UNIVERSITE SAAD DAHLEB DE BLIDA

Faculté des Sciences
Département de mathématiques

MEMOIRE DE MAGISTER

En Mathématiques

Spécialité : Recherche opérationnelle

Théorèmes central limite pour les sommes des variables aléatoires modifiées

Par

Amina BOUKOFTANE

Devant le jury composé de :

F. HANNANE	Professeur, U.de Blida	Président
H. AIT HADDADENE	Professeur, U.S.T.H.B, Alger	Examinateur
A. DERBALA	Maître de conférences, U. de Blida	Examinateur
O.TAMI	Chargé de cours, U. de Blida	Examinateur
H.OULDROUIS	Maître de conférences, U. de Blida	Encadreur

Blida, Fevrier 2007

RESUME

Le but de ce travail est l'obtention des théorèmes central limite pour les sommes des variables aléatoires modifiées, indépendantes et identiquement distribuées dans le cas où les moments d'ordre deux n'existent pas .

La première modification légère pour des fonctions d'influence, sur l'ensemble des variables aléatoires permet la résolution du problème de la convergence asymptotique normale pour les sommes totalement et partiellement modifiées.

La fonction de répartition des variables aléatoires a été remplacée par la distribution empirique dans le but d'avoir la version empirique .

Une lourde modification pour des fonctions d'influence consiste a exprimer les transformations faites sur la suite des variables aléatoires, et l'ensemble des paramétres utilisées pour une convergence vers la loi normale centrée et réduite.

Lors de l'application des fonctions d'influence le conformément asymptotique normale peut être obtenu, beaucoup de facteurs ont apportés le choix de ces fonctions. Des fonctions d'influence différentes impliquent des vitesses de convergence différentes pour cela il est avantageux d'utiliser celles qui donnent la plus grande vitesse de convergence, en trouvant une borne inférieure et supérieure pour l'erreur uniforme dans le théorème central limite.

La notion du principe d'invariance fait partie de notre étude car elle fortifie celle de la convergence finie dimensionnelle. Nos résultats peuvent être généralisés, en ajoutant une condition qui va permettre de recouvrir l'ensemble des résultats obtenus. L'interêt que présente ce théorème et l'ensemble des modifications faites confirment l'efficacité de cette approche.

ABSTRACT

The aim of this work is to obtain the central limit theorem of modifying the summands of sums of independant, identically distributed random variables when they fail to have second or even first moments.

The first intermediate modification for a large of functions called influence functions will be used for solving the convergence asymptotic normal, for totally and partially modified sums. The distribution of random variables is replaced by the empirical distribution in order to obtain the empirical version.

A heavy modification consists to express the different tranformations mades for a sequense of random variables, and parameters used for the normal center reduce convergence.

The asymptotically normal limits may be obtained, when we applied influence functions, many factors are allows the choice of this functions. A different influence functions imply different rates of convergence, it's conceited to use which give a large rate of convergence, we find a upper and lower bounds for the uniform error in the central limit theorem.

The notion of invariance principle is examine because she fortify the convergenve of the finite dimensional distributions. Our results can be obtained by add another condition in order to cover a set of results obtained. The advantage of this theorem and the different modifications used confirmed the efficiency of this approach.

ملخص

الهدف من هذا العمل هو الحصول على نظرية الحد الوسطي لمجموع المتغيرات العشوائية المستقلة ذات التوزيع المتساوي و ذلك عند عدم وجود العزوم من الدرجة الثانية .

التغيير الطفيف الاول لدالة التاثير على مجموع المتغيرات العشوائية يسمح بحل اشكالية التقارب السوي ، دالة التوزيع استبدلت بالدالة التجريبية و ذلك بهدف الحصول على نظرية الحد الوسطي التجريبي.

تغييرات ثقيلة على دالة التاثير استخدمت لاجراء ما يلزم من تحويلات على متتالية المتغيرات العشوائية و على مجموع الثوابت للتقارب نحو القانون السوي المركزي المختصر.

عند تطبيق دالة التاثير لاحظنا ان التقارب السوي موجود، كثير من العوامل ساهمت في اختيار هذه الدالة . دوال تاثير مختلفة تسمح بالحصول على سرعات تقارب مختلفة لهذا يجب استخدام تلك التي تعطي اكبر سرعة.

ان نظام التغير كان محل دراسة في هذا العمل لانه يقوي نظرية التقارب البعدي التام.
كل ما تحصلنا عليه يمكن تعميمه و ذلك باضافة شرط يسمح بالمام جميع النظريات .
كما لنظرية الحد الوسطي من اهمية من جهة و لمجموعة التغييرات التي قمنا بها على المتغيرات العشوائية من جهة اخرى تاكدنا من نجاعة العمل المتبع.

REMERCIEMENT

Tout d'abord, je tiens à remercier Dieu tout puissant pour m'avoir donné la santé, la volonté et me guidé vers la connaissance et le savoir.

Je tiens à remercier vivement Monsieur Hamid OULD ROUIS qui a encadré ce travail de thèse. Par sa compétence et sa maturité scientifique, il a su me guider de façon pertinente dans mes recherches. Sa disponibilité, son écoute et ses qualités humaines m'ont permis d'avancer sereinement. Je lui suis infiniment reconnaissant d'avoir renforcé ma motivation à poursuivre dans la recherche.

Je remercie Monsieur Farouk HANNANE, professeur à l'université de Blida, d'avoir honorer ma soutenance en présidant le jury.

Je tiens à remercier Monsieur Hacène AIT HADDADENE, professeur à l'université des sciences de la technologie Houari Boumedienne d'avoir honorer ma soutenance en acceptant de faire partie de jury.

J'adresse mes remerciements à Monsieur Ali DERBALA, maître de conférences à l'université de Blida qui m'a fait l'honneur d'accepter de juger mon travail.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur Omar TAMI, chargé de cours à l'université de Blida d'avoir accepté d'être membre de jury, je lui remercie pour ses encouragements et pour les précieux conseils qu'il m'a prodigués. La lecture approfondie de mon manuscrit, les remarques qu'il a formulées sont à la base de la plupart des rectifications.

Je remercie vivement Monsieur Mostafa BLIDIA, professeur à l'université de Blida qui a contribué à ma formation durant les années d'´etudes passées. Je tiens à lui témoigner ici toute ma reconnaissance.

Merci à ma chère mère, mon cher père pour leur soutien constant, merci à mes frères et soeurs pour leur patience et je pense tout particulièrement à Meriem, Ibtissem et Bouchra.

Je remercie enfin mes chères amies Wafia, Nadia, Selma, tous mes camarades et compagnons de recherche du département de mathématiques pour leur éternelle bonne humeur et leur sympathie.

TABLE DES MATIERES

LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX

Introduction

Il n'est plus à démontrer l'importance du calcul des probabilités dans beaucoup de domaines, tels que l'économie, la médecine, la biologie, les sciences humaines y compris les sciences politiques et dans des domaines nouveaux comme ceux qu'ouvrent les problèmes d'Auto-organisation et de "l'intelligence artificielle". Il devient nécessaire d'étudier le calcul des probabilités avec rigueur en utilisant les concepts mathématiques les plus modernes et les plus opérationnels .

La théorie des probabilités est une théorie mathématique du domaine des sciences dites exactes, neutres, abstraites, universelles, et pourtant les concepts probabilistes représentent des expériences concrètes. La démarche de construction de ces concepts est matérialiste et permet une pésentation pédagogique de type FREINET: On observe une réalité, puis on l'examine pour essayer de résoudre le problème concret posé par cette réalité .

Le théorème central limite est l'un des résultats les plus importants dit "pilier" de la théorie des probabilités. De façon informelle, ce théorème donne une estimation très précise de l'erreur que l'on commet en approchant l'espérance mathématique par la moyenne empirique.

Ce phénomène a d'abord été observé par Gauss qui l'appelait loi des erreurs; mais ce dernier n'en a pas donné de démonstration rigoureuse. La preuve du théorème a été apportée par Moivre Laplace ; le théorème porte donc parfois leurs noms.

Pour que ce théorème soit applicable il faut y imposer certaines conditions. Considérons tout d'abord une suite de variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, ..$, d'espérance $E(X) = \mu < \infty$, et de variance $Var(X) = \sigma^2 < \infty$, chacune ayant la même loi de probabilité, alors:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n - n\mu}{\sigma}\right) \xrightarrow{D} N(0,1)$$

i.e Si $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$:

$$\frac{S_n \; - \; E \; (S_n)}{\sqrt{Var \; (S_n)}} \xrightarrow{D} N(0,1)$$

Désormais, la condition de variance finie de la distribution est également une condition suffisante, mais non nécessaire de convergence vers la loi normale.

Il est clair, cependant, que la distribution des variables aléatoires que l'on somme ne doit pas être trop "large". Un exemple de loi large est fourni par la loi de Cauchy (ou loi lorentzienne), dont tous les moments sont infinis, en fait la densité d'une loi de cauchy est définie sur $\mathbb{R}$ telle que:

$$f(x) = \frac{1}{\pi \left(\; 1 + x^2 \right)}$$

Notons que $EX = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\pi(\; 1+x^2)} dx$ diverge.

Si l'on somme un nombre N de telles variables, cette somme est encore distribuée selon une loi lorentzienne, ce que l'on peut facilement vérifier en utilisant les fonctions caractéristiques correspondantes. Si grand que soit N, il n'y a jamais tendance vers la loi normale.

En fait, on peut identifier précisément les fonctions $f(x)$qui appartiennent au "domaine d'attraction" de la loi normale par le critère suivant :

Une distribution qui décroît comme x^{-3} pour x grand appartient au domaine d'attra-ction de la loi normale, bien que sa variance soit infinie, et toutes les distributions décroissant plus vite qu'en x^{-3}pour x grand appartiennent également au bassin d'attra-ction de la gaussienne, qui est ainsi extrêmement vaste.

A cause de termes de grandes valeurs, LEVY [2] a montré qu'on ne peut pas obtenir la convergence vers la loi normale pour les "sommes des variables aléatoires". D'autres travaux qui ont été établis dans le but d'obtenir des théorèmes central limite même si l'espérance et la variance n'existent pas ont été réalisés d'abord par HAHN et KUELBS

[7], qui ont modifiés l'ensemble des termes. Cette modification a été faite par la fonction tronquée suivante:

$$T_t(x) = xI(|x| \leq t)$$

D'aprés HAHN, KUELBS et WEINER [1] l'ensemble des variables aléatoires peut être aussi modifié par la fonction censurée telle que:

$$\begin{aligned} C_t(x) &= (|x| \wedge t)\, sgn(x) \\ &= xI(|x| \leq t) + tI(|x| > t) \end{aligned}$$

Pour cela et en continuant ces travaux , une nouvelle version du théorème central limite est obtenue en modifiant les sommes des variables aléatoires. Notre but dans cette thèse est donc de prolonger la notion de la limite centrale, tout en modifiant les variables aléatoires pour des fonctions $H_t(x)$ appelées fonctions d'influence telles que:

$$T_t(x) \leq H_t(x) \leq C_t(x)$$

Pour simplifier ce point de vue on va essayer de répondre à la question suivante: Quelles seront :μ_n à centrer, σ_n à réduire pour que $\frac{\sum H_t(X_i) - \mu_n}{\sigma_n}$tend vers une loi normale centrée réduite $N(0,1)$.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons donc à étudier le théorème central limite par rapport aux différentes modications faites sur les variables aléatoires . Les premiers résultats ont fait l'objet de plusieurs articles dans lesquels les auteurs ont obtenus des résultats importants dans un domaine qui s'avère intéressant du point de vue théorique et même pratique; la notion de la vitesse de convergence ainsi que du principe d'invariance font partie de notre étude.

Le premier chapitre est consacré à donner les notions de base pour n'importe quelle étude probabiliste tout en utilisant le langage de la théorie de la mesure, une introduction à la théorie des probabilités a été décrite , ainsi que des définitions, des interprétations, des théorèmes utilisés tout au long de ce mémoire. On s'interesse aux différents types de convergence en exprimant une relation d'inclusion entre eux , une autre partie va illustrer l'intérêt que présente le théorème central limite aussi bien dans la pratique que dans le domaine théorique. Nous présenterons au deuxième chapitre des applications du théorème pour les méthodes inductives reliées en incluant un modèle économique.

Le troisième chapitre exprime l'état de ce théorème en cas d'une modification légère dite intermédiaire, en parallèle la version empirique, qui va permettre de remplacer la distribution de la variable aléatoire par celle empirique.

D'autre part une modification lourde des variables aléatoires va nous conduire à la convergence vers la distribution normale, nous étudierons aussi le niveau de la vitesse de convergence en terme central limite, c'est ce qu'on va voir au quatrième chapitre.

Dans le cinquième chapitre et dans le but de fortifier la notion de la convergence asymptotique normale vers celle du principe d'invariance, beaucoup de résultats ont été obtenus dans ce sens. Notons aussi qu'une généralisation des résultats précédents a été décrite .

CHAPITRE 1

GÉNÉRALITÉS SUR LA THÉORIE DE LA MESURE ET PROBABILITÉS

1.1 Introduction

En général on ne peut pas espérer mesurer toute les parties. Il convient donc de limiter la théorie à des parties suffisamment régulières, pour être mesurables et le choix des parties mesurables est en principe un préalable à toute définition d'une mesure. En fait on peut distinguer deux types d'utilisateurs de la théorie de la mesure : les probabilistes qui vont utiliser cette notion de mesurabilité pour pouvoir, en changeant l'ensemble des parties considérées comme mesurables, modéliser certaines notions de la théorie des probabilités, ainsi que les analystes qui travaillent essentiellement avec la mesure de Lebesgue (qui correspond à la notion de longueur, d'aire, de volume, etc...) et souhaitent pouvoir mesurer le plus de parties possibles.

Dans cette section nous donnons l'ensemble des notions utilisées tout au long de ce mémoire, en commençant par des rappels sur la théorie de la mesure tout en introduisant la relation entre la mesure et la probabilité, nous faisons une présentation de la convergence des variables aléatoires qui sera un préliminaire pour entamer la notion du théorème central limite.

1.2 Rappels de mesure

Intuitivement le problème de la mesure est le suivant :

Etant donné un ensemble X, définir pour toute partie A de X, ou du moins pour certaines d'entre elles, un nombre $m(A)$ (sa mesure) qui permette d'estimer la grandeur de cette partie.

On exige naturellement de cette définition qu'elle vérifie l'additivité c'est-à-dire que pour A et B parties disjointes on demande $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$. Cette propriété se généralise immédiatement par récurrence à l'additivité finie.

L'exemple le plus simple est fourni par le cardinal (ou nombre d'éléments) : $m(A) = \#A$. Un autre exemple, lorsque $X = \mathbb{R}$ est fourni par la longueur qui permet de mesurer les intervalles.

Plus généralement, lorsque X est un espace euclidien de dimension 2 (resp.3) l'aire (resp.le volume) donne encore un exemple de mesure.

Le premier exemple montre l'utilité d'accepter la valeur $+\infty$ si l'on veut mesurer toutes les parties de X (lorsque X est infini).Le deuxième exemple montre qu'en général la mesure n'est définie a priori que sur certaines parties.

En dimension 1 cela n'est pas trop gênant car les intervalles sont les parties de $\mathbb{R}$ les plus fréquemment considérées. En dimension supérieure le problème est plus intéressant (et plus délicat).

En effet la définition de l'aire passe en général par le choix d'un carrée unité (d'aire 1) puis, par différentes opérations, on détermine l'aire des rectangles, des triangles, des polygones et de figures de plus en plus complexes en utilisant l'additivité (finie ou même dénombrable). On peut faire une remarque analogue pour les volumes.

Soit une expérience aléatoire décrite par la donnée d'un espace Ω (aussi appelé espace des "épreuves") dont les éléments notés ω (appelé "issues"), sont les résultats possibles de l'expérience.

Soit $\mathcal{F}$une partie ou sous-ensemble de Ω. Les ω sont des événements particuliers : élémentaires ou atomiques. Cependant ils ne font pas nécessairement partie de $\mathcal{F}$. A priori, on pourrait ainsi considérer l'ensemble $P(\Omega)$ de toutes les parties de Ω comme ensemble des événements aléatoires possibles dans Ω.

Pour pouvoir envisager de parler de mesure dans un référentiel Ω donné il est indispensable d'en préciser les parties mesurables.

Définition 1.1. *[17]on appelle algèbre sur Ω une famille $\mathcal{F}$ de parties de Ω vérifiant:*

1. $\Omega \in \mathcal{F}$.
2. *L'union finie d'éléments de $\mathcal{F}$ est un élément de $\mathcal{F}$.*
3. $\forall B \in \mathcal{F}$,*on a* $B^c \in \mathcal{F}$.

Remarque 1.2. *notons que si pour* (2) *on a l'union infinie on parle de la $\sigma-$algèbre. Les éléments de $\mathcal{F}$ sont appelés ensembles mesurables, et le couple* $(\Omega, \mathcal{F})$ *est appelé* *espace mesurable.*

Définition 1.3. *[17]Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable et $B \in \mathcal{F}$.On appelle fonction indicatrice de B l'application*

$I_B : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$I_B(x) = \begin{cases} 0 \ , \ \text{si } x \notin B \\ 1 \ , \ \text{si } x \in B \end{cases}$$

Définition 1.4. *[17]soit $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ deux espaces mesurables et*

$$f : (\Omega_1, \mathcal{F}_1) \longrightarrow (\Omega_2, \mathcal{F}_2)$$

une application .On dit que f est mesurable si : $\forall B \in \Omega_2$ on a $f^{-1}(B) \in \Omega_1$.

Notons qu'une mesure est une fonction qui peut associe une «longueur», un «volume» ou encore une «probabilité » à certaines parties d'un ensemble donné. Il s'agit d'un important concept en analyse et en théorie des probabilités. Formellement, une mesure μ est une fonction qui associe à chaque élément S d'une σ-algèbre donnée une valeur $\mu(S)$, qui est un réel positif ou infini dont certaines propriétés doivent être vérifiées .

