompany scientific research or industrial studies. They are applicable to many disciplines and to all industries as long as the link between a quantity of interest ( $y$ ) and variables ( $x_i$ ) is sought. It therefore aims to determine mathematical models relating the quantities of interest to controllable variables.

In this thesis, we propose new digital experimental designs based on the theory of stochastic processes, particularly marked point processes, otherwise known as object processes. These designs rely on both the distribution of points in the experimental region and on some characterization attached to those points, and are obtained using a Monte Carlo Markov chain method (MCMC). A detailed study about the convergence of the Markov chain has been carried out. Moreover, a comparison between our approach and that given by other existing computer designs has been drawn

Finally, we present and, for the first time in the literature, a new application of the design of experiments method to model a photovoltaic panel.

This confirms the importance of statistics applied in all fields and more particularly in renewable energies.

**Keywords:** Design of experiments, Computer experiments design, Point processes, Marked point processes, Monte Carlo Markov chain method (MCMC), Metropolis-Hastings algorithm.

# ملخص

معظم المهندسين والفنيين يقومون بإجراء مجموعة من التجارب لتحسين منتجاتهم أو عمليات الإنتاج. لسوء الحظ، فإن الاستراتيجيات المستخدمة عادة لإجراء هذه التجارب غالبًا ما تكون مكلفة وغير فعالة، وتؤدي إلى العديد من التجارب الصعبة التي لا يمكن استغلالها. لكل هذه الأسباب، يلجأ العديد من المهندسين والفنيين إلى استعمال طريقة المنهج التجريبي.

تتيح منهجية الخطط التجريبية تنظيم التجارب التي تصاحب البحث العلمي أو الدراسات الصناعية على أفضل وجه. هذه المنهجية قابلة للتطبيق على العديد من البحوث العلمية و على جميع الدراسات الصناعية وذلك من لحظة البحث عن الرابط الموجود بين العوامل ذات الاهتمام ( $Y$ ) والمتغيرات ( $X_i$ ) و تهدف أيضا إلى تحديد النماذج الرياضية بين هذه العوامل ذات الاهتمام و المتغيرات القابلة للتحكم.

في هذه الأطروحة، نقترح تصاميم جديدة للتجارب العددية على أساس نظرية العمليات العشوائية ، ولا سيما عمليات ذات النقاط المحددة. تعتمد هذه تصاميم على توزيع النقاط في الحقل التجريبي وعلى بعض توصيف معين لعلامات هذه النقاط. تم الحصول على هذه تصاميم من طريقة مونت كارلو من سلسلة ماركوف (MCMC). تم إجراء دراسة مفصلة حول تقارب سلسلة ماركوف و تم أيضا إجراء مقارنة بين التصاميم الجديدة المقترحة وبين التصاميم الرقمية الأخرى الموجودة.

أخيرًا، نقدم، ولأول مرة، تطبيقًا جديدًا لطريقة المنهج التجريبي لتصميم لوحة فلتائية ضوئية. هذا يؤكد على أهمية الإحصاءات المطبقة في جميع المجالات وبشكل خاص في الطاقات المتجددة.

**الكلمات المفتاحية :** الطريقة المنهج التجريبي، تصاميم التجارب العددية، العمليات العشوائية النقطية، عمليات النقاط المحددة، سلسلة ماركوف من مونت كارلو (MCMC)، خوارزمية متروبوليس هاستينجس.

## REMERCIEMENTS

Je remercie en premier lieu **Dieu**, le tout puissant de m'avoir donné tant de courage, de patience et de volonté pour l'élaboration de ce modeste travail.

Je tiens à remercier Madame Oukid Nadia, Maitre de Conférences- A à l'Université Saad Dahlab Blida1, ma directrice de thèse, qui m'a encadré et conseillé judicieusement durant ce travail. Je suis particulièrement reconnaissant pour son soutien toujours pertinent, pour sa disponibilité et l'intérêt manifesté envers mon travail. Mis à part l'aspect scientifique, je lui exprime également toute ma gratitude pour m'avoir assuré le meilleur cadre pour le déroulement de ce travail. J'admire aussi son esprit combatif et surtout sa gentillesse.

Je tiens également à remercier le Professeur F. Hannane., pour tous les encouragements et conseils qu'il m'a prodigué tout au long de ces années.

J'exprime ma profonde gratitude et mes sincères remerciements à Mr O. Tami, le Chef de département de Mathématiques à l'Université Saad Dahlab de Blida1 pour toute l'aide qu'il nous donne.

Je profite de cette occurrence pour exprimer ma profonde gratitude et mes sincères remerciements à tous les enseignants qui ont contribué à ma formation. Je pense en particulier à Mr M. Massied., Mr H. Ould-Rouis, Mr D. Meguenni, Mr A. Malki, Mme A. Sallali, Mme A. Mellek et à tous les autres.

Je n'oublierai pas de remercier les membres de la scolarité du département de Mathématiques en particulier : Mr H. hadj allah, Mme W. Slimani et Mme N. Djenas, Mme W. Gougan, Mme S. Takarli et Mlle S. Ouatassi

Je ne peux pas omettre de cette liste de remerciements, ma famille qui m'a soutenu et m'a constamment encouragé dans toutes mes décisions.

Enfin, que les membres de jury trouvent ici l'expression de toute ma gratitude pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de juger ce travail.

**DEDICACE**

**Cette thèse est dédiée à la mémoire**

**De**

**Ma mère et Mon père**

# TABLE DES MATIERES

RSUME

REMERCIEMENTS

TABLE DES MATIERES

Liste des illustrations, graphiques et tableaux

INTRODUCTION

8

1. METHODE DES PLANS D'EXPERIENCES

11

1.1. Historique

11

1.2. Intérêt de la méthode des plans d'expériences

12

1.3. Vocabulaire de Base des plans d'expériences

13

1.4. Outils mathématiques pour les plans d'expériences

18

1.5. Différents type de plans d'expériences

27

1.6. Critères d'optimalités pour les plans d'expériences

34

1.7 Conclusion

36

2. GENERALITES SUR LES PROCESSUS PONCTUELS

37

2.1. Premières définitions et Notations

37

2.2. Processus ponctuels et loi d'un processus ponctuel

38

2.3. Processus ponctuels de référence

42

2.4. Processus ponctuels marqués

48

2.5. Processus ponctuels de Markov

49

2.6. Simulation des processus ponctuel

51

2.7. Les principaux algorithmes MCMC

55

2.8. Conclusion

57

3. NOUVEAUX PLANS D'EXPERIENCES NUMERIQUES A PARTIR DE PROCESSUS PONCTUELS MARQUE	58
3.1. Plan d'expériences numériques par processus ponctuels markovien marqués de Strauss	58
3.2. L'algorithme de construction du plan proposé	61
3.3. Etude de convergence	63
3.4. Résultats numériques et qualités des plans proposés	67
3.5. Conclusion	70
4. UTILISATION DE LA METHODE DE PLANS D'EXPERIENCES POUR LA MODELISATION D'UN PANNEAU PHOTOVOLTAÏQUE	72
4.1. Dispositif expérimental et mesures	73
4.2. Présentation de la méthode de plan des expériences et des résultats expérimentaux	74
4.3. Modèle mathématique	77
4.4. Illustration graphique des résultats et la prévision des conditions de fonctionnement du panneau PV	79
4.5. Conclusion	84
CONCLUSION	85
APPENDICE	86
A. LISTE DES SYMBOLES	88
B. CODE MATLAB POUR LES RESULTATS PRESENTES EN CHAPITRE 3	92
REFERENCES	101



## LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX

Figure 1.1	L'environnement du système	12
Figure 1.2	Domaine de variation du facteur	14
Figure 1.3	Définition de l'espace expérimental	14
Figure 1.4	Niveaux des facteurs définissant des points expérimentaux dans l'espace expérimental	15
Figure 1.5	Définition du domaine d'étude pour deux facteurs	15
Figure 1.6	Définition de la surface de réponse	16
Figure 1.7	La théorie des plans d'expériences montre que les meilleurs emplacements sont les sommets A, B, C et D du domaine d'étude	17
Figure 1.8	un plan factoriel complet $2^3$ peut être divisée en deux Plans fractionnaires $2^{3-1}$ , un plan noir et un plan gris	29
Figure 1.9	Plan composite pour l'étude de deux facteurs	30
Figure 1.10	10 points issus d'un échantillonnage par hyper cube latin en dimension 2	32
Figure 1.11	les 100, 1000, 10000 premiers points de la suite de Halton en base 2 et 3	33
Figure 1.12	les 100, 1000 et 10000 premiers points d'une suite de Sobol	34
Figure 1.13	les 50, 250 et 250 premiers points d'une suite de Faure	34
Figure 2.1	Ensemble de points, ou configuration, de $\chi = [0,1] \times [0,1]$ .	38
Figure 2.2	Définition d'un processus ponctuel	39
Figure 2.3	Exemple d'un processus ponctuel	40
Figure 2.4	$B_n \subset \mathbb{R}^p$ une boule centrée à l'origine	43
Figure 2.5	A gauche un processus homogène de poisson pour une intensité 0,02 et à droite un processus de poisson non homogène	47
Figure 2.6	Illustration du processus de branchement	47
Figure 2.7	Exemple d'un processus ponctuel marqué	49
Figure 3.1	A gauche, une configuration initiale aléatoire de 25 points et à droite, une configuration finale pour $\beta = 2.5$ , $\gamma = 0.001$ et $r = 0.17$	62
Figure 3.2	Boxplots des critères de qualité calculés sur les 80 plans à 50 points en dimension 7	69
Figure 3.3	Boxplots des critères de qualité calculés sur les 80 plans à 40 points en dimension 5	69
Figure 3.4	Boxplots des critères de qualité calculés sur les 80 plans à 20 points en dimension 3	70
Figure 4.1	Courbes caractéristiques I-V pour les 72 cellules actives pour trois valeurs de distance de source correspondant aux essais 2, 6 et 15 du tableau 4.1	73
Figure 4.2	Diagramme schématique de BP Solar, panneau BP 350	74

Figure 4.3	Répartition des points expérimentaux dans le domaine d'étude	75
Figure 4.4	Histogrammes	80
Figure 4.5	l'influence de la température et d'éclairement sur les trois réponses $P_{\max}$ , $V_{oc}$ et $I_{sc}$	81
Figure 4.6	Courbes de niveau de la fonction d'erreur de prédiction sur les réponses prédites pour les trois réponses $P_{\max}$ , $V_{oc}$ et $I_{sc}$	82
Figure 4.7	Courbes d'iso réponses par intervalles pour $P_{\max}$ , $V_{oc}$ et $I_{sc}$	83
Figure 4.8	Courbes de contour sur le même diagramme pour les trois réponses	83
Tableau 1.1	Matrice d'expériences	18
Tableau 1.2	Matrice d'expériences $2^2 \times 3^1$	28
Tableau 1.3	Nombre d'essais d'un plan complet $2^k$	28
Tableau 1.4	Tableau orthogonal $L_4(2^3)$	30
Tableau 3.1	La valeur de la discrédance pour les plans proposés (MSD), les suites de Halton, les suites de Sobol et les suites de Faure pour trois, cinq et sept dimensions	68
Tableau 4.1	Matrice d'expériences et résultats expérimentales	76
Tableau 4.2	Comparaison entre les réponses observées et les réponses prédites	79

## INTRODUCTION

Depuis quelques années, la simulation numérique modélise des phénomènes toujours plus complexes. De tels problèmes, généralement de très grande dimension, exigent des codes de simulation sophistiqués qui sont très coûteux en temps de calcul. L'approche actuellement privilégiée consiste à définir un nombre réduit de simulations organisées selon un plan d'expériences numériques. Il est donc important de disposer de méthodes permettant d'optimiser le choix de ces simulations en utilisant la méthode des plans d'expériences (Méthodologie de la Recherche Expérimentale). Cette méthode est utile à toutes les personnes qui entreprennent des recherches scientifiques ou des études industrielles. L'emploi des plans d'expériences pour l'étude empirique d'une loi de réponse, pose aux statisticiens ou aux chercheurs des problèmes particuliers. Alors qu'ils ont peu d'informations sur cette loi, ils ne peuvent disposer en général que d'un échantillon d'observations très limité au regard du nombre des paramètres des modèles qu'ils peuvent envisager pour leurs analyses. Avant toute observation de la réponse, il doit donc préciser, non seulement quels modèles utiliser, mais encore, comment organiser les expériences. En effet, la qualité de l'analyse statistique dépend étroitement du plan expérimental utilisé pour observer la réponse. Par ailleurs, il faut généralement recourir à l'analyse combinatoire pour construire les plans d'expériences proposés.

Les plans d'expériences ont été étudiés par des auteurs comme Fisher [1], Kiefer [2], Box [3]...etc. Les plans classiques ont tendance à positionner les points aux bords du domaine pour prendre en compte la variation aléatoire et offrir une tendance plus fiable en présence d'erreurs de mesures. La plupart des critères de ces plans utilisent l'erreur expérimentale qui existe dans le cadre d'expériences réelles, tandis qu'en numérique, l'erreur est liée au modèle et non à l'expérimentation. Aussi la répétition des expériences classiques est d'un grand intérêt pour évaluer l'erreur expérimentale. Tandis que dans le cas des expériences numériques la répétition d'une expérience dans les mêmes conditions est sans intérêt puisqu'elle fournit la même réponse.

La diversité des plans d'expériences proposés dans la littérature vient du fait qu'il n'existe pas un plan parfait où tous les critères d'optimalité sont vérifiés en même temps.

Chaque plan présente des avantages pour un certain critère d'optimalité et un inconvénient pour un autre. Il s'agira donc de trouver un compromis pour les besoins de chaque étude.

L'objectif principal de notre travail est de proposer de nouveaux plans d'expériences numériques fondés sur la théorie de processus stochastiques, particulièrement les processus ponctuels marqués [4]. L'utilisation de ce type de processus par rapport à l'approche qui utilise les processus ponctuels simple [5], va nous permettre non seulement d'introduire des connaissances géométriques mais aussi des connaissances a priori sur les  $n$  points expérimentaux qui constituent le plan d'expériences numérique à proposer. Ainsi, les expériences de ces plans doivent remplir au mieux le domaine expérimental afin d'obtenir des informations, notamment pour détecter les éventuelles irrégularités. On cherche donc un plan dont les points seraient le plus uniformément répartis dans l'hyper-cube unité. Il est alors naturel de considérer les processus marqués de Strauss [6] qui incluent la notion d'interaction entre paire de points. Pour générer de tels plans nous utiliserons les techniques de simulation par Chaîne de Markov (MCMC), et plus précisément l'algorithme de Métropolis- Hastings [7, 8].

Plusieurs études ont été effectuées afin de prévoir le fonctionnement de panneaux photovoltaïques dans des conditions normales ou bien sujets à des pertes de puissance dues à des problèmes d'ombrage. Généralement, la modélisation d'un système photovoltaïque en production est basée sur des modèles prenant en compte la physique des constituants ainsi que l'électronique et le comportement énergétique des différentes parties du système, comme fonction de l'irradiance solaire et de la température de fonctionnement. Comme objectif secondaire dans notre travail, nous introduisons une nouvelle approche pour modéliser la production du système en utilisant la méthode des plans d'expériences. Cette méthode considère un système physique ou procédé comme une boîte noire ayant différentes entrées et sorties, appelées respectivement facteurs et réponses, modélisés en utilisant des outils statistiques. Le fonctionnement est décrit par une relation mathématique qui est établie à partir de mesures préalables sur le terrain. Dans ce travail original, la prévision des conditions opératoires de fonctionnement utilisant les plans d'expériences ne peut être atteinte que par des combinaisons de certaines mesures discrètes de la tension en circuit ouvert, du courant de court-circuit et de la puissance maximale délivrée pour des conditions environnementales disponibles c'est-à-dire pour des niveaux bien déterminés de température et d'irradiance.

La thèse est composée de quatre chapitres organisés comme suit:

Le premier chapitre présente la théorie de la méthodologie des plans d'expériences et un état d'art sur les plans d'expériences couramment utilisés en expérimentation numérique, ainsi que certains critères pour étudier la qualité de ces plans.

Le deuxième chapitre introduit la théorie des processus ponctuels et processus objet. Le chapitre commence par la présentation des processus ponctuels, qui sont à la base des processus objet, puis les processus de Markov qui incluent la notion d'interactions entre objets. La simulation des processus est décrite sous la forme d'une chaîne de Markov, dont les concepts de base et les conditions de convergence sont présentés, les principaux algorithmes de simulation des chaînes Markov Monte Carlo seront décrits ensuite.

Le troisième chapitre est consacré à l'idée principale utilisée pour la construction de nouvelles matrices d'expériences numériques basée sur l'utilisation des processus ponctuels marqués à l'aide de la méthode MCMC et l'algorithme de Metropolis-Hastings. La convergence de ce dernier algorithme a été abordée. Une comparaison avec d'autres plans décrits dans la littérature a été effectuée pour les besoins de chaque étude et chaque utilisateur.

Le quatrième chapitre comporte une application de la méthode de plans d'expériences pour modéliser un panneau photovoltaïque.

Enfin, une conclusion termine ce travail, donnant quelques perspectives pour des recherches futures.

En annexe, nous présentons les programmes développés dans le logiciel MATLAB permettant de réaliser les illustrations numériques fournis dans le troisième chapitre.

## CHAPITRE I

### METHODE DES PLANS D'EXPERIENCES

Dans ce chapitre sont synthétisés et résumés les différentes hypothèses entrant en jeu dans l'utilisation de la méthode des plans d'expériences. Une méthode utile à tout expérimentateur qui entreprend des recherches scientifiques ou des études industrielles. Elle est applicable à toutes les disciplines à partir du moment où l'on recherche le lien qui existe entre une grandeur d'intérêt  $y$ , et des variables  $x_i$  pouvant modifier les valeurs de cette dernière. Pour cela il faut suivre des règles mathématiques et adopter une démarche rigoureuse.

#### 1.1. Historique

La méthode des plans d'expériences est à la fois nouvelle et ancienne [9]. Dès le moyen âge Nicolas Oresme (1325-1382) aborde cette question dans ses écrits. Inspirateur de Descartes et Leibnitz, Francis Bacon (1561-1626) est un des précurseurs de la méthode expérimentale [10]. Cette méthode est récente puisqu'on peut la faire démarrer avec les travaux de Sir Ronald Fisher [1]. Suite à son emploi, en 1919, au centre de recherche agronomique situé au nord de Londres. Il cherche à augmenter les rendements agricoles en combinant divers types d'engrais, de variétés végétales, de types de sols...etc. Face à l'impossibilité de réaliser la totalité des expériences, ceci l'amène à proposer des configurations expérimentales basées sur des modèles statistiques rigoureux (tels que les carrés latins).

Divers statisticiens comme Yate, Youden, Cochran, Plackett et Burman, et bien d'autres, ont par la suite marché dans les traces de Fisher afin de promouvoir et développer l'utilisation des techniques de planification expérimentales dans d'autres domaines que l'agronomie. Dès les années 50, les travaux de Box [3] et de ses collaborateurs s'appuyant notamment sur les travaux de Yate, développent des méthodes particulières de construction de plans fractionnaires à deux niveaux. Mais ce sont certainement les travaux de Taguchi et Masuyama qui ont permis une vaste diffusion des plans d'expériences en élaborant des tables permettant de construire des plans d'expériences orthogonaux adaptés à la majorité des problèmes industriels[11]. Ces tables ont été publiées en 1959 et 1961.

De nombreux chercheurs contemporains ont continué le développement de cette branche de la Statistique dans des voies diverses et variées : adaptation des plans d'expériences pour les problèmes de mélanges [12], introduction d'effets de blocs [13], utilisation de modèles non-linéaires[14], utilisation de modèles contenant des effets de voisinage, plans d'expériences pour expériences numériques, ...etc.

## **1.2. Intérêt de la méthode des plans d'expériences**

L'étude d'un phénomène peut se schématiser de la manière suivante : l'expérimentateur s'intéresse à une grandeur, par exemple le rendement en blé d'une parcelle de terre, le prix de revient d'un produit chimique ou l'usure d'une pièce de moteur automobile. Cette grandeur dépendra d'un grand nombre de variables. L'étude du phénomène se ramène alors à la mesure de la grandeur en fonction des différentes valeurs que l'on peut donner aux variables.

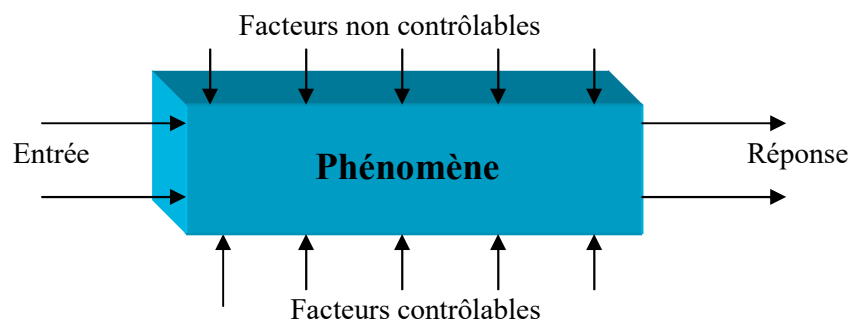


Figure 1.1 : L'environnement du système.

L'intérêt principal de la méthode tient au fait que l'on peut faire varier, à la fois, les niveaux de toutes les variables à chaque expérience, mais de manière programmée et raisonnée. Aussi choquant que cela paraisse au premier abord, le fait de faire varier toutes les variables à la fois n'est pas un inconvénient mais au contraire offre de nombreux avantages parmi lesquels :

- Diminution du nombre des essais,
- Nombre de facteurs étudiés peut être très grand,
- Détection des interactions entre facteurs,
- Meilleure précision sur les résultats,
- Modélisation des résultats et obtention de l'optimum.

Les plans d'expériences permettent l'étude de nombreux facteurs tout en maintenant le nombre d'essais à des valeurs raisonnables. Une de leurs applications principales est la recherche des facteurs influents. La compréhension de la méthode des plans d'expériences s'appuie sur deux notions essentielles, celle d'espace expérimental et celle de modélisation mathématique des grandeurs étudiées [15].

### **1.3. Vocabulaire de base des plans d'expériences**

La technique des plans d'expériences possède un vocabulaire particulier en méthodologie de la recherche expérimentale. Ses termes spécifiques sont classiques mais il peut arriver que dans certains domaines des statistiques, ils aient des significations un peu différentes. Pour que notre présentation soit bien comprise, nous préférons rappeler la signification de quelques termes importants.

#### **1.3.1. Réponse**

Une réponse expérimentale d'un système est une manifestation mesurable que l'on observe lorsque l'on fait varier les facteurs étudiés pour connaître l'effet des facteurs sur le système. La réponse peut être de type quantitatif continu, comme un rendement, caractéristique mécanique,...etc. Ou de type qualitatif. Les réponses quantitatives sont en général plus faciles à traiter.

#### **1.3.2. Facteurs et espace expérimental**

Les facteurs sont les variables que l'on désire étudier et qui sont supposés avoir une influence sur le système. La valeur donnée à un facteur pour réaliser un essai est appelée «Niveau ». Un facteur peut être :

- **Un facteur contrôlable** : C'est un facteur que l'on peut maîtriser, gérer, modifier.
- **Un facteur non contrôlable** : C'est un facteur considéré comme non retenu pour l'étude, car il est non influent et laissé à sa valeur habituelle, soit un facteur inconnu que l'on subit au cours de l'expérimentation.
- **Un facteur quantitatif** : Il se traduit par une grandeur numérique mesurable, se sera une vitesse, une température, une intensité,...etc.
- **Un facteur qualitatif** : Il ne peut pas donner lieu à une quantification directe, on peut seulement identifier ses différents niveaux : ce sera une marque, un procédé, une méthode, un fournisseur...etc.



Lorsque l'on étudie l'influence d'un facteur, en général, on limite ses variations entre deux bornes (borne inférieure c'est le niveau bas ; borne supérieure c'est le niveau haut).

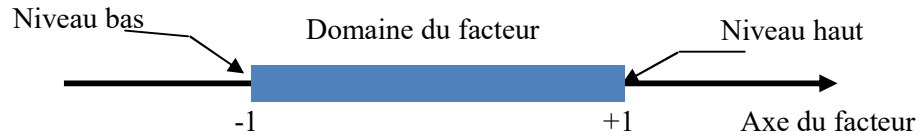


Figure 1.2 : Domaine de variation du facteur

L'effet d'un facteur est le changement de réponse provoqué par un changement de niveau dans l'un des facteurs. L'interaction entre deux facteurs caractérise le couplage des effets de ces deux facteurs sur la réponse. S'il y a un second facteur, il est représenté, lui aussi, par un axe. Nous définissons, comme pour le premier facteur, son niveau bas, son niveau haut et son domaine de variation. Ce second axe est disposé orthogonalement au premier. On obtient ainsi un repère cartésien qui définit un espace euclidien à deux dimensions. Cet espace est appelé l'espace expérimental (Figure 1.3).

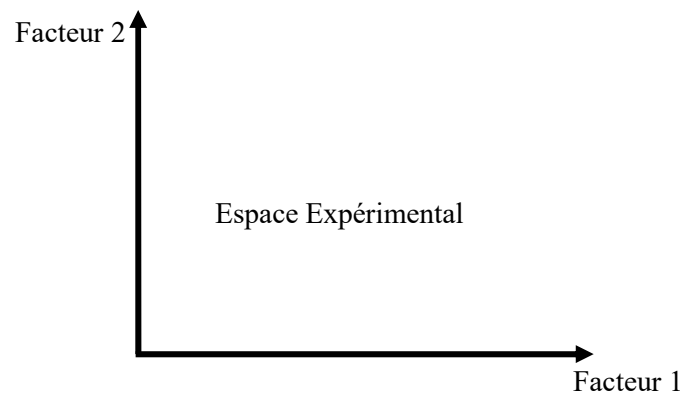


Figure 1.3 : Définition de l'espace expérimental

Le niveau  $x_1$  du facteur 1 et le niveau  $x_2$  du facteur 2 peuvent être considérés comme les coordonnées d'un point de l'espace expérimental (Figure 1.4).

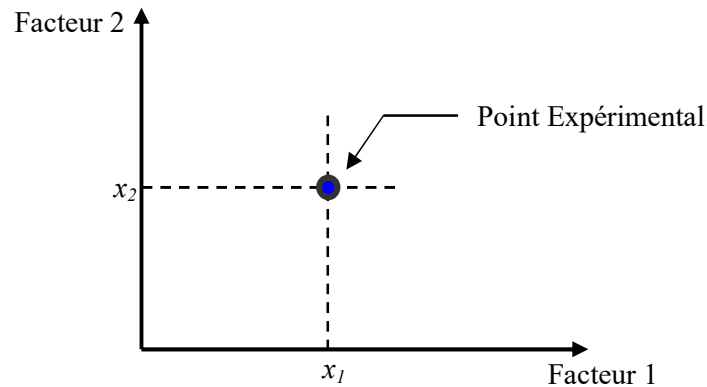


Figure 1.4 : Niveaux des facteurs définissant des points expérimentaux dans l'espace expérimental

Une expérience donnée est alors représentée par un point dans ce système d'axes. Un plan d'expériences est représenté par un ensemble de points expérimentaux.

### 1.3.3. Domaine d'étude et Surface de réponse

Le regroupement des domaines des facteurs définit le « domaine d'étude ». Etant donné la définition des  $k$  facteurs et de leurs variations respectives, il devient naturel de définir un espace  $k$ -dimensionnel, dans lequel chaque point correspond à une configuration des  $k$  facteurs. Cet espace est appelé domaine d'étude ou encore espace de recherche. Les points d'expérience peuvent se situer soit à l'intérieur soit sur les frontières du domaine (figure 1.5).

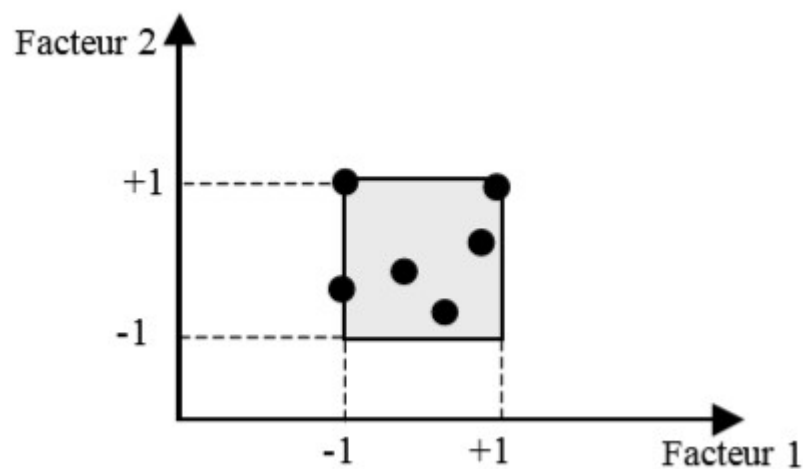


Figure 1.5 : Définition du domaine d'étude pour deux facteurs

A chaque point du domaine d'étude correspond une réponse. A l'ensemble de tous les points du domaine d'étude correspond un ensemble de réponses qui se localisent sur une surface appelée surface de réponse. On distingue deux types de surface de réponse.