1.2.1 Mesure de Lebesgue

Définition 1.5. *[17]Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable. On appelle mesure sur $(\Omega, \mathcal{F})$ une application $\mu : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant:*

1. $\mu(\phi) = 0$.
2. *pour toute famille dénombrable ou finie on a $\mu(\cup\, \omega_n) = \sum \mu(\omega_n)$*

   Le triplet$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ est appelé "espace mesuré".

Remarque 1.6. *On désigne par $\mathcal{B}(\mathbb{R})$la tribu borélienne de $\mathbb{R}$ (c'est la tribu engendrée par la topologie usuelle qui est définie par la famille des intervalles ouverts).*

Propriétés vraies presque partout

On utilise l'expression "presque partout" pour indiquer qu'une propriété est vraie sauf sur un ensemble de mesure nulle.

Définition 1.7. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *un espace mesuré et* $B \subset \Omega$ *, on dit que* B *est de mesure nulle si:*

$$\mu(B) = 0.$$

Définition 1.8. *[17]soit* f *une fonction mesurable de signe quelconque, on dit que* f *est intégrable si* $\int |f| \, d\mu$ *est fini.*

1.2.2 mesure de probabilité

Définition 1.9. *[18]Soit* $(\Omega, \mathcal{F})$ *un espace mesurable , on peut définir une mesure de probabilité* P *sur* $(\Omega, \mathcal{F})$ *telle que* P *est une fonction définie de* $\mathcal{F}$ *dans* $\mathbb{R}$ *qui vérifie*

1. $P(A) \geq 0 \ \forall \ A \in \mathcal{F}$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. P *est* $\sigma-$*additive i.e* $\forall \ A_i \in \mathcal{F}, A_i$ *dijoints on a* $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

1.3 Variable aléatoire réelle

Etant donné l'ensemble des nombres réels que l'on munit de la tribu des boréliens , on appelle variable aléatoire réelle X une application mesurable de Ω dans $\mathbb{R}$:

$$(\Omega, \mathcal{F}) \xrightarrow{X} (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \text{ tel que } \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\, ; X^{-1}(A) \in \mathcal{F}.$$

On appelle fonction de répartition l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x).$$

Pour qu'une fonction F de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[0, 1]$ soit la fonction de répartition de la loi de probabilité P d'une variable aléatoire X il faut et il suffit que la fonction F soit monotone croissante et continue à gauche sur $\mathbb{R}$ et admette les limites respectives 0 et 1 en -∞ et $+\infty$.

Remarque 1.10. *La probabilité d'un intervalle se calcule alors simplement:*

$P\left(\ [a.b[\right) = F\left(b\right) - F\left(a\right)$

Espérance d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, l'espérance d'une variable aléatoire si elle existe est définie par:

$EX = \int\limits_{\Omega} X\left(\omega\right) dP\left(\omega\right)$

Notons que :

1. $\int\limits_{A} X\left(\omega\right) dP\left(\omega\right) < \infty \Longleftrightarrow \int\limits_{A} \left|X\left(\omega\right)\right| dP\left(\omega\right) < \infty.$
2. Si $X \geq 0$ .p.p sur A alors, $\int\limits_{A} X dP \geq 0$.En particulier $EX \geq 0$.
3. Si $X_1 \geq X_2$ p.p sur $A \Longrightarrow \int\limits_{A} X_1 dP \geq \int\limits_{A} X_2 dP$.En particulier $EX_1 \geq EX_2$.

Variance d'une variable aléatoire

$E(X^2)$ mesure la grandeur absolue moyenne de X. Ce nombre est d'autant plus grand que la loi de probabilité de X, est plus concentrée sur les grandes valeurs > 0 ou < 0 de X, c'est plutôt $\sqrt{E(X^2)}$ qu'il faudrait considérer, puisque ceci s'exprime dans la même unité que X.

La variance d'une variable aléatoire si elle existe :

$Var(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = \sigma^2.$

$\sigma > 0$ s'appelle l'écart type de X.

Remarque 1.11. *Notons que la loi d'une variable aléatoire est caractérisée par :*

1. *sa fonction de répartition*
2. *sa fonction caractéristique :*

   $u \in \mathbb{R} \longrightarrow \phi_X\left(u\right) = E\left(e^{iux}\right).$

1.4 Théorèmes de convergences

Ce sont des théorèmes qui donnent des conditions suffisantes pour avoir:

$$\lim \left(\int f_n dx \right) = \int \left(\lim f_n\right) dx$$

Ceci permet de calculer des intégrales et simplifie l'étude des fonctions définies par des intégrales.

L'intérêt des théorèmes de convergences n'est pas seulement pratique mais aussi théorique car ils rentrent dans la justification du théorème de Fubini(voir par la suite) et des propriétès des fonctions définies par des intégrales et des espaces L^p.

Remarque 1.12. $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \Re / \ f \ mesurable \ et \ \int |f|^p \, d\mu < \infty \right\}.$

Théorème de la convergence dominée(ou de Lebesgue)

soit (f_n) une suite de fonctions intégrables qui converge presque partout vers f, et g une fonction intégrable telle que $| \ f_n| \leq g$, alors f est intégrable et $\lim \int f_n dx = \int f dx$.

Espace produit , théorème de Fubini

Ici on donne la définition d'un espace produit puis le théorème de Fubini qui justifie l'intégration par rapport à l'une de variables puis l'autre.

Définition 1.13. *Soit* $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ *et* $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ *deux espaces mesurés .*

On note $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$

$$\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 = \{ B_1 \times B_2 : B_1 \in \mathcal{F}_1 \ \ et \ B_2 \in \mathcal{F}_2 \ \} \text{ ,ensembles des rectangles.}$$

$$B_1 \times B_2 = \{ (x, y) : \ x \in B_1 \ \ et \ y \in B_2 \} .$$

On appelle espace mesurable produit $(\Omega, \mathcal{F})$, l'espace dont $\mathcal{F}$ est la tribu engendrée par $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ sur Ω.

Théorème 1.14. $(Fubini)$ *Soit* $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ *et* $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ *deux espaces mesurés, et* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *l'espace mesuré produit, et soit* f *une fonction intégrable. On a:*

$$\begin{aligned} \int_\Omega f(x, y) \, d\mu &= \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x, y) \, d\mu_1 \right) d\mu_2 \\ &= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x, y) \, d\mu_2 \right) d\mu_1 . \end{aligned}$$

Pour une initiation en probabilité nous commençons par deux inégalités très classiques du calcul des probabilités ; elles sont d'usage fréquent.

Inégalités de Markov et Bienaymé Tchebychev

Tout d'abord l'inégalité de Markov dont la démonstration est très simple.

Proposition 1.15. *[22]Soit X une v.a.r. positive et intégrable. Alors*

$$\forall a > 0, aP(X \geq a) \leq E[X].$$

La démonstration de cette inégalité est élémentaire. Il suffit de remarquer que, comme X est une v.a.r. positive:

$X = XI_{X<a} + XI_{X\geq a} \geq XI_{X\geq a} \geq aI_{X\geq a}$.

Et d'utiliser la croissance de l'éspérance pour obtenir $E[X] \geq aE[I_{X\geq a}] = aP(X \geq a)$.

L'inégalité ci-dessus est vraie pour $a = 0$ mais ne présente dans ce cas aucun intérêt.

Remarque 1.16. *[22]Notons que si X est une v.a.r positive et $r > 0$, alors $X(\omega) \geq a$ si et seulement si $X^r(\omega) \geq a^r$, et ce pour tout $a > 0$. En particulier, si X est une v.a.r positive qui posséde un moment d'ordre r, on a:*

$\forall a > 0, a^r P(X \geq a) = a^r P(X^r \geq a^r) \leq E[X^r]$.

Cette remarque très simple conduit à une seconde inégalité connue sous le nom d'inégalité de BienayméTchebychev.

Proposition 1.17. *[13]Soient $a > 0$ et X une v.a.r. de carré intégrable. Alors:*

$P(|X - E[X]| \geq a) \leq \frac{V[X]}{a^2}$.

Il suffit d'appliquer la remarque précédente à la variable $Y = |X - E[X]|$ avec $r = 2$. En effet pour tout $a > 0$:

$a^2 P(Y \geq a) \leq E[Y^2] = V[X]$.

Remarque 1.18. *Ces inégalités sont valables indépendamment de la loi de la v.a.r X. Il n'est donc pas très surprenant quelles ne soient pas extrèmement précises comme on peut s'en convaincre sur l'exemple suivant: Soient X de loi uniforme sur $[0,1]$ ($f(x) = 1$ si $x \in [0,1]$) et $a = 1; E[X] = 1/2$ et donc l'inégalité de Markov donne $0 = P(X \geq 1) \leq 1/2$, qui n'est pas optimal !*

Convergence des suites de variables aléatoires

Soit $\{X_i\}$une suite de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .Nous allons nous intéresser à la convergence d'une suite de v.a.r $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Nous devons préciser en quel sens on doit comprendre cette convergence.

Convergence dans L^p

Définition 1.19. *Soit X, X_1 ,$X_2, ...X_n \in L^p$, on dit que X_n converge vers X dans L^psi et seulement si:*

$$\underset{n\longrightarrow\infty}{\|X_n - X\|_p} = 0$$

Il existe différentes notions de convergence pour les suite des variables aléatoires réelles. Définissons un autre mode de convergence : la convergence en probabilité.

Convergence en probabilité

Définition 1.20. *Soit $\{X_n\}$ une suite de variable aléatoire réel, définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, on dit que X_n converge en probabilité vers la v.a X si:*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} P\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) = 0 \text{ quand } n \longrightarrow \infty$$

Remarque 1.21. *[20] Un moyen d'établir la convergence en probabilité consiste à montrer que, pour un $r > 0, E[|X_n - X|^r]$ converge vers 0 et d'utiliser l'inégalité de Markov puisque:*

$\forall\varepsilon > 0 \;\; P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq \frac{E[|Xn - X|^r]}{\varepsilon^r}$.

Convergence presque sûre

Définition 1.22. *Soit$\{X_n\}$ une suite de variables aléatoires sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, on dit que X_n converge presque sûrement vers X si et seulement si:*

$$P\left\{\omega \in \Omega \;/ \lim_{n\longrightarrow\infty} X_n\left(\omega\right) = X\left(\omega\right)\right\} = 1$$

i.e. l'ensemble des points de divergence est de probabilité nulle.

Ce type de convergence permet d'enoncer la loi forte des grands nombres.

Loi forte des grands nombres

Imaginons un instant que l'on lance une pièce non truquée un grand nombre de fois, disons n fois. On note P_n le nombre de fois où « pile » est apparu. Intuitivement, si n est grand la fréquence d'apparition de pile, P_n/n, va être proche de $1/2$. Le théorème suivant, la loi forte des grands nombres, confirme cette intuition.

Théorème 1.23. *Soit* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de v.a.r indépendantes, de même loi, et définies sur le même espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*, tel que* $E(X_1) < \infty$*. On note, pour tout* $n \geq 1$

$S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$*. Alors avec* $\mu = E[X_1]$

$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p.s} \mu$ *, quand* $n \longrightarrow \infty$

Convergence faible

Soit $C_b(S)$ l'ensemble des fonctions continues et bornées sur l'espace métrique (S, d) et soit τ une $\sigma-$algèbre des ouverts de S, et $\{P_n\}$une suite de mesure de probabilité sur (S, τ) et P une mesure sur (S, τ) .

Définition 1.24. *On dit que* P_n *converge faiblement vers* $P, (P_n \Longrightarrow P)$ *si et seulement si :*$\forall\ f \in\ C_b(S)$

$\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \int\limits_S f\ dP_n = \int\limits_S f\ dP.$

Nous avons vu au paragraphe précédent deux types de convergence pour les suites de v.a.r : la convergence dans L^p et la convergence en probabilité. Toutefois pour énoncer le théorème central limite nous aurons besoin d'une notion plus faible de convergence, car elle permet d'approximer la fonction de répartition de X_n par celle de X.

Convergence en distribution

Définition 1.25. *La suite* X_n *converge en loi vers la variable aléatoire* X *, si:*

$$P_{X_n} \Longrightarrow P_X$$

i.e: $\forall\ f \in\ C_b(S),\ \int\limits_S f\ dP_{X_n} \longrightarrow \int\limits_S f\ dP_X$.

Remarque 1.26. *Pour ce type de convergence, les variables aléatoires peuvent être définies sur des espaces de probabilité différents, puisque les v.a. n'interviennent qu'au travers d'espérances.*

Théorème 1.27. *Soient $(X_n)_{n\in N}$ une suite de v.a.r et X une autre v.a.r. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

- *X_n converge en loi vers X.*
- *Pour tout $t \in \mathbb{R}, \varphi_{X_n}(t) \longrightarrow \varphi_X(t)$.*
- *Pour tout $x \in \mathbb{R}, F_{X_n}(x) \longrightarrow F_X(x)$.*

Quelques Propriétès sur la convergence des suites de variables aléatoires

Le schéma suivant va illustrer les différentes implications entre ces types de convergences [3] :

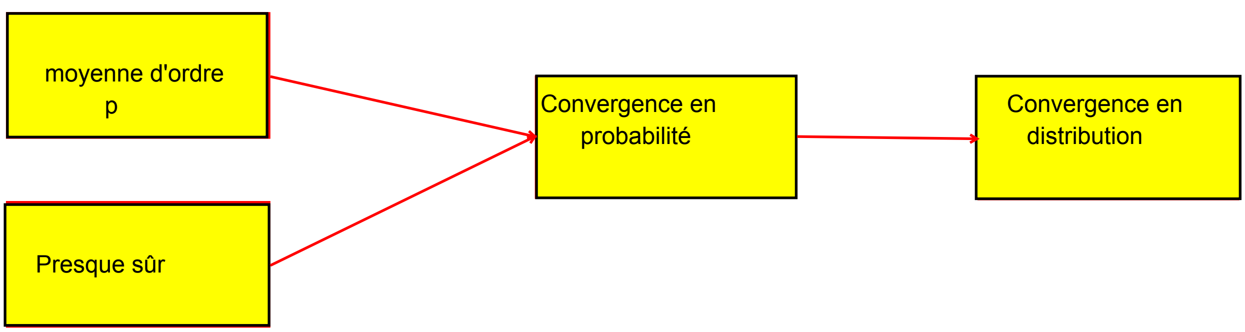


FIGURE1.1.Différentes implications entre les types de convergence

Proposition 1.28. *[3]Si $X_n \xrightarrow{D} X$ et $Y_n \xrightarrow{P} 0$, alors*

$$X_n + Y_n \xrightarrow{D} X$$

Et

$$X_n Y_n \xrightarrow{P} 0$$

En simulation, la situation typique est celle où on exécute un très grand nombre de fois une boucle, en calculant à chaque passage des réalisations de variables aléatoires indépendantes. Le résultat attendu est en général l'estimation d'une espérance. Pas plus en simulation qu'en physique ou en biologie on ne donnera un résultat sans indication sur sa précision. C'est le théorème central limite qui permet de calculer cette précision.

- **Application à la statistique mathématique**

Ce théorème de probabilité possède une interprétation en statistique mathématique. Cette dernière associe une loi de probabilité à une population. Chaque élément extrait de la population est donc considéré comme une variable aléatoire et, en réunissant un nombre n de ces variables supposées indépendantes, on obtient un échantillon. La somme de ces variables aléatoires divisée par n donne une nouvelle variable nommée la moyenne empirique. Celle-ci, une fois réduite, tend vers une variable normale réduite lorsque n tend vers l'infini.

- **Intérêt du théorème central limite**

Générer une distribution d'échantillonnage pour chaque problème posé, serait long et fastidieux. Les propriétés des distributions d'échantillonnage sont à l'origine d'un théorème important en statistique : le théorème central limite qui énonce que pour une population dont la moyenne est μ et l'écart type σ, la distribution d'échantillonnage de la moyenne, réalisée à partir d'échantillons de taille n, a les propriétés suivantes :

1. La moyenne de la distribution d'échantillonnage est égale à la moyenne des moyennes (établie à partir des mesures individuelles).

2 . L'écart type de la distribution d'échantillonnage : C'est l'erreur standard de la moyenne (Standard Error of the Mean : SEM).

3 . La distribution d'échantillonnage est toujours symétrique autour de sa moyenne.

4 . Si la distribution dans la population est normale, alors la distribution d'échantillonnage est également normale. Cependant, lorsque la taille des échantillons est suffisamment grande, alors la distribution d'échantillonnage tend vers une distribution normale indépendamment du type de distribution initiale.

On peut parfois lire dans la presse générale que la courbe en cloche représente la loi du hasard, ce qui n'a pas grande signification. Le succès sans égal de la loi de Gauss est la conséquence directe du théorème central limite et il est renforcé par la commodité relative d'utilisation de cette loi.

En elle-même, la convergence vers la loi normale de nombreuses sommes de variables aléatoires lorsque leur nombre tend vers l'infini n'intéresse que le mathématicien. Pour le praticien, il est intéressant de s'arrêter un peu avant la limite : la somme d'un grand nombre de ces variables est presque gaussienne, ce qui fournit une approximation souvent plus facilement utilisable que la loi exacte.

En s'éloignant encore plus de la théorie, on peut dire que bon nombre de phénomènes naturels sont dus à la superposition de causes nombreuses, plus ou moins indépendantes. Il en résulte que la loi normale les représente de manière raisonnablement efficace.

A l'inverse, on peut dire qu'aucun phénomène concret n'est vraiment gaussien car il ne peut dépasser certaines limites (en particulier s'il est à valeurs positives).

Dans les applications pratiques, ce théorème permet en particulier de remplacer une somme de variables aléatoires en nombre assez grand mais fini par une approximation normale, généralement plus facile à manipuler. Il est donc intéressant de voir comment la somme s'approche de la limite.

Une somme de variables continues est une variable continue(v.a prenant ses valeurs sous forme d'intervalles) dont on peut comparer la densité de probabilité à celle de la limite normale.

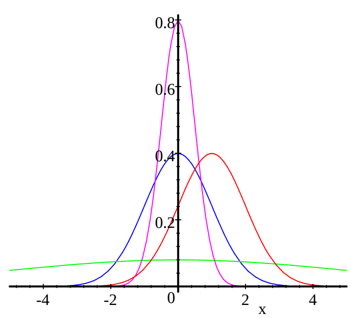
Avec une somme de variables discrètes(v.a prenant des valeurs dispersées), il est parfois commode de définir une pseudo-densité de probabilité mais l'outil le plus efficace est la fonction de probabilité représentée par un diagramme en bâtons. On peut constater graphiquement une certaine cohérence entre les deux diagrammes, difficile à interpréter. Dans ce cas, il est plus efficace de comparer les fonctions de répartition.

D'autre part, l'approximation normale est particulièrement efficace au voisinage des valeurs centrales. Certains disent même qu'en matière de convergence vers la loi normale, l'infini commence souvent à six.

La précision se dégrade à mesure qu'on s'éloigne de ces valeurs centrales. C'est particulièrement vrai pour une somme de variables positives par nature : la loi normale fait toujours apparaître des valeurs négatives avec des probabilités faibles mais non nulles. Même si c'est moins choquant, cela reste vrai en toutes circonstances : alors que toute grandeur physique est nécessairement bornée, la loi normale qui couvre un intervalle infini n'est qu'une approximation utile.

Enfin, pour un nombre donné de termes de la somme, l'approximation normale est d'autant meilleure que la distribution est plus symétrique.

A titre d'exemple pour les paramètres $(\mu, \sigma) = (0,1), (0,5), (0,0.5), (1,1)$ nous avons respectivement la fonction densité et celle de distribution.



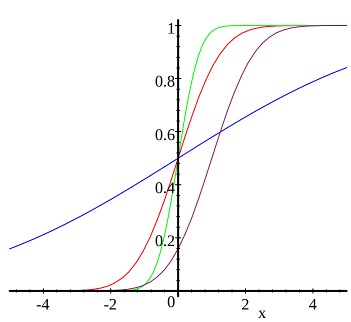


FIGURE1.2, 1.3.Fonctions densité et répartition pour les différentes paramètres

Dans le but d'obtenir la convergence vers la loi normale énonçons le théorème suivant:

Théorème central limite de Liapounov

Théorème 1.29. *[3]Soit* $X_{n1}, X_{n2}, X_{n3}, \ldots\ldots\ldots\ldots, X_{nn}$ *une suite de variables aléatoires, indépendantes pour toute n fixé, telles que :*

1. $\cdot E\left(X_{ni}\right)=0$
2. $\cdot Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_{ni}\right)=1$
3. $\cdot \sum_{i=1}^{n} E\left(\left|X_{ni}\right|\right)^{3} \longrightarrow 0$

Alors

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ni} \xrightarrow{D} N(0,1).$$

CHAPITRE 2

Applications du théorème central limite

2.1 Introduction

Une des notions les plus importantes en probabilité est celle de variable aléatoire qui est une application qui à un résultat possible de l'expérience associe une valeur. Une variable aléatoire va donc prendre telle ou telle valeur suivant le résultat obtenu; et ce ne sont pas les valeurs possibles de la variable, ni la valeur qu'elle prend une fois que l'on connaît le résultat de l'expérience qui sont aléatoires, mais la valeur qu'elle va prendre avant d'avoir effectué l'expérience. Les variables aléatoires furent introduites à l'origine pour représenter un gain.

La somme des probabilités de toutes les valeurs possibles d'une variable aléatoire valant un, ces probabilités sont en quelque sorte réparties sur ces différentes valeurs. On peut représenter cette répartition par un diagramme en bâtons. Toute relation qui établit une correspondance entre les valeurs prises par une variable et leur probabilité s'appelle une loi (ou distribution) de probabilité. Il y a plusieurs lois discrètes importantes, telles que la loi uniforme discrète, la loi binomiale, la loi de Poisson, la loi géométrique, en parallèle on peut trouver des lois continues telles que loi exponentielle, la loi normale. etc....

Loi normale

La loi normale (de Gauss ou Laplace-Gauss) est la loi de distribution d'un processus qui est le résultat de la somme de plusieurs variables aléatoires, indépendantes et de même loi (effets additifs). Elle a la forme d'une cloche symétrique de part et d'autre de la moyenne.

C'est la loi de convergence centrale qui fait que dès qu'il y a une force ou un facteur systématique conjugué avec une multitude de facteurs aléatoires additifs on a une distribution en cloche ou normale. Le facteur systématique explique la concentration des observations au centre de la distribution tandis que les facteurs aléatoires expliquent la symétrie de part et d'autre du centre.

La loi normale constitue le modèle central de la théorie des erreurs de mesure et d'échantillonnage qui fait qu'en mesurant une même quantité plusieurs fois, on commet des erreurs dûs à des facteurs aléatoires divers et les résultats de mesure suivent la loi normale.

On dit que la variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne μ ,et de variance σ^2,si sa loi de probabilité admet une fonction densité définie par:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}.$$

- **Portrait-robot de la distribution gaussienne**

Une distribution gaussienne est entièrement caractérisée par la donnée de sa moyenne μ et de son écart-type σ ce qui la rend très simple d'emploi. Sa forme est « en cloche ». La courbe est symétrique par rapport à une valeur centrale, que l'on note μ ce qui signifie qu'exactement 50% des résultats possibles sont supérieurs à μ et 50% inférieurs à μ qui est la médiane de la distribution, cette valeur est également celle pour laquelle la gaussienne atteint sa valeur maximale :μ est donc le résultat le plus probable.

À mesure qu'on séloigne de la moyenne, la gaussienne diminue, ce qui signifie que les valeurs correspondantes sont de moins en moins probables. La distribution des résultats autour de la valeur centrale est caractérisée par une quantité appelée «écart-type», notée σ : plus l'écart-type est petit, plus la distribution est «piquée» autour de la valeur moyenne μ, c'est à dire que les résultats les plus probables sont très proches de cette valeur. Au contraire, plus l'écart-type est grand, plus la distribution est large, ce qui signifie que les résultats sont très dispersés.

Cependant si l'on exprime l'écart entre les valeurs de x et de μ en unité donnée par la valeur de l'écart-type, nous retrouvons le comportement universel de la loi gaussienne : 68% des valeurs de $x - \mu$ sont comprises entre $\pm 1\sigma$ et 99% sont entre $\pm 2,6\sigma$. La distribution gaussienne décroît très vite et les valeurs situées à plusieurs écarts-types sont très improbables.

- **Gaussiennes et mesures physiques**

La physique des particules ne fait pas exception à la règle : ici comme ailleurs, les distributions gaussiennes sont omniprésentes. Prenons l'exemple suivant (volontairement simplifié) : un groupe de physiciens cherche à tester une prédiction théorique en mesurant une certaine quantité N par exemple le nombre moyen de fois où la désintégration d'une particule d'un certain type est observée en vingt-quatre heures dans leur détecteur

Après quelques jours d'expérience, leur analyse produit les résultats suivants :

· La théorie prédit une valeur $N_0 = 100$ pour la quantité N.

· La mesure donne $N = 124$.

· L'erreur statistique sur la mesure δN est de l'ordre de 5.

· Si on reproduisait la même expérience un grand nombre de fois, l'histogramme des résultats aurait la forme d'une gaussienne.

Calculons le nombre séparant la mesure N de la valeur attendue N_0(identifiée à la moyenne μ de la gaussienne), l'écart-type de cette distribution étant donné par l'erreur statistique : $\sigma = \delta N$. On trouve alors que N et N_0 présentent une différence de 4,8 σ, i.e.$N - N_0 = 4,8\sigma$. Le désaccord entre la prédiction et l'expérience est manifeste. C'est soit la signature d'un effet nouveau non pris en compte dans le calcul théorique, soit le signe que l'expérience n'a pas été bien réalisée. Cet exemple montre l'importance de l'erreur sur une mesure. L'estimation correcte de cette dernière est la seule manière de rendre un résultat crédible. Pour s'en convaincre, comparons deux cas de figure présentés dans le tableau ci-après :

TABLEAU 2.1.Valeurs issues de l'analyse pour deux échantillons

Valeurs issus de l'analyse	Scénario 1	Scénario 2
N_0	100	100
N	200	105
δN	80	1
$(N - N_0)/\delta N$	1.25	5

Dans le scénario 1, N et N_0 sont séparés de 1.25 σ alors que dans le scénario 2, l'écart est de 5σ.

Ainsi, bien que la valeur mesurée dans le scénario 1 soit beaucoup plus éloignée de la valeur attendue que dans le scénario 2, la prise en compte des erreurs dans la comparaison inverse complètement la tendance.Le scénario1 est compatible avec la théorie tandis que le scénario 2 la réfute.

Nous avons jusqu'à présent insisté sur l'importance de la loi gaussienne, car elle décrit souvent de façon satisfaisante la distribution statistique d'un vaste ensemble de résultats expérimentaux. Mais n'allez pas en conclure que toute donnée expérimentale suit cette loi de probabilité. Il en existe bien d'autres ! Par exemple, l'instant (aléatoire) de désintégration d'un atome radioactif suit une loi exponentielle . De même, les situations où on ne dispose que de peu d'événements (faible statistique) sont soumises à une troisième distribution de probabilités, appelée loi de Poisson.

2.2 Théorème central limite et méthodes inductives reliées

Une façon de nommer le théorème central limite est de l'appeler "le théorème de la distribution asymptotique de l'estimateur de la tendance centrale". Par limite, on entend l'hypothèse où le nombre d'éléments serait très grand, qu'on appelle maintenant une hypothèse asymptotique (n >>); par central, on entend l'estimateur de la tendance centrale le plus usuel, la moyenne.

Le noeud de ce théorème est de supposer que l'on ignore la distribution de la population entière. Par contre, le théorème postule que la population a bien une valeur moyenne et une variance. Ces postulats sont très naturels et très généraux; on peut s'attendre à ce qu'ils soient vrais de notre population mystère.

la puissance de ce théorème provient du fait que ces postulats de bases sont très peu contraignants : peu importe le type de population et la façon dont se répartissent ses scores, la moyenne obtenue d'un échantillon sera normalement distribuée.

Grâce au théorème central limite, nous sommes en mesure de faire un test sans utiliser le postulat que la population est normalement distribuée.

Bien que les choses s'améliorent, il reste encore un postulat qui est gênant, celui qui dit que la variance de la population d'où est extrait l'échantillon est connu.

Bien entendu, si la variance est réellement connue, ceci signifie que la moyenne réelle de la population est aussi connue, dans les faits, nous sommes contraints d'utiliser la variance non biaisée de l'échantillon.

Dans l'étude empirique, le phénomène peut être par exemple l'évolution du prix d'un actif financier, et la variable aléatoire X la rentabilité logarithmique.

2.2.1 Modèle économique

L'un des enjeux de l'économie est le passage de comportements microéconomiques à une modélisation macroéconomique par agrégation. Ainsi, pour ce faire, les économistes sont souvent confrontés à la même problématique : connaissant la loi de probabilité P_X d'événements statistiquement indépendants x_i, que peut-on dire de la loi de probabilité P_{S_N} de la somme suivante :

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i \quad , \quad \text{pour } N \text{ grand.}$$

Depuis le début du $XIX\grave{e}me$ siècle, on avait cru posséder avec le théorème central limite usuel une réponse quasi universelle à cette question : la distribution P_{S_N} tend vers une loi normale. Mais on sait, depuis les travaux de Paul Lévy dans les années 30, que la réponse dépend du type de loi P_X, étroite ou large. En outre, on s'est progressivement rendu compte que les processus obéissant à des lois larges, qui échappent donc au théorème central limite usuel, sont nombreux (diffusion de micelles géantes, battements cardiaques, systèmes chaotiques), importants et fondamentalement différents des processus obéissant à des lois étroites.

Dans cette section, nous rappellerons tout d'abord dans un premier temps le théorème central limite classique concernant les lois étroites. Puis, dans un second temps, nous réexaminerons ce théorème et ses conclusions lorsque l'on considère cette fois-ci des sommes de variables aléatoires à queues épaisses possédant une variance infinie.

- Cas des lois étroites

Les lois étroites sont les distributions P_X qui décroissent assez rapidement pour x grand pour que leur variance et leur moyenne existent. Dans ces conditions, d'après le théorème central limite usuel (Laplace, 1812), la loi P_{S_N} tend pour N grand vers une loi normale dont l'espérance vaut :$E(S_N) = N.E(X)$. Ainsi, le hasard se traduit par des fluctuations petites de S_N autour d'une valeur bien définie. On parle donc de hasard "bénin". La plupart des lois de probabilité utilisées à ce jour en économie sont des lois étroites : loi de Poisson, loi binomiale, loi exponentielle, etc...

Comportement asymptotique de la somme de lois dites larges

Les lois larges sont les distributions P_X qui décroissent si lentement à grand x que leur variance ou même leur valeur moyenne divergent. Pour étudier la nouvelle portée du théorème centrale limite lorsque l'on relâche l'hypothèse de variance finie, il nous faut tout d'abord étudier une nouvelle famille de lois, à savoir les lois dites stables. La distribution d'une variable aléatoire X donnée est dite stable si elle satisfait l'égalité suivante :

$$c_1X_1 + c_2X_2 = b\left(c_1, c_2\right)X + a\left(c_1, c_2\right)$$

$\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$, et des réels a et b convenablement choisis en fonction de X_1, X_2, X *iid.*

Ainsi, si l'on considère une somme S_n de variables aléatoires stables, indépendantes et identiquement distribuées, alors il existe des réels a_n et b_n tels que :

$$S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n = b_nX + a_n$$

que l'on peut réecrire :

$$b_n^{-1}\left(S_n - a_n\right) \equiv X$$

Par conséquent, si une distribution est stable, elle est la limite d'une somme de variables iid. La question qui se pose à ce moment- là est de savoir s'il existe d'autres distributions limites possibles pour la somme de variables aléatoires iid. On montre alors que les distributions stables sont les seules limites possibles. Du fait de l'importance théorique de ces distributions, il apparaît nécessaire de les caractériser de façon plus précise. Même s'il n'est pas possible de les exprimer analytiquement,on peut montrer que leur fonction caractéristique vérifie :

$$\varphi_X(t) = E\exp\{iXt\} = \exp\{i\gamma t - c\,|t|^\alpha\,(1 - i\beta sgn\,(t)\,z\,(t.\alpha))\}, t \in \mathbb{R}$$

Où γ est un réel , $c > 0, \alpha \in]0, 2]$ et $\beta \in [-1, 1]$ et

$$z\,(t.\alpha) = \begin{cases} \tan\left(\frac{\Pi\alpha}{2}\right), \text{ si } \alpha \neq 1 \\ \frac{-2}{\Pi}\ln|t|, \text{ si } \alpha = 1 \end{cases}$$

α, dans l'expression précédente, s'appelle l'exposant caractéristique, la distribution correspondante étant qualifiée d'α-stable. Ce paramètre détermine les propriétés principales de la distribution comme les moments

γ est un paramètre de localisation.

β caractérise l'asymétrie de la distribution, le cas symétrique étant obtenu pour une valeur de β égale à zéro.

Dans le cas où $\alpha = 2$ et telle que $\varphi_X(t) = \exp\{-ct^2\}$on retrouve la loi gaussienne qui est la loi limite d'une somme de variables aléatoires *iid* possédant une variance finie.

Une fois déterminé les limites possibles pour la somme de variables aléatoires iid, essayons désormais de caractériser plus précisément la loi de la somme de variables aléatoires iid dont la distribution possède une queue épaisse, à savoir des lois dites larges.

Un résultat important a été obtenu par le mathématicien français Paul Lévy : c'est le théorème central limite généralisé. Il traite un important cas particulier de lois larges, à savoir celui des distributions qui décroissent asymptotiquement comme des lois de puissance :

$$\frac{C}{x^{1+\alpha}} \text{ pour } x \longrightarrow \infty$$

De plus, on peut montrer que les sommes X_N croissent comme

$$S_N \approx N^{\frac{1}{\alpha}}$$

c'est-à-dire que, dans le cas $a < 1$ et $E(x)$ infini, elles croissent plus vite que le nombre N de termes. On montre par ailleurs que les sommes S_N sont dominées par le terme le plus grand qu'elles contiennent :

$$S_N \approx X_{\max}$$

Ainsi, une quantité "microscopique" $X_{\max}$ a une influence "macroscopique". Par conséquent, même si N est grand, S_N fluctue autant qu'un terme micro X_i, qui lui-même fluctue considérablement puisque sa variance est infinie.

Les fluctuations de S_N sont tellement grandes que, si S_N est une quantité observable, on ne peut attendre aucune reproductibilité entre deux mesures successives. On parle ici de hasard "sauvage" (B.Mandelbrot) ou de "science des processus non reproductibles". L'intérêt des statistiques de Lévy est d'autoriser malgré tout des prédictions précises pour des variables convenablement choisies : la démarche statistique demeure opérationnelle même pour les processus fortement non reproductibles.

2.3 Version pratique du théorème central limite

L'interprétation de la probabilité d'un événement aléatoire est la valeur limite de la fréquence avec laquelle l'événement se réalise au cours d'un nombre croissant de répétitions de l'expérience. On peut dire que c'est une fiction qui peut résulter d'une théorie.

Si X est une variable de Bernoulli , M_n sera noté P_n et on parlera de variable aléatoire moyenne arithmétique proportion construite sur un échantillon de taille n. Avec ces notations adaptées, p est une réalisation de P_n.

Pour toute variable quantitative, la distribution limite (lorsque n croit indéfiniment) de:

$$\frac{M_n - E(M_n)}{Var(M_n)}$$

· A "à peu près" une distribution d'une variable normale centrée réduite.

$$\frac{M_n - E(M_n)}{Var(M_n)} \sim N(0,1)$$

Où $M_n \sim N\left(E(X), \frac{Var(X)}{n}\right)$

Notons qu'on désigne par assez grand trois cas :

1. Lorsque n est assez grand X est une variable normale. Alors le théorème est vrai pour tout n.

2. X n'est ni normale ni de Bernoulli. Alors on considère que l'approximation est valide si $n \geq 30$.

3. X est une variable de Bernoulli. Alors l'approximation est valide si $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$

La forme habillée du théorème dans ce dernier cas :$\frac{P_n - P}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}} \sim N(0,1)$

Vaut bien une convention: la convention u_α.