- **Surface de réponse réelle** : La surface de réponse réelle du procédé est l'ensemble des valeurs que prend la réponse.
- **Surface de réponse théorique** : Dans le cas où les variables sont continues, une surface de réponse théorique peut être calculée. En pratique, cette surface de réponse est construite à partir de quelques points expérimentaux retenus par l'expérimentateur. Généralement, le problème fondamental des plans d'expériences est de chercher à identifier un modèle polynomial qui permet d'obtenir une meilleure approximation de la surface de réponse réelle (figure 1.6).

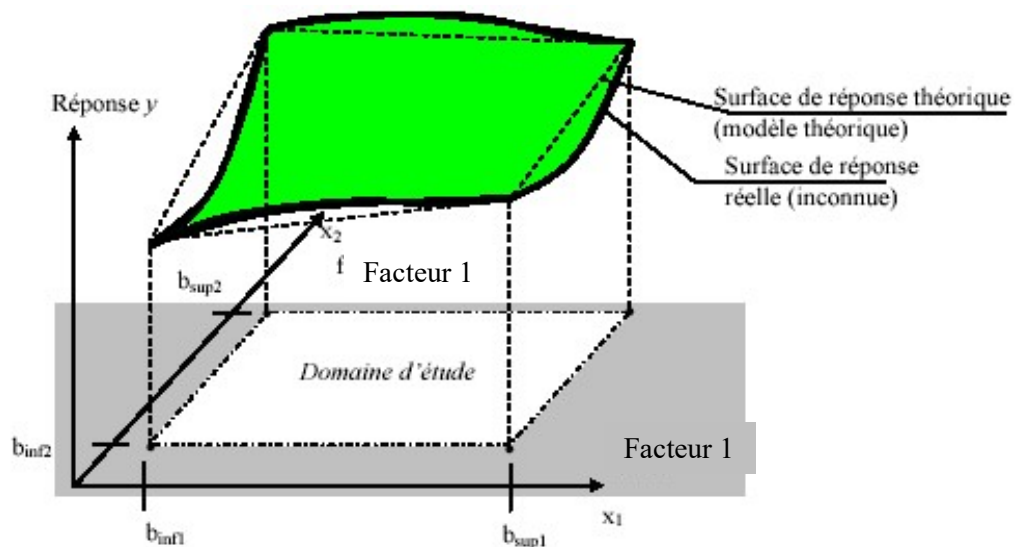


Figure 1.6 : Définition de la surface de réponse

#### 1.3.4. Coordonnées centrées réduites

Lorsqu'on attribue la valeur -1 au niveau bas d'un facteur et la valeur +1 au niveau haut, on effectue deux modifications importantes, on déplace l'origine des mesures et on change l'unité des mesures. Ces deux modifications entraînent l'introduction de nouvelles variables que l'on appelle variables centrées réduites, centrées pour indiquer le changement d'origine et réduites pour signaler la nouvelle unité. Le passage des variables d'origine  $z$

aux variables centrées réduites  $x$  (variables sans dimensions), et inversement, est donné par la formule suivante :

$$x = \frac{z - z_0}{pas}$$

Où  $z_0 = (\text{niveau haut} + \text{niveau bas})/2$ ,  $pas = (\text{niveau haut} - \text{niveau bas})/2$

L'intérêt des variables centrées réduites est de pouvoir présenter les plans d'expériences de la même manière quels que soient les domaines d'études retenus et quels que soient les unités des facteurs. La théorie des plans d'expériences présente ainsi une grande généralité [16].

### 1.3.5. Plans d'expériences

Chaque point du domaine d'étude représente des conditions opératoires possibles, donc une expérience que l'opérateur peut réaliser.

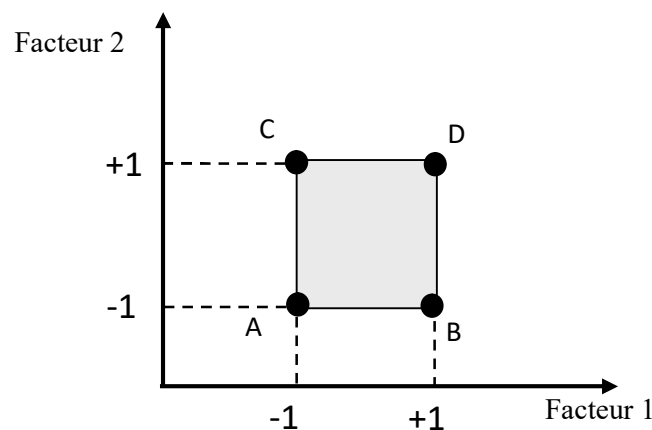


Figure 1.7 : La théorie des plans d'expériences montre que les meilleurs emplacements sont les sommets A, B, C et D du domaine d'étude

Le choix du nombre et de l'emplacement des points d'expériences est le problème fondamental des plans d'expériences. On a l'habitude d'appeler plans d'expériences des ensembles de points expérimentaux répondant à des propriétés bien précises. Ce sont les plans d'expériences classiques. Ils sont connus et largement publiés. Lorsque les points expérimentaux sont disposés autrement que dans les plans d'expériences classiques, on parle de plans non conventionnels. Leurs propriétés sont le plus souvent moins bonnes que celles des plans classiques. Mais ce sont des plans que l'on rencontre car il n'est pas toujours possible de respecter les impératifs des plans d'expériences classiques [17].

### **1.3.6. Matrice d'expériences**

Une matrice d'expériences est un objet mathématique qui représente, sous forme codée ou normée, l'ensemble des expériences à réaliser. C'est un tableau constitué de  $n$  lignes, correspondant aux  $n$  expériences, et de  $k$  colonnes, correspondant aux  $k$  variables (facteurs) étudiées. La matrice d'expériences (Tableau 1.1) définit les essais représentés dans la figure 1.7. L'élément  $ij$  de la matrice ainsi formée correspond à la valeur du niveau que prend la  $j^{\text{ième}}$  variable à la  $i^{\text{ième}}$  expérience. La matrice d'expériences, définit alors, les essais à réaliser. Le terme essai est l'équivalent de point d'expérience [18].

Tableau 1.1 : Matrice d'expériences

N° essai	Facteur 1	Facteur 2
<b>1(A)</b>	-1	-1
<b>2(B)</b>	+1	-1
<b>3(C)</b>	-1	+1
<b>4(D)</b>	+1	+1

## **1.4. Outils mathématiques pour les plans d'expériences**

Cette partie présente les notions mathématiques de base utiles pour une bonne compréhension de la méthode des plans d'expériences.

### **1.4.1. Notion de modélisation mathématique**

Le modèle est une relation entre les facteurs  $x_1, x_2, \dots, x_k$  et la réponse que l'on désire étudier.

#### **1.4.1.1. Modèle statistique**

Considérons un phénomène aléatoire dépendant de  $k$  variables et supposons que l'on cherche à modéliser au mieux ce phénomène. La démarche statistique consiste alors à effectuer  $n$  expériences, judicieusement choisies dans le cas des plans d'expériences. Chacune est représentée par un point  $x$  de  $\mathbb{R}^k$  (ceci est possible si les variables étudiées sont quantitatives, pour le cas qualitatif on utilise un sous-ensemble de  $\mathbb{N}^k$ )

En désignant par  $Y(x)$  la réponse mesurée en  $x$  on suppose classiquement que cette réponse résulte de la somme de la loi de réponse  $f$  en  $x$  (i.e. la réponse réelle recherchée) et du résidu  $\varepsilon$  en  $x$  (i.e. l'erreur commise). Donc :

$$Y(x) = f(x) + \varepsilon(x)$$

Le résidu peut rendre compte de bon nombre de causes telles que des erreurs dues à l'expérimentateur, un mauvais modèle postulé, l'oubli de certaines variables, ...etc. Nous supposons généralement que les résidus sont des variables aléatoires réelles vérifiant les trois hypothèses suivantes [19]:

$$\begin{cases} \forall x, & E(\varepsilon(x)) = 0, \\ \forall x \neq x', & Cov(\varepsilon(x), \varepsilon(x')) = 0 \\ \forall x, & Var(\varepsilon(x)) = \sigma^2 \end{cases}$$

#### **1.4.1.2. Modélisation linéaire**

Nous considérons dans cette partie, un modèle statistique dépendant de  $k$  variables avec  $f$  fonction linéaire par rapport à  $p$  paramètres inconnus. Mathématiquement, un modèle est linéaire par rapport aux paramètres  $\beta_{i(i=1,\dots,p)}$  si et seulement si chacune des dérivées partielles  $\partial f(x)/\partial \beta_i$  ne dépendent plus de  $\beta_i$ . Etant donné un phénomène aléatoire à expliquer, il n'est généralement pas simple de proposer un modèle adéquat. La fonction  $f$  est souvent trop complexe. C'est pourquoi il est courant de l'approcher à l'aide d'une classe de fonctions usuelles (développement de Taylor, séries de Fourier...etc). Si  $n$  expériences ont été réalisées, repérées par les points  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) de  $\mathbb{R}^k$ , nous avons donc :

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad Y(x_i) = f(x_i) + \varepsilon(x_i)$$

Puisque  $f$  est une fonction linéaire par rapport aux paramètres inconnus, Nous pouvons donc aussi écrire ce modèle matriciellement sous la forme suivante :

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

Avec :

- $Y \in \mathbb{R}^n$ : Vecteur de réponses observées,
- $X(n, p)$ : Matrice de calcul, qui dépend des points expérimentaux choisis pour exécuter le plan et du modèle postulé,

- $\beta \in \mathbb{R}^p$ : Vecteur des coefficients inconnus,
- $\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ : Vecteur des résidus. Les hypothèses mentionnées au paragraphe précédent se traduisent simplement par :  $E(\varepsilon) = 0$  et  $Var(\varepsilon) = \sigma^2 I_n$

En conséquence,  $X\beta$  est donc la réponse moyenne donnée (prédite) par ce modèle.

#### **1.4.2. Estimation des coefficients par la méthode des moindres carrés**

Une fois le modèle posé, le problème consiste maintenant à déterminer un estimateur  $\hat{\beta}$  du  $\beta$  le meilleur possible. Une démarche classique consiste à chercher  $\hat{\beta}$  de manière à ce que le vecteur de réponses observées  $Y$  et le vecteur des moyenne prédites :  $\hat{Y} = X\hat{\beta}$  soit les plus proches possibles :

##### **Définition 1.1**

On dit que  $\hat{\beta}$  est l'estimateur des moindres carrés de  $\beta$  si et seulement si  $\hat{\beta}$  minimise la fonction :

$$Q(\beta) = \|Y - X\beta\|^2$$

L'estimateur des moindres carrés de  $\beta$  donne le minimum de la fonction  $Q$  et ce minimum vaut alors :

$$Q(\hat{\beta}) = \|Y - X\hat{\beta}\|^2 = \|Y - \hat{Y}\|^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

Ceci montre que cette quantité est bien liée à l'erreur (quadratique) commise entre les réponses observées  $Y_i$  et les réponses moyennes prédites par le modèle  $\hat{Y}_i$ . Concernant la détermination pratique de cet estimateur, nous montrons que :

##### **Proposition 1.1**

Soit le modèle statistique  $Y = X\beta + \varepsilon$  avec  $X$  matrice de plein rang. L'estimateur des moindres carrés de  $\beta$  est donné par :

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

Preuve : Nous cherchons  $\hat{\beta}$  qui minimise la quantité :  $\|Y - \hat{Y}\|^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2$ , pour cela, exprimons  $\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2$  en fonction de  $\hat{\beta}$  :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2 &= (Y - X \hat{\beta})^T (Y - X \hat{\beta}) \\
&= (Y^T - \hat{\beta}^T X^T)(Y - X \hat{\beta}) \\
&= Y^T Y - \hat{\beta}^T X^T Y - Y^T X \hat{\beta} - \hat{\beta}^T X^T X \hat{\beta}
\end{aligned}$$

Remarquons que  $\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2$  est un scalaire et il est aisé de vérifier que tous les termes de la somme sont également des scalaires. Nous avons donc :

$$Y^T X \hat{\beta} = (\hat{\beta}^T X^T Y)^T = \hat{\beta}^T X^T Y$$

Nous aurons,

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = Y^T Y - 2\hat{\beta}^T X^T Y + \hat{\beta}^T X^T X \hat{\beta}$$

Calculons la dérivée de  $\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2$  par rapport à l'inconnue  $\hat{\beta}$ .

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{\partial \hat{\beta}} = \frac{\partial (Y^T Y)}{\partial \hat{\beta}} - 2 \frac{\partial (\hat{\beta}^T X^T Y)}{\partial \hat{\beta}} + \frac{\partial (\hat{\beta}^T X^T X \hat{\beta})}{\partial \hat{\beta}}$$

Où:  $\frac{\partial (Y^T Y)}{\partial \hat{\beta}} = 0$  (car  $Y^T Y$  ne dépend pas de  $\hat{\beta}$ ),  $\frac{\partial (\hat{\beta}^T X^T Y)}{\partial \hat{\beta}} = X^T Y$  (car  $\hat{\beta}^T X^T Y$  est

une forme linéaire en  $\hat{\beta}$ ) et  $\frac{\partial (\hat{\beta}^T X^T X \hat{\beta})}{\partial \hat{\beta}} = 2X^T X \hat{\beta}$  (car  $\hat{\beta}^T X^T X \hat{\beta}$  est une forme

quadratique en  $\hat{\beta}$ )

Il vient donc :

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{\partial \hat{\beta}} = -2X^T Y + 2X^T X \hat{\beta}$$

La valeur de  $\hat{\beta}$  qui minimise  $\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2$  doit vérifier :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{\partial \hat{\beta}} = 0 &\Rightarrow -2X^T Y + 2X^T X \hat{\beta} = 0 \\
&\Rightarrow X^T X \hat{\beta} = X^T Y \Rightarrow \hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y
\end{aligned}$$

**Proposition 1.2 :** Si les hypothèses sur les résidus sont vérifiées et si  $\hat{\beta}$  est l'estimateur des moindres carrés de  $\beta$  alors :

1.  $\hat{\beta}$  est un estimateur sans biais de  $\beta$ ,



2.  $\hat{\beta}$  admet pour matrice des covariances :  $\text{var}(\hat{\beta}) = \sigma^2 (X^T X)^{-1}$

Preuve

1. L'espérance mathématique de  $\hat{\beta}$  a pour expression :

$E(\hat{\beta}) = E[(X^T X)^{-1} X^T Y] = (X^T X)^{-1} X^T E(Y)$ , car les éléments de  $X$  sont considérés comme fixes. En désignant par  $\beta$  le vecteur des  $p$  coefficients vrais et  $\varepsilon$  le vecteur des  $n$  écarts entre les résultats expérimentaux et les réponses théoriques, nous obtenons alors :

$$Y = X\beta + \varepsilon, \text{ et } E(Y) = E(X\beta + \varepsilon) = E(X\beta) + E(\varepsilon) = XE(\beta)$$

Car  $E(\varepsilon) = 0$  par hypothèse. Nous trouvons :

$$E(\hat{\beta}) = (X^T X)^{-1} X^T X\beta = \beta$$

Le résultat que nous venons d'établir signifie que  $\hat{\beta}$  est un estimateur sans biais de  $\beta$ .

2. Par définition la variance de  $\hat{\beta}$  est donnée par :

$$\text{var}(\hat{\beta}) = E[(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)^T]$$

Remplaçons  $\hat{\beta}$  par  $(X^T X)^{-1} X^T Y$  et  $Y$  par  $X\beta + \varepsilon$ . Nous obtenons :

$$(\hat{\beta} - \beta) = (X^T X)^{-1} X^T (X\beta + \varepsilon) - \beta = \beta + (X^T X)^{-1} X^T \varepsilon - \beta = (X^T X)^{-1} X^T \varepsilon$$

Puisque  $(\hat{\beta} - \beta)^T = \varepsilon^T X (X^T X)^{-1}$ , donc,

$$\text{var}(\hat{\beta}) = E[(X^T X)^{-1} X^T \varepsilon \varepsilon^T X (X^T X)^{-1}] = (X^T X)^{-1} X^T E(\varepsilon \varepsilon^T) X (X^T X)^{-1}$$

Remplaçons  $E(\varepsilon \varepsilon^T)$  par :  $E[(\varepsilon - 0)(\varepsilon - 0)^T] = \text{var}(\varepsilon) = \sigma^2$ . Nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{\beta}) &= (X^T X)^{-1} X^T \sigma^2 X (X^T X)^{-1} \\ &= \sigma^2 (X^T X)^{-1} X^T X (X^T X)^{-1} \\ &\Rightarrow \text{var}(\hat{\beta}) = \sigma^2 (X^T X)^{-1} \end{aligned}$$

### **1.4.3. Prédiction de la réponse moyenne**

Une fois  $\hat{\beta}$  déterminé l'expérimentateur est souvent intéressé par l'utilisation du modèle obtenu afin de prédire la réponse moyenne en un point quelconque (où aucune

expérience n'a été réalisée). Ceci est primordial lorsque la modélisation doit conduire, par exemple, à la recherche des conditions expérimentales susceptibles de maximiser (ou minimiser) la réponse étudiée. La prédiction de la réponse moyenne au point  $x \in \mathbb{R}^k$  est donnée par :

$$\hat{Y}(x) = f(x)^T \hat{\beta}$$

Avec  $f(x) \in \mathbb{R}^p$  vecteur de régression, tel que  $f(x)^T$  est construit de manière identique aux lignes de la matrice  $X$ . Connaissant la valeur de la réponse moyenne prédite au point  $x$  la qualité de cette prédiction est quantifiée à l'aide du résultat suivant :

**Proposition 1.3** : La qualité de la prédiction  $\hat{Y}(x) = f(x)^T \hat{\beta}$  réalisée au point  $x \in \mathbb{R}^k$  est mesurée par :

$$Var(\hat{Y}) = \sigma^2 f(x)^T (X^T X)^{-1} f(x)$$

On constate que cette erreur sur la réponse calculée (ou réponse prédite) dépend de quatre grandeurs :

- De l'erreur expérimentale sur les réponses mesurées,
- De la position du point  $x$  dans le domaine d'étude,
- De l'ensemble des points qui ont été utilisés pour établir les coefficients du modèle, c'est à dire le plan d'expériences lui même,
- Du modèle postulé choisi pour interpréter les résultats (par la matrice de calcul des coefficients et la variance des résidus).

Preuve : Nous avons :

$$Var(\hat{Y}) = Var(f(x)^T \hat{\beta}) = f(x)^T var(\hat{\beta}) f(x) = \sigma^2 f(x)^T (X^T X)^{-1} f(x),$$

Puisque,  $var(\hat{\beta}) = \sigma^2 (X^T X)^{-1}$ .

#### **1.4.4. Fonction de variance de prédiction**

L'erreur commise sur les réponses mesurées dépend de la nature de l'expérimentation, du degré de précision de la technologie employée, du soin, de l'habilité de l'expérimentateur, et de bien d'autres facteurs dont l'expérimentateur est responsable. Ces facteurs ne dépendent pas de la théorie des plans d'expériences mais de la pratique expérimentale [17]. Pour séparer cette partie expérimentale de celle qui dépend de la théorie, on introduit la fonction de variance de prédiction  $d^2(\hat{Y})$  :

$$d^2(\hat{Y}) = f(x)^T (X^T X)^{-1} f(x)$$

En prenant la racine carrée de la fonction de variance, on obtient la fonction d'erreur de prédiction :

$$d(\hat{Y}) = \sqrt{f(x)^T (X^T X)^{-1} f(x)}$$

#### **1.4.5. Analyse de la variance**

Une fois le modèle ajusté, le problème de la qualité de l'ajustement obtenu se pose alors. Il est possible d'obtenir des indicateurs numériques permettant de quantifier ceci à l'aide des techniques dites d'analyse de la variance. Ces techniques reposent sur des décompositions judicieuses en sommes de carrés. Désignons dans la suite par  $\bar{Y}$  la réponse moyenne observée et par  $Y^*$  le vecteur des réponses observées centrées. Remarquons que si  $1_n$  est l'indicatrice d'ordre  $n$  (c-à-d le vecteur de  $\mathbb{R}^n$  dont toutes les composantes sont égales à 1) alors [20]:

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} 1_n^T Y \text{ et } Y^* = Y - \bar{Y} 1_n$$

Nous définissons ensuite les trois sommes classiques suivantes (la notation SS venant de l'anglais Sum of Squares):

- Somme totale des carrés :  $\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2$  (désignée par SST)
- Somme des carrés due à la régression :  $\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$  (désignée par SSR)
- Somme des carrés due à l'erreur :  $\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2$  (désignée par SSE)

#### **Proposition 1.4**

Pour le modèle des moindres carrés, si  $P = X (X^T X)^{-1} X^T$  est le projecteur orthogonal de  $\mathbb{R}^n$  sur le sous espace  $Im(X)$  et si  $I_n \subset Im(X)$  alors les sommes carrées ci-dessus s'écrivent :

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 = Y^T Y - n\bar{Y}^2, \quad \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 = Y^T P Y - n\bar{Y}^2 \text{ et } \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = Y^T (I_n - P) Y$$

Il en dérive la relation fondamentale suivante :  $\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2$

Preuve : Sous une forme matricielle, on peut écrire :

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 = (Y - \bar{Y}1_n)^T (Y - \bar{Y}1_n) = Y^T Y - \bar{Y}Y^T 1_n - \bar{Y}1_n^T Y + \bar{Y}^2 1_n^T 1_n, \text{ puisque } 1_n^T Y = Y^T 1_n = n\bar{Y}$$

et  $1_n^T 1_n = n$ , donc  $\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 = Y^T Y - n\bar{Y}^2$ . Pour  $\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = (Y - \hat{Y})^T (Y - \hat{Y})$  et comme

$\hat{Y} = X (X^T X)^{-1} X^T Y = PY$  alors  $Y - \hat{Y} = Y - PY = Y(I_n - P)$ , on obtient donc :

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = (Y - \hat{Y})^T (Y - \hat{Y}) = Y^T (I_n - P)(I_n - P)Y = Y^T (I_n - P)Y$$

Pour  $\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 = Y^T P Y - n\bar{Y}^2$ , on a :  $\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 = \hat{Y}^T \hat{Y} - 2\bar{Y}\hat{Y}^T 1_n + \bar{Y}^2 1_n^T 1_n$ . Or, Pour le

modèle des moindres carrés :  $X^T Y = X^T X \hat{A}$ . Et par conséquence :  $X^T Y = X^T X \hat{A} = X^T \hat{Y}$ ,

en multipliant les deux parties par  $\frac{1}{n} 1_n$ , on obtient :

$$X^T \frac{1}{n} Y 1_n = X^T \frac{1}{n} \hat{Y} 1_n \Rightarrow X^T \bar{Y} = X^T \hat{Y}$$

Par conséquence,  $\bar{Y} = \hat{Y}$ . D'où :

$$\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 = \hat{Y}^T \hat{Y} - 2\bar{Y}\hat{Y}^T 1_n + \bar{Y}^2 1_n^T 1_n = \hat{Y}^T \hat{Y} - n\bar{Y}^2 = Y^T P Y - n\bar{Y}^2.$$

Ceci entraine bien que :

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

Car,  $\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 = Y^T Y - n\bar{Y}^2 + Y^T (I_n - P)Y = Y^T P Y - n\bar{Y}^2$ .

Pour  $Y$  vecteur aléatoire de  $\mathbb{R}^n$  et  $M(n, n)$  une matrice non aléatoire, nous appelons nombre de degrés de liberté de  $Y^T M Y$  le rang de la matrice  $M$ . Cette notion de degrés de liberté provient de la loi usuelle du khi-deux. En effet, on montre que si  $Y$  est un vecteur aléatoire de loi gaussienne  $N(\mu, \sigma^2 I_n)$  et si  $M$  est la matrice d'un projecteur alors  $Y^T M Y$  suit une loi du khi-deux décentrée, de paramètre de décentrage  $\frac{1}{2} \mu^T A \mu$  avec un nombre de degrés de liberté égal au rang de  $M$  [21]. Les degrés de liberté associés aux différentes sommes de carrés sont donnés ci-dessous.

**Proposition 1.5** Les sommes de carrés SST, SSE et SSR sont associées, respectivement, à  $(n - 1)$ ,  $(n - p)$  et  $(p - 1)$  degrés de liberté. Ceci permet de définir les sommes moyennes de carré suivantes:

$$MST = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i^2 - n\bar{Y}^2}{n-1}, \quad MSR = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{Y}_i^2 - n\bar{Y}^2}{p-1} \quad \text{et} \quad MSE = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y}_i)^2}{n-p}$$

(Avec la notation  $MS$  dénote la somme moyenne des carrées).

Preuve : D'après la proposition 1.4. Nous avons:

$\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 = Y^T Y - n\bar{Y}^2 = Y^T (I_n - \frac{1}{n} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T) Y$  et puisque  $\frac{1}{n} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T = \mathbf{1}_n (\mathbf{1}_n^T \mathbf{1}_n)^{-1} \mathbf{1}_n^T$  est le projecteur orthogonal de  $\mathbb{R}^n$  sur  $Im X$  alors  $(I_n - \frac{1}{n} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T)$  est la projection orthogonale  $\mathbb{R}^n$  sur les sous espace  $(Im X)^\perp$ , donc la matrice  $(I_n - \frac{1}{n} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T)$  a pour rang  $n-1$  car la dimension de  $(Im X)^\perp$  est égale à  $n-1$ .

De même que précédemment :

$\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 = Y^T P Y - n\bar{Y}^2 = Y^T (P - \frac{1}{n} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T) Y$ , si  $\mathbf{1}_n \in Im X$  il se retrouve donc aussi dans le noyau de  $P - \frac{1}{n} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T$  et le rang de  $P - \frac{1}{n} \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^T$  est égale à  $p-1$  [20].

## 1.4. 6. Tests statistiques

### 1.4.6.1. Le coefficient de corrélation multiple $R^2$

On appelle  $R^2$  le rapport de la partie des résultats expliqués par le modèle à la totalité de ce qu'il devrait expliquer :

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} = \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST}$$

D'après cette formule, nous voyons que le rapport  $R^2$  varie entre 0 et 1. Le modèle ajusté est d'autant plus "proche" des réponses observées que  $R^2$  est proche de 1. Un seuil classique consiste à valider le modèle dès lors que  $R^2 \geq 0.95$ .

### **1.4.6.2. Le $F$ de Fisher**

On appelle coefficient de Fisher le réel :

$$F = \frac{\frac{SSR}{p-1}}{\frac{SSE}{n-p}}$$

Si le  $F$  de Fisher est élevé, la variance de la régression (réponses calculées) est plus grande que la variance des résidus. La probabilité que les coefficients du modèle soient tous nuls est alors très faible. Pour avoir des coefficients significatifs, il faut un  $F$  de Fisher élevé, c'est-à-dire une probabilité ( $p$ -value) faible. Le modèle sera déclaré globalement significatif si  $F > F_{1-\alpha, p, n-p-1}$ . On peut dire aussi que la qualité du modèle est d'autant meilleure que la variance d'ajustement est plus faible par rapport à la variance expérimentale [22].

## **1.5. Différents types de plans d'expériences**

Dans cette section, nous introduisons les principaux types de plans d'expériences. Ces plans peuvent être classés en deux catégories [23],

- Les plans factoriels,
- Les plans pour surface de réponse,

Ces deux catégories sont liées aux objectifs d'utilisation possibles de la méthode des plans d'expériences.

### **1.5.1. Plans factoriels**

Ces plans permettent de découvrir les facteurs les plus influents sur une réponse donnée. On ne cherche pas vraiment à obtenir une relation précise entre les variations des facteurs et celle de la réponse. Ces plans factoriels sont des plans discrets orthogonaux. Les facteurs sont discrétisés pour ne prendre qu'un nombre fini de niveaux. L'orthogonalité d'un plan se définit de la manière suivante :

**Définition 1.2** : Un plan d'expériences est orthogonal si :

- A chaque niveau d'un facteur, tous les niveaux de n'importe quel autre facteur lui sont associés le même nombre de fois dans le plan,

- A chaque niveau de chaque facteur apparaît le même nombre de fois.