·Soit X distribuée $N(0,1)$.

·Pour toute valeur α entre 0 et 1, u_α est la valeur telle que $P\left(X \notin [-u_\alpha, u_\alpha]\right) = \alpha$.

Notons que le calcul de u_α connaissant α, ou l'inverse, se fait à laide d'une table numérique :

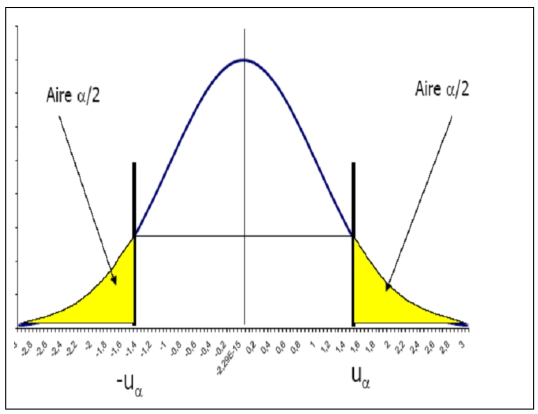


FIGURE 2.1.Courbe représentatif de la loi normale

Le problème sera donc de déterminer $[a,b]$ tel que $P\left(M_n \in [a,b]\right) = 1 - \alpha$

Un tel intervalle s'appelle intervalle de Pari pour la variable aléatoire M_n

· de niveau $1-\alpha$, au risque α

Pour $\alpha = 0,3$ et en supposant que les conditions de TCL sont vérifiées on aura :

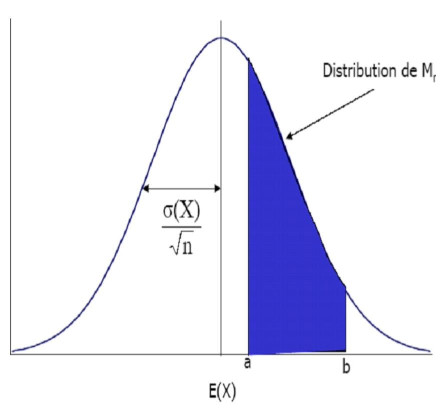


FIGURE 2.2.Position del'intervalle [a,b] pour la distribution M_n

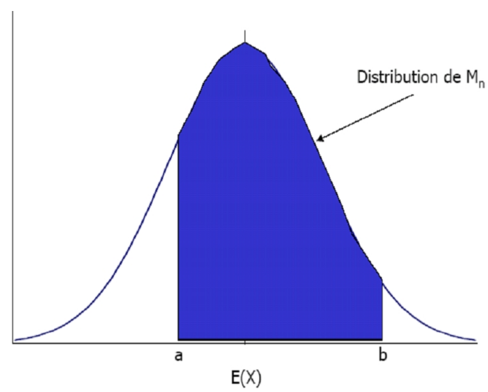


FIGURE 2.3.Position de E(X)dans l'intervalle [a,b]

Les solutions sont multiples: choisir $[a, b]$ centré en $E(X)$:

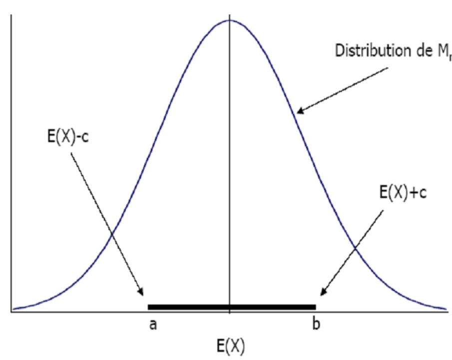


FIGURE 2.4.Solutions au risque α

$\cdot M_n \in [E(X) - c, E(X) + c] \Leftrightarrow M_n - E(X) \in [-c, c]$.

$\frac{M_n - E(X)}{\frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}} \in \left[\frac{-c}{\frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}}, \frac{c}{\frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}} \right]$

$\cdot P \left(\frac{M_n - E(X)}{\frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}} \in \left[\frac{-c}{\frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}}, \frac{c}{\frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}} \right] \right) = 1 - \alpha$ avec $\frac{M_n - E(X)}{\frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$.

CHAPITRE 3

Modifications intermédiaires : Théorème central limite pour les sommes de variables aléatoires totalement et partiellement modifiées

3.1 Introduction

Soit $X_1, X_2, ...X_n$ une suite de variables aléatoires, indépendantes, identiquement distribuées sous

la seule réserve que X ait une moyenne μ et une variance σ^2. En deux mots, le théorème central limite dit que pour de grands échantillons, la moyenne empirique, considérée comme variable aléatoire, suit une loi presque normale. De plus, il ajoute que cette loi peut devenir aussi proche d'une loi normale que l'on veut: il suffit pour cela de considérer des échantillons de plus en plus grands.

L'un des problèmes étudiés est le problème de convergence vers la loi normale, sous quelles conditions la convergence est réalisée si on a des termes de grandes valeurs et comment peut on donc supprimer leur effets .

On va étudier dans ce chapitre la convergence vers la distribution normale avec espérance et variance infinies, c'est en continuant les travaux de Hahn, Kuelbs, et Wiener [14] qui ont montrés qu'on peut obtenir un TCL même si $EX^2 = \infty$. Pour obtenir des théorèmes centrales limites on modifie les variables aléatoires par un certain choix de fonction .

La première partie est consacrée pour la modification totale des termes, la deuxième est pour la modification partielle, ainsi que leurs versions empiriques.

Une nouvelle version du théorème central limite est donc obtenu en modifiant les sommes des variables aléatoires tout en modifiant les variables aléatoires pour des fonctions $H_t(x)$ appelées fonctions d'influence[6], telles que

$$T_t(x) \leq H_t(x) \leq C_t(x)$$

où :

$$H_t(x) = k(x) I(|x| \leq t) + g_t(x) I(|x| > t)$$

dont

$C_1 > 0, C_2 < \infty$ telles que

$$k(x) \neq 0 \quad \text{pour } x \neq 0$$

$$|k(x)| \leq C_1 |x| \quad \text{pour x assez large}$$

$$|g_t(x)| \leq C_2 t \quad pour \quad |x| > t$$

3.2 Cas des v. a totalement et partiellement modifiées

3.2.1 Théorème central pour les sommes totalement modifiées

Soit $\{X_i\}$ une suite de variables aléatoires non dégénérées, i.i.d .

Soit $\{r_n\}$ une suite de nombres réels positifs, tel que $r_n \longrightarrow \infty$ mais $\frac{r_n}{n} \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$.

Le premier théorème est obtenu en modifiant tous les termes de X_i[11], cette modification va dependre de H_t, ainsi que la suite r_n précédemment définie, c'est ce qu'on appelle théorème central limite pour les sommes des variables aléatoires modifiées.

Théorème 3.1. *[6]Soient :*

$$H_t(x) = k(x) I(|x| \leq t) + g_t(x) I(|x| > t) \tag{3.2.1}$$

où

$$k(x) \neq 0 \ pour \ x \neq 0$$

$$|k(x)| \leq C_1 |x| \ \ pour \ x \ assez \ large, C_1 \geq 0$$

$$|g_t(x)| \leq C_2 t \ \ pour \ |x| > t, C_2 < \infty$$

Avec $k(x)$ *croissante, et*

$$\{r_n\}_{n\geq 1}\,; r_n \longrightarrow \infty, \frac{r_n}{n} \longrightarrow 0 \tag{3.2.2}$$

Soit la donnée d'une suite $a_n, a_n \longrightarrow \infty$ *telles que*

$$EH_{a_n}^2(X) = \frac{a_n^2\ r_n}{n} \tag{3.2.3}$$

$\cdot$*Si* $E\,|k(X)| < \infty$, *supposons que* $E\,(k\,(X)) = 0.$

Soit

$$M_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{H_{a_n}\ (X_i) - EH_{a_n}\ (X)}{a_n\ \sqrt{r_n}}$$

Alors

$$M_n \xrightarrow{D} N(0,1)$$

Avant de démontrer ce théorème on a besoin du lemme suivant :

Lemme 3.2. *Soit* H_t *définie comme* (3.2.1) *avec* $k\,(x)$ *croissante, supposons que* $E\,(k\,(X))^2 = \infty$ *et qu'il existe une suite* a_n, $a_n \longrightarrow \infty$ *tel que* $EH_{a_n}^2(X) = \frac{a_n^2\ r_n}{n}$ *pour n suffisamment grand, alors*

$$(EH_{a_n}(X))^2 = o\left(EH_{a_n}^2(X)\right) \tag{3.2.4}$$

Preuve. Notons que $E\,(k\ (X))^2 = \infty$ implique $EH_{a_n}^2(X) \longrightarrow \infty$ quand $n \longrightarrow \infty$.
Choisissons $t_n = \left(EH_{a_n}^2(X)\right)^{\frac{1}{p}}$avec $p > 2$.
On a $t_n \longrightarrow \infty$ quand $n \longrightarrow \infty$,et pour n grand ;

$$\begin{aligned} a_n &= \left(\frac{n}{r_n}\right)^{\frac{1}{2}} \left(EH_{a_n}^2(X)\right)^{\frac{1}{2}} \\ &> \left(EH_{a_n}^2(X)\right)^{\frac{1}{2}} \\ &> \left(EH_{a_n}^2(X)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= t_n \end{aligned}$$

Donc pour n très grand

$$\begin{aligned} H_{a_n}(X)\,I\,(|X| \leq t_n) = k\,(X)\,I\,(|X| \leq a_n)\,I\,(|X| \leq t_n) + \\ g_{a_n}(X)\,I\,(|X| > a_n)\,I\,(|X| \leq t_n) \end{aligned}$$

$$= k(X) I(|X| \leq t_n).$$

Notons que ;

$$EH_{a_n}(X) = E(H_{a_n}(X) I(|X| \leq t_n)) + E(H_{a_n}(X) I(|X| > t_n))$$
$$= E(k\ (X) I(|X| \leq t_n)) + E(H_{a_n}\ (X) I(|X| > t_n))$$

En utilisant le fait que ,

$$(x+y)^2 \leq 2x^2 + 2y^2$$

$$(EH_{a_n}(X))^2 \leq 2(E(k(X) I(|X| \leq t_n)))^2 + 2(E(H_{a_n}(X) I(|X| > t_n)))^2$$
$$\leq 2k^2(t_n) + 2EH_{a_n}^2(X) EI(|X| > t_n)$$ (d'après l'inégalité de Cauchy Schwarz et le fait que k est croissante.)

$$(EH_{a_n}(X))^2 \leq 2k^2(t_n) + 2EH_{a_n}^2(X) P(|X| > t_n)$$

Pour n grand ,$|k\ (t_n)| \leq C_1 t_n$.

D'où

$$(EH_{a_n}(X))^2 \leq 2C_1^2 t_n^2 + 2EH_{a_n}^2(X) P(|X| > t_n)$$

Donc

$$\frac{(EH_{a_n}(X))^2}{EH_{a_n}^2(X)} \leq \frac{2C_1^2\ t_n^2}{EH_{a_n}^2(X)} + 2P(|X| > t_n)$$
$$= 2C_1^2 t_n^{2-p} \quad + 2P(|X| > t_n) \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow \infty$$; car $2 - p < 0$ et $t_n \longrightarrow \infty$.

De la (3.2.4) est vérifiée.

On va ainsi démontrer le théorème (3.1). □

Preuve. :Soit

$$M_n = \sum_{i=1}^n \frac{H_{a_n}\ (X_i) - EH_{a_n}\ (X)}{a_n\ \sqrt{r_n}} = \sum_{i=1}^n Y_{ni}$$

Vérifions les conditions du théorème central limite de Liapounov

1. $\cdot E(Y_{ni}) = E\left(\frac{H_{a_n}\ (X_i) - EH_{a_n}\ (X)}{a_n\ \sqrt{r_n}}\right)$

$$= \frac{1}{a_n \sqrt{r_n}} E(H_{a_n}(X_i) - EH_{a_n}(X))$$
$$= 0$$

2. $\cdot Var(M_n) = Var\left(\sum_{i=1}^n \frac{H_{a_n}\ (X_i) - EH_{a_n}\ (X)}{a_n \sqrt{r_n}}\right)$

$$= \frac{1}{a_n^2\ r_n} Var\left(\sum_{i=1}^n H_{a_n}(X_i) - EH_{a_n}(X)\right)$$
$$= \frac{1}{a_n^2\ r_n} \sum_{i=1}^n Var(H_{a_n}(X_i) - EH_{a_n}(X))$$

$$= \frac{n}{a_n^2\ r_n} Var\left(H_{a_n}\left(X_i\right) - EH_{a_n}\left(X\right)\right)$$
$$= \frac{n}{a_n^2\ r_n} Var\left(H_{a_n}\left(X_i\right)\right)$$
$$= \frac{n}{a_n^2\ r_n}\left(EH_{a_n}^2\left(X\right) - \left(EH_{a_n}\left(X\right)\right)^2\right)$$

·Si $E\left(k\left(X\right)\right)^2 < \infty$,alors $EH^2\left(X\right) < \infty$; par hypothèse $E\left(K\left(X\right)\right) = 0$, il vient:

$$Var\left(M_n\right) = \frac{n}{a_n^2\ r_n} EH_{a_n}^2\left(X\right)$$
$$= \frac{n}{a_n^2\ r_n}\frac{a_n^2\ r_n}{n}$$
$$= 1$$

·Si $E\left(k\left(X\right)\right)^2 = \infty$, alors $EH_{a_n}^2\left(X\right) \longrightarrow \infty$ quand $n \longrightarrow \infty$, il vient en utilisant le lemme (3.2) :

$$Var\left(M_n\right) = \frac{n}{a_n^2\ r_n} EH_{a_n}^2\left(X\right)\left(1 - \frac{\left(EH_{a_n}\ \left(X\right)\right)^2}{EH_{a_n}^2\ \left(X\right)}\right) \longrightarrow 1 \text{ lorsque } n \longrightarrow \infty$$

3. $\cdot\sum\limits_{i=1}^{n} E\left|Y_{ni}\right|^3 = \sum\limits_{i=1}^{n} E\left|\frac{H_{a_n}\ (X_i) - EH_{a_n}\ (X)}{a_n\sqrt{r_n}}\right|^3$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{a_n\ \sqrt{r_n}}\right)^3 E\left|H_{a_n}\left(X_i\right) - EH_{a_n}\left(X\right)\right|^3$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{a_n\ \sqrt{r_n}}\right)^3 E\left(\left(H_{a_n}\left(X_i\right) - EH_{a_n}\left(X\right)\right)^2\left|H_{a_n}\left(X_i\right) - EH_{a_n}\left(X\right)\right|\right)$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{a_n\ \sqrt{r_n}}\right)^3 E\left(H_{a_n}\left(X_i\right) - EH_{a_n}\left(X\right)\right)^2\left|H_{a_n}\left(X_i\right)\right| + \left|EH_{a_n}\left(X\right)\right|$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{a_n\ \sqrt{r_n}}\right)^3 var\left(H_{a_n}\left(X_i\right)\right)\ \left[\left(C_1 + C_2\right)a_n + \left(C_1 + C_2\right)a_n\right]$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{2(C_1+C_2)}{a_n^2(\sqrt{r_n})^3} EH_{a_n}^2\left(X_i\right) - \left(EH_{a_n}\left(X_i\right)\right)^2$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{2(C_1+C_2)}{a_n^2(\sqrt{r_n})^3}\frac{Var(\ M_n)\ a_n^2\ r_n}{n}$$
$$= \frac{2\ n\ (C_1+C_2)\ Var(\ M_n)}{n\sqrt{r_n}}$$
$$= \frac{2\ (C_1+C_2)\ Var(\ M_n)}{\sqrt{r_n}} \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ ,car} Var\left(\ M_n\right) \longrightarrow 1$$

□

Les conditions du théorème sont vérifiées d'où :

$$M_n \xrightarrow{D} N(0,1).$$

Dans le théorème suivant, une partie des X_i sera modifiées par les fonctions $H_t\left(x\right)$. Arrangeons les X_i par ordre décroissant [14]: $\left|X_1^{(n)}\right| \geq \left|X_2^{(n)}\right| \geq$ ....

3.2.2 Théorème central limite pour les sommes partiellement modifiées

Théorème 3.3. *Soit H_t définie comme* $(3.2.1)$ *, k croissante et soit $\{r_n\}$satisfaisant* $(3.2.2)$.

Supposons qu'il existe une suite $a_n, a_n \longrightarrow \infty$ tel que $EH_{a_n}^2(X) = \frac{a_n^2\, r_n}{n}$ pour n suffisamment grand, alors:

Il existe une suite $\{\psi_n\}$avec $\frac{\psi_n r_n}{n} \longrightarrow 0$ tel que:

$$S_n = \frac{\sum_{i=[\psi_n r_n]+1}^{n} k\left(X_i^{(n)}\right) + \sum_{i=1}^{[\psi_n r_n]} H_{a_n}\left(X_i^{(n)}\right) - nEH_{a_n}(X)}{a_n\sqrt{r_n}} \xrightarrow{D} N(0,1) \tag{3.3.1}$$

Preuve. Ecrivons S_n sous la forme suivante:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{H_{a_n}\left(X_i^{(n)}\right) - EH_{a_n}(X)}{a_n\sqrt{r_n}} + \sum_{i=[\psi_n r_n]+1}^{n} \frac{K\left(X_i^{(n)}\right) - H_{a_n}\left(X_i^{(n)}\right)}{a_n\sqrt{r_n}}$$

$$= \qquad M_n \qquad + \qquad C_n$$

Notons que $M_n \xrightarrow{D} N(0,1)$ d'après le Théorème (3.1).

Ainsi qu'en utilisant les propriétés de la convergence des suites des variables aléatoires, il suffit de montrer que:

$$C_n \xrightarrow{P} 0$$

En fait on va montrer une assertion plus forte:

$A_n \equiv a_n\sqrt{r_n}C_n \xrightarrow{P} 0.$

Remarquons que

$\{|A_n| \neq 0\} = \left\{\left|\sum_{i=[\psi_n r_n]+1}^{n} \left\{K\left(X_i^{(n)}\right) - H_{a_n}\left(X_i^{(n)}\right)\right\}\right| \neq 0\right\}.$

$$\begin{aligned}
\cdot P\ \{|A_n| \neq 0\} &\leq P\left\{\sum_{i=[\psi_n r_n]+1}^{n} \left|\left\{K\left(X_i^{(n)}\right) - H_{a_n}\left(X_i^{(n)}\right)\right\}\right| \neq 0\right\} \\
&\leq P\left\{\exists\, i : [\psi_n r_n] + 1 \leq i : \left\{K\left(X_i^{(n)}\right) - H_{a_n}\left(X_i^{(n)}\right)\right\} \neq 0\right\} \\
&= P\left\{\exists\, i \geq [\psi_n r_n] + 1 : \left\{K\left(X_i^{(n)}\right) - H_{a_n}\left(X_i^{(n)}\right)\right\} \neq 0\right\}.
\end{aligned}$$

Notons que :

$\left\{K\left(X_i^{(n)}\right) - H_{a_n}\left(X_i^{(n)}\right)\right\} \neq 0 \Longrightarrow$

$\left\{K\left(X\,_i^{(n)}\right)-\left[K\left(X\,_i^{(n)}\right)I\left(\left|X_i^{(n)}\right|\leq a_n\right)++g_{a_n}\left(X_i^{(n)}\right)I\left(\left|X_i^{(n)}\right|>a_n\right)\right]\right\}\neq 0$ ne se réalise que si $g_{a_n}\left(X_i^{(n)}\right)I\left(\left|X_i^{(n)}\right|>a_n\right)>0$, il vient que $\left|X_i^{(n)}\right|>a_n$.

Soit $T_n=\sum\limits_{i=1}^{n}I\left(|X_i|>a_n\right)$;on aura:

$P\left\{|A_n|\neq 0\right\}\leq P\left\{\exists\ i\geq[\psi_n r_n]+1:\left|X_i^{(n)}\right|>a_n\right\}$

Notons que $\left|X_1^{(n)}\right|\geq\left|X_2^{(n)}\right|\geq......\geq\left|X_{[\psi_n\ r_n]+1}^{(n)}\right|\geq.....$

D'où

$$P\left\{\exists\ i\geq[\psi_n r_n]+1:\left|X_i^{(n)}\right|>a_n\right\}=P\left(\psi_n r_n\text{ termes }|X_i|>a_n\right)$$
$$=P\left(T_n>\psi_n r_n\right)$$

Avec $T_n\rightsquigarrow B\left(n,G\left(a_n\right)\right)$, tel que $G\left(a_n\right)=p\left(|X_i|>a_n\right)$.

Soit $\psi_n=\frac{n}{r_n}G^{\delta}\left(a_n\right)$ avec$0<\delta\leq\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}P\left(T_n>\psi_n r_n\right)&=P\left(T_n-ET_n>\psi_n r_n-ET_n\right)\\&\leq P\left(|T_n-ET_n|>\psi_n r_n-ET_n\right)\\&\leq\frac{Var\ T_n}{\left(\psi_n\ r_n-ET_n\right)^2}\text{d'après l'inégalité de Chebyshev.}\end{aligned}$$

Notons que si $T_n\rightsquigarrow B\left(n,\ p\right)$ alors ;$E\left(T_n\right)=np,Var\left(T_n\right)=npq$

D'où

$$\begin{aligned}P\left(T_n>\psi_n r_n\right)&\leq\frac{nG(\ a_n)(1-G(\ a_n))}{\left(\psi_n\ r_n-nG(\ a_n)\right)^2}\\&=\frac{nG(\ a_n)(1-G(\ a_n))}{n^2\left(\frac{\psi_n\ r_n}{n}-nG(\ a_n)\right)^2}\\&=\frac{nG(\ a_n)(1-G(\ a_n))}{n^2\left(G\,^{\delta}(\ a_n)-nG(\ a_n)\right)^2}\\&=\frac{nG(\ a_n)(1-G(\ a_n))}{n^2\left(G\,^{\delta}(\ a_n)\left(1-nG(\ a_n)G\,^{-\ \delta}(\ a_n)\right)\right)^2}\\&=\frac{nG(\ a_n)(1-G(\ a_n))}{n^2G\,^{2\ \delta}(\ a_n)\left(1-G\,^{1-\ \delta}(\ a_n)\right)^2}\\&=\frac{G\,^{1\ -2\ \delta}\ (\ a_n)(1-G(\ a_n))}{n\left(1-G\,^{1-\ \delta}(\ a_n)\right)^2}\longrightarrow 0,\text{ quand }n\to\infty\ \left(0\leq 1-2\delta<1\right).\end{aligned}$$

D'où(3.3.1) est vérifiée □

Notons que les théorèmes(3.1) et (3.3) nécessitent d'avoir la condition (3.2.3) .Cette condition aura toujours lieu dans le cas où g_t n'a pas de saut de haut en bas en t, de plus pour toute H_t tel que $|k\left(x\right)|\geq C_3\left|x\right|$, il existe $n_0\left(C_3\right)$ tel que (3.2.3) peut être résolue pour tout $n\geq n_0\left(C_3\right)$.

Proposition 3.4. *Soit X une variable aléatoire non dégénérée, et soit H_t définie comme* (3.2.1).

(i) Si g_t n'a pas de saut de haut en bas pour t grand , il existe une suite $a_n\longrightarrow\infty$ tel que l'équation $\frac{a_n^2\ r_n}{n}=EH_{a_n}^2\left(X\right)$ est vérifiée pour n suffisamment grand.

(ii) Soit $\widetilde{H_t}\ (x)\equiv C_3xI\left(|x|\leq t\right)$. Alors il existe:

$n_0 = n_0(C_3)$ *tel que* $\frac{\widetilde{a}_n^2\, r_n}{n} = E\widetilde{H}_{a_n}^2(X)$ *pour* $n \geq n_0$,*de plus:*
Si $|H_t| \geq \left|\widetilde{H}_t\right|$ *alors* $\frac{a_n^2\, r_n}{n} = EH_{a_n}^2(X)$, *et* $a_n \geq \widetilde{a}_n$ *pour* $n \geq n_0$.

Preuve. Soient $h(t) = \frac{EH_t^2(X)}{t^2}$, $C = \max\{C_1, C_2\}$ où C_1, C_2 définient comme (3.2.1) ,montrons qu'il existe une suite a_n tel que $h(a_n) = \frac{r_n}{n}$.

On a:

$$|\ H_t(x)\ | \leq \max\{C_1, C_2\}(|x| \wedge t)$$

$$= C(|x| \wedge t)$$

Et pour t grand

$h(t) = E\left(\frac{H_t^2(X)}{t^2}\right) \leq C^2 E\left(\frac{X^{\ 2} \wedge t^2}{t^2}\right)$
$= C^2 E\left(\left(\frac{X}{t}\right)^2 \wedge 1\right) \longrightarrow 0$,quand $t \longrightarrow \infty$ (notons que $\frac{X}{t} < 1$).

Choisissons t_1 telle que $h(t_1) > 0$. Pour n suffisamment grand $\frac{r_n}{n} < h(t_1)$ (puisque $\frac{r_n}{n} \longrightarrow 0$).

Du fait que g_t n'a pas de saut de haut en bas et $h(t) \longrightarrow 0$ impliquent l'existence d'une suite $a_n$tel que $h(a_n) = \frac{r_n}{n}$, de plus, puisque $0 < h(t) \longrightarrow 0$ et $\frac{r_n}{n} \longrightarrow 0$, alors $a_n \longrightarrow \infty$.

(ii) Supposons que $|H_t| \geq \left|\widetilde{H}_t\right|$. Du fait que l'éspérance est une fonction croissante

$$\frac{EH_t^2\ (X)}{t^2} \geq \frac{E\widetilde{H}_t^2\ (X)}{t^2}\ \forall t \tag{3.4.1}$$

Soit $c = \sup_t \frac{E\widetilde{H}_t^2(X)}{t^2} > 0$ puisque X est non dégénérée.

Puisque $\frac{r_n}{n} \longrightarrow 0$ il existe $n_0 \equiv n_0(C_3)$ tel que $\frac{r_n}{n} \leq c, \forall\ n \geq n_0$.

De (3.4.1) et pour $n \geq n_0$ il existe t_0 tel que :

$$\frac{EH_{t\ 0}^2\ (X)}{t_0^2} \geq \frac{E\widetilde{H}_{t\ 0}^2\ (X)}{t_0^2} \geq \frac{r_n}{n}$$

Notons que $h(t)$ et $\widetilde{h}(t)$ convergent vers zéro, il existe $a_n \geq t_0$ et $\widetilde{a}_n \geq t_0$ tel que

$h(a_n) = \frac{r_n}{n}$, $\widetilde{h}(\widetilde{a}_n) = \frac{r_n}{n}$.

D'où de (3.4.1) : $a_n \geq \widetilde{a}_n$ pour $n \geq n_0$. $\square$

3.3 Versions empiriques pour les sommes des v.a modifiées

Si les X_i sont définies à partir d'une distribution inconnue, il est important de savoir si l'utilisation d'un estimateur empirique du niveau de modification a_n implique encore le conformément asymptotique normal.

Dans cette partie remplaçons la distribution $F(x)$ de X par la distribution empirique $F_n(x)$ [11]définie par:

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(X_i \leq x)$$

Notons par E_n l'éspérance pris par rapport à la distribution empirique .

Soient:

$b = \inf\left\{t \geq 1 : \frac{E(k(X)\ I(\ |X| \leq t))^2}{t^2} > 0\right\}.$

$b_n = \inf_{1 \leq\ i\ \leq\ n} \{\max\{1, |X_i|\}\ \}.$

$\widehat{a}_n = \inf\left\{t\ \geq b_n + 1 : \frac{E_n H_{\ t}^{\ 2}(X_i)}{t^2} \leq \frac{r_n}{n}\right\}.$

3.3.1 TCL empirique pour les sommes totalement modifiées

Théorème 3.5. *Soit* H_t, r_n *définies respectivement comme* (3.2.1), (3.2.2), *et supposons que:*

- X *symétrique non dégénérée.*
- $H_t(-x) = -H_t(x)$ *.*
- H_t *est continue à droite.*
- g_t *n'a pas de saut de haut en bas en* t*.*

Alors:

$$\mathcal{L}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{H_{\widehat{a}_n}\ (X_{\ j})}{\widehat{a}_n\ \sqrt{r_n}}\right) \longrightarrow N(0,1)$$

La démonstration de ce théorème[11] nécéssite l'utilisation des propriétès de $\widehat{a}_n$ qui vont être énoncées dans le lemme suivant :

Lemme 3.6. *Soit* H_t *définie comme* (3.2.1), *supposons que* $E(k(X))^2 = \infty$, *alors avec une probabilité egale à un (presque sûre) on a :*

1. $\widehat{a}_n$ *existe pour* $n \geq 1$.

2. $\lim_n \widehat{a}_n = \infty$*,et*

3. $\frac{E_n\ H^2_{\widehat{a}_n}\ (X)}{\widehat{a}_n^2} = \frac{r_n}{n}$.

Preuve. Notons que □

1:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = b = \inf\left\{t \geq 1 : t^{-2} E\left(k\left(X\right)\ I\left(\ |X| \leq\ t\right)\right)^2 > 0\right\} \geq 1 \tag{3.5.3}$$

De plus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E_n\ H^{\ 2}_{\ t}\ (X\ )}{t^2} = 0 \text{ avec } E_n H_t^2\left(X\right) > 0 \forall t \geq b_n \tag{3.5.4}$$

De (3.5.3) et (3.5.4) $\widehat{a}_n$ existe pour $n \geq 1$.

2·Pour montrer (2) ,supposons qu'il existe une sous suite $\{n'\}$tel que $\lim_{n'} \widehat{a}_{n'} = \gamma < \infty\ \ p.s$

Soit

$$\delta = \frac{E\ H^2_{b\ +\frac{1}{2}}\ \ (X\ )}{\left(b\ \ +\gamma\ \ +1\right)^2}$$

$$= \frac{E\left(k\left(X\ \right)I\left(\ |X\ | \leq\ \ b+\frac{1}{2}\right) + \left|g_{b\ +\frac{1}{2}}\ \ (X\ )\right|\ \ sgn\left(X\ \right)I\left(|X\ | >\ \ b\ \ +\frac{1}{2}\right)\right)^2}{\left(b\ \ +\gamma\ \ +1\right)^2}$$

donc $\delta > 0$ et $\widehat{a}_{n'} \geq b_{n'} + 1$ alors $\lim_{n'} \widehat{a}_{n'} \geq \lim\ b_{n'} + 1$

d'où $\gamma \geq b + 1$ a.s.

Puisque le saut de haut en bas n'existe pas on a,

$$\liminf \inf_{b_{n+1} \leq\ t\ \leq\ b_n + \gamma + 1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\begin{pmatrix} k\left(X_i\ \right)\ I\left(\ |X_i\ |\ \ \leq\ t\right)\ + \\ |g_t\ \ (X\ )|\ \ sgn\left(X_i\ \right)\ I\left(|X_i\ |\ \ >\ t\right) \end{pmatrix}^2}{n\ t^2}$$

$$\geq \liminf_n \sum_{i=1}^{n} \frac{\begin{pmatrix} k\left(X_i\ \right)\ I\left(\ |X_i\ |\ \ \leq\ b\ +\frac{1}{2}\right)\ \ + \left|g_{b+\frac{1}{2}}\ \ (X_i\ )\right|\ sgn\left(X_i\ \right) \\ I\left(|X_i\ |\ \ \geq\ b\ +\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix}^2}{n\ \left(b_n\ \ +\gamma\ \ +1\right)^2} \tag{3.5.5}$$

$\geq \delta$ p.s.d'après la loi forte des grands nombres.

puisque $\frac{r_n}{n} \longrightarrow 0$,pour n suffisamment grand ,$\frac{r_n}{n} < \delta$,donc d'après définition de $\widehat{a}_n$, (3.5.5) implique que

$\widehat{a}_n \geq b + \gamma + 1$.Contradiction avec le fait que $\lim_{n'} \widehat{a}_{n'} = \gamma$

D'où

$$\lim_n \widehat{a}_n = \infty$$

3· Montrons que $\frac{E_n\ H^{\,2}_{\widehat{a}_n}\ (X)}{\widehat{a}_n^2} = \frac{r_n}{n}$

Soit

$$h_n(t) = \frac{E_n\ H^{\,2}_{t}\ (X\ )}{t^2}$$

On distingue deux cas

i) $\widehat{a}_n$ est un point de continuité.Alors par la définition même de $\widehat{a}_n$ et que $t < \widehat{a}_n$ on a:

$$\lim_{t\nearrow \widehat{a}_n} h_n(t) = h_n(\widehat{a}_n) = \frac{E_n\ H^{\,2}_{\widehat{a}_n}\ (X)}{\widehat{a}_n^2} \geq \frac{r_n}{n} \tag{3.5.6}$$

d'autre part

$$h_n(\widehat{a}_n) = \lim_{t\searrow \widehat{a}_n} h_n(t) \leq \frac{r_n}{n} \tag{3.5.7}$$

De (3.5.6) et (3.5.7) :

$$h_n(\widehat{a}_n) = \frac{r_n}{n}$$

ii) $\widehat{a}_n$ est un point de discontinuité

Notons par A_n :l'ensemble de points de discontinuités

·Si $\widehat{a}_n \in A_n$;

$\frac{r_n}{n} \geq \lim_{t\searrow \widehat{a}_n} h_n(t) = h_n(\widehat{a}_n) > \lim_{t\nearrow \widehat{a}_n} h_n(t) \geq \frac{r_n}{n}$.

donc $\widehat{a}_n \notin A_n$; $\widehat{a}_n$ sera toujours un point de continuité et $h_n(\widehat{a}_n) = \frac{r_n}{n}$.D'où (3) est vérifiée .

Prouvons le théorème (3.5)

Preuve. Soit$\{X_i, i \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires i.i.d sur l'espace$(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Soit $\{\varepsilon_i, i \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires (Rademacher variables) indépendantes sur l'espace $(\Omega', \mathcal{F}', P')$ qui vérifie:

$P(\varepsilon_i = +1) = P(\varepsilon_i = -1) = \frac{1}{2}$

Définissons les espaces produits suivants :

$$\Omega'' = \Omega' \times \Omega$$

$$\mathcal{F}'' = \mathcal{F}' \otimes \mathcal{F}$$

$$P'' = P' \times P$$

Puisque X et $H_t(X)$ sont symétriques:

$$\mathcal{L}\left(\varepsilon_1 H_{\widehat{a}_n}(X_1), \ldots\ldots\ldots\ldots, \varepsilon_n H_{\widehat{a}_n}(X_n)\right) = \mathcal{L}\left(H_{\widehat{a}_n}(X_1), \ldots\ldots\ldots\ldots H_{\widehat{a}_n}(X_n)\right) \quad (3.5.8)$$

-Si a_n^* est définie comme $\widehat{a}_n$ mais en termes de $\{\ \varepsilon_i H_t\ (X_i) = \overline{1, n}\}$, alors

$$\widehat{a}_n = a_n^*\ a.s \quad (3.5.9)$$

(3.5.8) et (3.5.9) implique

$\mathcal{L}\left(\varepsilon_1 H_{\widehat{a}_n}(X_1), \ldots\ldots\ldots\ldots, \varepsilon_n H_{\widehat{a}_n}(X_n), \widehat{a}_n\right) = \mathcal{L}\left(H_{\widehat{a}_n}(X_1), \ldots\ldots\ldots\ldots H_{\widehat{a}_n}(X_n), \widehat{a}_n\right)$

Ce qui donne

$$\mathcal{L}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i\ H_{\widehat{a}_n}(\ X_i)}{\widehat{a}_n\ \sqrt{r_n}}\right) = \mathcal{L}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{H_{\widehat{a}_n}(\ X_i)}{\widehat{a}_n\ \sqrt{r_n}}\right).$$

-Soient E_ε, E_X, E les espérances par rapport à P', P ,P''.