En pratique, dans ces plans, les facteurs prennent 2 à 5 niveaux. Il existe deux types de plans factoriels (les plans factoriels complets et les plans fractionnaires)

### **1.5.1.1. Plans factoriels complets**

Les plans factoriels complets sont des plans orthogonaux dont les facteurs prennent 2 ou 3 niveaux et où toutes les combinaisons possibles entre tous les niveaux des facteurs sont évaluées. Le plan du Tableau 1.2 est un plan complet de trois facteurs respectivement à 2, 2 et 3 niveaux. Lorsqu'on dispose de  $k$  facteurs à 2 niveaux, le plan complet est noté  $2^k$ . Pour 3 niveaux, on le note  $3^k$ . Si on a  $k_1$  facteurs à 2 niveaux et  $k_2$  facteurs à 3 niveaux, on le note le plan  $2^{k_1}3^{k_2}$ .

Tableau 1.2 : Matrice d'expériences  $2^2 \times 3^1$

N°	A	B	C
1	1	1	1
2	1	1	2
3	1	1	3
4	1	2	1
5	1	2	2
6	1	2	3
7	2	1	1
8	2	1	2
9	2	1	3
10	2	2	1
11	2	2	2
12	2	2	3

### **1.5.1.1. Plans factoriels fractionnaires**

En pratique, les plans complets ne sont pas souvent utilisés à cause de ce grand nombre d'expériences (Tableau 1.3). On utilise plutôt des plans fractionnaires qui représentent une fraction orthogonale du plan complet. Cette fraction consiste à ne garder que certaines expériences du plan complet tout en conservant la propriété d'orthogonalité. Parmi les plans fractionnaires, nous trouvons [24] :

Tableau 1.3 : Nombre d'essais d'un plan complet  $2^k$ 

Nombre de facteurs	Nombre d'essais
2	4
4	16
5	32
8	256

### a. Plans fractionnaires complet $2^{k-m}$

La solution proposée par les plans fractionnaires, consiste à utiliser pour l'étude de  $k$  facteurs les matrices des effets des plans complets  $k^{k-1}$ ,  $k^{k-2}$ ...etc. L'avantage des plans fractionnaires est évident, la charge expérimentale est divisée par  $2^p$ , car  $2^{k-m} = \frac{2^k}{2^m}$ . Si par exemple on veut étudier 3 facteurs en ne faisant que 4 essais. Nous prenons la précaution de choisir les quatre essais pour que la matrice  $X$  soit une matrice orthogonale. Les 4 points choisis sont disposés comme l'indique la figure 1.8.

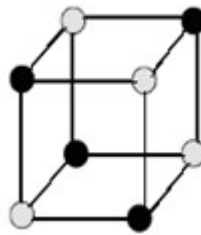


Figure 1.8 : un plan factoriel complet  $2^3$  peut être divisée en deux Plans fractionnaires  $2^{3-1}$ , un plan noir et un plan gris.

### b. Les plans de Plackett et Burman

Les plans de Plackett et Burman sont des plans restrictifs puisqu'ils ne permettent pas de prendre en compte les interactions. Ce sont donc des plans où les effets des facteurs sont confondus avec les interactions. Le lecteur intéressé par ce type de plan pourra se référer à la référence [25].

### c. Plans de Taguchi

Taguchi [26] a mis au point des tables standards qui permettent de résoudre la plupart du temps un maximum de problèmes industriels. Dans ces tables standards il faut tenir compte des interactions entre facteurs, c'est-à-dire de l'influence d'un ou plusieurs facteurs sur d'autres facteurs. Certaines actions d'ordre 2, c'est-à-dire des interactions entre



deux facteurs peuvent être prises en considération, d'autres non. Les principales tables orthogonales proposées par Taguchi sont les suivantes :  $L_4(2^3)$ ,  $L_8(2^7)$ ,  $L_{16}(2^{15})$ ,  $L_{12}(2^{11})$ ,  $L_9(3^4)$ ,  $L_{27}(3^{13})$ ,  $L_{32}(2^{31})$ . A l'aide de ces tables standards et grâce à un mode d'emploi particulièrement attractif et simple puisque sous forme graphique. Il est aisé de construire son propre plan d'expériences et de l'interpréter. Parmi ces 7 tables, la plus simple d'entre elles est la table  $L_4(2^3)$ , le 4 indique que cette table comporte quatre lignes et le nombre 2 correspondant aux deux niveaux retenus pour chaque variable, et 3 c'est-à-dire trois facteurs, prenons par exemple la table  $L_4$  suivante:

Table 1.4 : Tableau orthogonal  $L_4(2^3)$

Facteurs	1	2	3
essais			
1	1	1	1
2	1	2	2
3	2	1	2
4	2	2	1

### **1.5.2. Plans pour surface de réponse**

L'objectif de cette catégorie est, plus que de hiérarchiser les effets des différents facteurs, de décrire le plus précisément possible le comportement de la réponse en fonction des variations des facteurs. Le but de ce type d'étude est donc de parvenir à une modélisation du phénomène étudié basée sur l'expérimentation. Ces plans permettent de déterminer à quelles valeurs les facteurs d'entrée d'un dispositif doivent être ajustés pour obtenir une ou plusieurs réponses souhaitées, ils s'appuient sur l'usage de modèles de nature polynomiale. Signalons l'existence de nombreuses références sur les plans de surface de réponse [17, 27, 28, 29, 30]. Il en existe plusieurs types : les plans factoriels complets à trois niveaux, les plans de Box et Behnken, les plans composite, les plans optimaux, les plan de type space filling (comme les plans latins, les plans maximin,... etc.)...etc.

#### **1.5.2.1. Plans composite**

Les plans composites permettent de calculer un modèle polynomial du second degré. On parle de modèle quadratique. Ils sont composés d'une première partie qui est un plan fractionnaire ou complet, puis d'un ou plusieurs essais au centre du domaine d'étude et enfin d'essais supplémentaires permettant le calcul du modèle quadratique. Pour deux

facteurs la figure ci-dessous montre la disposition des points expérimentaux pour un tel plan :

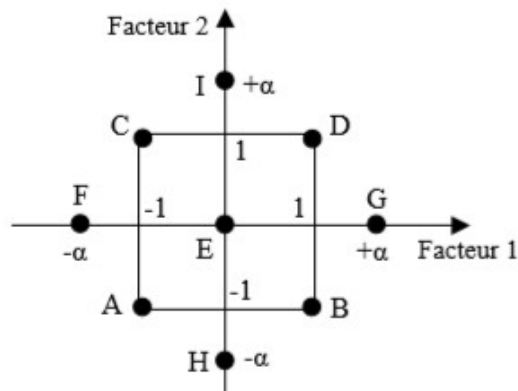


Figure 1.9 : Plan composite pour l'étude de deux facteurs

### 1.5.2.2. Plans de Box-Behnken

Box et Behnken ont proposé en 1960 [3] ces plans qui permettent d'établir des modèles du second degré. En effet tous les facteurs ont trois niveaux, -1, 0 et +1. Ces plans sont faciles à mettre en œuvre et possèdent la propriété de séquentialité par rapport aux facteurs, c'est-à-dire que l'on peut entreprendre l'étude des  $k$  premiers facteurs en se réservant la possibilité d'en ajouter de nouveaux sans perdre les résultats des essais déjà effectués. Cette propriété est précieuse quand on veut faire une exploration rapide des deux ou trois facteurs qui paraissent les plus utiles tout en se réservant la possibilité d'en étudier d'autres plus tard.

### 1.5.2.3. Plans D-optimaux

Les plans D-optimaux font partie d'une famille plus grande appelée plans optimaux alphabétiques (du nom des critères d'optimalité remplis par les plans : A, D, E, ... etc.). Ils sont particulièrement bien adaptés à des problématiques avec contraintes (telles que : contrainte du domaine de variation : essais impossibles, réutilisation d'essais, certains essais ont été réalisés au préalable mais pas au niveau des points expérimentaux préconisés par la théorie des plans d'expériences, contrainte sur le nombre d'essais maximal à effectuer, dans cette situation, la qualité du plan se dégrade, il y a notamment perte d'orthogonalité. La précision des estimateurs que l'on obtiendra sera beaucoup plus faible. La question qui se pose est donc de trouver d'autres expériences dans ce domaine sous contraintes pour permettre une estimation optimisée de ce modèle : c'est l'objectif du plan D-optimal [31].

#### 1.5.2.4. Plans de type space filling

Sont de plans Beaucoup utilisés dans le cas des essais numériques, permettent d'étudier des modèles complexes, non linéaires par exemple. Dans ce type de plans, chaque facteur prend beaucoup de niveaux équi-répartis sur son domaine de variation. Les propriétés qui peuvent être satisfaites par ces plans sont [32] :

- Le remplissage : maximisation de la distance entre les deux points les plus proches du plan.
- L'indépendance: maximisation du déterminant de la matrice de corrélation des paramètres.
- l'uniformité (discrépance): minimisation de la distance à une répartition uniforme.

Parmi les plans de space filling on peut citer :

- a. **Les hyper cube latin** [33], un plan latin hypercube (PLH) en  $n$  essais est un plan d'expériences pour lequel, chaque facteur a le même nombre de niveaux  $n$ , et à chaque facteur prend chaque niveau une fois et une seule. Les niveaux sont équi-répartis. Ainsi, chaque colonne du plan d'expériences est un tirage aléatoire sans remise parmi  $\{1,2,\dots,n\}$ . La Figure 1.10 illustre un échantillonnage par hyper cube latin en dimension 2. Sur cette figure, on voit que l'intervalle de chaque variable a été découpé en  $n = 10$  sous-intervalles de même taille. Pour chaque variable et dans chaque sous-intervalle un point a été généré selon une loi uniforme.

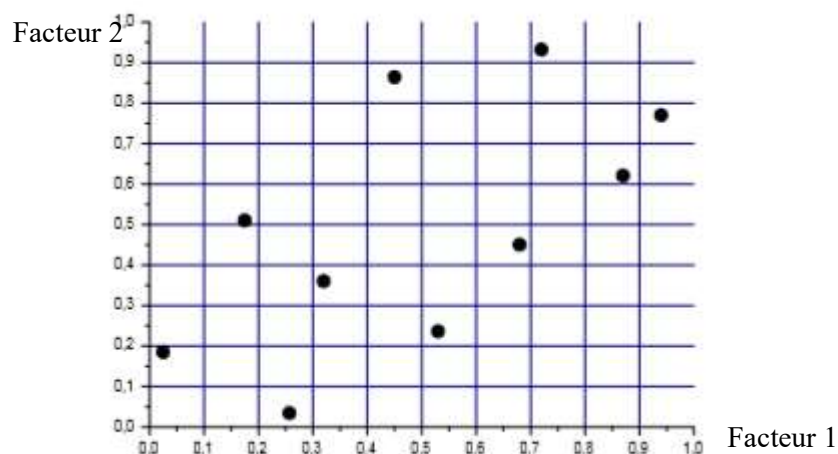


Figure 1.10 : 10 points issus d'un échantillonnage par hyper cube latin en dimension 2.

- b. **Suites à faible discrépance** : Dans la partie précédente, nous avons discuté de plans dont les points sont bien répartis en projection mais pas forcément dans

l'espace. Les suite à faible discr ance ont l'objectif de bien remplir l'espace expérimental. Ces suites de points sont initialement utilisées pour remplacer les suites aléatoires dans la méthode de Monte-Carlo, d'où la dénomination de méthodes de quasi Monte-Carlo. Ces suites comprennent les suites de Van Der Corput [34] de Halton[35], de Sobol [36] et les suites de Faure [37]. Une notion importante sur laquelle repose la construction de la plupart de ces suites est la définition de la fonction radicale inverse en base  $b$  donnée ci-dessous.

**Définition 1.3 :** Soit un entier  $b \geq 2$ . Tout entier  $i \in \mathbb{N}$  peut se décomposer dans la base  $b$  de manière unique :

$$i = \sum_{s=0}^m a_s b^s$$

Avec  $a_s \in \{0, 1, \dots, b-1\}$ . A partir de cette décomposition, on définit la fonction radicale inverse par :

$$\phi_b(i) = \sum_{s=0}^m a_s b^{-s-1}, \text{ Pour tout } i \in \mathbb{N}$$

Où,  $\phi_b(i) \in [0, 1]$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$ . La suite  $C_b = \{x^0, x^1, \dots, x^{n-1}\}$  avec  $x^i = \phi_b(i)$  est appelée suite de Van Der Corput en base  $b$ . Par exemple, en base  $b = 4$ , les 6 premiers points de la suite de Van Der Corput sont :

$$x^0 = 0, x^1 = \frac{1}{4}, x^2 = \frac{1}{2}, x^3 = \frac{3}{4}, x^4 = \frac{1}{16}, x^5 = \frac{5}{16}.$$

- **Les suites de Halton :** ces suites se déduisent de la suite de van der Corput au cas multidimensionnel, autrement dit les suites de Halton sont une généralisation en dimension  $k \geq 1$  des suites de Van Der Corput.

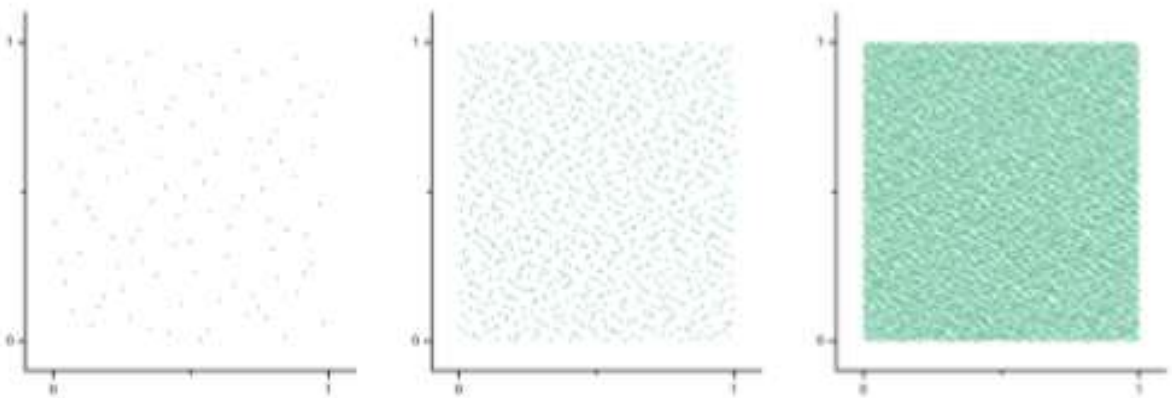


Figure 1.11 : les 100, 1000, 10000 premiers points de la suite de halton en base 2 et 3.

- **Les suites de Sobol** : ces suites permettent de répartir les différents points dans l'espace en minimisant la distance entre chaque observation. Leur construction est assez compliquée, et elles s'obtiennent par des récurrences linéaires à partir de polynômes primitifs sur le corps  $Z_2 = \{0,1\}$ . Elles sont nommées quasi-aléatoires car on peut toujours trouver les coordonnées du deuxième point à partir du premier et ainsi de suite.

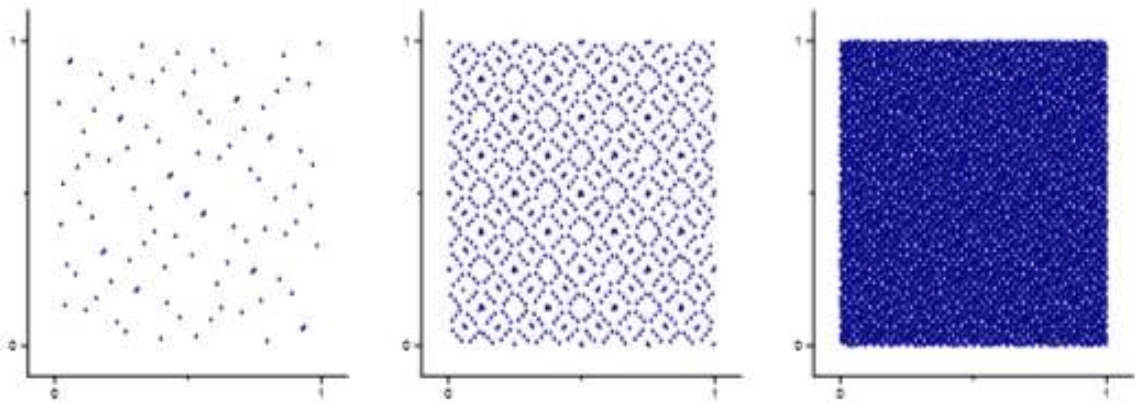


Figure 1.12 : les 100, 1000 et 10000 premiers points d'une suite de Sobol.

- **Suites de Faure** : ces suites sont considérées comme meilleures que celles de Halton et de Sobol. La figure ci-dessous montre une distribution de 50, 250 et 500 points d'une suite de Faure pour deux dimensions.

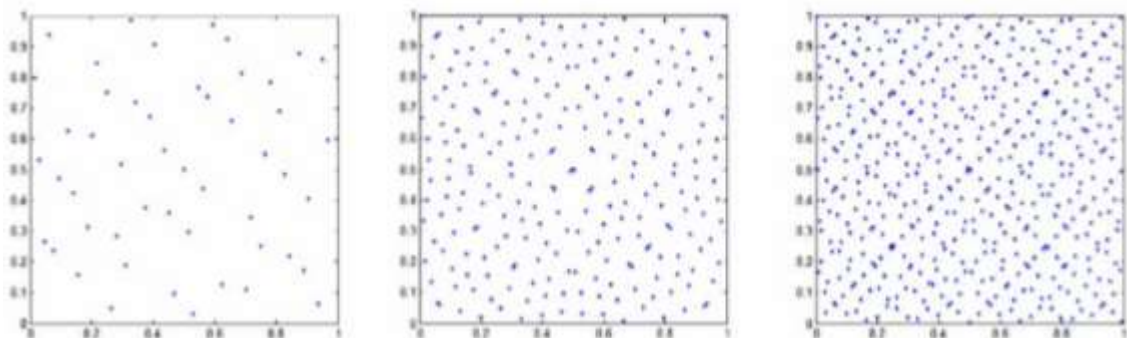


Figure 1.13 : les 50, 250 et 500 premiers points d'une suite de Faure.

### 1.6. Critères d'optimalités pour les plans d'expériences

L'évaluation de la qualité de la structure d'un ensemble de points issu d'une base de données ou d'un plan d'expériences nécessite l'utilisation de critères quantitatifs. Il existe de nombreux critères qui permettent, entre autres, d'évaluer la qualité d'un plan

d'expériences. En général, pour les plans de surface de réponse nous recherchons le placement optimal des points d'expériences pour lequel l'erreur sur les réponses prédites est la plus faible possible [38] (critère d'orthogonalité, critère de presque d'orthogonalité, critère D, critère A...etc) et pour le cas des plans de space filling nous cherchons l'uniformité d'une répartition de points (tels que le critère de discrédance, critère de distance, critère de recouvrement).

- **D-optimalité** : Une matrice d'expériences est dite optimale-D, si elle conduit au déterminant minimal pour sa matrice de dispersion  $(X^T X)^{-1}$ .
- **G-optimalité** : Le critère-G prend en compte la plus grande valeur, sur tout le domaine expérimental, de la fonction de variance engendré par la matrice  $X$ . La meilleure matrice d'expériences vis à vis de ce critère étant celle qui a la plus petite valeur.
- **Critère d'orthogonalité** : Une matrice d'expériences est orthogonale si elle permet d'obtenir des estimations des coefficients indépendants. Cela se caractérise par des axes de l'ellipsoïde parallèles aux axes des coefficients. Cette propriété est obtenue quand  $(X^T X)^{-1}$  est diagonale donc quand les covariances des coefficients sont nulles.
- **Critère de Presque Orthogonalité** : Si la matrice  $(X'X)^{-1}$  obtenue en retirant sa première ligne et sa première colonne est diagonale, le critère de presque orthogonalité est respecté.
- **Critère d'isovariance par rotation** : On désire que les réponses calculées avec le modèle issu du plan d'expériences aient une erreur de prévision identique pour des points situés à la même distance du centre du domaine d'étude. Dans ce cas on parle de plan isovariant par rotation (rotable).
- **Critère de distance** (Mindist) [39] : représente la plus petite distance entre une paire parmi un plan de  $n$  points, ce critère est défini par

$$Mindist = \min_{1 \leq i \leq n} \min_{j \neq i} d(x_i, x_j)$$

Où,  $d(x_i, x_j)$  est la distance Euclidienne entre le point  $x_i$  et  $x_j$ .

Une valeur plus élevée de Mindist devrait correspondre à une dispersion plus régulière des points du plan.

- **Critère de recouvrement** (cov) : permet de mesurer l'écart entre les points du plan et ceux d'une grille régulière. Ce critère est nul pour une grille régulière. L'objectif

est donc de le minimiser pour se rapprocher d'une grille régulière, et ainsi assurer le remplissage de l'espace, sans toutefois l'atteindre pour respecter une distribution uniforme notamment en projection sur les axes factoriels [40] :

$$cov = \frac{1}{\bar{\delta}} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\delta_i - \bar{\delta})^2}$$

Où  $\delta_i = \min_{i \neq j} (dis(x_i, x_j))$  et  $\bar{\delta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i$ . Pour une grille régulière,  $\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_n$ , alors  $cov = 0$ .

Dans le même contexte, on peut utiliser le ratio  $R$ , définie par :

$$R = \frac{\max_{1..n} \delta_i}{\min_{1..n} \delta_i}$$

Pour une grille régulière  $R = 1$ , Ainsi, plus  $R$  est proche de 1, et plus les points sont proches de ceux d'une grille régulière.

- **Critère de discrédance (Disc)** : La discrédance permet de mesurer l'écart entre la fonction de répartition empirique des points du plan et celle de la loi uniforme. Contrairement aux deux critères précédents, la discrédance n'est pas basée sur la distance entre les points. Il existe différentes mesures de discrédance. Nous retenons la discrédance en norme L2 [41].

$$Disc = \left(\frac{1}{3}\right)^p - \frac{2^{1-p}}{n} \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^p (1 - (x_j^i)^2) + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \prod_{j=1}^p (1 - \max(x_i^j, x_k^j))$$

## 1.7. Conclusion

Pour résumer, la méthode de plans d'expériences est un ensemble de techniques complémentaires aide son utilisateur dans la détermination des expériences à réaliser et dans la compréhension et l'exploitation des résultats obtenus. Les outils utilisés dans cette méthode sont fondés essentiellement sur des bases statistiques et algébriques. Les développements menés dans ce chapitre ont présentés les fondements, les principes ainsi que les possibilités d'analyse de la méthode des plans d'expériences. Ses multiples aspects en font une méthode d'analyse parfaitement adaptée à l'étude des systèmes.

## CHAPITRE 2

### GENERALITES SUR LES PROCESSUS PONCTUELS

Les processus ponctuels marqués sont le fondement de la géométrie stochastique. Des exemples de l'utilisation de ces processus stochastiques peuvent être observés dans des domaines aussi variés que la biologie, la mécanique, la physique des particules, l'ingénierie au sens large, ...etc.

Dans ce chapitre, nous rappelons dans un premier temps, quelques notions générales sur les processus ponctuels. Nous introduisons ensuite, quelques exemples de processus ponctuels de référence. Dans un deuxième temps, nous présentons les processus ponctuel marqués puis les processus ponctuels et ponctuels marqués de Markov, ainsi que les algorithmes de simulation pour les chaînes de Markov.

Décrire ces processus dans leur globalité est par la même une tâche qui dépasse largement le cadre de ce document. Nous nous concentrerons sur les aspects de ces processus qui concernent le sujet principal de cette thèse. Pour une analyse détaillée du domaine, nous renvoyons le lecteur aux références [4, 42, 43, 44].

#### **2.1. Premières définitions et notations**

Comme le nom processus ponctuels l'indique, l'origine de la théorie était l'étude de séquences de points aléatoires sur l'échelle du temps. A partir de maintenant, nous emploierons sans distinction les expressions de processus spatiaux, de processus ponctuels, de processus ponctuels marqués ou de processus objets pour parler des mêmes objets mathématiques.

Soit  $(\Omega, A, P)$  un espace probabilisé. Cet espace caractérisera les aspects aléatoires des expériences. Soit  $\chi$  un ensemble non vide menu d'une tribu  $A$ , et cet ensemble servira de contenant.

#### **Définition 2.1**

On appelle une configuration (figure 2.1) tout ensemble dénombrable, non ordonné de points  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , où  $x_i \in \chi$  sont des points issus d'une expérience aléatoire.



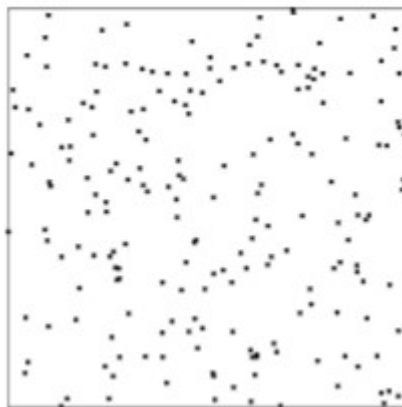


Figure 2.1 : Ensemble de points, ou configuration, de  $\chi = [0,1]^2$ .

Pour pouvoir considérer des configurations aléatoires, il faut ajouter des contraintes sur l'espace  $\chi$ . Nous choisissons de considérer un espace  $\chi$  muni d'une métrique  $d$  tel que  $(\chi, d)$  soit complet et séparable. Cette métrique permet de définir une topologie et une tribu borélienne. En pratique,  $\chi$  sera souvent un sous-ensemble compact de  $\mathbb{R}^k$  muni de la distance euclidienne  $d$ .

### Définition 2.2

On dit qu'une configuration est localement finie si elle possède au plus un nombre fini de points dans n'importe quel borélien borné  $B$  de  $(\chi, d)$ . On note  $E^{lf}$  la famille des configurations localement finies.

$$E^{lf} = \{x \subset \chi : n(x_B) < \infty, \forall B \subseteq \chi\}$$

Par la suite, nous nous intéressons aux configurations  $x$  dites localement finies. De plus, nous nous limitons à l'étude des processus définis sur des régions bornées, du fait de notre application à la recherche d'objets dans des ensembles bornés, et objets définis sur un compact.

## 2.2. Processus ponctuels et loi d'un processus ponctuel

Nous définissons alors la notion de processus ponctuel :

### Définition 2.3

On appelle processus ponctuel une application  $X$  sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  vers la famille de configurations de points de  $\chi$  localement finies. Telle que pour tout borélien  $A \subseteq \chi$ , le nombre de points en  $A$ ,  $N_X(A)$  soit une variable aléatoire discrète finie (figure 2.2[45]).

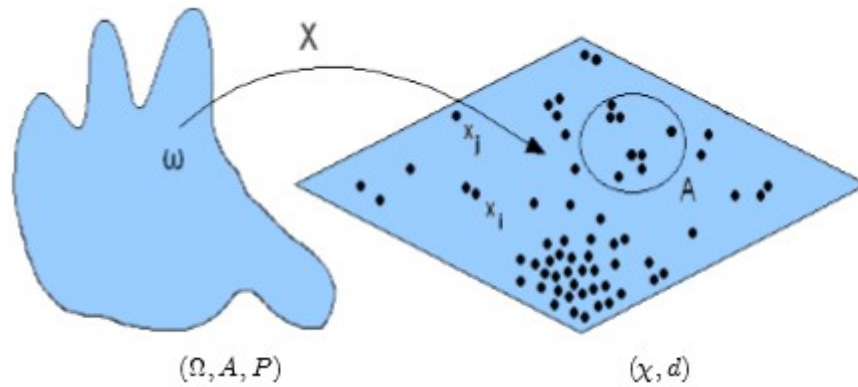


Figure 2.2 : Définition d'un processus ponctuel

Nous pouvons aussi définir un processus ponctuel comme une variable aléatoire à valeur dans l'espace mesurable de configurations localement fini  $(E^{lf}, N^{lf})$ , où  $N^{lf}$  est la plus petite tribu qui rend pour tout borélien  $A$  l'application  $X \rightarrow N_X(A)$  mesurable.

#### Définition 2.4

On appelle loi du processus ponctuel la mesure de probabilité  $\pi$  induite sur  $N^{lf}$ .

La loi d'un processus ponctuel  $X$  devrait être la mesure image par l'application  $X$  de  $P$  sur  $N^{lf}$ . Mais comme  $N^{lf}$  est définie par la mesurabilité des applications  $x \rightarrow N_x(A)$  pour des boréliens  $A \subseteq \chi$ , l'analogie de la loi de probabilité pour des variables aléatoires dans un contexte de processus ponctuels est l'ensemble de lois jointes des vecteurs  $(N(A_1), \dots, N(A_m))$  où les  $A_i$  sont des boréliens bornés.

#### Définition 2.5

La famille de lois en dimension finie appelée fidis d'un processus ponctuel  $X$  sur un espace métrique  $(\chi, d)$  complet et séparable, est la collection des lois jointes de  $(N(A_1), \dots, N(A_m))$  pour tout vecteur fini  $(A_1, \dots, A_m)$  de boréliens bornés  $A_i \subseteq \chi$ , ( $i = 1, \dots, m$ ) de longueur quelconque  $m \in \mathbb{N}$ .

L'intérêt de cette définition est justifié par le théorème suivant [45].

**Théorème 2.1 :** La loi d'un processus ponctuel  $X$  sur un espace métrique complet et séparable  $(\chi, d)$  est entièrement déterminée par ses fidis.

Ce théorème implique que si deux processus ponctuels ont les mêmes fidis, alors ils suivent la même loi.

**Exemple 1** [45]

Le premier exemple qui peut nous venir à l'esprit, est celui d'un processus ponctuel qui envoie de manière uniforme un point dans un segment :  $\chi = [0, a]$  et  $X = \{U\}$  où  $U: \begin{matrix} \Omega & \rightarrow & [0, a] \\ \omega & \rightarrow & u \end{matrix}$ , suit une loi uniforme. Dans ce cas :  $N(A) = 1$ .

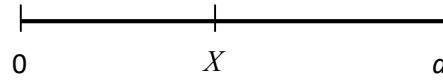


Figure 2.3 : Exemple d'un processus ponctuel

**2.2.1. Processus ponctuels simples**

La répartition des épïcètres peut présenter des points multiples dans le sens où deux épïcètres ou plus peuvent être situés exactement au même endroit. Nous parlons alors, au sein de la configuration, de points multiples. Mais dans la plupart des exemples pratiques, une configuration de points ne peut avoir deux points ou plus au même endroit souvent parce que c'est physiquement impossible. Par exemple, il ne peut y avoir deux cellules distinctes ayant leurs centres confondus. Nous parlons alors, au sein de la configuration, de points simples.

Plus précisément, notons  $N_s^{lf}$  l'ensemble de configurations  $x$  localement finies dont les points sont simples :  $N_x(\{x\}) \in \{0,1\}$  pour tout  $x \in \chi$ . Cet ensemble est  $N^{lf}$  – mesurable car  $\chi$  étant séparable, il existe une suite dense  $(x_i)$  de sorte qu'on puisse recouvrir  $\chi$  par une union dénombrable de boules ouvertes  $B(x_i, 2^{-j})$  de rayons arbitrairement petits, et écrire  $N_s^{lf}$  sous la forme  $\bigcup_{i \geq 0} \{\omega \in \Omega : N(B(x_i, 2^{-j})) \in \{0,1\}\} \in N^{lf}$  [45].

**Définition 2.6**

Un processus ponctuel est dit simple s'il prend ses valeurs dans  $N_s^{lf}$  presque sûrement.

Les processus ponctuels simples ont un avantage pratique. Ils ne nécessitent pas de connaître une famille entière de fidis pour disposer de leur loi. En effet, il suffit seulement de connaître les probabilités de vide  $v(A) = P(N(A) = 0)$  pour une collection suffisamment grande de borélien  $A$  de  $\chi$ . Pour plus de détails, voir [46].

### **Théorème 2.2.**

La loi d'un processus simple  $X$  sur un espace séparable complet  $(\mathcal{X}, d)$  est uniquement déterminée par les probabilités de vide  $\nu$  pour l'ensemble des boréliens bornés  $A \subseteq \mathcal{X}$ . On peut aussi remplacer borélien par compact.

Pour plus de détails, voir également [46].

**Exemple 2 :** Le processus ponctuel vu en exemple 1 est un processus simple, il n'y a qu'un seul point. Sa probabilité de vide vaut par ailleurs :

$$\nu(A) = P(U \in \mathcal{X} \setminus A) = \frac{\mu(\mathcal{X} \setminus A)}{\mu(\mathcal{X})}$$

Où,  $\mu$  est une mesure de comptage.

Tous les modèles que nous étudierons sont presque sûrement simples.

#### **2.2.2. Processus ponctuels finis**

En plus d'être souvent simples, la plupart des configurations sont aussi finies. Cette finitude provient généralement de l'aspect borné de la fenêtre d'observation mais peut aussi provenir du fait que le processus génère simplement un nombre fini de points [45].

#### **Définition 2.7**

On appelle processus ponctuel fini, un processus dont les configurations sont finies. Les processus ponctuels finis se modélisent bien par la donnée de

- Une loi de probabilité discrète  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , qui régit le nombre de points.
- Une famille de densité de probabilité  $j_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , symétriques en ses variables, qui régit la position des points sur  $\mathcal{X}^n$ .

Nous supposons ici que  $\mathcal{X}$  est muni d'une mesure borélienne  $\nu(\cdot)$  de sorte que les densités  $j_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$  soient définies par rapport à la mesure produit  $\nu(\cdot)^n$ . Par ailleurs, l'aspect symétrique requis pour  $j_n$  provient du fait que les points générés par le processus ponctuels sont indifférents à l'ordre dans lequel on les indice. La densité  $j_n$  doit donc être la même quelque soit la manière d'indicer les points de la configuration. Pour plus de détails, voir [46].

### **2.3. Processus ponctuels de référence**

Dans cette partie,  $\chi$  désigne un compact de  $\mathbb{R}^p$  de volume  $\mu(\chi) > 0$ .

#### **2.3.1. Processus Binomial**

On appelle processus ponctuel binomial un processus ponctuel simple  $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  constitué d'une union de  $n$  (fixé) points indépendants, répartis uniformément,  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

Comme  $P(N(\chi) = n) = 1$ , nous avons, en particulier  $p_m = \delta_n^m$  et  $j_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{\mu(\chi)}\right)^n$  (Puisque les points  $X_i$  sont uniformément distribués).

Ce processus tire son nom du fait que pour tout borélien  $A \subseteq \chi$ , nous avons  $N(A) = \sum_{i=1}^n 1_{\{X_i \in A\}}$ , suit une loi binomiale  $B\left(n, \frac{\mu(A)}{\mu(\chi)}\right)$  que nous notons dans la suite  $P^{(n)}(\cdot)$ . En effet,  $N(A)$  compte le nombre de manières possibles de mettre  $n$  points dans  $A$  avec la probabilité  $\frac{\mu(A)}{\mu(\chi)}$ .

#### **2.3.2. Processus ponctuels de Poisson**

Ces processus ponctuels sont sans doute les plus connus et les plus faciles à mettre en œuvre. Ces processus ont la particularité de très bien représenter l'aléatoire spatial, notion que l'on précisera ensuite mais qui peut déjà bien s'envisager lorsqu'on pense par exemple aux points formés par les gouttes de pluie sur le macadam. D'un point de vue pratique, lorsqu'on dispose d'une configuration de points, on teste d'abord son caractère aléatoire afin de voir si les points sont disposés selon une certaine logique (dépendance, différence de concentration, ...etc.) ou non. Il existe plusieurs manières de présenter le processus de Poisson. Dans ce qui suit, nous présentons une suite de résultats qui amène intuitivement à une définition rigoureuse du processus ponctuel de Poisson, à partir des processus binomiaux. Avant d'aborder le processus de Poisson général, nous définissons d'abord certains cas particuliers de processus de Poisson : les processus de Poisson homogènes et inhomogènes [47].

##### **2.3.2.1. Processus de poisson homogène**

Le processus ponctuel de Poisson homogène présenté ici n'est qu'une généralisation du célèbre processus ponctuel de Poisson à une dimension. Soit  $B_n \subset \mathbb{R}^p$

une boule centrée à l'origine, avec un rayon tel que son volume  $\mu(B_n)$  soit égale à  $\frac{n}{\lambda}$ , où  $\lambda$  désigne un réel strictement positif et  $P^{(n)}$  la loi d'un processus binomial à  $n$  points dans  $B_n$ . Soit  $A$  un borélien borné de  $\chi$  et  $m \in \mathbb{N}$ . Comme  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite croissante pour l'inclusion, dont l'union recouvre l'espace  $\chi$  tout entier, on peut trouver un entier  $n_0 \geq m$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ , la boule  $B_n$  contient  $A$ . On a alors [45]:

$$\begin{aligned} P^{(n)}(N(A) = m) &= P^{(n)}(N(A) = m, N(B_n \setminus A) = n - m) \\ &= C_m^n \left( \frac{\mu(A)}{\mu(B_n)} \right)^m \left( 1 - \frac{\mu(A)}{\mu(B_n)} \right)^{n-m} \\ &= C_m^n \left( \frac{\mu(A)}{\mu(B_n)} \right)^m \left( \frac{\mu(B_n \setminus A)}{\mu(B_n)} \right)^{n-m} \end{aligned}$$

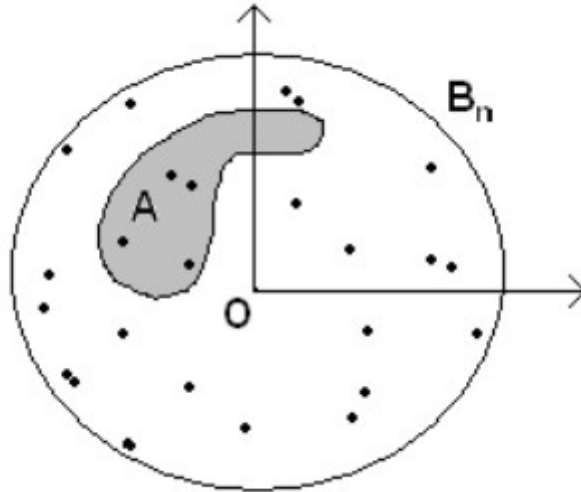


Figure 2.4.  $B_n \subset \mathbb{R}^p$  une boule centrée à l'origine

Or, nous savons que pour une loi binomiale quelconque  $B(n, p)$ , nous avons :

$$\begin{aligned} B(n, p) &\rightarrow \mathcal{P}(\lambda) \\ n &\rightarrow \infty \\ np &\rightarrow \lambda \end{aligned}$$

Où  $\mathcal{P}(\lambda)$  désigne la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ .

Dans notre cas, étant donnée que  $n \frac{\mu(A)}{\mu(B_n)} = n \frac{\lambda \mu(A)}{n} = \lambda \mu(A)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , nous avons :

$$\begin{aligned} B\left(n, \frac{\mu(A)}{\mu(B_n)}\right) &\rightarrow \mathcal{P}(\lambda \mu(A)) \\ n &\rightarrow \infty \end{aligned}$$

Si nous choisissons des boréliens bornés disjoints  $A$  et  $B$  inclus dans  $\chi$ , nous pouvons de la même façon trouver un entier  $n_0$  de sorte que  $A \cup B$  soit contenu dans n'importe quelle boule  $B_n$  où  $n \geq n_0$ .

Soient  $m$  et  $l$  deux entiers naturel et  $n \geq \max(n_0, m + l)$ . Nous procédons de manière analogue et nous obtenons :

$$\begin{aligned} P^{(n)}(N(A) = m, N(B) = l) &= P^{(n)}(N(A) = m, N(B) = l, N(B_n \setminus A \cup B) = n - m - l) \\ &= C_n^m \left( \frac{\mu(A)}{\mu(B_n)} \right)^m C_{n-m}^l \left( \frac{\mu(B)}{\mu(B_n)} \right)^l \left( \frac{\mu(B_n \setminus A \cup B)}{\mu(B_n)} \right)^{n-m-l} \end{aligned}$$

Lorsque  $n \rightarrow \infty$ , on obtient :

$$\frac{(\lambda\mu(A))^m}{m!} e^{-\lambda(A)} e^{\lambda\mu(A)} e^{-\lambda(A)} \frac{(\lambda\mu(B))^l}{l!} e^{-\lambda(B)} e^{\lambda\mu(B)} e^{-\lambda(A \cup B)}$$

Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}(N(A) = m, N(B) = l) &= \frac{(\lambda\mu(A))^m}{m!} e^{-\lambda(A)} \frac{(\lambda\mu(B))^l}{l!} e^{-\lambda(B)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}(N(A) = m) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}(N(B) = l) \end{aligned}$$

Par conséquent, lorsque  $A$  et  $B$  sont disjoints, les variables aléatoires  $N(A)$  et  $N(B)$  sont lorsque  $n \rightarrow \infty$  indépendantes et suivent par ailleurs une loi de Poisson.

Ces résultats suggèrent donc la définition suivante :

### Définition 2.8

Un processus ponctuel  $X$  sur  $\chi(\subset \mathbb{R}^k)$  est appelé un processus ponctuel de poisson homogène d'intensité  $\lambda > 0$  si :

- Pour  $(A_1, \dots, A_m)$  boréliens disjoints sur  $\chi$ , les variables aléatoires  $N(A_1), \dots, N(A_m)$  sont indépendantes.
- Le nombre de points dans la configuration  $\chi$  noté  $N_X(A)$  suit une loi de poisson de paramètre  $\lambda\mu(A)$ .

### 2.3.2.2. Processus de poisson inhomogène

Le coefficient  $\lambda$  peut être interprété comme une densité si l'on décide de rendre ce coefficient variable  $\lambda = \lambda(x)$ ,  $x \in \chi$ . L'intensité devient variable selon l'endroit que l'on considère dans  $\chi$ . Donnons une définition pour préciser cette abstraction :

#### **Définition 2.9**

Un processus ponctuel  $X$  sur  $\chi$  est appelé un processus ponctuel de poisson inhomogène, s'il vérifie :

- Pour  $(A_1, \dots, A_m)$  boréliens disjoints sur  $\chi$ , les variables aléatoires  $N(A_1), \dots, N(A_m)$  sont indépendantes.
- $\forall A$  borélien borné,  $N_X(A)$  suit une loi de poisson de paramètre  $\nu(A)$ . Où  $\nu(A) = \int_A \lambda d\mu$  et  $\lambda$  une fonction positive, Lebesgue mesurable sur  $\chi$ .

La fonction  $\lambda$  peut donc être vue comme la dérivée de Radon Nikodym de  $\nu$  par rapport à la mesure de Lebesgue  $\mu$ .

### 2.3.2.3. Processus ponctuel de poisson

Nous pouvons continuer la généralisation précédente en considérant des paramètres  $\nu$  sans densité. Donnons la définition d'un processus ponctuel de Poisson

#### **Définition 2.10**

Soit  $\nu(\cdot)$  une mesure de Borel sur  $(\chi, d)$  espace métrique complet séparable, vérifiant  $\nu(\chi) > 0$  et  $\nu(A) < \infty$  pour tout borélien  $A$  bornée de  $\chi$ . Une telle mesure dite localement finie. Un processus ponctuel sur  $\chi$  est un processus de poisson de mesure intensité  $\nu$  si :

- Le nombre de points dans la configuration  $\chi$  noté  $N_X(A)$  suit une loi de poisson d'espérance  $\nu(A)$  pour des boréliens  $A \subseteq \chi$ .
- Pour  $(A_1, \dots, A_m)$  boréliens bornés disjoints sur  $\chi$ , les variables aléatoires  $N(A_1), \dots, N(A_m)$  sont indépendantes.

Lorsque  $\chi = \mathbb{R}^k$ , on parle de processus de Poisson homogène lorsque la mesure d'intensité est  $\lambda\mu(\cdot)$  où  $\mu$  est la mesure de Lebesgue et  $\lambda$  un paramètre strictement positif. On appelle alors ce paramètre l'intensité du processus.



La première condition dans la définition précédente peut être interprétée comme une propriété de non-corrélation spatiale totale, puisqu'elle affirme que ce qui se passe à l'intérieur d'une fenêtre quelconque est totalement indépendant de ce qui se passe à l'extérieur. Le théorème suivant précise cette idée, en affirmant que les points d'un processus ponctuel de Poisson se comportent aléatoirement et n'interagissent pas les uns avec les autres [46].

### Théorème 2.3

Soit  $X$  un processus de Poisson ponctuel sur un espace métrique séparable complet  $(\chi, d)$  de mesure d'intensité  $\nu(\cdot)$  et  $A$  un borélien bornée sur  $\chi$ . Alors, conditionnellement à l'événement  $\{N(A) = n\}$ ,  $X$  restreint à  $A$  suit une loi binomial dont les points sont indépendants et disposés de manière  $\nu$ -uniforme.

Nous pouvons justifier le résultat de ce dernier théorème, en considérant un borélien  $B$  inclus dans  $A$ . La probabilité de vide de  $B$  conditionnellement à l'événement  $\{N(A) = n\}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \nu(B \setminus N(A) = n) &= P(N(B) = 0 \setminus N(A) = n) = \frac{P(N(B) = 0, N(A) = n)}{P(N(A) = n)} \\ &= \frac{P(N(B) = 0, N(A) - N(B) = n - 0)}{P(N(A) = n)} \\ &= \frac{P(N(B) = 0, N(A \setminus B) = n)}{P(N(A) = n)} \end{aligned}$$

$X$  étant un processus ponctuel de Poisson,  $N(B)$  et  $N(A \setminus B)$  sont indépendants et suivent la loi de Poisson. Nous obtenons donc :

$$\nu(B \setminus N(A) = n) = \left( \frac{\nu(A \setminus B)}{\nu(A)} \right)^n$$

Qui coïncide avec la probabilité de vide  $\nu(B)$  de  $n$  processus ponctuels indépendant et  $\nu$ -uniforme.  $B$  étant choisi de manière arbitraire, en utilisant le théorème 2.2, on déduit le résultat.

Signalons que les processus de Poisson ne constituent pas un modèle capable de modéliser la répartition des objets dans une image par exemple. Mais leur simplicité leur permet d'être utilisés comme référence pour des modèles plus complexes. Les connaissances sur

les objets et la configuration des objets peuvent être incorporées dans une densité de probabilité définie par rapport à un processus ponctuel de référence.

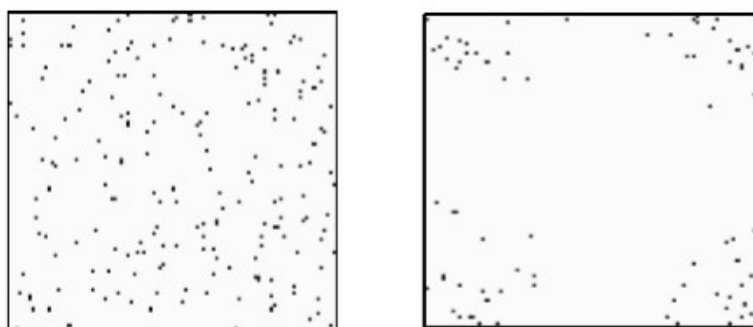


Figure 2.5 : A gauche un processus homogène de poisson pour une intensité 0,02 et à droite un processus de poisson non homogène

### 2.3.3. Processus de Cox

Considérons un processus ponctuel  $X$  sur l'espace mesuré  $(\mathcal{X}, \nu)$  dont la mesure intensité  $\mu$  est stochastique. Si  $X$ , conditionnellement à  $\mu$ , est un processus ponctuel inhomogène de Poisson, alors  $X$  est appelé processus de Cox ou processus de Poisson doublement stochastique. Ainsi les processus de Cox temporels sont des processus sans mémoire car d'intensité stochastique ne faisant pas référence au passé.

### 2.3.4. Processus de Hawkes

En introduisant ce processus auto-excitatif, Hawkes [48] souligne la représentation linéaire auquel le terme auto-excitatif se réfère. Il peut être également introduit par le biais de processus de groupe. Considérons un processus de Poisson stationnaire d'intensité  $\lambda$  pour les centres de groupe. Supposons que les groupes forment des réalisations indépendantes d'un processus de branchement fini (figure 1.2); un parent génère une progéniture selon le processus de Poisson d'intensité inférieure à 1. Le processus auto-excitatif est ainsi défini par la génération des groupes

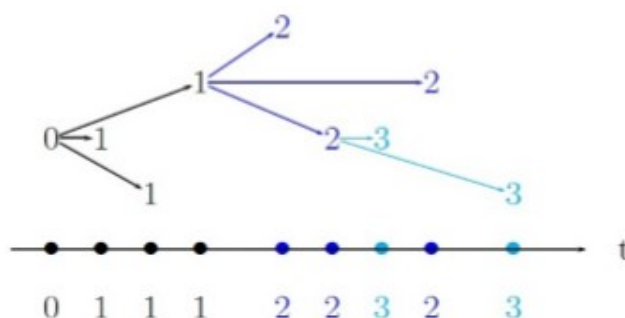


Figure 2.6 : Illustration du processus de branchement

## 2.4. Processus ponctuels marqués

Pour décrire des objets au lieu de points, il est simplement nécessaire d'ajouter à chaque point une marque qui décrit une ou des propriétés de l'objet. Ces processus ont été décrits par Daley dans la référence [4].

### **Définition 2.11**

Un processus ponctuel marqué est une séquence aléatoire  $X = \{x_n, m_n\}$  formé d'un processus de points  $x_n$  défini sur  $(\chi, d)$  et des marques  $m_n$  correspondantes à chaque  $x_n$  dans un espace des marques  $M=(K, d')$ .

Si nous cherchons à simplifier la définition, nous pouvons considérer le processus objet  $X$  avec les points dans  $\chi$  et les marques dans  $M$  comme un simple processus ponctuel sur l'espace produit  $\chi \times K$ . Pourtant, en pratique, il est souvent plus intéressant de séparer les points et les marques, pour pouvoir définir plus simplement des translations dans l'espace des points tout en laissant inchangées les marques attachées à chaque objet ou au contraire, pourvoir la possibilité de changer la forme de l'objet sans nécessairement le déplacer.

### **Exemple 3**

Dans les cas où l'espace des marques  $K$  est fini, on peut prendre, par exemple :  $K = \{1, \dots, M\}$ , on munit  $K$  par la distance  $d'(m, l) = |m - l|$ . Alors, tout processus ponctuel  $Y$  sur l'espace produit  $\chi \times K$  fait apparaître un processus ponctuel non marqué  $X$  bien défini. En effet, considérons un borélien  $A \subseteq \chi$ . Le nombre de points marqués dans  $A$  peut être écrit :

$$N_X(A) = \sum_1^M N_Y(A \times \{i\})$$

Où,  $N_Y(A \times \{i\})$  désigne le nombre de points dans  $A$  ayant la marque  $i \in \{1, \dots, M\}$ . Par définition, chaque  $N_Y(A \times \{i\})$  est une variable aléatoire finie, si bien que  $N_X(A)$  est aussi une variable aléatoire finie.

### **Exemple 4**

Sur la figure 2.6, nous pouvons voir un exemple de processus marqué, processus ponctuel selon les marques  $K = \mathbb{R}$ , représenté par l'intermédiaire des différents plans, et processus ponctuel selon les points spatiaux de  $\chi = \mathbb{R}^2$ , représenté par les points sur chaque plan associé à une marque. Le processus non marqué résultant est obtenu par la projection

des points spatiaux de chaque marque sur un plan de référence (plan défini par  $\chi \times \{0\}$  ici). Afin de ne pas alourdir le schéma, les projections des différents points marqués ne sont pas toutes explicitées [45].

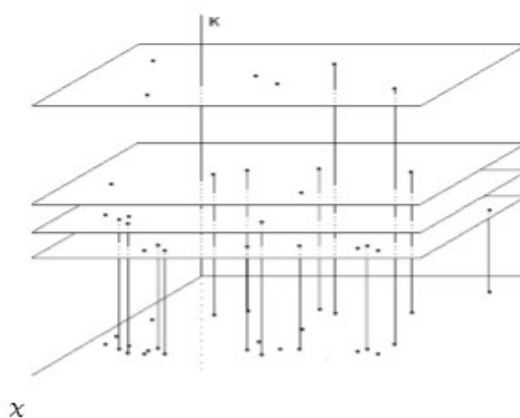


Figure 2.6 : Exemple d'un processus ponctuel marqué

## 2.5. Processus ponctuels de Markov

Une classe intéressante de processus ponctuels est celle des processus ponctuels de Markov. Ils regroupent les processus ponctuels finis définis par une densité pouvant s'écrire sous forme énergétique comme une somme de potentiels d'interactions. Ce sont les plus utilisés en traitement des images puisqu'ils permettent de modéliser les interactions entre les objets du processus, et qu'ils sont facilement programmables. Cette notion de processus ponctuel de Markov a été introduite par Ripley et Kelly [49]. Sa généralisation à la propriété de Markov aux plus proches voisins est due à Baddeley et Moller [50].

### 2.5.1. Propriété de Markov au sens de Ripley-Kelly

On est maintenant en mesure de définir le processus ponctuel de Markov. Définissons d'abord la notion de voisinage suivante:

#### **Définition 2.12**

Soit  $\sim$  une relation binaire symétrique et réflexive sur  $\chi$ . Deux points  $u$  et  $v$  sont voisins si  $u \sim v$ . Le voisinage de  $A \subset \chi$  est donné par:

$$\partial(A) = \{u \in \chi \text{ et } u \notin A : \exists v \in A \text{ tel que } v \sim u\}$$

Nous notons  $\partial\{u\} = \partial u$  pour  $u \in \chi$ . La propriété de Markov au sens de Ripley-Kelly est la suivante :

### Définition 2.13

Soit  $X$  un processus ponctuel de densité  $f$  par rapport à un processus ponctuel de Poisson de loi  $\pi_\nu(\cdot)$  et d'intensité  $\nu(\cdot)$ . Le processus  $X$  est markovien pour la relation  $\sim$  si, pour toute configuration  $x \in N^f$ , on a :

(a).  $f(x) > 0$  implique  $f(y) > 0$  pour tout  $y \subset x$  (On dit que  $f(\cdot)$  est héréditaire).

(b). Si  $f(x) > 0$ , alors :  $\lambda(u, x) = \frac{f((x \cup \{u\})}{f(x)}$  ne dépend que de  $u$  et de  $\partial u \cap x$ . Où

$$\partial u \cap x = \{v \in x : v \sim u\}.$$

La condition (a) traduit que si une configuration peut se produire, alors toutes les sous configurations qu'elle contient peuvent se produire aussi. Le quotient  $\lambda(u, x)$  dans la condition (b) appelé l'intensité conditionnelle de Papangelou [43], est la densité de probabilité qu'il ait un point  $u$  sachant que  $x$  est réalisé ailleurs. Cette condition exprime une propriété de Markov locale : le comportement d'un point  $u$  par rapport à la configuration entière ne dépend que des ses proches voisins dans cette configuration.

### Exemple 5

Le processus ponctuel de poisson  $X$  d'intensité  $\lambda$  est markovien. En effet, sa densité qui s'écrit pour toute configuration  $x$  :  $f(x) = \frac{(\lambda \mu(x))^k}{k!} e^{-\lambda \mu(x)}$  est toujours strictement positive. Par ailleurs la densité conditionnelle de Papangelou :  $\lambda(\xi, x) = \frac{f((x \cup \{\xi\})}{f(x)} = \lambda \cdot 1_{\{\xi \notin x\}}$ . Par conséquent  $X$  est markovien pour toute relation de voisinage sur  $\chi$ .

Nous appelons une clique, une configuration dont tous les points sont voisins les uns des autres par rapport à une relation symétrique et réflexive notée  $\sim$ . L'ordre d'une clique est le nombre d'objets qu'elle contient. Le théorème suivant, équivalent de celui d'Hammersley-Clifford [46, 49] pour les processus ponctuels, permet d'exprimer la densité d'un processus de Markov sous une forme énergétique décomposée sur les cliques de la configuration  $x$  :

**Théorème 2.4** (Hammersley - Clifford). Une densité de processus ponctuel  $f : E^f \rightarrow [0, \infty[$  est markovienne sous une relation de voisinage  $\sim$  si et seulement si il existe une fonction mesurable  $\varphi : N^f \rightarrow [0, +\infty[$  telle que :

$$f(x) = \alpha \prod_{\text{cliques } y \subseteq x} \phi(y)$$

pour tout  $x \in E^f$ .  $\phi(y)$  sont les potentiels d'interaction. Ce résultat permet de construire facilement des modèles markoviens, par exemple à interaction de paires :

$$f(x) = \alpha \prod_i \beta(x_i) \prod_{x_i \sim x_j, i < j} \gamma(x_i, x_j)$$

Où,  $\alpha$  est une constante de normalisation qui fait de  $f$  une densité.