Montrons que $\lim \varphi_{_{Gn}}(t) = \varphi_{_{N\ (0,\ 1)}}(t) = e^{\frac{-t^2}{2}}$, $où\ G_n(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_j\ H_{\widehat{a}_n}(\ X_i)}{\widehat{a}_n\ \sqrt{r_n}}$.

Soit:

$\lambda_n(\omega) = E_\varepsilon\left(\exp\left\{it\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j(\omega')\ \frac{H_{\widehat{a}_n}(\ X_j)(\omega)}{\widehat{a}_n\ (\omega)\ \sqrt{r_n}}\right\}\right)$

$\quad = \prod_{i=1}^{n} E_\varepsilon\left(\exp it\left\{\ \varepsilon_j(\omega')\ \frac{H_{\widehat{a}_n}(\ X_j)}{\widehat{a}_n\ \sqrt{r_n}}\right\}\right)$

Du fait que $\quad P(\varepsilon_i = +1) = P(\varepsilon_i = -1) = \frac{1}{2}$

$\lambda_n(\omega) = \prod_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\exp\left\{it\ \frac{H_{\widehat{a}_n}(\ X_j)}{\widehat{a}_n\ \sqrt{r_n}}\right\} + \frac{1}{2}\exp\left\{-it\ \frac{H_{\widehat{a}_n}(\ X_j)}{\widehat{a}_n\ \sqrt{r_n}}\right\}\right)$

$\quad = \prod_{j=1}^{n}\cos\left(t\frac{H_{\widehat{a}_n}(\ X_j)}{\widehat{a}_n\ \sqrt{r_n}}\right)$

$\quad = \prod_{j=1}^{n}\left(1 - t^2\frac{H^{\ 2}_{\widehat{a}_n}(\ X_j)}{2\ \widehat{a}_n^2\ r_n} + o\left(t^2\frac{H^{\ 2}_{\widehat{a}_n}(\ X_j)}{\widehat{a}_n^2\ r_n}\right)\right)$ car $\frac{H_{\widehat{a}_n}(\ X_j)}{\widehat{a}_n\ \sqrt{r_n}} \longrightarrow 0\ a.s.$

$$\cdot \log\left(\lambda_n(\omega)\right) = \log \prod_{j=1}^{n} \left(1 - t^2 \frac{H_{\widehat{a}_n}^{\,2}(X_j)}{2\,\widehat{a}_n^2\, r_n} + o\left(t^2 \frac{H_{\widehat{a}_n}^{\,2}(X_j)}{\widehat{a}_n^2\, r_n}\right)\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \log\left(1 - t^2 \frac{H_{\widehat{a}_n}^{\,2}(X_j)}{2\,\widehat{a}_n^2\, r_n} + o\left(t^2 \frac{H_{\widehat{a}_n}^{\,2}(X_j)}{\widehat{a}_n^2\, r_n}\right)\right)$$
$$= \frac{-t^2}{2} \sum_{j=1}^{n} \frac{H_{\widehat{a}_n}^{\,2}(X_j)}{\widehat{a}_n^2\, r_n} + \sum_{j=1}^{n} o\left(t^2 \frac{H_{\widehat{a}_n}^{\,2}(X_j)}{\widehat{a}_n^2\, r_n}\right).$$

Par le lemme (3.6) :

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{H_{\widehat{a}_n}^{\,2}(X_j)}{\widehat{a}_n^2\, r_n} = 1 \ p.s.$$

D'où $\log\left(\lambda_n(\omega)\right) \longrightarrow \frac{-t^2}{2}$ ceci implique que $\lambda_n(\omega) \longrightarrow e^{\frac{-t^2}{2}}$

Les conditions du Théorème Fubini sont vérifiées , alors:

$\lim\limits_n E\left(\exp\left\{it \sum_{j=1}^n \frac{\varepsilon_j\, H_{\widehat{a}_n}(X_j)}{\widehat{a}_n\,\sqrt{r_n}}\right\}\right) = \lim\limits_n E_X\left(E_\varepsilon \exp\left\{it \sum_{j=1}^n \frac{\varepsilon_j\, H_{\widehat{a}_n}(X_j)}{\widehat{a}_n\,\sqrt{r_n}}\right\}\right)$

$= \lim\limits_n E_X(\lambda_n(\omega)) = E_X\left(\lim \lambda_n(\omega)\right)$, par le théorème de la convergence dominée puisque

$|\lambda_n| \leq 1$ et $\lambda_n \longrightarrow e^{\frac{-t^2}{2}}$

$$= E_X\left(e^{\frac{-t^2}{2}}\right)$$
$$= e^{\frac{-t^2}{2}} = \varphi_{N\ (0,\ 1)}\,(t)$$

De la : $\mathcal{L}\left(\sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i\, H_{\widehat{a}_n}(X_i)}{\widehat{a}_n\,\sqrt{r_n}}\right) \longrightarrow N(0,1)$

Ce qui implique

$$\mathcal{L}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{H_{\widehat{a}_n}(X_i)}{\widehat{a}_n\,\sqrt{r_n}}\right) \longrightarrow N(0,1).$$

□

3.3.2 TCL empirique pour les sommes partiellement modifiées

Dans ce théorème une partie de termes X_i sera modifiée[11]. En donnant les mêmes hypothèses que (3.5)on aura :

Théorème 3.7. *Soit donc les mêmes données que (3.5). Alors il existe une suite de variables aléatoires* $\{\widehat{\psi}_n\}$ *déterminée a partir de* $\{X_1, X_{2,} ....X_n\}$ *tel que:*

$$\frac{\widehat{\psi}_n\, r_n}{n} \longrightarrow 0 \ a.s$$

Et

$$\mathcal{L}\left(\frac{\sum_{j=\left[\widehat{\psi}_n\ r_n\right]+1}^{n} k\ \left(X_{\ j}^{\ (n)}\right)\ +\ \sum_{j=1}^{\left[\widehat{\psi}_n\ r_n\right]} H_{\widehat{a}_n}\ \left(X_{\ j}^{\ (n)}\right)}{\widehat{a}_n\ \sqrt{r_n}}\right)\ \longrightarrow N(0,1)$$

Preuve. ·Ecrivons

$$\sum_{j=\left[\widehat{\psi}_n r_n\right]+1}^{n} k\left(X_{\ j}^{\ (n)}\right)+\sum_{j=1}^{\left[\widehat{\psi}_n r_n\right]} H_{\widehat{a}_n}\left(X_{\ j}^{\ (n)}\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{n} H_{\widehat{a}_n}\left(X_{\ j}\right)+\sum_{j=\left[\widehat{\psi}_n r_n\right]+1}^{n}\left(k\left(X_{\ j}^{\ (n)}\right)-H_{\widehat{a}_n}\left(X_{\ j}^{\ (n)}\right)\right)$$

.Notons que par le théorème (3.5) □

$$L\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{H_{\widehat{a}_n}\left(\ X_j\right)}{\widehat{a}_n\ \sqrt{r_n}}\right)\xrightarrow{D} N\left(0,1\right) \tag{3.7.1}$$

Reste a montrer que

$\sum\limits_{j=\left[\widehat{\psi}_n r_n\right]\ +1}^{n}\frac{K\left(X_{\ j}^{\ (n)}\right)\ -\ H_{\widehat{a}_n}\ \left(X_{\ j}^{\ (n)}\right)}{\widehat{a}_n\ \sqrt{r_n}}\ \xrightarrow{P}\ 0$,tout en utilisant la propriété sur la convergence des suites de variables aléatoires .

On montre un résultat plus puissant

$$\sum_{j=\left[\widehat{\psi}_n r_n\right]\ +1}^{n}\left(k\left(X_{\ j}^{\ (n)}\right)-H_{\widehat{a}_n}\left(X_{\ j}^{\ (n)}\right)\right)\xrightarrow{P} 0 \tag{3.7.2}$$

.

-Soit $0<\delta<1$ et $\widehat{\psi}_n$ tel que

$\frac{\widehat{\psi}_n\ r_n}{n}=\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{I\ (\ |X_j\ |>\widehat{a}_n)}{n}\right)^{\delta}.$

$$\text{-}P\left\{\sum_{j=\left[\widehat{\psi}_n r_n\right]\ +1}^{n}\left(k\left(X_{\ j}^{\ (n)}\right)-H_{\widehat{a}_n}\left(X_{\ j}^{\ (n)}\right)\right)\neq\ 0\right\}$$

$$=P\left\{\begin{array}{c}\sum\limits_{j=\left[\widehat{\psi}_n r_n\right]\ +1}^{n}\left\{k\left(X_{\ j}^{\ (n)}\right)-\left[\begin{array}{c}k\left(X_{\ j}^{\ (n)}\right)I\ \left(\ \left|X_{\ j}^{\ (n)}\right|\ \le\ \widehat{a}_n\right)+\\ \left|g_{\widehat{a}_n}\left(X_{\ j}^{\ (n)}\right)\right|\\ sgn\ \left(X_{\ j}^{\ (n)}\right)I\ \left(\ \left|X_j^{(n)}\right|>\widehat{a}_n\right)\end{array}\right]\right\}\\ \neq\ 0\end{array}\right\}$$

D'autre part : $\sum\limits_{j=\left[\widehat{\psi}_n r_n\right]\ +1}^{n} k\left(X_{\ j}^{\ (n)}\right)-\left[\begin{array}{c}k\left(X_{\ j}^{\ (n)}\right)I\ \left(\ \left|X_{\ j}^{\ (n)}\right|\ \le\ \widehat{a}_n\right)+\\ \left|g_{\widehat{a}_n}\left(X_{\ j}^{\ (n)}\right)\right|\\ sgn\ \left(X_{\ j}^{\ (n)}\right)I\ \left(\ \left|X_j^{(n)}\right|>\widehat{a}_n\right)\end{array}\right]\neq 0$

$\Longrightarrow\left|X_j\right|>\widehat{a}_n,\forall\ \widehat{\psi}_n\ r_n<j\le n.$

D'où

$$P\left\{\sum_{j=\left[\widehat{\psi}_n r_n\right]+1}^{n}\left(k\left(X_j^{(n)}\right)-H_{\widehat{a}_n}\left(X_j^{(n)}\right)\right)\neq 0\right\}$$
$$=P\left\{\#\ \left\{j\leq n:\left|X_j\right|>\widehat{a}_n\right\}>\widehat{\psi}_n r_n\right\}$$
$$=P\left\{\sum_{j=1}^{n}I\ \left(\left|X_j\right|>\widehat{a}_n\right)>\widehat{\psi}_n r_n\right\}$$
$$=EI\left(\sum_{j=1}^{n}I\ \left(\ \left|X_j\right|>\widehat{a}_n\right)>\widehat{\psi}_n r_n\right)$$
$$=EI\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{I\left(\left|X_j\right|>\widehat{a}_n\right)}{\widehat{\psi}_n\ r_n}>1\right)$$
$$\leq E\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{I\left(\left|X_j\right|>\widehat{a}_n\right)}{\widehat{\psi}_n\ r_n}\right)$$
$$=E\left(\frac{\sum_{j=1}^{n}I\left(\left|X_j\right|>\widehat{a}_n\right)}{\left(\sum_{j=1}^{n}I\left(\left|X_j\right|>\widehat{a}_n\right)\right)^{\delta}n^{1-\delta}}\right)$$
$$=E\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{I\left(\left|X_j\right|>\widehat{a}_n\right)}{n}\right)^{1-\delta}$$

Remarquons que:

$\widehat{a}_n\longrightarrow\infty\Longrightarrow\exists\ M<\infty$ tel que $\widehat{a}_n>M$;

$|X_j|>\widehat{a}_n\Longrightarrow|X_j|>M$

D'où

$$\lim_n\sum_{j=1}^{n}\frac{I\left(\left|X_j\right|>\widehat{a}_n\right)}{n}\leq\lim_n\sum_{j=1}^{n}\frac{I\left(\left|X_j\right|>M\right)}{n}=P\left(|X|>M\right)\text{ a.s.}$$

Car $\widehat{a}_n\longrightarrow\infty$; M peut tendre vers l'infini . Et $\lim\limits_{M\longrightarrow\infty}P\left(|X|>M\right)=0$.

$$\lim_{M\longrightarrow\infty}E\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{I\left(\left|X_j\right|>\widehat{a}_n\right)}{n}\right)^{1-\delta}=E\left(\lim_{M\longrightarrow\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{I\left(\left|X_j\right|>\widehat{a}_n\right)}{n}\right)^{1-\delta}$$

Et

$$E\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{I\left(\left|X_j\right|>\widehat{a}_n\right)}{n}\right)^{1-\delta}\longrightarrow 0\text{ , quand }n\longrightarrow\infty$$

Donc :

$$\sum_{j=\left[\widehat{\psi}_n r_n\right]+1}^{n}\left(k\left(X_j^{(n)}\right)-H_{\widehat{a}_n}\left(X_j^{(n)}\right)\right)\xrightarrow{P}0.$$

De (3.7.1) et (3.7.2)

$$\mathcal{L}\left(\frac{\sum_{j=\left[\widehat{\psi}_n\ r_n\right]+1}^{n}k\ \left(X_j^{(n)}\right)\ +\ \sum_{j=1}^{\left[\widehat{\psi}_n\ r_n\right]}H_{\widehat{a}_n}\ \left(X_j^{(n)}\right)}{\widehat{a}_n\ \sqrt{r_n}}\right)\longrightarrow N(0,1).$$

CHAPITRE 4

Modifications lourdes

4.1 Introduction

Soit $X_1, X_2, ...X_n$ une suite de variables aléatoires non degénérées, indépendantes et identiquement distribuées et soit $\{r_n\}_{n\geq 1}$une suite de nombres reéls telles que:
$r_n \longrightarrow \infty, \frac{r_n}{n} \longrightarrow \theta$ avec $0 < \theta < 1.$

Dans le but d'obtenir des théorèmes central limite où les moments d'ordre un et deux sont infinies ,les variables aléatoires seront modifiées[22] par des fonctions H_t appelées fonctions d'influence tel que

$$H_t(x) = k(x) I(|x| \leq t) + g_t(x) I(|x| > t) \tag{4.1.1}$$

où

$$k(x) \neq 0 \ pour \ x \neq 0$$

$$|k \ \ (x)| \leq C_1 |x| \ \text{ pour x assez grand }, C_1 \geq 0$$

$$|g_t(x)| \leq C_2 t \ \text{ pour } \ |x| > t, C_2 < \infty$$

Prenons t comme niveau de modification , l'ensemble des variables aléatoires qui sont inférieures à t seront remplacées par $k\ (x)$, et celles plus grandes que t par $g_t\ (x)$.

On a vu au troisième chapitre le cas où le nombre de termes modifiés par $g_t(\ x)$ croit infiniment $\left(r_n \longrightarrow \infty, \frac{r_n}{n} \longrightarrow 0\right)$, une telle modification est appelée "modification légère".

Dans ce chapitre on va étudier le cas où le nombre de termes modifiés par $g_t(\ x)$ est une fraction ($r_n \longrightarrow \infty, \frac{r_n}{n} \longrightarrow \theta\ ,\ 0 < \theta < 1$), c'est ce qu'on va appeler "modification lourde".

4.2 TCL pour les sommes totalement modifiées

Théorème 4.1. *Soit:*

$\cdot H_t\ d\acute{e}finie\ comme$ (4.1.1)

$\cdot \{r_n\}_{n\geq 1}$ telle que $\frac{r_n}{n}$ decroissante, $r_n \longrightarrow \infty, \frac{r_n}{n} \longrightarrow \theta\ avec 0 < \theta < 1.$ (4.2.1)

Supposons qu'il existe une suite $\{a_n\}_{n\geq 1}$, telle que pour n suffisamment grand

$$(i)\ \frac{a_n^2\ r_n}{n} = EH_{a_n}^2\left(X\right)\ . \tag{4.2.2}$$

et

$$(ii) \qquad EH_{a_n}\left(X\right) \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} c,\ c \text{ constante} \tag{4.2.3}$$

Alors

$$M_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{H_{a_n}\ (\ X_i) - EH_{a_n}\ (\ X)}{a_n\ \sqrt{\ r_n}} \xrightarrow{D} N\left(0,1\right)$$

.