### **2.5.2. Propriété de Markov pour un processus ponctuel marqué**

La définition de la propriété de Markov tout comme le théorème de Hammersley-Clifford restent inchangés si  $Y = (X, M)$  est un processus ponctuel marqué sur  $E^{lf} \times K$  pour  $\sim$ , une relation de voisinage symétrique sur  $E^{lf} \times K$ . Par exemple si  $(X, M)$  est à marques indépendantes et si  $X$  est markovien pour une relation de voisinage  $\sim$  sur  $E^{lf}$ ,  $(X, M)$  est un processus ponctuel marqué markovien pour la relation  $(x, m) \sim (y, o) \Leftrightarrow x \sim y$  sur  $E^{lf}$ . Un exemple [44] de modèle isotrope à interaction de paires et à nombre fini de marques  $M = \{1, 2, \dots, K\}$  est donné par la densité en  $y = \{(x_i, m_i)\}$ :

$$f(y) = \alpha \prod_i \beta_{m_i} \prod_{x_i \sim x_j, i < j} \gamma_{m_i, m_j}(\|x_i - x_j\|)$$

Si, l'interaction  $\gamma_{kl}(d) \equiv 1$  pour  $d > r_{kl}$ , où les réels  $r_{kl} > 0$ ,  $k, l \in K$ ,  $k \neq l$ , sont fixés. Les deux conditions de la définition 2.13 sont vérifiées pour la relation de voisinage  $\sim$ :

$$(x, m) \sim (x', m') \Leftrightarrow \|x - x'\| \leq r_{m, m'}$$

Donc,  $Y$  est un processus ponctuel Markovien.

### **2.6. Simulation des processus ponctuels**

La simulation d'une loi de probabilité ou d'une variable aléatoire est un outil numérique utile chaque fois que l'on ne dispose pas d'une solution analytique à un problème donné, qu'il soit combinatoire ou analytique. L'étude de modèles statistiques complexes a contribué à développer des algorithmes de simulation fiables et efficaces. En particulier la simulation MCMC (Monte Carlo Markov Chain) par l'algorithme de Metropolis-Hastings.

#### **2.6.1. Chaînes de Markov**

On appelle chaîne de Markov à temps discret toute suite de variables aléatoires  $(X_N)_{N \in \mathbb{N}}$  à valeurs dans, telle que, pour tout entier  $k \in \mathbb{N}$  et  $A \in \mathcal{A}$ , la suite respectant la propriété markovienne suivante :

$$P(X_{N+1} \in A | X_0, X_1, \dots, X_N) = P(X_{N+1} \in A | X_N), \forall A \in \mathcal{A}$$

Autrement dit, la valeur d'une variable aléatoire de cette suite ne dépend que de celle qui la précède. Nous nous intéresserons ici aux chaînes dites homogènes, c'est-à-dire aux chaînes dont son évolution ne dépend pas de la position dans la chaîne, mais seulement de l'état actuel :

$$P(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_k} / X_{t_0}) = P(X_{t_1-t_0}, X_{t_2-t_0}, \dots, X_{t_k-t_0} / X_0)$$

D'un point de vue informatique, une telle chaîne présente bien entendu l'avantage de rendre inutile le rappel de l'ensemble des configurations antérieures puisqu'elle utilise uniquement l'état actuel pour générer une nouvelle configuration. La génération de la nouvelle configuration réclame la définition d'un noyau de transition. Un noyau de transition est une fonction  $P : \mathcal{X} \times \mathcal{A} \rightarrow [0,1]$ , tel que :

- pour tout  $A \in \mathcal{A}$ ,  $P(\cdot, A)$  est mesurable.
- pour tout  $X \in \mathcal{X}$ , la fonction  $P(X, \cdot)$  est une mesure de probabilité.

Ainsi, une chaîne de Markov homogène est complètement définie par la valeur ou la distribution de  $X_0$  et son noyau de transition  $P$ .

Nous pouvons simuler une densité  $\pi$  de façon approchée en utilisant une chaîne de Markov chaque fois qu'on sait construire une transition  $P$  telle que, pour toute loi initiale  $X_0 = \nu$ ,  $\nu P^k \rightarrow \pi$ . Avant de présenter les différents résultats théoriques et algorithmes de simulation, rappelons quelques définitions préliminaires sur les chaînes de Markov.

- **Invariance :**

une loi  $\pi$  est invariante pour la chaîne de Markov si :

$$\pi = \pi P$$

Cette condition est nécessaire pour obtenir la convergence de la chaîne vers  $\pi$ .

- **Réversibilité**

La chaîne est réversible pour  $\pi$  si le noyau de transition  $P$  vérifie :

$$\forall A, B \in \mathcal{A}: \int P(x, A) \pi(dx) = \int P(x, B) \pi(dx)$$

Cette condition implique l'invariance pour  $\pi$ , et signifie que sous la distribution stationnaire  $\pi$  la probabilité de passer de  $A$  à  $B$  est la même que de passer de  $B$  à  $A$ . La plupart des algorithmes de simulation sont en réalité construits pour produire des chaînes de Markov réversibles.

- **Irréductible**

La chaîne est dite  $\pi$ -irréductible si :

$$\forall x \in \Omega \text{ et } \forall A \in \mathcal{A} \text{ t. q. } \pi(A) > 0, \quad \exists t / P^t(x, A) > 0$$

Cela signifie que la chaîne a une probabilité non nulle d'atteindre en temps fini tout ensemble  $\pi$ -probable. Cette condition est clairement nécessaire pour que la chaîne converge en distribution vers  $\pi$  avec n'importe quelle condition initiale. Dans le cadre de ce projet, nous verrons uniquement des chaînes irréductibles, c'est-à-dire des chaînes ne possédant qu'une seule classe d'états.

- **A périodicité**

A périodicité assure que les déplacements entre états n'ont pas trop de contraintes. Formellement, la chaîne est apériodique s'il n'existe de partition disjointe  $A = \bigcup_{i=0}^k A_i$  pour  $r \geq 2$  tel que :

$$P(x, A_i) = 1, \forall x \in A_i$$

Il existe un lien entre l'irréductibilité et l'apériodicité, dans la mesure où si une chaîne de Markov est irréductible, et s'il existe un état  $X_k$  tel que la densité  $P(X_k, X_k) > 0$ , la chaîne de Markov est fortement apériodique. Donc tous les processus pour lesquels il est possible de rester dans un état sont fortement apériodiques (c'est le cas des algorithmes de type Metropolis-Hasting que nous étudierons plus loin).

- Une chaîne  $\pi$ -irréductible et  $\pi$ -invariante est récurrente positive si,  $\forall A \in \mathcal{A}$  t.q.  $\pi(A) > 0$ , elle vérifie :

$$\forall x, P_x\{X \in A \text{ i. s.}\} > 0 \text{ et } P_x\{X \in A \text{ i. s.}\} = 1$$

(i.s : infiniment souvent)

- Sur un espace discret le noyau de transition  $P$  est primitif (régulier) si  $\exists k \geq 1$  tel que  $P^k$  a tous ses termes strictement positifs.

### 2.6.2. Convergence d'une chaîne de Markov

Avant de présenter les méthodes de simulation des chaînes MCMC, nous présentons les conditions nécessaires pour qu'une chaîne puisse converger et atteindre la distribution recherchée  $\pi$ . Si,  $P$  est  $\pi$ -irréductible,  $\pi$ -invariante, récurrente. Dans ce cas, la mesure invariante est unique et la chaîne est dite récurrente positive si la masse totale de cette mesure est finie. C'est le cas si  $\pi$  est une probabilité. On obtient les résultats d'ergodicité [51] :



**Proposition 2.1** Si,  $P$  est  $\pi$ -irréductible,  $P$  est  $\pi$ -invariante, alors  $P$  est récurrente positive et  $\pi$  est l'unique loi invariante de  $P$ . Si  $P$  est apériodique, alors  $x \in \chi$ , on a :

$$\|P^m(x, \cdot) - \pi\| \rightarrow 0 \text{ quand } m \rightarrow \infty$$

Le contrôle de la convergence vers 0 de  $\|P^m(x, \cdot) - \pi\| \rightarrow 0$  est une question centrale et très difficile. Ce contrôle permet en effet d'assurer que  $vP^m$  pour  $m$  assez grand réalise une simulation acceptable de  $\pi$ . Il existe de nombreux résultats théoriques. Certains utilisent des minoration de  $P$  sur un petit ensemble  $E$ . Le coefficient de contraction sur un espace d'états fini permet le contrôle de cette convergence [52].

- **Ergodicité géométrique, ergodicité uniforme**

L'ergodicité géométrique est caractérisée par :

$$\|P^m(x, \cdot) - \pi\| \leq M(x) l^m$$

Où  $M(x)$  est  $\pi$ -intégrable et  $l < 1$ . L'ergodicité est uniforme si on peut choisir pour  $M$  une constante finie.

- **Coefficient de contraction**

Dans un espace d'états fini, le coefficient de contraction pour un noyau de transition  $P$  est donné par [53] :

$$C(P) = \frac{1}{2} \max_{x, y \in E} \|P(x, \cdot) - P(y, \cdot)\|$$

**Lemme 1** [54]

Soient  $\nu$  et  $\mu$  deux distributions,  $P$  et  $Q$  deux noyaux de transition. Alors

$$\|\mu P - \nu P\| \leq \|\mu - \nu\| C(P) \text{ et } C(PQ) \leq C(P)C(Q)$$

En particulier,

$$\|\mu P - \nu P\| \leq \|\mu - \nu\| \text{ et } \|\mu P - \nu P\| \leq 2C(P)$$

Et si  $P$  est primitif alors  $C(P) < 1$ .

D'après ce de dernier résultat, si nous prenons  $\mu = \pi$ , la loi invariante de  $P$ , on en déduit :

$$\|vP^m - \pi P^m\| = \|vP^m - \pi\| \leq 2C(P^m) \leq 2C(P)^m$$

Dans ce cas, quand  $m \rightarrow \infty$  la chaîne est uniformément ergodique si  $P$  est primitif.

Signalons à la fin de cette section, que ces dernières conditions, délicates à obtenir en général, sont satisfaites pour les deux principales familles de simulateurs : l'algorithme de Metropolis-Hastings et l'algorithme de Gibbs, l'objectif de la section suivante.

## **2.7. Les principaux algorithmes MCMC**

Les méthodes de Monte-Carlo par chaînes de Markov (MCMC), permettent de simuler une distribution en utilisant une chaîne de Markov ergodique ayant celle-ci comme distribution stationnaire. Pour construire un tel algorithme, il faut donc déterminer un ensemble de probabilités de transition  $P$  approprié, c'est-à-dire irréductible, ergodique et ayant la bonne distribution stationnaire.

### **Définition 2.14**

Nous appellerons MCMC toute méthode permettant de simuler une distribution en utilisant une chaîne de Markov ergodique  $(X_N)_{N \in \mathbb{N}}$  ayant celle-ci comme distribution stationnaire

### **2.7.1. Algorithme de Metropolis-Hastings général**

L'algorithme Metropolis a été introduit par Metropolis, et al. en 1953 [55] et généralisé par Hastings en 1970 [8], il a été adapté pour le cas des processus spatiaux par Geyer et Moller 1994 [56]. L'idée de base de l'algorithme est de proposer un nouvel état par une petite perturbation de l'état actuel, puis de l'accepter ou le refuser. Le taux d'acceptation  $R(x, y)$ , représente la probabilité de transition de la chaîne d'un état actuel  $x$  vers l'état  $y$ . L'algorithme proposé par Geyer et Moller construit une chaîne de Markov qui peut explorer toutes les configurations de l'espace  $\chi$ . Les perturbations proposées sont la naissance et la mort (ajout ou suppression d'un élément de la configuration actuelle). En général, l'algorithme utilise une transition  $P$  qui est  $\pi$ -réversible et  $\pi$  invariante. La construction de  $P$  se fait en deux étapes :

- Transition de proposition de changement : on commence par proposer un changement  $x \rightarrow y$  avec une probabilité  $Q(x, dy)$ .

- Probabilité d'acceptation du changement : ensuite, on accepte ce changement avec la probabilité  $a(x, y)$  où  $a : \Omega \times \Omega \rightarrow ]0,1]$ . Si non on reste en  $x$ .

Les deux paramètres de l'algorithme sont  $Q$ , la transition de proposition de changement et  $a$  la probabilité d'accepter ce changement. Si  $\delta_x(dy)$  est la mesure de Dirac en  $x$  la transition  $P$  de MH s'écrit :

$$P(x, dy) = a(x, y)Q(x, dy) + \delta_x(dy) \int_{\Omega} 1 - a(x, z)Q(x, dz)dz$$

Ecrire que  $P$  est  $\pi$ -réversible impose une contrainte sur  $Q$  et la probabilité d'acceptation  $a$ . Notons que :  $\nu(dx, dy) = \mu(dx, dy) + \mu(dy, dx)$ , où  $\mu(dx, dy) = Q(x, dy)\pi(dx)$  et  $\mu$  admet une densité  $h(x, y)$  par rapport à  $\nu$ . Le ratio  $r$  de Metropolis-Hastings est défini par :

$$r(x, y) = \frac{h(x, y)}{h(y, x)} \text{ sur } R = \{(x, y) \mid h(x, y) > 0 \text{ et } h(y, x) > 0\}$$

La transition  $P$  est  $\pi$ -réversible si et seulement si la probabilité d'acceptation  $a$  vérifie [57]:

$$a(x, y)r(x, y) = a(y, x)$$

Si,  $Q$  et  $\pi$  sont respectivement à densité  $q$  et  $\pi$ , et si  $q(x, y) > 0$  équivaut  $q(y, x) > 0$ , alors la  $\pi$ -réversibilité de  $P$  s'écrit alors :

$$\forall x, y \in \Omega : \pi(x) \times q(x, y) \times a(x, y) = \pi(y) \times q(y, x) \times a(y, x)$$

Et, si  $Q$  est symétrique, l'algorithme est le suivant:

### Algorithme

- A partir d'un état  $x_0 = x$  un état initial, Choisir un état  $y$  selon  $Q(x, \cdot)$
- Choisir un noyau de proposition  $Q_m$  avec une probabilité  $p_m$ .
- Générer  $y \sim Q(x, \cdot)$
- Calculer le rapport d'acceptation  $a(x, y) = \frac{\pi(y)}{\pi(x)}$
- Accepter l'état  $y$  avec la probabilité  $a = \min(1, a)$
- Recommencer avec l'état actuel.

### **2.7.2. L'échantillonneur de Gibbs, cas particulier de MH**

L'échantillonneur Gibbs [58] est un cas spécial de l'algorithme Metropolis-Hastings. La différence entre les deux algorithmes est que l'échantillonneur Gibbs accepte tous les nouveaux états, mais ces états sont générés selon la densité vers laquelle on souhaite converger, contrairement à l'algorithme Metropolis qui génère les nouveaux états selon une densité auxiliaire uniforme sur l'ensemble des états. L'algorithme de Gibbs propose de choisir un site  $i$  au hasard, puis on modifie la valeur  $x_i$  de  $x$  en  $i$  en proposant  $y_i$  suivant une transition de densité  $q_i(x, y_i)$ . La probabilité d'acceptation pour la dynamique de Metropolis est alors donnée par :

$$a(x, y) = \min \left( 1, \frac{\pi(y) \times q_i(y, x_i)}{\pi(x) \times q_i(x, y_i)} \right)$$

### **2.8. Conclusion**

Les processus ponctuels sont les exemples les plus simples de la géométrie stochastique, mais on a souvent besoin de simuler des processus impliquant des objets plus complexes, d'où l'intérêt d'introduire la notion des processus ponctuels marqués. Ces derniers, peuvent modéliser sans trop de difficultés un grand nombre de situations courantes. Par ailleurs, les modélisations vues ici peuvent s'avérer particulièrement utiles pour faire des simulations et effectuer des pronostiques. En vue d'étudier un certain type de processus ponctuel et processus ponctuels marqué, les processus ponctuels markoviens qui permettent de prendre en compte l'environnement et les dépendances éventuelles entre les différents points des expériences. Pour cela, nous avons donné les définitions et les propositions qui vont permettre de modéliser et d'écrire plus précisément ces répartitions de points. Deux types de méthodes de simulation MCMC ont été étudiés pour la simulation des chaînes de Markov. La première est basée sur l'algorithme général de Metropolis-Hastings et la seconde est basée sur l'échantillonneur de Gibbs. Nous avons remarqué que l'utilisation de la méthode MCMC est exclusivement liée à l'étude de convergence de la chaîne de Markov générée par cette méthode, vers la densité ciblée.

## CHAPITRE 3

### NOUVEAUX PLANS D'EXPERIENCES NUMERIQUES A PARTIR DE PROCESSUS PONCTUELS MARQUÉS

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'utilisation des Processus Ponctuel Marqué (PPM) pour simuler les  $n$  expériences qui constituent les plans d'expériences proposés. Contrairement à l'approche qui utilise les processus ponctuels [5], les PPM vont nous permettre non seulement d'introduire des connaissances géométriques mais aussi des connaissances a priori sur les points. On peut alors considérer les processus marqués de Strauss [6] qui incluent la notion d'interaction entre paire de points. Pour générer de tels plans nous utiliserons les techniques de simulation par Chaîne de Markov (MCMC), et plus précisément l'algorithme de Métropolis-Hasting [7, 8].

Les points d'expériences de ces plans doivent être repartis au mieux dans le domaine expérimental pour détecter les éventuelles irrégularités. On cherche aussi un plan dont les points seraient le plus uniformément répartis dans l'hyper-cube unité. Nous présentons, une démonstration détaillée sur la convergence de la chaîne de Markov et nous fournissons également une comparaison entre notre approche et celle donnée par d'autres plans numériques existants. Cette comparaison a été réalisée en développant un programme dans le logiciel Matlab présenté en annexe dans ce manuscrit.

Tous les résultats présentés dans ce chapitre font l'objet des études réalisées dans [59,60].

#### **3.1. Plan d'expériences numériques par processus ponctuels markoviens marqués de Strauss**

L'idée principale est de considérer chaque expérience  $x_i$  comme un point ou particule défini sur  $[0,1]^k$  et chaque configuration  $x$  comme une matrice d'expériences où chaque point de cette configuration, sera caractérisé par une marque  $m_i$  définie sur l'espace de marques  $M$ . Le point avec sa marque forment un objet définie par  $(x_i, m_i)$ . On assimile ainsi les  $n$  objets (plan d'expériences) à la réalisation d'un processus ponctuel marqué  $X$ . Les processus de Strauss incorporent des potentiels d'interactions. Ces

interactions sont assimilées à des propriétés de voisinage telles que définies par un champ de Markov au sens de Ripley-Kelly) [49]. Le potentiel d'interaction le plus utilisé est l'interaction entre paires d'objets. Ces processus objets sont importants pour la modélisation des phénomènes répulsifs. La densité de probabilité d'un processus ponctuel marqué de Strauss pour une configuration  $x$  de points est donnée par :

$$\pi(x) = \alpha \beta^{n(x)} \gamma^{s(x)} \quad (3.1)$$

Avec,

- $\alpha$  est la constante de normalisation,
- $0 < \gamma < 1$  est un coefficient d'interaction,
- $\beta > 0$  est la densité du processus,
- $s(x) = \sum_{i < j} 1_{\{x_i \sim x_j\}}$  le nombre de paires de voisins par rapport à la relation  $\sim$ . Il s'agit simplement du nombre de paires d'expériences  $(x_i, x_j)$  telles que la distance entre  $x_i$  et  $x_j$  est inférieure ou égale à  $r$ . Par conséquent  $s(x) = \sum_{i < j} 1_{\|x_i - x_j\| \leq r}$ .
- $n(x) = \sum_{i=1}^M n(x \times \{i\})$ ,  $n(x \times \{i\})$  représente le nombre de points dans la configuration  $x$  ayant la marque  $i$ .

### 3.1.1. Choix des marques

Dans cette étude nous caractérisons les points par une seule marque qui sera la valeur de l'erreur de prédiction  $\hat{y}_{x_i}$  au point  $x_i$ . Rappelons que cette valeur est définie par:

$$\text{var}(\hat{y}_{x_i}) = f(x_i)^T (X^T X)^{-1} f(x_i)$$

Avec,

- $X = [f(x_1), \dots, f(x_n)]^T$  est la matrice de calcul, qui dépend des points expérimentaux choisis et du modèle postulé,
- $(X^T X)^{-1}$  la matrice de dispersion,
- $f(x_i)$  est le vecteur modélisé du point  $x_i$

Dans ce cas on définit  $n(x)$  pour une configuration  $x$  par:

$$n(x) = \sum_{i=1}^n 1_{\text{var}(\hat{y}_{x_i}) \leq \varepsilon}$$

Où  $\varepsilon$  est une précision fixée.

### **3.1.2. Simulation des processus ponctuels par la méthode MCMC et l'algorithme de Montripolis-Hasting**

La méthode consiste à construire une chaîne de configurations  $\{X_0, X_1, \dots, X_N\}$  qui converge vers une distribution recherchée  $\pi$ . En effet, l'algorithme de Montripolis Hasting permet cette construction à l'aide d'un noyau de transition  $P_{MH}$  qui est  $\pi$ -réversible. Rappelons que l'algorithme passe par deux étapes:

#### **Algorithme**

- On fait une proposition de changement d'état  $x$  à  $y$  selon une loi de probabilité  $Q(x, \cdot)$
- On accepte  $y$  avec la probabilité  $a(x, y)$ , si non on reste dans l'état  $x$  (Où  $a: \Omega \times \Omega \rightarrow [0, 1]$ )

Notons  $q(x, y)$  la densité de  $Q(x, \cdot)$ , la transition  $P$  de MH s'écrit [52] :

$$P_{MH}(x, y) = a(x, y)q(x, y) + \left[1 - \int_{\Omega} a(x, z)q(x, z)dz\right] \delta_x(y)$$

Avec  $\delta_x(\cdot)$  et la masse du point en  $x$ . Pour simplifier les calculs, on utilise la mesure de Dirac en  $x$  ( $\delta_x(y) = 1$  si  $x = y$  et  $0$  sinon).

Le choix de  $(Q, a)$  assurera la  $\pi$ -réversibilité de  $P_{MH}$  si l'équation d'équilibre suivante est satisfaite:

$$\forall x, y \in \Omega : \pi(x) \times q(x, y) \times a(x, y) = \pi(y) \times q(y, x) \times a(y, x).$$

Le choix de la probabilité d'acceptation  $a$  est plus limité : il est dicté essentiellement par l'objectif de simuler (asymptotiquement) une loi de probabilité  $\pi$  donnée. C'est le cas du choix usuel, où:

$$a(x, y) = \frac{\pi(y) \times q(y, x)}{\pi(x) \times q(x, y)}.$$

Deux points importants méritent d'être notifiés. Premièrement, le calcul de  $a(x, y)$  ne nécessite pas la connaissance de la constante de normalisation de (3.1). Deuxièmement, dans ce travail, nous considérons le cas où les deux configurations  $x$  et  $y$  diffèrent exactement en un point. On parle alors de dynamique de renversement de spin (spin flop Dynamics en anglais), d'où la densité  $q$  est symétrique :

$$q(y, x) = q(x, y) ,$$

Dans ce cas, la probabilité d'acceptation se réduit à :

$$a(x, y) = \frac{\pi(y)}{\pi(x)} = \frac{\beta^{n(y)}\gamma^{s(y)}}{\beta^{n(x)}\gamma^{s(x)}}$$

### **3.2. L'algorithme de construction du plan proposé**

Les plans d'expériences numériques proposés dans ce travail, [appelés plans de Strauss marqués (MSD)], sont générés en utilisant l'algorithme suivant (qui est en fait, une version de l'algorithme Montripolis-Hasting) :

#### **Algorithme**

##### **i. Etape d'initialisation:**

Choisir une configuration initiale (plan d'expériences) ( $X_0 = x$ , où  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  et  $x \in [0,1]^k$ ) selon une loi de probabilité donnée par exemple la loi uniforme.

##### **ii. Etape d'itérations : Pour $N = 1, 2, \dots, N_{MCMC}$**

###### **• Etape 1 :**

- Pour chaque état  $x$  échantillonner  $y$  par l'utilisation de dynamique de renversement de spin.
- Choisir un spin  $s$  au hasard uniformément sur  $\{1, \dots, n\}$
- Simuler une expérience  $y_j$  selon la loi uniforme sur  $[0,1]^p$ . On prend alors comme nouvelle configuration :

$$y = (x_1, x_2, \dots, x_{s-1}, y_j, x_{s+1}, \dots, x_n)$$

###### **• Etape2 :**

- Calculer la probabilité d'acceptation:

$$a(x, y) = \min \left( 1, \beta^{n(y)-n(x)} \gamma^{s(y)-s(x)} \right) , \text{ avec } \beta > 0 \text{ et } 0 < \gamma < 1$$

- Prendre  $x = \begin{cases} y & \text{avec une probabilité : } a \\ x & \text{avec une probabilité : } 1 - a \end{cases}$

Répéter ces deux dernières étapes  $n$  fois pour chaque itération  $N$ .

Prendre  $X_n = x$ .



### Exemple 3.1

Pour  $N=1000$  la figure 3.1, montre la convergence vers une configuration qui caractérise la réalisation d'un processus ponctuel marqué de Strauss à partir d'une configuration initiale de 25 points choisis uniformément sur  $[0, 1]^2$ . Dans ce cas, le paramètre d'interaction  $\gamma$  est fixé à 0.001, l'intensité  $\beta$  à 2.5 et la distance  $r$  à 0.17.

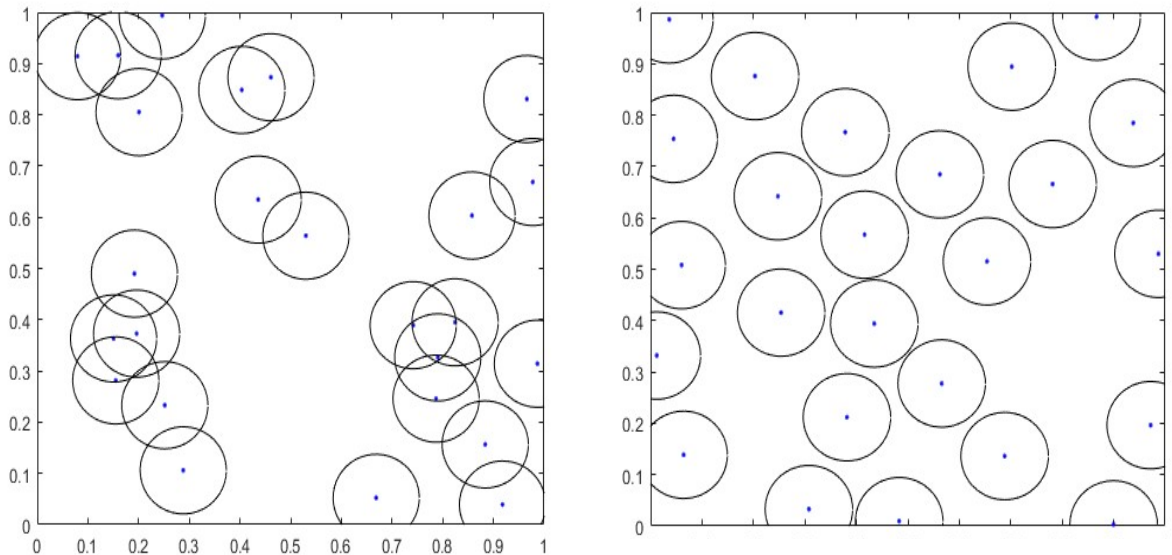


Figure 3.1 : A gauche, une configuration initiale aléatoire de 25 points et à droite, une configuration finale pour  $\beta = 2.5$ ,  $\gamma = 0.001$  et  $r = 0.17$

#### Remarques

- Sur la figure 1, on matérialisera les interactions entre expériences en traçant les cercles de rayon  $r/2$ , l'intersection de deux cercles correspond précisément à une interaction.
- Il est important de bien fixer le paramètre de répulsion  $\gamma$  qui est situé entre 0 et 1, nous avons constaté selon plusieurs exemples qu'il est facile de générer une distribution répondant au critère de remplissage de l'espace avec un paramètre de répulsion faible.
- Pour le choix du rayon  $r$ , un rayon trop petit engendre une distribution sans interaction. Par contre, un rayon trop grand conduit à une distribution avec des agglomérats.

### 3.3. Etude de convergence

Pour chaque itérations  $N$  de l'algorithme de construction précédemment décrit, on fait  $n$  transitions élémentaires. D'où, la chaîne de plans d'expériences  $(X_N)_{N \geq 0}$  ainsi générée, est la réalisation d'une chaîne de Markov de noyau de transition :

$$P(x, y) = P_{MH}^n(x, y)$$

A ce niveau, la question essentielle qui se pose est de savoir si la chaîne converge vers la distribution  $\pi(x)$  définie en (3.1). La chaîne est convergente vers la distribution invariante  $\pi$  si :

$$P^t(x, A \rightarrow \pi(A)), t \rightarrow \infty$$

Où  $A$  un borélien de  $A$  et  $P^t(x, A) = P(X_t = A / X_0 = x)$  est un noyau de transition de pas  $t$ .