Preuve. $M_n = \sum_{i=1}^n \frac{H_{a_n}\ (X_i) - EH_{a_n}\ (X)}{a_n\ \sqrt{r_n}} = \sum_{i=1}^n Y_{ni}$

Vérifions les conditions[11] de Liapounov:

1. $\cdot E(Y_{ni}) = E\left(\frac{H_{a_n}\ (X_i) - EH_{a_n}\ (X)}{a_n\ \sqrt{r_n}}\right)$

$$= \frac{1}{a_n\sqrt{r_n}} E\left(H_{a_n}(X_i) - EH_{a_n}(X)\right)$$

$$= 0$$

2. $\cdot Var\left(M_n\right) = Var\left(\sum_{i=1}^n \frac{H_{a_n}\ (X_i) - EH_{a_n}\ (X)}{a_n\sqrt{r_n}}\right)$

$$= \frac{1}{a_n^2\ r_n} Var\left(\sum_{i=1}^n H_{a_n}\left(X_i\right) - EH_{a_n}\left(X\right)\right)$$

$$= \frac{1}{a_n^2\ r_n} \sum_{i=1}^n Var\left(H_{a_n}\left(X_i\right) - EH_{a_n}\left(X\right)\right)$$

$$= \frac{n}{a_n^2\ r_n} Var\left(H_{a_n}\left(X_i\right) - EH_{a_n}\left(X\right)\right)$$

$$= \frac{n}{a_n^2\ r_n} Var\left(H_{a_n}\left(X_i\right)\right)$$

$$= \frac{n}{a_n^2\ r_n}\left(EH_{a_n}^2\left(X\right) - \left(EH_{a_n}\left(X\right)\right)^2\right)$$

Comme $EH_{a_n}(X) \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} c$,on peut prendre $EH_{a_n}(X) = 0$, il vient que

$$
\begin{aligned}
Var(M_n) &= \tfrac{n}{a_n^2\ r_n} EH_{a_n}^2(X) \\
&= \tfrac{n}{a_n^2\ r_n} \tfrac{a_n^2\ r_n}{n} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

3. $$
\begin{aligned}
\cdot\sum_{i=1}^{n} E\left|Y_{ni}\right|^3 &= \sum_{i=1}^{n} E\left|\tfrac{H_{a_n}(X_i)-EH_{a_n}(X)}{a_n\sqrt{r_n}}\right|^3 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\tfrac{1}{a_n\ \sqrt{r_n}}\right)^3 E\left|H_{a_n}(X_i) - EH_{a_n}(X)\right|^3 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\tfrac{1}{a_n\ \sqrt{r_n}}\right)^3 E\left(\left(H_{a_n}(X_i) - EH_{a_n}(X)\right)^2 \left|H_{a_n}(X_i) - EH_{a_n}(X)\right|\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\left(\tfrac{1}{a_n\ \sqrt{r_n}}\right)^3 E\left(H_{a_n}(X_i) - EH_{a_n}(X)\right)^2 \left|H_{a_n}(X_i)\right| + \left|EH_{a_n}(X)\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\left(\tfrac{1}{a_n\ \sqrt{r_n}}\right)^3 Var\left(H_{a_n}(X_i)\right)\ \left[\left(C_1+C_2\right)a_n + c\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\tfrac{(C_1+C_2)+c}{a_n^2\left(\sqrt{r_n}\right)^3}\right) EH_{a_n}^2(X_i) - \left(EH_{a_n}(X_i)\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\tfrac{(C_1+C_2)+c}{a_n^2\left(\sqrt{r_n}\right)^3}\tfrac{Var(\ M_n)\ a_n^2\ r_n}{n} \\
&= \tfrac{n\ [(C_1+C_2)+c\ ]Var(\ M_n)}{n\sqrt{r_n}} \\
&= \tfrac{[(C_1+C_2)+c]\ Var(\ M_n)}{\sqrt{r_n}} \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ ,car} Var(\ M_n) \longrightarrow 1
\end{aligned}
$$

Les conditions du théorème sont vérifiées d'où:

$$M_n \xrightarrow{D} N(0,1)$$

$\square$

La validité du théorème peut être obtenue en modifiant aussi une partie de termes par $H_t(x)$. Soit donc le théorème suivant :

Notons par :

$$G(x) = P(|X| > x)$$

4.3 TCL pour les sommes partiellement modifiées

Théorème 4.2. *Soient:* - H_t *définie comme* (4.1.1)

-r_n *définie comme* (4.2.1)

Supposons qu'il existe une suite $\{a_n\}_{n\geq 1}$, *telle que* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, *et pour n suffisamment grand* (4.2.2) *et* (4.2.3) *sont vérifiées.*

Alors:

$$S_n = \frac{\sum_{i=[\lambda\ r_n]+1}^{n} K\ \left(X\ _i^{(n)}\right)\ +\ \sum_{i=1}^{[\lambda\ r_n]} H_{a_n}\ \left(X\ _i^{(n)}\right) -\ nEH_{a_n}\ (X)}{a_n\sqrt{r_n}} \xrightarrow{D} N(0,1)$$

où :

$$\begin{aligned} \lambda &< 1 \quad si \quad G\left(a^-\right) = \theta \\ \lambda &= 1 \quad si\ non \end{aligned}$$

Preuve. Ecrivons S_n sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n} \frac{H_{a_n}\ \left(X_i^{(n)}\right) - EH_{a_n}\ (X)}{a_n\sqrt{r_n}} + \sum_{i=[\lambda\ r_n]+1}^{n} \frac{K\left(X\ _i^{(n)}\right) - H_{a_n}\ \left(X\ _i^{(n)}\right)}{a_n\sqrt{r_n}} \\ &= \qquad M_n \qquad + \qquad C_n \end{aligned}$$

Notons que $M_n \xrightarrow{D} N\ (0,1)$ d'après le Théorème (4.1).

Ainsi qu'en utilisant les propriétés de la convergence des suites des variables aléatoires, il suffit de montrer que

$$C_n \xrightarrow{P} 0$$

En fait on va montrer une assertion plus forte:

$A_n \equiv a_n\sqrt{r_n}C_n \xrightarrow{P} 0.$

Remarquons que:

$$\{|A_n| \neq 0\} = \left\{\left|\sum_{i=[\lambda r_n]+1}^{n} \left\{K\left(X\ _i^{(n)}\right) - H_{a_n}\ \left(X\ _i^{(n)}\right)\right\}\right| \neq 0\right\}$$

$$\begin{aligned} P\ \{|A_n| \neq 0\} &\leq P\left\{\sum_{i=[\lambda r_n]+1}^{n} \left|\left\{K\left(X\ _i^{(n)}\right) - H_{a_n}\ \left(X\ _i^{(n)}\right)\right\}\right| \neq 0\right\} \\ &\leq P\left\{\exists\ i : [\lambda r_n] + 1 \leq i : \left\{K\left(X\ _i^{(n)}\right) - H_{a_n}\ \left(X\ _i^{(n)}\right)\right\} \neq 0\right\} \\ &= P\left\{\exists\ i \geq [\lambda r_n] + 1 : \left\{K\left(X\ _i^{(n)}\right) - H_{a_n}\ \left(X\ _i^{(n)}\right)\right\} \neq 0\right\} \end{aligned}$$

Notons que :

$$\left\{K\left(X_i^{(n)}\right)-H_{a_n}\left(X_i^{(n)}\right)\right\}\neq 0\Longrightarrow$$
$$\left\{K\left(X_i^{(n)}\right)-\left[K\left(X_i^{(n)}\right)I\left(\left|X_i^{(n)}\right|\leq a_n\right)++g_{a_n}\left(X_i^{(n)}\right)I\left(\left|X_i^{(n)}\right|>a_n\right)\right]\right\}\neq 0$$

ne se réalise que si $g_{a_n}\left(X_i^{(n)}\right)I\left(\left|X_i^{(n)}\right|>a_n\right)>0$, il vient que $\left|X_i^{(n)}\right|>a_n$.

Soit $T_n=\sum\limits_{i=1}^{n}I\left(|X_i|>a_n\right)$;on aura:

$$P\left\{|A_n|\neq 0\right\}\leq P\left\{\exists\ i\geq[\lambda r_n]+1:\left|X_i^{(n)}\right|>a_n\right\}$$

Notons que $X_1^{(n)}\geq X_2^{(n)}\geq......\geq X_{[\lambda r_n]+1}^{(n)}\geq.....$

D'où

$$\begin{aligned}P\left\{\exists\ i\geq[\lambda r_n]+1:\left|X_i^{(n)}\right|>a_n\right\}&=P\left(\lambda r_n\ \text{termes}\,|X_i|>a_n\right)\\&=P\left(T_n>\lambda r_n\right)\end{aligned}$$

Avec $T_n\rightsquigarrow B\left(n,G\left(a_n\right)\right)$,tel que $G\left(a_n\right)=p\left(|X_i|>a_n\right).$

$$\begin{aligned}P\left(T_n>\lambda r_n\right)&=P\left(T_n-ET_n>\lambda r_n-ET_n\right)\\&\leq P\left(|T_n-ET_n|>\lambda r_n-ET_n\right)\\&\leq\tfrac{Var\ T_n}{\left(\lambda\ r_n-ET_n\right)^2}\ \text{d'après l'inégalité de Chebyshev.}\end{aligned}$$

Notons que si $T_n\rightsquigarrow B\left(n,\ p\right)$ alors ; $E\left(T_n\right)=np,Var\left(T_n\right)=npq$

D'où

$$P\left(T_n>\lambda r_n\right)\leq\tfrac{nG(\ a_n)(1-G(\ a_n))}{\left(\lambda r_n-nG(\ a_n)\right)^2}.$$

$\cdot$Si $G\left(a^-\right)\neq\theta$ on a $\lambda=1$ et alors

$$\begin{aligned}P\left\{|A_n|\neq 0\right\}&\leq\tfrac{nG(\ a_n)(1-G(\ a_n))}{n^2\left(\frac{r_n}{n}-G(\ a_n)\right)^2}\\&\leq\tfrac{G(\ a_n)(1-G(\ a_n))}{n\left(\frac{r_n}{n}-G(\ a_n)\right)^2}\\&\longrightarrow 0\ \text{lorsque}\ n\longrightarrow\infty.\end{aligned}$$

$\cdot$Si $G\left(a^-\right)=\theta$,$\lambda<1$

D'où

$$P\left\{|A_n|\neq 0\right\}\leq\tfrac{G(\ a_n)(1-G(\ a_n))}{n\left(\lambda\frac{r_n}{n}-G(\ a_n)\right)^2}\longrightarrow 0\ \text{quand}\ n\longrightarrow\infty.$$ □

4.4 Version empirique du Théorème central limite

Dans le but d'obtenir la version empirique des théorèmes précédents. Supposons que $\frac{E\ H_t^2(\ X)}{t^2}\geq\theta$ pour un certain t >0.

Soit $t_0=\inf\left\{t>0:\frac{E\ H_t^2(\ X)}{t^2}\geq\theta\right\}.$

et

$\widehat{a}_n = \inf \left\{ t \geq t_0 : \frac{E\ H_t^2(X)}{t^2} \leq \frac{r_n}{n} \right\}$.

Enonçons le lemme suivant qui va servir a prouver la version empirique de TCL:

Lemme 4.3. *Soit H_t définie comme (4.1.1) et supposons que $E\,(k\,(X))^2 = \infty$. Alors presque sûrement on a:*

1. *$\widehat{a}_n$ existe pour $n \geq 1$.*
2. *$\frac{E_n\ H_{\widehat{a}_n}^2(X)}{\widehat{a}_n^2} = \frac{r_n}{n}$, et*
3. *Si $\frac{r_n}{n}$est décroissante , alors $\widehat{a}_n$ converge vers $\widehat{a}$ p.s.*

Preuve. 1)-D'une part pour $t \geq t_0$, $\frac{E\ H_t^2(X)}{t^2} \geq \theta > 0$. □

D'autre part $\frac{r_n}{n} \longrightarrow \theta$ et $\frac{r_n}{n} > 0$; et puisque lim $\frac{E\ H_t^2(X)}{t^2} = 0$; $\exists\ t' \geq t_0$ tel que $\frac{E\ H_t^2(X)}{t^2} \leq \frac{r_n}{n}$.

D'où $\widehat{a}_n$ existe et il suffit de la prendre inf $\left\{ t \geq t_0 : \frac{E\ H_t^2(X)}{t^2} \leq \frac{r_n}{n} \right\}$

2) soit $h_n(t) = \frac{E_n\ H_t^2(X)}{t^2}$

Pour $t \geq t_0$,$\frac{E\ H_t^2(X)}{t^2} \leq \frac{r_n}{n}$.

Lorsque $\widehat{a}_n$ est un point de continuité :

-a)$\lim\limits_{t \nearrow \widehat{a}_n} h_n(t) = h_n(\widehat{a}_n) = \frac{E_n\ H_{\widehat{a}_n}^2(X)}{\widehat{a}_n^2} \geq \frac{r_n}{n}$ (par la définition même de $\widehat{a}_n$,et le fait que $t < \widehat{a}_n$)

-b)$\lim\limits_{t \searrow \widehat{a}_n} h_n(t) = h_n(\widehat{a}_n) = \frac{E_n\ H_{\widehat{a}_n}^2(X)}{\widehat{a}_n^2} \leq \frac{r_n}{n}$ $(t > \widehat{a}_n)$

De a et b $\quad h_n(\widehat{a}_n) = \frac{r_n}{n}$

3) $\frac{r_n}{n}$est décroissante et $\frac{E_n\ H_{\widehat{a}_n}^2(X)}{\widehat{a}_n^2} = \frac{r_n}{n}$,on peut dire que$\frac{E_n\ H_t^2(X)}{t^2}$ est décroissante ceci implique que $\widehat{a}_n$est croissante.

De plus on a $\frac{r_n}{n} \longrightarrow \theta$, alors $\frac{E_n\ H_{\widehat{a}_n}^2(X)}{\widehat{a}_n^2} \longrightarrow \theta$,donc nécessairement $\widehat{a}_n < \infty$.

D'où $\widehat{a}_n \longrightarrow \widehat{a}$

Théorème 4.4. *Soit H_t définie comme* $(4.1.1)$, *et supposons que* $H_t(-x) = H_t(x)$, *et que H_t est continue à droite et g_t n'a de saut de haut en bas en t*

Soit r_n définie comme $(4.2.1)$, *X symétrique*

Et

$\frac{E\ H_t^2(\ X)}{t^2} \geq \theta$, *alors*

$$\mathcal{L}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{H_{\widehat{a}_n}(\ X_i)}{\widehat{a}_n\ \sqrt{r_n}}\right) \xrightarrow{D} N(0,1)$$

4.5 Vitesse de convergence

La vitesse de convergence représente la vitesse à laquelle les termes se rapprochent de sa limite. Bien que cet ordre de grandeur de vitesse de convergence ne fournisse pas d'information sur toute partie finie de l'ensemble des termes de la suite, ce concept a une grande importance pratique lorsque nous travaillons avec une suite d'approximations successives obtenues à partir d'une méthode itérative, car en général peu d'itérations sont nécessaires pour donner une valeur approchée intéressante lorsque la vitesse de convergence est grande. Cela peut entraîner dans certains cas une différence de dix voire un million d'itérations.

Récemment, un nombre important d'articles ont faits l'objet d'étudier la vitesse de convergence pour les termes de grandes valeurs. Dans le cas des variables aléatoires iid, des théorèmes ont établis l'équivalence entre la convergence des séries pour les sommes partielles $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et l'existence des moments. Citons en exemple le théorème de Spitzer [10] dont il a prouvé que la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} P\left\{\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| > \epsilon\right\}$ pour tout $\epsilon > 0$ est équivalente a $E|X_1| < \infty$, $EX_1 = \mu$.

Le problème de la vitesse de convergence pour le TCL est analytiquement plus difficile que celui de la loi de grand nombre. Si $EX_1 = 0$, $EX_1^2 = 1$, les moments existent et la vitesse de convergence est établie[9] en terme de borne supérieure:

$$\left|P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} < x\right) - \Phi(x)\right|$$

où Φ est la distibution normale.

Cepandant le TCL pour les variables aléatoires iid est connu équivalent a l'existence du moment d'ordre deux .En fait il est conjecturé que la vitesse de convergence est établie si le moment d'ordre deux existe. Le premier résultat est fait par Spitzer[24] où il a montre que si $EX_1 = 0$, $EX_1^2 = 1$, alors la série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \left\{ P\left(S_n < 0\right) - \frac{1}{2} \right\}$$

est convergente.

Bentkus et Gotze [18] ont obtenus la vitesse de convergence de $\frac{S_n}{V_n}$ tel que $V_n = (X_1^2 + ...X_n^2)^{\frac{1}{2}}$ lorsque X_1 appartient au domaine d'attraction de la normale

Lors de l'application des fonctions d'influence on a vu que le conformément asymptotique normale peut être obtenu, beaucoup de facteurs ont apportés le choix de ces fonctions. Des fonctions d'influence différents impliquent des vitesses de convergence différentes, il est donc avantageux d'utiliser celles qui donnent la plus grande vitesse de convergence.

la vitesse de convergence est établie par le fait de trouver une borne inférieure et supérieure pour l'erreur uniforme dans le théorème central limite[5]

Le but de cette section est de montrer que toutes les fonctions H_t donnent la même vitesse de convergence[22] dans le cas d'une variable aléatoire symétrique et dont les v.a sont distribuées dont la queue varie régulièrement i.e:

$$P\left(|X| > t\right) = ct^{-\lambda} \text{ } pour \text{ } t \geq t_0, 0 < \lambda < 2 \tag{4.5.1}$$

Théorème 4.5. *soit H_t définie comme* (3.2.1) *telles que $C_3 |x| \leq |k(x)| \leq C_1 |x|$,$C_1 > 0, C_3 < \infty$,soit $\{X_i\}$une suite de variables aléatoires symétriques i.i.d , soit $\{r_n\}$ vérifiant*(3.2.2) *Supposons que g_t n'a de saut de haut en bas pour t grand .Alors il existe une suite $a_n \longrightarrow \infty$ telle que:*

1. $\frac{E_n \text{ } H_{a_n}^2 \text{ } (X)}{a_n^2} = \frac{r_n}{n}$.
2. $\sup\limits_{-\infty<x<\infty} P\left|\left(\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{H_{\text{ } a_n} \text{ } (\text{ } X_j)}{a_n \sqrt{r_n}} \leq x\right) - \phi\left(x\right)\right| \asymp \frac{n \text{ } a_n^{-\lambda}}{r_n^2}$.
3. *toutes les fonctions H_t ont la même vitesse de convergence.*

Pour démontrer ce théorème on a besoin du théorème de HALL (1982) qui a trouvé les borne s supérieure et inférieure pour la vitesse de convergence des variables aléatoires indépendantes sous forme d'un rang triangulé défini auparavant.