Enonçons le résultat principal qui nous intéresse ici:

#### **Théorème 3.1**

Si le noyau de transition  $P = P_{MH}^n$  sur un espace fini a une distribution invariante unique  $\pi$  et  $P$  est positif récurrent, alors la chaîne de Markov  $(X_N)_{N \geq 0}$  obtenue à partir de l'algorithme de construction est uniformément ergodique et ce noyau réalise la simulation d'un processus ponctuel marqué de Strauss de densité  $\pi(x) = k\beta^{n(x)}\gamma^{s(x)}$  (i.e.  $\nu P^m$  tend vers  $\pi$  quand  $m$  tend vers l'infini).

#### **Preuve**

Premièrement, nous montrons trois propriétés importantes pour le noyau  $P_{MH}$ :  $\pi$  – réversibilité,  $\pi$  – stationarité et  $\pi$  – irréductibilité.

- **La  $\pi$ -réversibilité**

Par définition, la transition  $P_{MH}$  est  $\pi$ -réversible si :

$$\forall x, y \in \Omega : \pi(x)P_{MH}(x, y) = \pi(y)P_{MH}(y, x).$$

Soit  $x \in \Omega$  et  $B \in A$  nous avons :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} 1_{B(x,y)} \pi(x) P_{MH}(x,y) dx \\
&= \int_{\Omega} 1_{B(x,y)} \pi(x) a(x,y) q(x,y) dx + \\
& \quad \int_{\Omega} 1_{B(x,y)} \pi(x) \left[ 1 - \int_{\Omega} a(x,z) q(x,z) dz \right] \delta_x(y) dx \\
&= \int_{\Omega} 1_{B(x,y)} \pi(x) a(x,y) q(x,y) dx + \\
& \quad \int_{\Omega} 1_{B(x,y)} \delta_x(y) \pi(x) \left[ 1 - \int_{\Omega} a(x,z) q(x,z) dz \right] dx \\
&= \int_{\Omega} 1_{B(x,y)} \pi(x) a(x,y) q(x,y) dx + \\
& \quad \int_{\Omega} 1_{B(x,x)} \pi(x) \left[ 1 - \int_{\Omega} a(x,z) q(x,z) dz \right] dx
\end{aligned}$$

Et comme :

$$\begin{aligned}
\pi(x) a(x,y) q(x,y) &= k \beta^{n(x)} \gamma^{s(x)} \min \{1, \beta^{n(y)-n(x)} \gamma^{s(y)-s(x)}\} q(x,y) \\
&= k \min \{\beta^{n(x)} \gamma^{s(x)}, \beta^{n(y)} \gamma^{s(y)}\} q(x,y) \\
&= k \beta^{n(y)} \gamma^{s(y)} \min \{\beta^{n(x)-n(y)} \gamma^{s(x)-s(y)}, 1\} q(x,y) \\
&= \pi(y) a(y,x) q(x,y)
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que  $q(x,y) = q(y,x)$ , alors on aura  $\pi(x) a(x,y) q(x,y) = \pi(y) a(y,x) q(y,x)$ , d'où le résultat:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} 1_{B(x,y)} \pi(x) P_{MH}(x,y) dx \\
&= \int_{\Omega} 1_{B(x,y)} \pi(y) a(y,x) q(y,x) dx + \int_{\Omega} 1_{B(y,y)} \pi(y) \left[ 1 - \int_{\Omega} a(y,z) q(y,z) dz \right] dy \\
&= \int_{\Omega} 1_{B(x,y)} \pi(y) P_{MH}(y,x) dy
\end{aligned}$$

Donc  $\pi(x) P_{MH}(x,y) = \pi(y) P_{MH}(y,x)$ , alors la chaîne est  $\pi$ -réversible donc  $\pi$ -invariante.

- **La  $\pi$ -stationnarité**

La transition  $P_{MH}$  est  $\pi$ -stationnaire si

$$\pi P_{MH} = \pi,$$

Soit  $x \in \Omega$  et  $B \in \mathcal{A}$ . On a alors :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} 1_{B(x,y)} \pi(x) P_{MH}(x,y) dx \\
&= \int_{\Omega} 1_{B(x,y)} \pi(x) a(x,y) q(x,y) dx + \int_{\Omega} 1_{B(x,y)} \pi(x) \left[ 1 - \int_{\Omega} a(x,z) q(x,z) dz \right] \delta_x(y) \\
&= \int_{\Omega} \int_{\Omega} 1_{B(x,y)} \pi(x) a(x,y) q(x,y) dy dx + \\
&\quad \int_{\Omega} 1_{B(x,x)} \pi(x) - \int_{\Omega} \int_{\Omega} \pi(x) a(x,z) q(x,z) dz \\
&= \int_{\Omega} 1_{B(x,x)} \pi(x) dx
\end{aligned}$$

Donc la chaîne admet  $\pi$  comme distribution stationnaire.

- **La  $\pi$ -irréductibilité**

La transition  $P_{MH}$  est  $\pi$ -irréductible si :

$$\forall A \in \mathcal{A}, \pi(A) > 0 \Rightarrow \exists t, P_{MH}^t(x, A) > 0$$

Soit  $A \in \mathcal{A}$  et pour  $t=1$  on obtient :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} 1_{B(x,A)} P_{MH}(x, A) dx \\
&= \int_{\Omega} 1_{B(x,A)} a(x, A) q(x, A) dx \\
&+ \int_{\Omega} 1_{B(x,A)} \left[ 1 - \int_{\Omega} a(x, z) q(x, z) dz \right] \delta_x(A) dx \\
&= \int_{\Omega} 1_{B(x,A)} a(x, A) q(x, A) dx + \\
&\quad \int_{\Omega} 1_{B(x,x)} \left[ 1 - \int_{\Omega} a(x, z) q(x, z) dz \right] dx \\
&= \int_{\Omega} 1_{B(x,A)} a(x, A) q(x, A) dx + 1 - \int_{\Omega} \int_{\Omega} a(x, z) q(x, z) dz dx
\end{aligned}$$

Puisque  $a(x, A) = \min(1; \gamma^{s(A)-s(x)} \beta^{n(A)-n(x)})$  et  $a(x, z) = \min(1; \gamma^{s(z)-s(x)} \beta^{n(z)-n(x)})$ , alors on distingue quatre cas possibles:

- Si  $a(x, A) = 1$  et  $a(x, z) = 1$  alors :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} 1_{B(x,A)} P_{MH}(x, A) dx &= \int_{\Omega} 1_{B(x,A)} q(x, A) dx + 1 - \int_{\Omega} \int_{\Omega} q(x, z) dz dx \\
&= \int_{\Omega} 1_{B(x,A)} q(x, A) dx > 0
\end{aligned}$$

- Si  $a(x, A) = 1$  et  $a(x, z) = \gamma^{s(z)-s(x)} \beta^{n(z)-n(x)}$  alors :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} 1_{B(x,A)} P_{MH}(x, A) dx \\ &= \int_{\Omega} 1_{B(x,A)} q(x, A) dx + 1 - \int_{\Omega} \int_{\Omega} \gamma^{s(z)-s(x)} \beta^{n(z)-n(x)} q(x, z) dz dx \\ &= \int_{\Omega} 1_{B(x,A)} q(x, A) dx + 1 - \gamma^{s(z)-s(x)} \beta^{n(z)-n(x)} > 0 \end{aligned}$$

- Si  $a(x, A) = \gamma^{s(A)-s(x)} \beta^{n(A)-n(x)}$  et  $a(x, z) = 1$  alors :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} 1_{B(x,A)} P_{MH}(x, A) dx &= \int_{\Omega} 1_{B(x,A)} \gamma^{s(A)-s(x)} \beta^{n(A)-n(x)} q(x, A) dx + \\ & 1 - \int_{\Omega} \int_{\Omega} q(x, z) dz dx \\ &= \gamma^{s(A)-s(x)} \beta^{n(A)-n(x)} \int_{\Omega} 1_{B(x,A)} q(x, A) dx > 0 \end{aligned}$$

- Si  $a(x, A) = \gamma^{s(A)-s(x)} \beta^{n(A)-n(x)}$  et  $a(x, z) = \gamma^{s(z)-s(x)} \beta^{n(z)-n(x)}$  alors :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} 1_{B(x,A)} P_{MH}(x, A) dx &= \int_{\Omega} 1_{B(x,A)} \gamma^{s(A)-s(x)} \beta^{n(A)-n(x)} q(x, A) dx + \\ & 1 - \int_{\Omega} \int_{\Omega} \gamma^{s(z)-s(x)} \beta^{n(z)-n(x)} q(x, z) dz dx \\ &= \gamma^{s(A)-s(x)} \beta^{n(A)-n(x)} \int_{\Omega} 1_{B(x,A)} q(x, A) dx + \\ & 1 - \gamma^{s(z)-s(x)} \beta^{n(z)-n(x)} \int_{\Omega} \int_{\Omega} q(x, z) dz dx \\ &= \gamma^{s(A)-s(x)} \beta^{n(A)-n(x)} \int_{\Omega} 1_{B(x,A)} q(x, A) dx + \\ & 1 - \gamma^{s(z)-s(x)} \beta^{n(z)-n(x)} > 0 \end{aligned}$$

Donc  $\int_{\Omega} 1_{B(x,A)} P_{MH}^t(x, A) dx > 0 \forall t \geq 0$ , alors  $P_{MH}$  est  $\pi$ -irréductible.

Puisque,  $\pi$  est la loi invariante de  $P_{MH}$  alors elle est aussi loi invariante pour  $P = P_{MH}^n$ . En effet,  $\pi P_{MH} = \pi$  et par récurrence sur l'entier  $n$ , on obtient :

$$\pi P_{MH} = \pi P_{MH}^2 = \pi P_{MH}^3 = \dots = \pi P_{MH}^n = \pi$$

Donc  $\pi P = \pi$ . Par construction de  $P = P_{MH}^n$ , la  $\pi$ -irréductibilité de  $P_{MH}$  entraîne la  $\pi$ -irréductibilité de  $P$ . Si  $P$  est  $\pi$ -irréductible et possède une distribution  $\pi$

invariante. Alors  $P$  est récurrent positive et  $\pi$  est l'unique distribution invariante de  $P$  (proposition 2.1).

Soit  $\nu$  une distribution initiale, pour tout entier  $m$  et  $\forall x \in N^{lf}$  nous avons :

$$\|\nu P^m(x, \cdot) - \pi\| = \|\nu P^m - \pi P^m\| \leq 2C(P^m) \leq 2(C(P))^m$$

avec  $0 \leq C(P) < 1$  (lemme 2.1) est le coefficient de contraction. Donc la chaîne est uniformément ergodique. Et,  $\|\nu P^m - \pi\|$  tend vers zéro quand  $m$  tend vers l'infini. Donc, la chaîne converge vers la distribution marquée de Strauss  $\pi$  définie dans (3.1).

### **3.4. Résultats numériques et qualités des plans proposés**

Pour juger la qualité d'un plan d'expériences numérique, il est important d'utiliser des critères usuels permettant d'assurer un bon remplissage de l'espace et une bonne distribution uniforme. L'objectif de cette section, est de calculer les valeurs de ces critères présentés dans le premier chapitre, sur les plans proposés et certains nombre de plans usuellement utilisés en expériences numériques. Pour cela, nous utilisons trois types de critères :

- Critère de distance
- Critère de recouvrement
- Critère de discrédance

Afin de comparer les plans en dimension supérieure à deux, nous rappelons que :

- Le critère de distance consiste à maximiser la distance minimale entre deux points du plan. Plus la valeur de ce critère est grande, plus les points seront éloignés les uns des autres.
- Le critère de recouvrement (Cov) permet de mesurer l'écart entre les points du plan et ceux d'une grille régulière. Ce critère est nul pour une grille régulière. Le but est donc de minimiser le recouvrement pour se rapprocher d'une grille régulière, et ainsi assurer le remplissage de l'espace.
- Critère de discrédance : la discrédance permet de mesurer l'écart entre la fonction de répartition empirique des points du plan et celle de la loi uniforme. Plus la discrédance est faible, plus les points sont répartis uniformément. Il existe différentes mesures de discrédance. Nous retenons la discrédance en norme L2.

Le tableau 3.1 présente une comparaison suivant le critère de discrédance entre les plans proposés dans ce travail, ( notés MSD : Marked strauss designs), avec les suites de faible discrédance ( séquence de Halton [35], séquence de Sobol [36] et séquence de Faure[37]). Il est intéressant d’observer que les plans proposés ont une faible dicrédance comparable à celle des suites à faible discrédance.

Tableau 3.1 : La valeur de la discrédance pour les plans proposés (MSD), les suites de Halton, les suites de Sobol et les suites de Faure pour trois, cinq et sept dimensions

Dimension	Nombre de points	MSD	Séquence de Halton	Séquence de Sobol	Séquence de Faure
3	20	0,00142220	0,001732852	0,001382617	<u>0,00113882</u>
5	40	0,00060773	0,000400047	<u>0,0002603291</u>	0,00028458
7	50	0,00014192	0,00012451	<u>0,00007415605</u>	0,00012455

Concernant les plans stochastiques, les critères ont été calculés sur 80 plans afin de donner un sens aux résultats. Ces plans sont:

- Plans aléatoires (RD)
- Hyper cubes latins (LHS)[34]
- Plans maximin LHS (mLHS)[61]
- Plans à entropie maximal (Dmax)[62]
- Plans de Strauss (SD)[5]
- Plans proposés (MSD)

Les figures ci-dessous représentent les résultats des différents critères sous forme des box-plots pour trois, cinq et sept dimensions.

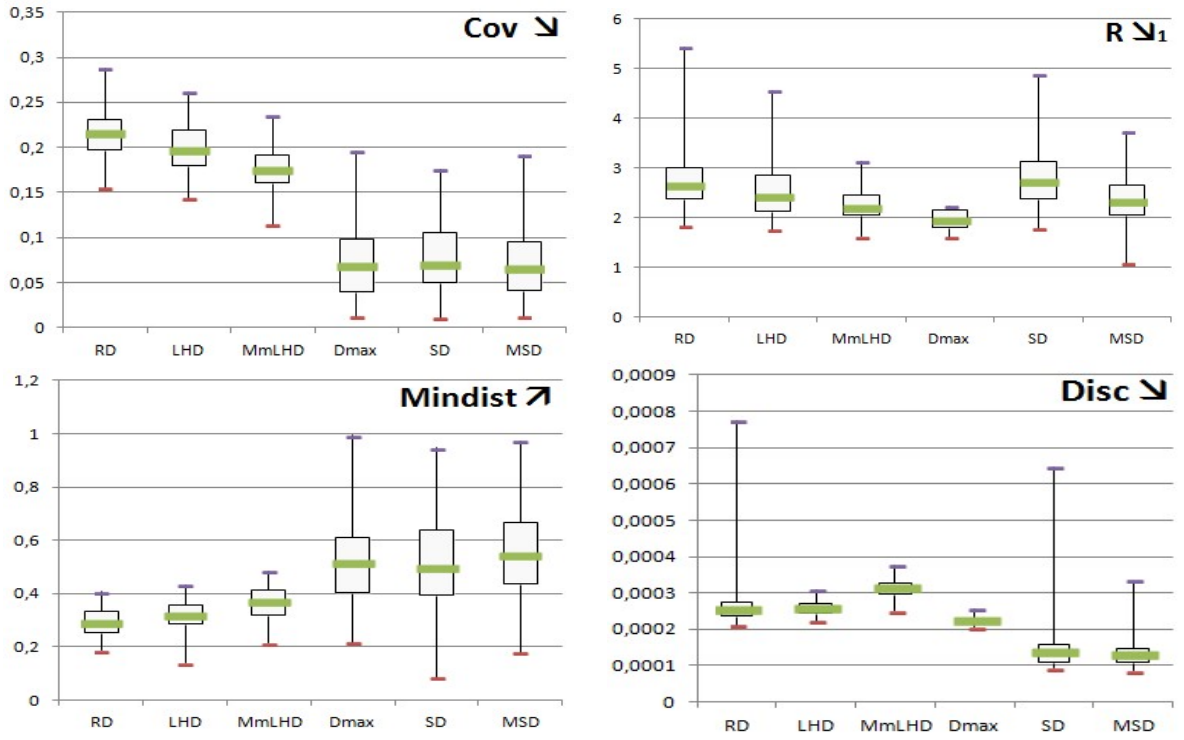


Figure 3.2: Boxplots des critères de qualité calculés sur les 80 plans à 50 points en dimension 7

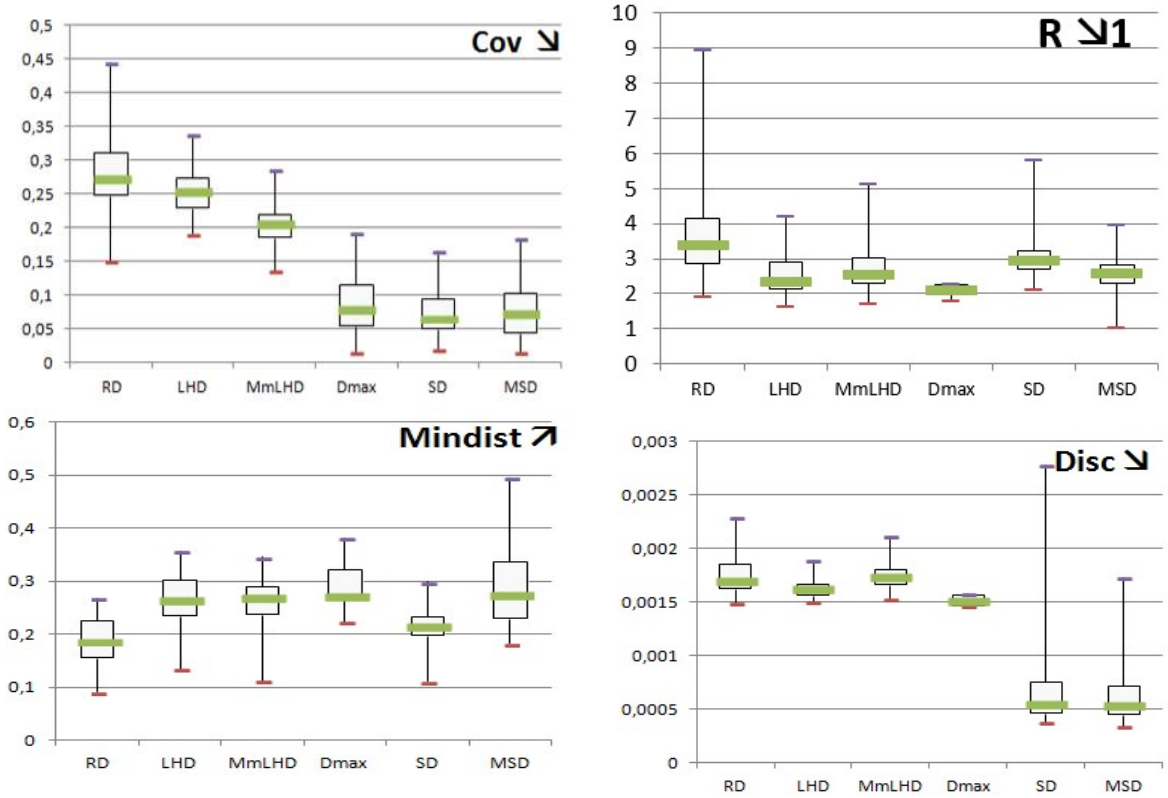


Figure 3.3: Boxplots des critères de qualité calculés sur les 80 plans à 40 points en dimension 5



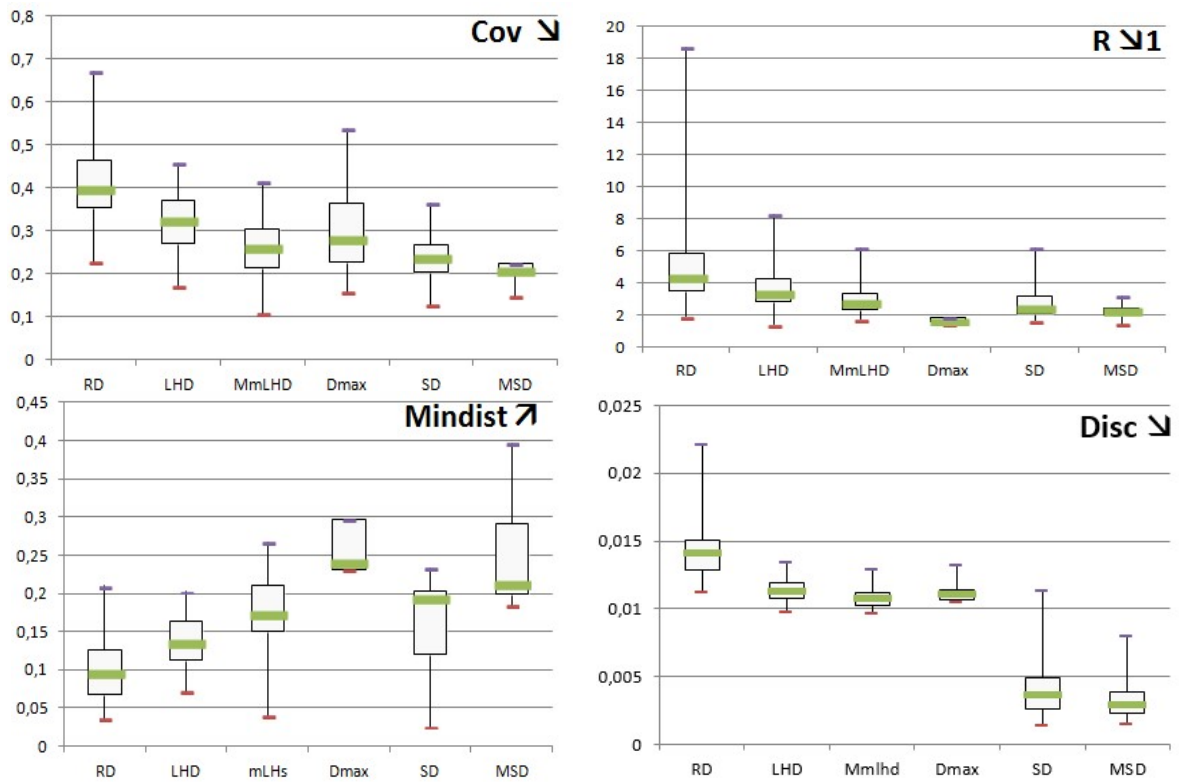


Figure 3.3: Boxplots des critères de qualité calculés sur les 80 plans à 20 points en dimension 3

Selon les résultats présentés dans les plots-box ci-dessus, les plans proposés offrent certaines améliorations en ce qui concerne les différents critères considérés dans cette étude de comparaison. Cependant, quelques remarques méritent d'être notifiées concernant ces plots box. Les plans proposés, plans à entropie maximale et les plans de Strauss ont de très faibles dicrépances semblables à celles des suites à faible dicrépance.

Les plans à entropie maximale sont meilleurs que les hypercubes latins et les hypercubes latins concernant le critère de distance. Les plans proposés sont de meilleure qualité que ces derniers notamment en ce qui concerne les critères de distance, ils permettent donc visiblement de bien remplir l'espace expérimental.

Les plans ayant de mauvais résultats dans les différentes catégories de critères sont sans étonnement les plans aléatoires.

### **3.5. Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons présenté notre contribution théorique dans la méthodologie de recherche expérimentale. Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés à l'utilisation de la méthode de Monte Carlo par Chaîne de Markov (MCMC) et

les processus ponctuels marqués de Strauss, pour proposer des nouveaux plans d'expériences numériques. Cette utilisation, constitue une alternative intéressante à l'approche statistique classique. Dans un deuxième temps, une comparaison avec d'autres plans numériques et selon un certains nombre de critères a été effectuée. Les résultats obtenus sont satisfaisants.

## CHAPITRE 4

### UTILISATION DE LA METHODE DE PLANS D'EXPERIENCES POUR LA MODELISATION D'UN PANNEAU PHOTOVOLTAÏQUE

Les plans d'expériences publiés dans la littérature sont des plans optimaux : la répartition des points expérimentaux dans le domaine d'étude et servant à établir le modèle est choisie de manière à obtenir le meilleur modèle prévisionnel possible. Le plan se présente alors par la donnée d'une matrice d'expérience dans laquelle les niveaux des facteurs sont indiqués et l'expérimentateur n'a qu'à suivre les indications données par cette matrice, pour réaliser son plan. Cependant, en pratique, on peut disposer de résultats expérimentaux qui n'ont pas été réalisés suivant un plan conventionnel. Les points expérimentaux correspondant peuvent avoir une bonne ou une mauvaise répartition dans le domaine expérimental prospecté, conférant alors au modèle une bonne ou une mauvaise qualité prévisionnelle. La théorie des plans d'expériences permet quand même de traiter ce dernier cas. On parlera alors de plan d'expériences non conventionnel. Toutes les expériences sont donc soumises à la même théorie celle de la théorie des plans d'expériences. La seule différence entre ces deux cas se trouve dans la précision du modèle mathématique obtenu. C'est la raison pour laquelle il est indispensable d'effectuer un calcul d'erreur sur les coefficients du modèle à chaque fois qu'on a à faire à un plan non conventionnel.

Dans ce chapitre, l'objectif, est de montrer comment la méthode des plans d'expériences peut être utilisée en tant que méthode pratique afin de modéliser un générateur photovoltaïque en fonctionnement. C'est la première fois que la méthode des Plans d'expériences est utilisée pour modéliser de tels systèmes. Des expériences ont été réalisées et toutes les courbes caractéristiques (I-V) correspondantes (Intensité fonction de la tension) ont été tracées. Des modèles mathématiques décrivant les variations de la tension en circuit ouvert ( $V_{co}$ ), du courant de court-circuit ( $I_{cc}$ ) et de la puissance maximale délivrée ( $P_{max}$ ), en fonction du niveau de l'irradiance solaire et de la température ont été obtenus. Ces modèles sont des modèles prédictifs. A l'aide de notre logiciel Hide [66], nous pouvons simuler le comportement du panneau PV et prévoir, en temps réel, les

variations de  $V_{co}$ ,  $I_{cc}$  et  $P_{max}$  en n'importe quel point du domaine expérimental prospecté. Les concepts fondamentaux de l'utilisation de la méthode des plans d'expériences qui permettent de définir correctement et d'établir les modèles sont présentés. Puis une analyse complète des mesures est réalisée afin d'interpréter les résultats et optimiser la méthode. Ces résultats font parties des études réalisées dans [63,64, 65].

#### **4.1. Dispositif expérimental et mesures**

Les expériences ont été réalisées sur un panneau solaire commercial BP 350 ( $P_{max}=50$  watts maximum pour une tension  $V_{mp} = 17.5$  volts et une intensité  $I_{mp} = 2.9$  Ampères) comprenant 72 cellules en silicium multi cristallin disposées en 4x18 matrices connectées en 2 rangées de 36 cellules en série. Des caractéristiques (I-V) (Intensité fonction de la tension de sortie) est donnée en Figure 4.1 et une représentation schématique du panneau en Figure 4.2.

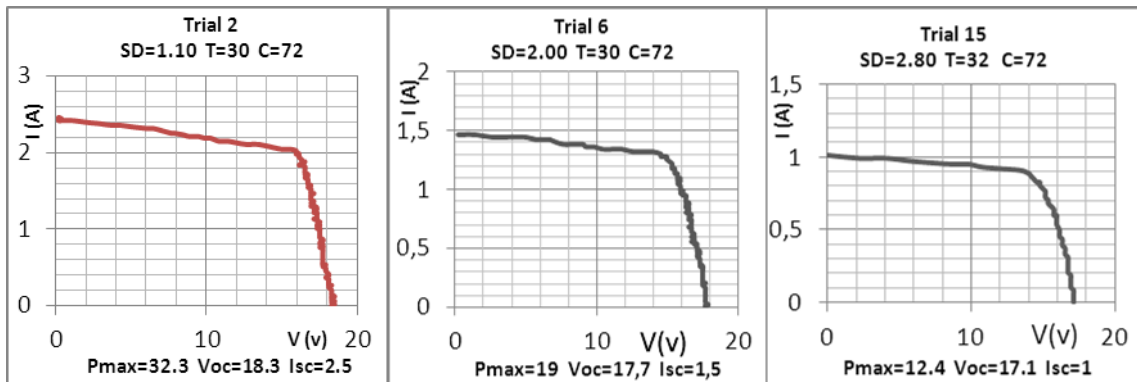


Figure 4.1. Courbes caractéristiques I-V pour les 72 cellules actives pour trois valeurs de distance de source correspondant aux essais 2, 6 et 15 du tableau 4.1

L'intensité lumineuse est fournie par une source Deltalab constituée par 6 lampes halogènes au quartz de 1 kW chacune avec réflecteur. Le niveau de l'irradiance est contrôlé en faisant varier la distance entre le panneau et la source lumineuse (SD). Pour une distance fixée, le courant de court-circuit du panneau entièrement illumine et à l'équilibre thermique est proportionnel à l'irradiance pour toutes les mesures. Toutes les analyses et interprétations des résultats expérimentaux ont été effectuées en utilisant le logiciel HIDE. Trois niveaux de l'irradiance ont été retenus en faisant varier la distance de la source lumineuse au panneau: 1.10, 2.00 et 2.80 mètres. Ces trois niveaux correspondent respectivement à la lumière du jour de 2.5, 1.5 et 1.00 Ampères. La température, mesurée à l'aide d'un thermomètre infra-rouge peut être contrôlé en actionnant un ventilateur simulant ainsi les conditions atmosphériques réelles. La valeur de la température varie

entre 25 et 60 degrés Celsius. Quinze essais ont été effectués en faisant varier la distance (source distance SD) et la température. Après avoir enregistré les mesures de  $V_{co}$ ,  $I_{cc}$ , et  $P_{max}$ , nous les avons reportés sur le tableau 4.1.

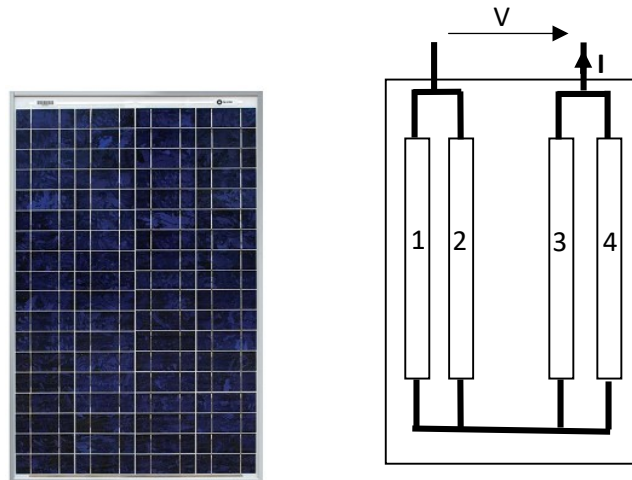


Figure 4.2 : Diagramme schématique de BP Solar, panneau BP 350

#### **4.2. Présentation de la méthode de plan des expériences et des résultats expérimentaux**

Pour un expérimentateur, la quantité qui l'intéresse, notée  $Y$ , correspond à la réponse du procédé expérimental étudié. Elle a pour coordonnées, les points expérimentaux  $x_i$  avec  $i = 1, 2, \dots, k$ . La fonction qui relie la réponse  $Y$  aux facteurs prend la forme d'un polynôme de degré 2.

$$Y = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}} b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^k b_{ii} x_i^2$$

$Y$  est mesurée durant l'expérimentation. Elle représente la tension en circuit ouvert  $V_{co}$ , le courant de court circuit  $I_{cc}$  et la puissance maximale délivrée  $P_{max}$ . Dans cette équation  $b_0, b_i, b_{ij}, b_{ii}$  sont les coefficients inconnus qui seront calculés à partir des valeurs des mesures. Ils correspondent respectivement à la valeur de  $Y$  au centre du domaine d'étude, aux effets principaux des facteurs, aux interactions d'ordre 2 entre facteurs, aux coefficients des termes du second degré. Ces derniers donnent une mesure de la courbure de la surface de réponse.

### 4.2.1. Domaine expérimental et domaine d'étude

Chaque facteur est représenté sur un axe orienté, prenant des valeurs à l'intérieur de son domaine de variation. Ce dernier est limité par un niveau bas noté par -1 et un niveau haut noté par +1. Les  $k$  axes sont orthogonaux entre eux deux à deux et constituent une base de l'espace vectoriel  $\mathfrak{R}^k$ , de dimension  $k$ , appelé Espace Expérimental. La réunion des domaines de variation de chaque facteur définit le Domaine d'Etude. Ce Domaine d'Etude (appelé aussi Domaine Expérimental Prospecté) est la partie de l'Espace Expérimental que l'expérimentateur a retenu pour faire ses essais. Une étude, c'est-à-dire un ensemble d'expériences bien définies, est représentée par une série de points disposés dans le domaine d'étude. Les deux facteurs retenus sont :

- Eclairage mesuré en termes de distances du panneau à la source (mètres),
- Température du panneau (degrés Celsius)

Le domaine d'étude est choisi de manière à inclure tous les points expérimentaux effectués, en prenant pour niveaux bas, les valeurs minimales des deux facteurs (1.10 m et 25°C) et pour niveaux hauts leurs valeurs maximales (2.80 m et 60°C). La répartition des points expérimentaux dans le domaine d'étude est représentée en figure 4.3.

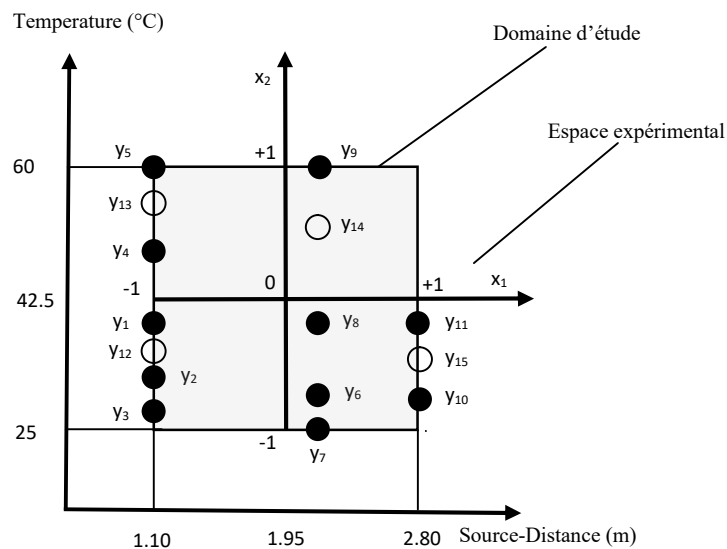


Figure 4.3 : Répartition des points expérimentaux dans le domaine d'étude

- Essais utilisés pour établir les modèles ajustés
- Essais utilisés pour tester les modèles ajustés

#### 4.2.2. Cordonnées centrées réduites

Afin de donner une grande généralité de présentation à la théorie des plans d'expériences, on change de repère cartésien en effectuant deux opérations : une translation des axes pour positionner le nouveau sommet au centre du domaine d'étude, changer les unités des axes pour que les niveaux bas et haut prennent les valeurs -1 et +1. Le passage des coordonnées d'origine A aux coordonnées centrées réduites (c.c.r)  $x$ , et inversement, est donné par la formule suivante ( $A_0$  étant la valeur centrale en unités courantes) :

$$x = \frac{A - A_0}{pas}$$

L'essai (1.10 m , 40 °C) a par exemple, pour coordonnées centrées réduites :  
 $x = \frac{1.10 - 1.95}{0.85} = -1$  et  $y = \frac{40 - 42,5}{17,5} = -0,1429$  où  $pas = 200 - 195 = 85$  pour la distance et  $pas = 60 - 42,5 = 17,5$  pour la température.

Les essais peuvent être arrangés sous forme d'un tableau, où figurent les coordonnées réelles et en coordonnées centrées réduites, les niveaux bas et haut de chaque facteur et mesures des réponses  $V_{oc}$ ,  $I_{sc}$ , et  $P_{max}$  (tableau 4.1).

Tableau 4.1 : Matrice d'expériences et résultats expérimentales

Trial	SD m	Temperature °C	SD ccr	Temperature ccr	$V_{oc}$ V	$I_{sc}$ A	$P_{max}$ V.A
	Facteur 1	Facteur 2	Facteur 1	Facteur 2	Responses		
1	1.10	40	-1	-0.1429	18.3	2.5	$y_1=32.6$
2	-	30	-1	-0.7143	18.3	2.5	$y_2=32.3$
3	-	26	-1	-0.9429	18.7	2.5	$y_3=32.2$
4	-	44	-1	-0.0857	18.1	2.5	$y_4=31.3$
5	-	60	-1	1	17.3	2.5	$y_5=31.2$
6	2.00	30	0.0588	-0.7143	17.7	1.5	$y_6=19.0$
7	-	25	0.0588	-1	18.1	1.5	$y_7=19.2$
8	-	40	0.0588	-0.1429	17.7	1.5	$y_8=19.2$
9	-	60	0.0588	1	17.1	1.5	$y_9=18.4$
10	2.80	31	1	-0.6571	17.1	1.0	$y_{10}=12.0$
11	-	38	1	-0.2571	16.9	1.0	$y_{11}=12.5$
12	1.10	39	-1	-0.2	18.1	2.5	$y_{12}=32.2$
13	-	50	-1	0.4286	17.7	2.5	$y_{13}=31.6$
14	2.00	45	0.0588	0.1429	17.5	1.5	$y_{14}=19.2$
15	2.80	32	1	-0.6	17.1	1.0	$y_{15}=12.4$
Niveau(-1)	1.10 m	25°C					
Niveau(0)	1.95 m	42.5°C					
Niveau (+1)	2.80 m	60°C					

### **4.3. Modèle mathématique**

Les onze premiers essais sont utilisés pour établir les modèles (essais 1 à 11). Les quatre derniers essais 12, 13, 14 et 15 sont utilisés pour tester la validité des modèles (comparaison entre les réponses mesurées et les réponses prédites par les modèles). Tous les points correspondants sont représentés à l'intérieur du domaine d'étude, les facteurs étant l'irradiance (mètres) et la température (°C) et les réponses  $V_{co}, I_{cc}$ , et  $P_{max}$ . Le domaine expérimental de manière à inclure les 11 points expérimentaux prenant comme niveau bas (-1) les valeurs minimales des deux facteurs ( $SD=1.10$  m et  $T=25$  °C) et les niveaux haut (+1) leur valeurs maximales (2.80 m et 60 °C). La distribution des 11 points expérimentaux dans le domaine prospecté est représentée en Figure 4.3. Les réponses mesurées au cours d'une expérience sont des variables aléatoires et doivent donc être traitées de façon spéciale. Nous ne pouvons pas supposer que les réponses sont obtenues avec une précision infinie. Malgré toutes les précautions que nous pouvons prendre durant l'expérimentation, chaque mesure est entachée par une erreur appelée « erreur expérimentale ». Nous devons prendre en compte ces erreurs. L'expression du modèle doit inclure un terme additionnel  $e$  appelé résidu, qui correspond à la somme de l'écart du au modèle et de l'erreur expérimentale ou erreur pure. Le modèle qui est linéaire par rapport aux coefficients et tenant compte des résidus est donné par l'équation suivante :

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + e$$

Ce modèle est linéaire par rapport aux coefficients. Tous les résultats de l'algèbre matricielle peuvent donc être utilisés.

#### **4.3.1. Calcul des coefficients du modèle de la puissance maximale $P_{max}$ , $V_{oc}$ et $I_{sc}$**

Remplaçons dans l'expression du modèle précédent et pour les 11 essais, les  $x_i$  par leurs coordonnées centrées réduites. Pour la réponse  $P_{max}$ , nous obtenons le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} b_0 - b_1 - 0,143b_2 + 0,143b_{12} + b_{11} + 0,020b_{22} + e_1 = 32,6 \\ \dots \\ b_0 + b_1 - 0,257b_2 - 0,257b_{12} + b_{11} + 0,066b_{22} + e_{11} = 12,5 \end{cases}$$

Nous avons représenté le système linéaire ci-dessus sous forme matricielle. Il s'écrit aussi :

$$Y = X\beta + \varepsilon$$



La matrice  $X$  est appelée matrice de calcul ou matrice des effets. Le vecteur  $\beta$  est le vecteur colonne des coefficients,  $\varepsilon$  le vecteur colonne des résidus et  $Y$  le vecteur colonne des réponses mesurées. Pour résoudre cette équation matricielle, on utilise l'hypothèse des moindres carrés et les résultats vus en chapitre 1. Le logiciel de calcul HIDE, nous donnera :

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} 9.71 \\ -9.8 \\ -0.3 \\ 0.32 \\ 2.5 \\ -0.35 \end{pmatrix}$$

Le modèle de la puissance maximale prend alors la forme suivante :

$$P_{\max} = 9,71 - 9,8x_1 - 0,3x_2 + 0,32x_1x_2 + 2,5x_1^2 - 0,35x_2^2$$

Les coordonnées  $x_1$  et  $x_2$  sont exprimés en coordonnées centrées réduites et désignent l'éclairement et la température. Ceux de la tension en circuit ouvert et l'intensité de court-circuit s'obtiennent de la même manière et ont pour expression :

$$V_{co} = 17,61 - 0,57x_1 - 0,47x_2 + 0,17x_1x_2 - 0,14x_1^2 - 0,05x_2^2$$

$$I_{cc} = 1,53 - 0,74x_1 + 0,00x_2 + 0,02x_1x_2 + 0,22x_1^2 + 0,00x_2^2$$

Il va de soit qu'avec ces modèles, nous pouvons calculer les réponses à l'intérieur du domaine de recherche. Il suffit de donner les valeurs des niveaux  $x_1$  et  $x_2$  pour obtenir immédiatement les réponses estimées ou calculées par le modèle. Puisque les modèles ont été établis en utilisant les coordonnées centrées réduites, nous devons faire les calculs en utilisant ces coordonnées. Il est à remarquer que le courant de court-circuit  $I_{cc}$  ne dépend que de l'irradiance.

#### **4.3.2. Evaluation de la qualité du modèle**

Nous pouvons vérifier la validité des trois modèles en comparant les réponses prévues (ou calculées par le modèle établi) aux réponses expérimentales (ou observées) au même point expérimental (tableau 4.2). L'écart entre les valeurs initialement mesurées et celles calculées montre que les trois modèles expliquent correctement les résultats expérimentaux.

Tableau 4.2 : Comparaison entre les réponses observées et les réponses prédites

Essais	Réponses Observées			Réponses prédites		
	V <sub>oc</sub>	I <sub>sc</sub>	P <sub>max</sub>	V <sub>oc</sub>	I <sub>sc</sub>	P <sub>max</sub>
1	18.3	2.5	32.6	18.2	2.5	32.1
2	18.3	2.5	32.3	18.5	2.5	32.3
3	18.7	2.5	32.2	18.6	2.5	32.3
4	18.1	2.5	31.3	18.0	2.5	31.9
5	17.3	2.5	31.2	17.4	2.5	31.0
6	17.7	1.5	19.0	17.9	1.5	19.1
7	18.1	1.5	19.2	18.0	1.5	19.1
8	17.7	1.5	19.2	17.7	1.5	19.1
9	17.1	1.5	18.4	17.1	1.5	18.5
10	17.1	1.0	12.0	17.0	1.0	12.2
11	16.9	1.0	12.5	17.0	1.0	12.3
12	18.1	2.5	32.2	18.2	2.5	32.1
13	17.7	2.5	31.6	17.8	2.5	31.7
14	17.5	1.5	19.2	17.5	1.5	19.0
15	17.1	1.0	12.4	17.0	1.0	12.2

#### **4.4. Illustration graphique des résultats et la prévision des conditions de fonctionnement du panneau PV**

Le logiciel Hide, destiné aux plans d'expériences, donne une bonne idée à la contribution du traitement des données des plans d'expériences et à l'assistance que l'expérimentateur demande. La construction du plans d'expériences est simplifiée les difficultés de calcul supprimées. Il permet de visualiser rapidement des graphes qui donnent des visions judicieuses des résultats et multiplie la puissance de raisonnement de l'expérimentateur afin d'augmenter la compréhension du phénomène étudié

##### **4.4.1. Histogrammes**

Les histogrammes des coefficients des trois modèles sont représentés en Figure 4.4,  $b_1$ ,  $b_2$  sont appelés les effets principaux des facteurs ou coefficients des termes du premier degré,  $b_{12}$  est appelée interaction entre le facteur 1 et 2. Les coefficients  $b_{11}$  et  $b_{22}$  des termes du second degré et donnent en quelque sorte une mesure de la courbure de la surface de réponse. La représentation des histogrammes nous permet de visualiser rapidement l'importance relative des coefficients et par conséquent de comparer leur influence sur les réponses V<sub>co</sub>, I<sub>cc</sub>, et P<sub>max</sub>. L'influence de l'irradiance et de la

température sont évaluées à partir des coefficients  $b_1$  et  $b_2$ .

- Pour la puissance maximale  $P_{\max}$ ,  $b_1 = -9.8259$  et  $b_2 = -0.3047$ . Ils sont tous les deux négatifs, ce qui signifie que la réponse décroît lorsque le facteur correspondant varie de son niveau bas à son niveau haut. L'amplitude des valeurs absolues donne l'influence des facteurs. Par conséquent, l'influence de l'irradiance sur la puissance maximale est plus grande que celle de la température. L'influence de l'interaction est négligeable. Des interprétations similaires peuvent être faites pour  $V_{co}$  et  $I_{cc}$
- Pour la tension en circuit ouvert  $V_{co}$ , la température a une influence significative et doit être prise en compte
- La température n'a aucune influence sur le courant de court-circuit  $I_{cc}$

Notons que les trois réponses augmentent lorsque l'irradiance augmente (l'irradiance augmente quand la source distance diminue).  $P_{\max}$  et  $V_{co}$  décroissent lorsque la température augmente.

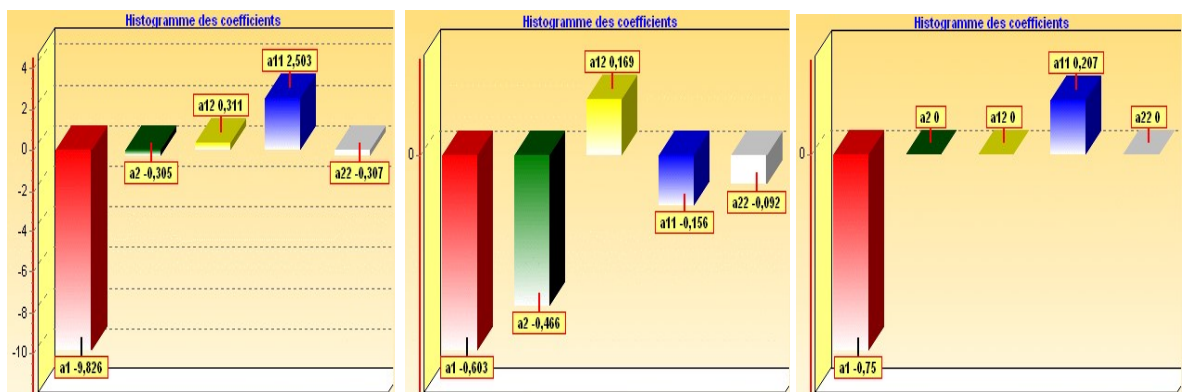


Figure 4.4 : Histogrammes

#### 4.4.2. Représentation sectorielle

Cette représentation donne une mesure de l'importance de chaque coefficient en termes de pourcentage et donc son influence.

- L'influence de l'irradiance est nettement plus grande que celle de la température sur la puissance maximale délivrée (74.15 % du total des effets, 2.3% seulement pour la température)
- La tension en circuit ouvert est plus influencée par la température (40.62 % pour l'irradiance contre 26.16 % pour la température)

- Pour le courant de court-circuit, les deux coefficients  $a_1$  et  $a_{11}$  correspondant à l'irradiance, représentent respectivement 78.4 % et 21.6 %, ce qui correspond à un total de 100%

En comparant les trois diagrammes, nous pouvons conclure que : l'irradiance est le facteur le plus influençable sur les trois réponses ; la température a une légère influence sur  $P_{\max}$ , une influence significative sur  $V_{oc}$  et aucune influence sur  $I_{sc}$

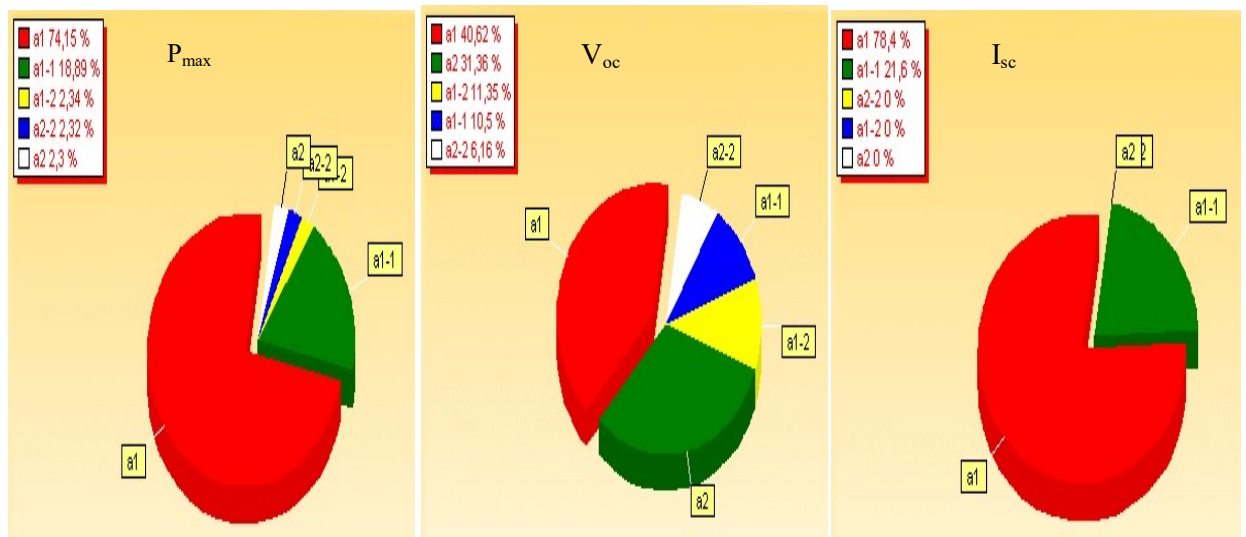


Figure 4.5 : l'influence de la température et d'éclairement sur les trois réponses  $P_{\max}$ ,  $V_{oc}$  et  $I_{sc}$

#### 4.4.3. L'examen de la fonction de variance de prédiction

D'après le premier chapitre, la fonction d'erreur de prédiction en un point  $x$  du domaine d'étude est donnée par la relation suivante :

$$d^2(\hat{Y}) = f(x)^T (X^T X)^{-1} f(x)$$

Si cette fonction est plus petite que 1, on a une meilleure précision sur les réponses prédites que sur les réponses mesurées. Si la fonction d'erreur de prédiction est plus grande que 1, c'est l'inverse. En général, on s'arrange pour que l'erreur de prédiction ne soit pas plus élevée que l'erreur expérimentale. On évite donc de faire des prévisions dans les régions où la fonction d'erreur de prédiction est supérieure à l'unité. A l'aide du logiciel, la figure 4.5 montre une représentation graphique de la fonction d'erreur de prédiction sous forme des courbes de niveaux de cette fonction sur les réponses calculées.

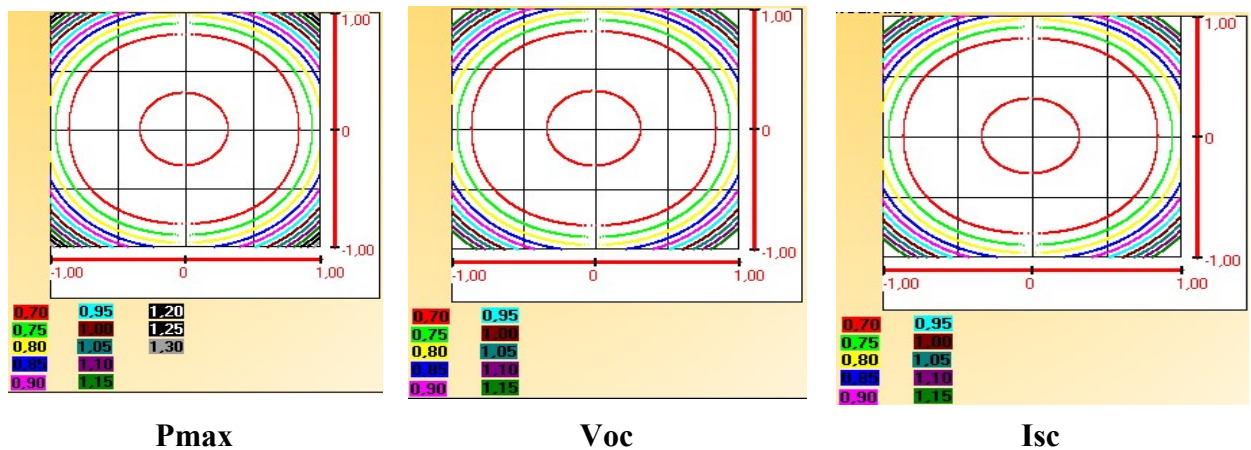


Figure 4.6 : Courbes de niveau de la fonction d'erreur de prédiction sur les réponses prédites pour les trois réponses Pmax, Voc et Isc

En examinant les courbes de niveau pour chaque réponse, on peut constater que la précision sur les réponses prédites est meilleure au centre que sur les sommets du domaine d'étude. On remarque aussi que ces courbes sont très proches à des cercles. Dans ce cas l'erreur de prédiction est la même pour des points situés à égale distance du centre du domaine d'étude, c'est-à-dire le critère d'iso variance par rotation a été bien respecté.

#### 4.4.4. Courbes d'iso réponses

Les iso réponses sont d'autres représentations utiles pour approfondir une meilleure compréhension de l'influence des facteurs. Elles montrent comment varie la réponse en fonction de l'irradiance et de la température. Les iso réponses de  $V_{co}$  montrent clairement que l'influence de l'irradiance n'est pas négligeable et qu'elle doit être prise en compte durant les interprétations des résultats. Les iso réponses montrent la faible dépendance de  $P_{max}$ , la non dépendance de  $I_{cc}$  par rapport à la température et montrent aussi que  $V_{co}$  dépend à la fois de la température et de l'irradiance.

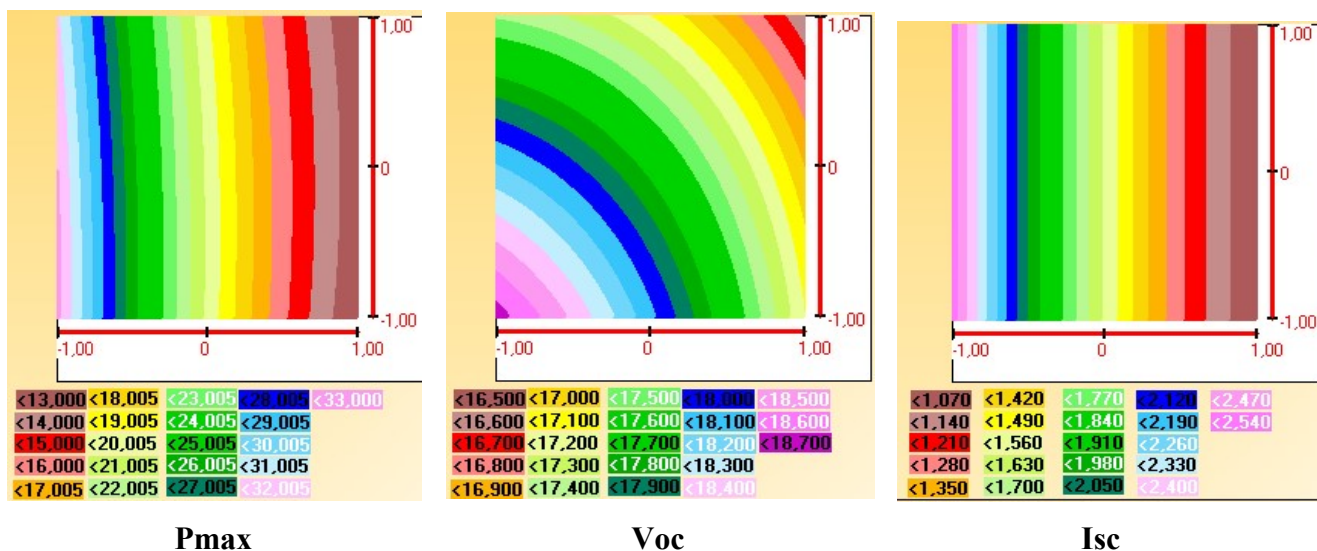


Figure 4.7 : Courbes d'iso réponses par intervalles pour Pmax, Voc et Isc

#### 4.4.5. Courbes d'iso réponses des trois modèles établis

Finalement, pour illustrer l'utilisation de logiciel spécialisé Hide, nous présentons en Figure 4.8 la fenêtre principale permettant à l'utilisateur de déterminer le comportement des principales quantités décrivant le générateur photovoltaïque, c'est-à-dire  $V_{co}$ ,  $I_{cc}$ , et  $P_{max}$  comme évalués et présentés dans ce travail. En déplaçant le curseur de la souris à l'intérieur du domaine d'étude, nous pouvons prévoir les valeurs des réponses en n'importe quel point tel que l'essai 6 repéré par une croix sur le graph de la Figure 4.8.

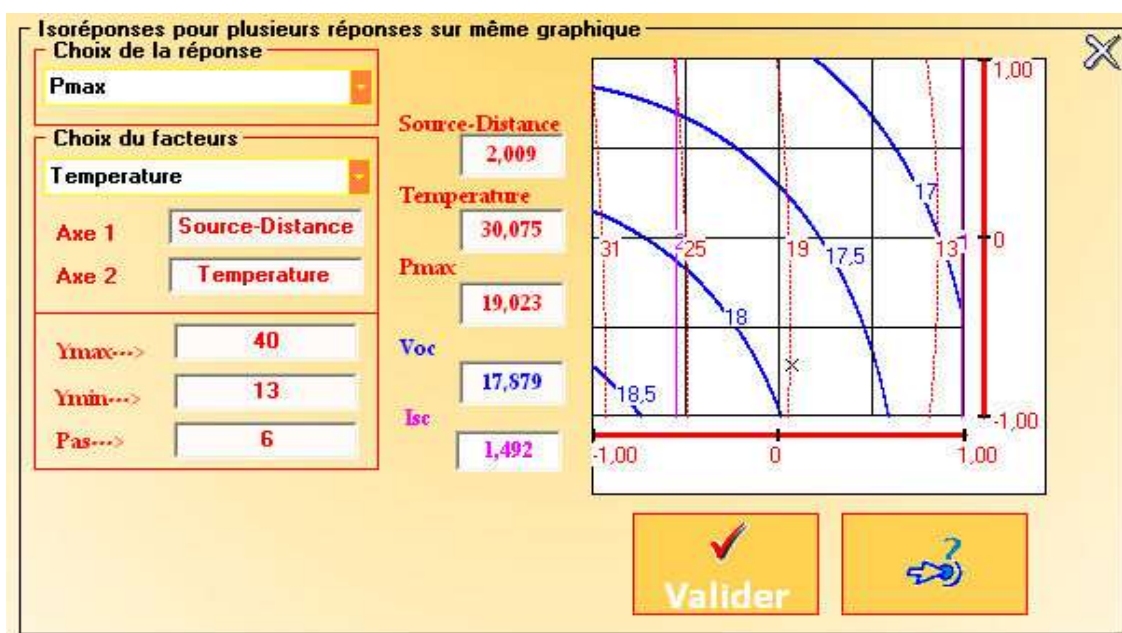


Figure 4.8 : Courbes de contour sur le même diagramme pour les trois réponses

#### **4.5. Conclusion**

Nous avons montré dans ce chapitre que la méthode de planification des expériences peut être utilisée pour prévoir le comportement opérationnel d'un panneau photovoltaïque. Les paramètres  $V_{co}$ ,  $I_{cc}$  et  $P_{max}$  des caractéristiques I-V correspondant à n'importe quel point du domaine d'étude peuvent être déterminées. Les conditions d'utilisation (endroit de l'installation, irradiance, température) sont essentielles et sont pris en considération dans ce travail. Les conclusions de l'étude ne sont valides qu'à l'intérieur du domaine d'étude. A l'extérieur, il est possible d'estimer des résultats, mais ces résultats ne doivent pas être considérés comme des prévisions véridiques, et ne doivent pas être utilisés pour tirer des conclusions sans faire des essais supplémentaires de vérification. La méthode des plans d'expériences constitue aussi un excellent outil pour comparer la qualité de différents panneaux photovoltaïque. Sa mise en œuvre nécessite l'utilisation d'un logiciel spécifique.

## CONCLUSION

Le fait de considérer n'importe quel système comme une boîte noire, c'est-à-dire qu'on ne s'intéresse qu'aux entrées (facteurs) et aux sorties (réponses), tout en ignorant complètement la structure interne de ce système, permet de donner une puissance considérable aux Plans d'expériences, puisqu'on peut traiter n'importe quel système de n'importe quelle discipline (physique, chimie, génie civil, mécanique, biologie, etc... et même de gestion). La méthode basée sur les statistiques ne prétend pas remplacer les résultats obtenus par chacune des autres disciplines, mais elle permet d'apporter des résultats complémentaires très utiles, notamment pour valider des résultats théoriques de ces autres disciplines, d'obtenir certains résultats pratiques et de faire une optimisation. Le modèle adopté par les statisticiens, en plus de sa simplicité puisqu'il se présente toujours sous forme d'un polynôme, permet de rassembler en une seule relation l'ensemble des informations pouvant être apportées par chaque facteur séparément ou conjointement (le nombre de ces facteurs pouvant largement dépasser 2 facteurs). Les mathématiciens et statisticiens peuvent donc contribuer et apporter des informations supplémentaires aux études réalisées par les autres disciplines pour peu qu'ils s'imprègnent quand même du sujet et des résultats de ces dernières.

La Méthodologie de la Recherche Expérimentale, ou méthode de plans d'expériences, est une discipline mathématique faisant partie de la statistique inférentielle. La théorie de la méthode des plans d'expériences reste toujours en développement et elle a pris une importance si grande, grâce à l'existence de logiciels spécifiques.

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés en premier lieu à l'utilisation de la théorie de processus ponctuels marqués et les méthodes MCMC pour proposer des nouvelles matrices d'expériences numériques à partir des processus ponctuels marqués markoviens de Strauss. Les plans ainsi construits permettent de bien remplir les points expérimentaux dans l'espace expérimental et de les répartir le plus uniformément possible dans le domaine d'étude. Ils peuvent respecter deux objectifs à la fois; un objectif sur la distribution des points et un autre sur la caractérisation des marques de ces points pour maximiser la force prédictive du modèle à établir. Une comparaison avec d'autres plans numériques a été effectuée et les résultats obtenus sont satisfaisants.



En second lieu, une étude a été réalisée concernant les systèmes de panneaux photovoltaïques. Signalons que c'est la première application de la méthode des plans d'expériences sur ce genre de systèmes.

Les résultats obtenus dans cette thèse, permettent d'envisager de nouvelles perspectives de recherche :

1. Caractériser les points expérimentaux par d'autres types de marques.
2. Combiner plusieurs marques à la fois.
3. Utiliser d'autres modèles de processus ponctuels marqués tel que le modèle de Bedelly [67].

# APPENDICE

## A. LISTE DES SYMBOLES ET DES ABREVIATIONS

$A$	: Borel
$\mathcal{A}$	: Tribu sur $\mathcal{X}$
$\mathcal{A}_i$	: Borélien
$a(x, y)$	: Probabilité d'acceptation du changement
$\alpha$	: constante de normalisation
$\beta$	: Vecteur des coefficients inconnus, l'intensité du processus
$\hat{\beta}$	: Vecteurs des coefficients estimés
$B$	: Borel
$B(x_i, 2^{-j})$	: Boule ouverte
$B_n$	: Boule centrée à l'origine
$B(n, p)$	: Loi Binomiale de paramètre $n$ et $p$
$Cov(\dots)$	: Covariance mathématique
$cov$	: Recouvrement
$C(\cdot)$	: Coefficient de contraction
$C_m^n$	: Combinaison de $n$ points parmi $m$ points
$\delta_x(y)$	: Mesure de Dirac en $x$
$\sigma^2$	: Variance des résidus
$d^2(\hat{Y})$	: Fonction de variance de prédiction
$d(\hat{Y})$	: Fonction d'erreur de prédiction
$d$	: Métrique sur l'espace des configurations
$d'$	: Métrique sur l'espace des marques
$\partial\{\cdot\}$	: Voisinage
Disc	: Discrépance
$\varepsilon(x)$	: Vecteur des résidus
$E(\cdot)$	: Espérance mathématique

$E^{lf}$	: Famille des configurations localement finies.
$f(x)$	: La loi de la réponse en $x$
$F$	: Valeur de Fisher
$F_{1-\alpha, p, n-p-1}$	: Valeur tabulée
$\gamma_{kl}$	: Coefficients d'interaction
$\phi(y)$	: Potentiels d'interaction
$\Phi_b(i)$	: Fonction radicale inverse
$I_n$	: Matrice d'unité
$Im(X)$	: Sous espace vectoriel engendrés par les colonnes de $X$
$(ImX)^\perp$	: Sous espace orthogonale
$I_{cc}$	: Courant de court-circuit
$j_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$	: Famille de distribution discrète
$k$	: Nombre de facteurs
$K$	: Espace des marques
$\lambda$	: L'intensité de processus de poisson homogène
$\lambda(u, x)$	: L'intensité conditionnelle de Papangelou
$MS$	: Somme moyenne des carrées
$Mindist$	: Critère de distance
$\mu$	: Mesure de Borel
$m_i$	: Marque
$n$	: Nombre d'expériences où nombre de point dans configuration
$\mathbb{N}^k$	: Espace des naturels à $k$ dimension
$N^{lf}$	: Tribu
$\mathbb{N}$	: Ensemble des entiers naturel
$N_s^{lf}$	: L'ensemble de configurations localement finies dont les points sont simples
$N_X(A)$	: Nombre de points en $A$ est une variable aléatoire discrète finie
$n(x)$	: Le nombre de points dans la configuration $x$ ayant la marque $i$

$\Omega$	: L'univers
$N_Y(A \times \{i\})$	: Nombre de points dans $A$ ayant la marque $i$
$P$	: Projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^n$ sur le sous espace engendré par les colonnes de $X$
$(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$	: Loi de probabilité discrète
$P^{(n)}(\cdot)$	: Loi d'un processus binomial à $n$ points
$P(X, \cdot)$	: Mesure de probabilité
$P$	: Noyau de transition, projecteur
$P_{MH}$	: Noyau de transition de Métropolis-Hasting
$P(x, y)$	: Noyau de transition de l'algorithme de transition
$Pmax$	: Puissance maximale délivrée
$\pi$	: Loi d'un processus aléatoire
$Q$	: Transition de proposition de changement
$R^2$	: Coefficient de corrélation multiple
$R$	: Ratio de recouvrement
$\mathbb{R}^k$	: Espace euclidienne à $k$ dimensions
$R(x, y)$	: Probabilité de transition de la chaîne d'un état actuel $x$ vers l'état $y$
$r(x, y)$	: Le ratio de Metropolis-Hastings
$r$	: Rayon
$SST$	: Somme totale des carrées
$SSR$	: Somme des carrées due à la régression
$SSE$	: Somme des carrés due à l'erreur
$s(x)$	: Nombre de paires d'expériences $(x_i, x_j)$ telles que la distance entre $x_i$ et $x_j$ est inférieure ou égale à $r$
$Var(\cdot)$	: Variance mathématique
$Vco$	: Tension en circuit ouvert
$v$	: Mesure de Borel
$x_i$	: Variable ou facteur

$X$	: Matrice d'expériences
$X(n, p)$	: Matrice de Calcul
$(X^T X)^{-1}$	: Matrice de dispersion
$\mathcal{X}$	: Ensemble des configurations dénombrable de $n$ points
$X = \{x_n, m_n\}$	: Processus ponctuel marqué
$(X_N)_{N \in \mathbb{N}}$	: Chaîne de variable aléatoire discrète
$X_0$	: Configuration initiale de $n$ points
$Y$	: Vecteur de réponses observées
$y$	: Réponse où grandeur d'intérêt
$\bar{Y}$	: Réponse moyenne observée
$Y^*$	: Vecteur des réponses observées centrées
$\hat{y}_{x_i}$	: L'erreur de prédiction au point $x_i$
$y_j$	: Une expérience générée selon la loi Normal [0.1]
$z$	: Variable d'origine
$z_0$	: Moyenne des deux niveaux haut et bas
$(\Omega, A, P)$	: Espace de probabilité
$\sim$	: Relation binaire de voisinage

## B. CODE MATLAB POUR LES RESULTATS PRESENTES EN CHAPITRE 3

### 1. Code Matlab pour dessiner une configuration sur un plan avec des cercles de rayon R

```
function []=dessiner(XI,R)
[m,n]=size(XI);
X=XI;
for i=1:m-1
mi=X(i,1);
for j=i+1:m
if X(j,1)<X(i,1)
mi=X(j,1);X(j,1)=X(i,1);X(i,1)=mi;
mo=X(j,2);X(j,2)=X(i,2);X(i,2)=mo;
end
end
end
for i=1:m
plot(X(i,1),X(i,2),'b. ');
hold on
end
for i=1:m
xc = X(i,1);
yc = X(i,2);
ang = 0:0.05:2*pi;
XCercle = xc + R * cos(ang);
YCercle = yc + R * sin(ang);
plot(XCercle, YCercle,'k -')
axis([0 1 0 1])
end
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

### 2. Code Matlab pour le critère de déscrepance

```
%la discrepance
```

```

function y=dsc(X)
n=20; w=3;
s1=0;
for i=1:n
    p1=1;
    for j=1:w
        p1=p1*(1-X(i,j))*(1+X(i,j));
    end
    s1=s1+p1;
end
s2=0;
for i=1:n
    for j=1:n
        p2=1;
        for k=1:w
            m=max(X(i,k),X(j,k));
        p2=p2*(1-m);
        end
        s2=s2+p2;
    end
end
y=(3^(-w))+1/(n^2)*s2-(1/(n*2^(w-1)))*s1;
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

### **3. Code Matlab pour le critère de recouvrement**

%le critere de recouvrement

```

function y=mindist(X)
n=20; w=3;
for i=1:n-1
    for k=i+1:n
        s=0;
        for j=1:w
            s=s+((X(i,j)-X(k,j))^2);
        end
    end
end

```



```

end
M(i,k)=s^0.5;
M(k,i)=s^0.5;
end
end
for i=1:n
M(i,i)=inf;
end
for i=1:n
t(i)=min(M(i,:));
end
q=0;
for i=1:n
q=q+t(i);
end
q1=q/n;
lamda=0;
for i=1:n
lamda=lamda+(t(i)-q1)^2;
end
y=(1/q1)*((1/n)*(lamda))^0.5;
end

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

#### **4. Code Matlab pour le critère de Distance**

```

le min dist
function y=mdist(X)
n=20; w=3;
for i=1:n-1
for k=i+1:n
s=0;
for j=1:w
s=s+((X(i,j)-X(k,j))^2);
end
end

```

```

M(i,k)=s^0.5;
M(k,i)=s^0.5;
end
end
for i=1:n
M(i,i)=inf;
end
y=min(min(M));
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

### **5. Code Matlab pour le rapport R de recouvrement**

```

%le rapport R
function y=rap(X)
n=20; w=3;
for i=1:(n-1)
for k=i+1:n
s=0;
for j=1:w
s=s+((X(i,j)-X(k,j))^2);
end
M(i,k)=s^0.5;
M(k,i)=s^0.5;
end
end
for i=1:n
M(i,i)=inf;
end
for i=1:n
t(i)=min(M(i,:));
end
t1=min(t);
t2=max(t);
y=t2/t1;

```

end

%%%

### **6. Code Matlab : Algorithme de construction**

```

n=; R=; t=; b=; w=3;
eps=; NMC=;
Rap=0;
Cov=0;
Mind=0;
Desc=0;
resultt=[];
for i=1:n
Position(i)=i;
end
for i=1:n
probabilite(i)=Position(i)/n;
end
for nbrplan=1:10
%la creation de X
Initiale=[];
for i=1:n
for j=1:w
Initiale(i,j)=random('uniform',0,1);
end
end
for i=1:n
for j=1:w
X(i,j)=Initiale(i,j);
end
end
SX0=0;
for i=1:n
for j=i+1:n
for k=1:w

```

```

d(k)=X(i,k)-X(j,k);
end
D=norm(d);
if(D<=R)
SX0=SX0+1;
end
end
end
for i=1:n
for j=1:w
Y(i,j)=X(i,j);
end
end
for N=1:NMC
for nbrel=1:n
% le calcul de nombre d'interactions entre les paires de points des
% deux configurations X et Y
hh=rand;
test=0;
j=1;
while((j<=n)&&(test==0))
if (hh < probabilite(j))
k=Position(j);
test=1;
end
j=j+1;
end
for j=1:w
y(1,j)=rand;
Y(1,j)=y(1,j);
end
Sy=0;
for i=1:n

```

```

if (i~=k)
    for j=1:w
        d(j)=X(i,j)-y(1,j);
    end
    Dy=norm(d);
    if(Dy<=R)
        Sy=Sy+1;
    else
        Sy=Sy;
    end
end
end
end
Sx=0;
for i=1:n
    if (i~=k)
        for j=1:w
            d(j)=X(i,j)-X(k,j);
        end
        Dx=norm(d);
        if(Dx<=R)
            Sx=Sx+1;
        else
            Sx=Sx;
        end
    end
end
end
%%%%%% le calcul des marques pour la configuration courante
somme=0;
inverse=inv(X'*X);
for i=1:n
    m1=(X(i,:)*(inverse)*X(i,:));
    if(m1<=eps)
        somme=somme+1;
    end
end

```

```

end
end
som=0;
inverse=inv(Y'*Y);
for i=1:n
m2=(Y(i,:)*(inverse)*Y(i,:));
if(m2<=eps)
som=som+1;
end
end
%%%% le calcul de probabilité d'acceptation
f1=b^som;
by=(t^Sy)*(f1);
bx=(t^Sx)*(b^somme);
a=min(1,by/bx);
if (a==1)
for j=1:w
Xk,j)=y(1,j);
Y=X;
end
end
%%%%%%calcul de nbr d'interactions entre les pts ds la conf retenue
SX=0;
for i=1:n
for j=i+1:n
for k=1:w
d(k)=X(i,k)-X(j,k);
end
D=norm(d);
if(D<=R)
SX=SX+1;
else
SX=SX;

```



## REFERENCES

1. Fisher, R.A., “The Design of Experiments”, 2nd edn, Oliver and Boyd, Edinburgh (1935).
2. Kiefer, J., “Optimum experimental designs”, *J. R. Stat. Soc. B* 21, (1959), 272–319.
3. Box, G.E.P., and BEHNKEN, D.W., “Some new three level designs for the study of quantitative variables”, *Technometrics*, vol.2, (1960), P.455-475.
4. Daley, D.J. and Vere-Jones, D., “An Introduction to the Theory of Point Processes”, Volume I: Elementary Theory and Methods, 2nd edn, Springer, Berlin, (1988).
5. Franco, J., “Planification d’Expériences Numériques en Phase Exploratoire pour des Codes de Calculs Simulant des Phénomènes Complexes”, Doctoral thesis, l’Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint Etienne, (2008).
6. Strauss, D.J., “A method for clustering”, *Biometrika* 62, (1975), 467–476.
7. Chib, S. and Greenberg, E., “Understanding the Metropolis–Hastings algorithm”, *Am. Stat.* 49, (1995), 327–335.
8. Hastings, W.K., “Monte Carlo sampling methods using markov chains and their applications”, *Biometrika* 57, (1970), 97–109.
9. SCHIMMERLING P., SISSON J.C. et ZAÏDI A., “Pratique des plans d’expériences”, Editions Tec Doc, Paris, (1998), 526 pages.
10. Tinsson, W., “Plans d’expérience : constructions et analyses statistiques”, Springer, Berlin Heidelberg, (2010).
11. Taguchi, G., and Wu, Y., “Introduction to off-line quality control”, Central Japan Quality Control Association, Nagoya, (1980).
12. GOUPY J., “Plans d’expériences : les mélanges”, DUNOD Paris, (2000), 303 pages.
13. Sergio Ivan, L.S., “Optimal statistical design for variance components in multistage variability modele”, Doctoral thesis, University of Manchester, 2014.
14. Gauchi, J.P., “Plans d’expériences optimaux pour modèles non linéaires, Plan d’expériences”, Application à l’entreprise, Editions Technip, (1997).
15. Goupy, J., “Modélisation par les plans d’expériences”, *Techniques de l’Ingénieur, traité mesures et contrôle*, R 275, (2000), 1-23.



16. Goupy, J., "La méthode des plans d'expériences", DUNOD, Paris, (1988), 303 pages.
17. Goupy, J., "Plans d'expériences pour surface de réponse", DUNOD, Paris, (1999), 409 pages.
18. Mathieu D., Phan tan-luu, R. et Sergent, M., "Méthodologie de la recherche expérimentale", LPRAI, Université d'Aix-Marseille, (1998).
19. Saporta, G., "Probabilités, Analyse des données et Statistique", Editions Technip, (1990).
20. Walter, T., "Plans d'expériences : Construction et analyse statistique", Edition Springer (2010).
21. Searle, S. R., "Linear Models", John Wiley & Sons, New York, (1971).
22. Dodge, Y. et Rousson, V., "Analyse de régression appliquée", Dunod, n° ISBN : 2-10-048659-4, (2004).
23. Dominique C., "Plans d'expériences factoriels", Spriger, Paris, (1996).
24. Box, G.E.P. and Hunter, J.S., "The  $2^{k-p}$  fractional factorial designs ", Technometrics, 42(1), (2000), .28-47,
25. Plackett, R.L. and Burman, J.P., "The Design of Optimum Multifactorial Experiments", Biometrika n°3, (1946), 305-325.
26. Souvay, P., "Plans d'expériences : Méthode Taguchi", Collection A Savoir, AFNOR, (2002).
27. Box, G.E.P. and DRAPER, N.R., "Empirical Model Building and response surface ", John Wiley and Sons, new york, (1987).
28. Morris, M. D. A., "class of three-level experimental designs for response surface modeling", Technometrics, 42, No. 2, (2000), 111-121.
29. Mathieu, D. et Phan-tan-luu, R., " Planification d'expériences en formulation ", Techniques de l'Ingénieur, traité Génie des procédés, Doc.J242, (2000).
30. Myers, R.H. and Montgomery, D.C., "Response Surface Methodology", Wiley New-York, (1995).
31. Mitchell, T.J., "An algorithm for the construction of « D-optimal » experimental designs", Technometrics, 16 (2), (1974), 203-210.
32. Pronzato, L. and Müller, W. G., "Design of computer experiments: space fling and beyond", Stat. Comput., 22(3), (2012), 681–701.
33. Loh, W.L., "On latin hypercube sampling", Ann. Stat. 24, (1996), 2058–2080.

34. Faure, H. ‘‘Discrépance quadratique de la suite de van der Corput et de sa symétrique ‘’, *Acta Arith.* 55, (1990), 333–350.
35. Halton, J.H., ‘‘On the efficiency of certain quasi-random sequences of points in evaluating multidimensional integrals’’, *Mathematik* 2, (1960), 84–90.
36. Sobol, I.M., ‘‘Uniformity distributed sequences with an additional uniform property’’, U.S.S.R, *Computational Mathematics and Mathematics*, (1976).
37. Faure, H., ‘‘Discrepance de suites associées a un système de numération (en dimension s)’’, *Acta Arith.* 41, (1982), 337–351.
38. Mathieu D., ‘‘Contribution de la Méthodologie de la Recherche Expérimentale à la relation structure-activité ‘’, Thèse de doctorat, Université d’Aix-Marseille (1981).
39. Johnson, M.E., Moore, L.M. and Ylvisaker, D., ‘‘Minimax and maximin distance designs’’, *J. Stat. Plann. Inference* 26, (1990), 131–148.
40. Gunzburger, M. and Burkardt, J., ‘‘Uniformity measures for point samples in hypercubes ‘’, [https://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/publications/gb\\_2004.pdf](https://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/publications/gb_2004.pdf), (2004).
41. Warnock, T.T., ‘‘Computational investigations of low-discrepancy point sets II’’, In: Niederreiter H., Shiue, P.J.S. (eds.) *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods in Scientific Computing. Lecture Notes in Statistics*, vol. 106, Springer, New York, (1995).
42. Droesbeke, J.J., Lejeune, M. et Saporta, G., ‘‘Analyse Statistique Des données Spatiales’’, Technip, Paris, (2006).
43. Descombes, X., ‘‘ Méthodes stochastiques en analyse d’image : des champs de Markov aux processus ponctuels marqués’’, Habilitation à diriger des Recherches, Université de Nice-Sophia Antipolis, (février 2004).
44. Stoyan, D., Kendall, W.S. et Mecke, J., ‘‘Stochastic Geometry and its applications’’, Wiley, New York, (1995).
45. Jaulin, F., ‘‘Processus ponctuels markoviens ‘’, Juin 2008.
46. Van Lieshout, M. N. M., ‘‘Markov Point Processes and their Applications’’, Imperial college press, London, (2000).
47. Gaetan, . et Guyon, X., ‘‘Modélisation et statistique spatiales’’, Springer, New York , (2008).
48. Hawkes, A. G., ‘‘Spectra of some self-exciting and mutually exciting point processes’’, *Biometrika*, 58, (1971), 83-90.

49. Ripley, B.D., and Kelly, F.P., "Markov point processes", *Journal of the London Mathematical Society* 15, (1977), 188–192.
50. Baddeley, A.J. and Møller, J., "Nearest-neighbour Markov point processes and random sets", *International Statistical Review* 57, (1989), 90–121.
51. Chib, S. and Greenberg, E., "Markov chain Monte Carlo simulation methods in econometrics", *Econ. Theory*, 12, (1996), 409–431.
52. Meyn, S.P. and Tweedie, R.L., "Markov chains and stochastic stability", Springer, New York, (1993).
53. Dobrushin, R.L., "Central limit theorem for non stationary Markov chains", *Th. Proba. Appl.*, 1, (1956), 329–383.
54. Winkler, G., "Image Analysis Random fields and Dynamic Monte Carlo Methods", Springer, Berlin, (1995).
55. Metropolis, N., Rosenbluth A. W., Teller A. H. and Teller E., "Equation of state calculations by fast computing machines" *Journal of Chemical Physics*, (1953), 1087–1092.
56. Geyer, C.J. and Møller, J., "Simulation and likelihood inference for spatial point processes", *Scandinavian Journal of Statistics, Series B*, 21 :359–373, (1994).
57. Tierney, L., "Markov chains for exploring posterior distributions", *Ann. Statist.*, 22, (1994), 1701–1962
58. Geman, S. et Geman, D., "Stochastic Relaxation, Gibbs Distributions and the Bayesian Restoration of Images", *IEEE Trans. on PAMI*, 6(6), (novembre 1984), 721–741.
59. **Elmossaoui, H.**, Oukid, N. and Hananne, F "Construction of computer experiment designs using marked point processes", *Afrika Matematika*, Doi.org /10.1007/s13370-020-00770-9, Springer, (2020).
60. **Elmossaoui, H.**, Oukid, N. and Hananne F, "New computer experiment designs using marked point processes and Metropolis-Hasting", *The first international conference on Materials, Energy and Environment, MEE2020*, University of Echahid Hamma Lakhdar, El Oued, (2020).
61. Morris, M.D. and Mitchell, T.J., "Exploratory designs for computer experiments", *J. Stat. Plan. Inference* 43, (1995), 381–402.
62. Shewry, M.C. and Wynn, H.P., "Maximum entropy sampling", *J. Appl. Stat.* 14, (1987), 165–170

63. Hannane, F., **Elmossaoui, H.**, Nguyen, T., Petit, P. and Aillerie, M., “Forecasting the PV panel operating conditions using the Design of Experiments method”, *Energy procedia*, Elsevier, (2013).
64. Charles, J.-P., Hannane, F., **El-Mossaoui, H.**, Zegaoui, A., Nguyen, T.V., Petit, P. and Aillerie, M., “Faulty PV panel identification using the Design of Experiments (DoE) method”, *Electrical Power and Energy Systems*, 57, Elsevier, (2014), 31–38.
65. Charles, J.-P., Aillerie, M., Petit, P., Hannane and F., **El-Mossaoui, H.**, “ Warning of accidental shadowing of a PV generator in operation analyzed with DOE method”, *Solor Energy* 122, Elsevier, (2015), 455-463.
66. **Elmossaoui, H.**, “Design of experiments software (Hide)”, Magister Thesis. Saad Dahlab University of Blida, Algeria, (2004).
67. Baddeley, A.J. and van Lieshout, M.N.M., “Area interaction point processes”, *Ann. Inst. Stat. Math.* 47, (1995), 601–619.