Théorème 4.6. *(Hall 82) Soit* $\{Z_{nj}, 1 \le j \le n < \infty\}$*ensemble de variables aléatoires définies sous forme d'un rang triangulé (les variables aléatoires sont indépendantes sur chaque ligne), avec la supposition que* $E\ Z_{nj} = 0, \sum_{j=1}^{n} EZ_{nj}^2 = 1$ *et* $\max_{1\le\ j\le\ n} EZ_{nj}^2 \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0.$

Supposons que $\forall\varepsilon > 0, \sum_{j=1}^{n} \left\{EZ_{nj}^2 I\left(|Z_{nj}| > \varepsilon\right)\right\} \longrightarrow 0$,Alors pour n grand,

$\exists C_4 > 0, C_5 < \infty$,tel que $C_4\delta_{n1} \le \sup_{-\infty<x<\infty} P\left|\left(\sum_{j=1}^{n} Z_{nj} \le x\right) - \phi\left(x\right)\right| \le C_5\delta_n$

Où

$\delta_n = \sum_{j=1}^{n} \left\{EZ_{nj}^2 I\left(|Z_{nj}| > 1\right)\right\} + \sum_{j=1}^{n} \left\{EZ_{nj}^4 I\left(|Z_{nj}| \le 1\right)\right\} + \left|\sum_{j=1}^{n} \left\{EZ_{nj}^3 I\left(|Z_{nj}| \le 1\right)\right\}\right|$

et

$\delta_{n1} = \sum_{j=1}^{n} P\left(|Z_{nj}| > 1\right) + \sum_{j=1}^{n} \left\{EZ_{nj}^4 I\left(|Z_{nj}| \le 1\right)\right\} + \left|\sum_{j=1}^{n} \left\{EZ_{nj}^3 I\left(|Z_{nj}| \le 1\right)\right\}\right|$

Pour le démontrer on a besoin du lemme suivant

Lemme 4.7. *Soit une variable aléatoire symétrique satisfaisant*$(4.5.1)$, *soit* p *un entier paire , soit* p, λ *tel que* $m = m\left(p, \lambda\right)$*.et pour* $t \ge mt_0$ *on a* $\frac{p}{p-\lambda}\left(1 - \left(\frac{1}{m}\right)^{p-\lambda}\right) > 1$*. Alors*

$EX^p I\left(|X| \le t\right) \asymp t^{p-\lambda}$ pour $t \ge mt_0$.

Preuve. notons que p est paire et par intégale par partie on aura

$$EX^p I\left(|X| \le t\right) = -t^p\ P\left(|X| > t\right) + \int_0^t p\ y^{p-1} p\left(|X| > y\right) dy$$

$$= -t^p\ P\left(|X| > t\right) + \int_0^{t_0} p\ y^{p-1} p\left(|X| > y\right) dy + \int_{t_0}^{t} p\ y^{p-1} p\left(|X| > y\right) dy$$

Si $t \ge t_0$ □

$$\int_{t_0}^{t} p y^{p-1} p\left(|X| > y\right) dy = \int_{t_0}^{t} p\ y^{p-1} c y^{-\lambda} dy = cp\int_{t_0}^{t} y^{p-\lambda-1} dy = \frac{cp}{p-\lambda}\left(t^{p-\lambda} - t_0^{p-\lambda}\right)$$

Soit : $\varepsilon = \frac{p}{p-\lambda}\left(1 - \left(\frac{1}{m}\right)^{p-\lambda}\right) - 1$

$\frac{cp}{p-\lambda}\left(t^{p-\lambda} - t_0^{p-\lambda}\right) \le \frac{cp}{p-\lambda} t^{p-\lambda}$ si $t \ge t_0$, et

si $t \ge mt_0 \Longrightarrow \frac{t}{t_0} \ge m \Longrightarrow -\left(\frac{t_0}{t}\right)^{p-\lambda} \ge -\left(\frac{1}{m}\right)^{p-\lambda}$

$\frac{cp}{p-\lambda}\left(t^{p-\lambda} - t_0^{p-\lambda}\right) = \frac{cp}{p-\lambda}\left(t^{p-\lambda}\left(1 - \left(\frac{t_0}{t}\right)^{p-\lambda}\right)\right) \ge \frac{cp}{p-\lambda} t^{p-\lambda}\left(1 - \left(\frac{1}{m}\right)^{p-\lambda}\right)$

on a:

$$-t^p\ P\left(|X| > t\right) = -ct^{p-\lambda} \quad \text{pour } t \ge t_0$$

$$EX^p I\left(|X| \le t\right) = -t^p\ P\left(|X| > t\right) + \int_0^{t_0} p\ y^{p-1} p\left(|X| > y\right) dy + \frac{cp}{p-\lambda}\left(t^{p-\lambda} - t_0^{p-\lambda}\right)$$

$$\leq -ct^{p-\lambda} + \int_0^{t_0} p\ y^{p-1} p\left(|X| > y\right) dy + \tfrac{cp}{p-\lambda} t^{p-\lambda}$$

pour $t \geq t_0$,$-ct^{p-\lambda} + \int_0^{t_0} p\ y^{p-1} p\left(|X| > y\right) dy < 0$

D'où

$EX^p I\left(|X| \leq t\right) \leq \frac{cp}{p-\lambda} t^{p-\lambda}$

pout $t \geq mt_0$

$$\begin{aligned} EX^p I\left(|X| \leq t\right) &\geq -ct^{p-\lambda} + \int_0^{t_0} p\ y^{p-1} p\left(|X| > y\right) dy + \tfrac{cp}{p-\lambda} t^{p-\lambda} \left(1 - \left(\tfrac{1}{m}\right)^{p-\lambda}\right) \\ &= ct^{p-\lambda} \left(\tfrac{p}{p-\lambda} \left(1 - \left(\tfrac{1}{m}\right)^{p-\lambda}\right) - 1\right) + \int_0^{t_0} p y^{p-1} p\left(|X| > y\right) dy \\ &= \varepsilon ct^{p-\lambda} + \int_0^{t_0} p\ y^{p-1} p\left(|X| > y\right) dy \\ &\geq \varepsilon ct^{p-\lambda} \end{aligned}$$

Alors pour $t \geq mt_0$ $\varepsilon ct^{p-\lambda} \leq EX^p I\left(|X| \leq t\right) \leq \frac{cp}{p-\lambda} t^{p-\lambda}$

On peut dire donc que $EX^p I\left(|X| \leq t\right) \asymp t^{p-\lambda}$

Démontrons le théorème(4.5)

Preuve. Par la proposition (3.4) ; soit

$$\widetilde{H}_t\left(x\right) = C_3 x I\left(|x| \leq t\right)$$

alors : $\exists n_0 = n_0\left(C_3\right), a_n, \widetilde{a}_n$ tel que pour $n \geq n_0$

$$a_n^2 = \frac{n}{r_n} E H_{a_n}^2\left(X\right) \text{ avec } a_n \longrightarrow \infty$$

$$\widetilde{a}_n^2 = \frac{n}{r_n} E \widetilde{H}_{a_n}^2\left(X\right) \text{ avec } a_n \longrightarrow \infty$$

et

$$a_n \geq \widetilde{a}_n$$

D'où (1) est vérifiée .

Montrons que $\sup\limits_{-\infty<x<\infty} P \sum \left|\left(\frac{H\ _{a_n}\ \left(X_j\right)}{a_n\ \sqrt{r_n}} \leq x\right) - \phi\left(x\right)\right| \asymp \frac{n\ a_n^{4-4-\lambda}}{r_n^2}$

Soit $Z_{nj} = \frac{H_{a_n}\left(X_j\right)}{a_n \sqrt{r_n}}$,on a $H_{a_n}\left(-\ x\right) = -H_{a_n}\left(\ x\right)$ et X est symétrique, Z_{nj} fonction impaire a puissance impaire ,d'où

$EZ_{nj}^r = 0$

De plus

$|Z_{nj}| = \left|\frac{H_{a_n}(X_j)}{a_n\sqrt{r_n}}\right| \le \frac{a_n}{a_n\sqrt{r_n}} \le \frac{1}{\sqrt{r_n}} \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0$, et alors $|Z_{nj}| \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0$.
$EZ_{nj}^2 = E\left(\frac{H_{a_n}^2(X_j)}{a_n^2\ r_n}\right) \le \frac{1}{r_n} \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0$,et alors $\max\limits_{1\le\ j\le\ n} EZ_{nj}^2 \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0$
Pour $n \ge n_0 \sum\limits_{j=1}^{n} EZ_{nj}^2 = \sum\limits_{j=1}^{n} E\left(\frac{H_{a_n}^2(X_j)}{a_n^2\ r_n}\right) = n\frac{EH_{a_n}^2(X_j)}{a_n^2\ r_n} = \frac{na_n^2\ r_n}{na_n^2\ r_n} = 1$

1. Montrons qu'il existe n_1 tel que pour $n \ge n_1, \delta_{n1} = \delta_n = n\frac{EH_{\ a_n}^{\ 4}(X_j)}{a_n^4\ r_n^2}$

   Puisque $|Z_{nj}| \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0.$, $\exists\ n_2/$ pour $n \ge n_2, |Z_{nj}| < 1$,et $EZ_{nj}^r = 0$ pour r impair

   En utilisant le théorème (4.6)

$$\begin{aligned}\delta_n &= \sum_{j=1}^{n}\left\{EZ_{nj}^2 I\left(|Z_{nj}| > 1\right)\right\} + \sum_{j=1}^{n}\left\{EZ_{nj}^4 I\left(|Z_{nj}| \le 1\right)\right\} + \\ &\quad \left|\sum_{j=1}^{n}\left\{EZ_{nj}^3 I\left(|Z_{nj}| \le 1\right)\right\}\right|\end{aligned}$$

   avec

   $\sum\limits_{j=1}^{n}\left\{EZ_{nj}^2 I\left(|Z_{nj}| > 1\right)\right\} = 0,$

   $\left|\sum\limits_{j=1}^{n}\left\{EZ_{nj}^3 I\left(|Z_{nj}| \le 1\right)\right\}\right| = 0 \quad$ et $\quad \sum\limits_{j=1}^{n}\left\{EZ_{nj}^4 I\left(|Z_{nj}| \le 1\right)\right\} = \sum\limits_{j=1}^{n} EZ_{nj}^4$

   Et

   $\delta_{n1} = \sum\limits_{j=1}^{n} P\left(|Z_{nj}| > 1\right) + \sum\limits_{j=1}^{n}\left\{EZ_{nj}^4 I\left(|Z_{nj}| \le 1\right)\right\} + \sum\limits_{j=1}^{n}\left\{EZ_{nj}^3 I\left(|Z_{nj}| \le 1\right)\right\}$ avec $\sum\limits_{j=1}^{n} P\left(|Z_{nj}| > 1\right) = 0, \sum\limits_{j=1}^{n}\left\{EZ_{nj}^3 I\left(|Z_{nj}| \le 1\right)\right\} = 0$et $\sum\limits_{j=1}^{n}\left\{EZ_{nj}^4 I\left(|Z_{nj}| \le 1\right)\right\} = \sum\limits_{j=1}^{n} EZ_{nj}^4$

   D'où

   $\delta_{n1} = \delta_n = \sum\limits_{j=1}^{n} EZ_{nj}^4 = \sum\limits_{j=1}^{n}\frac{EH_{\ a_n}^{\ 4}(X_j)}{a_n^4\ r_n^2} = n\frac{EH_{\ a_n}^{\ 4}(X_j)}{a_n^4\ r_n^2}$

2. Montrons que $\sup\limits_{-\infty<x<\infty} P\left|\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{H_{\ a_n}(X_j)}{a_n\ \sqrt{r_n}} \le x\right) - \phi(x)\right| \asymp \delta_n$

   Puisque les conditions du théorème (4.6) sont vérifiées on a:

   $C_4\delta_{n1} \le \sup\limits_{-\infty<x<\infty} P\left|\left(\sum\limits_{j=1}^{n} Z_{nj} \le x\right) - \phi(x)\right| \le C_5\delta_n$

   De plus $\delta_{n1} = \delta_n$,et alors $\sup\limits_{-\infty<x<\infty} p\left|\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{H_{\ a_n}(X_j)}{a_n\ \sqrt{r_n}} \le x\right) - \phi(x)\right| \asymp \delta_n.$

3. Montrons que $\delta_n \asymp \frac{n\ a_n^{-\lambda}}{r_n^2}$ pour $n \geq \widetilde{n}$

$H_t(x) = k(x) I(|x| \leq t) + g_t(x) I(|x| > t)$

$$\begin{aligned} EH_{a_n}^4(X) &= E\left(k(X) I(|X| \leq a_n) + g_{a_n}(X) I(|X| > a_n)\right)^4 \\ &\leq C_1^4 E\left(X^4 I(|X| \leq a_n)\right) + C_2^4 a_n^4 EI(|X| > a_n) \\ &= C_1^4 E\left(X^4 I(|X| \leq a_n)\right) + C_2^4 a_n^4 P(|X| > a_n) \\ &\asymp C_1^4 X^{4-\lambda} + C_2^4 a_n^4 C a_n^{-\lambda} \text{ d'après le lemme (4.7)} \\ &\asymp C_1^4 X^{4-\lambda} + C_2^4 a_n^{4-\lambda} \end{aligned}$$

$\exists \widetilde{C}_1$tel que pour $n \geq \widetilde{n}$

$$\delta_n = n\frac{EH_{a_n}^4(X_j)}{a_n^4\ r_n^2} \leq \frac{\widetilde{C}_1 n a_n^{4-\lambda}}{a_n^4\ r_n^2} = \frac{\widetilde{C}_1 n a_n^{-\lambda}}{r_n^2} \tag{4.5.2}$$

Pour $n \geq \widetilde{n}$

$$\delta_n = n\frac{EH_{a_n}^4(X_j)}{a_n^4\ r_n^2} \geq n\frac{\widetilde{C}_2 a_n^{-\lambda}}{r_n^2} \tag{4.5.3}$$

De(4.5.2) et (4.5.3)

$$\delta_n \asymp \frac{n\ a_n^{-\lambda}}{r_n^2} \tag{4.5.4}$$

4. Montrons que les H_t ont la même vitesse de convergence, comparons la vitesse de convergence induit par H_t et par $\widetilde{H}_t$ tel que $\widetilde{H}_t \equiv C_3 x\,(I\,|x| \leq t)$

Soit $\delta`_n = n\frac{E\widetilde{H}_{a_n}^4(X_j)}{\widetilde{a}_n^{4\alpha}\ r_n^2}$ avec $\widetilde{a}_n^2 = \frac{n}{r_n} E\left(\widetilde{H}_{\widetilde{a}_n}^2(X)\right)$

Pour $n \geq \widetilde{n} \geq n_0$

$\delta`_n = \frac{n}{\widetilde{a}_n^4\ r_n^2} E\left(C_3^4 X^4 I(|X| \leq \widetilde{a}_n)\right)$

$\asymp \frac{n}{\widetilde{a}_n^4\ r_n^2} C_3^4 \widetilde{a}_n^{4-\lambda}$

$= C_3^4 \frac{n\widetilde{a}_n^{-\lambda}}{r_n^2}$

De là pour $n \geq \widetilde{n}$

$\frac{\delta`_n}{\delta_n} = \left(\frac{\widetilde{a}_n}{a_n}\right)^{-\lambda}$

Pour $a_n \geq mt_0$, on aura:

$a_n^2\ = \frac{n}{r_n} E\left(H_{a_n}^2(X)\right)$

$= \frac{n}{r_n}\left\{E\left(k^2\left(X\right)I\left(\left|X\right| \leq a_n\right)\right) + E\left(g_{a_n}^2\left(X\right)I\left(\left|X\right| > a_n\right)\right)\right\}$

$\leq \frac{n}{r_n}\left\{C_1^2 E\left(X^2 I\left(\left|X\right| \leq a_n\right)\right) + C_2^2 a_n^2 P\left(\left|X\right| > a_n\right)\right\}$

$\asymp \frac{n}{r_n}\left\{C_1^2 a_n^{2-\lambda} + C_2^2 a_n^{2-\lambda}\right\}.$

On peut dire donc qu'il $\exists \widetilde{C}_3 < \infty$ tel que pour $n \geq \widetilde{n}$

$$a_n^\lambda \leq \frac{n}{r_n}\widetilde{C}_3\left(C_1^2 + C_2^2\right) \tag{4.5.6}$$

De même il existe $\widetilde{C}_4 > 0$ tel que pour $n \geq \widetilde{n}$

$$a_n^\lambda \geq \frac{n}{r_n}\widetilde{C}_4 C_3^2 \tag{4.5.7}$$

De (4.5.6) et(4.5.7) : $a_n^\lambda \asymp \frac{n}{r_n}$

$\widetilde{a}_n^2 \ = \frac{n}{r_n}E\left(\widetilde{H}\ _{\widetilde{a}_n}^2\left(X\right)\right)$

$\asymp \frac{n}{r_n}\left(C_3^2 \widetilde{a}_n^{2-\lambda}\right)$

$\Leftrightarrow \widetilde{a}_n^\lambda \asymp \frac{n}{r_n}.$

Ce qui revient a dire que pour $n \geq \widetilde{n}$ $\frac{\widetilde{a}_n}{a_n} \asymp 1$ ceci implique que δ_n et δ_n' ont même ordre, d'où les fonctions H_t ont même vitesse de convergence.

$\square$

CHAPITRE 5

Principe d'invariance pour les sommes des variables aléatoires modifiées

5.1 Introduction

Les processus aléatoires décrivent l'évolution d'une grandeur aléatoire en fonction du temps (ou de l'espace). Il existe de nombreuses applications des processus aléatoires notamment en physique statistique (par exemple les transitions de phases), en biologie (évolution, génétique et génétique des populations), médecine (croissance de tumeurs, épidémie), et bien entendu les sciences de l'ingénieur .

L´étude des processus aléatoires s'insère dans la théorie des probabilités dont elle constitue l'un des objectifs les plus profonds. Elle soulève des problèmes mathématiques intéressants et souvent très difficiles. La loi d'un processus aléatoire est caractérisé par la donnée des lois fini-dimensionnelles. En fait, on parle de la loi du processus $\{X_t; t \geq 0\}$ lorsque lon connait la loi du vecteur$(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n})$ le processus de Wiener ou mouvement brownien est le plus célèbre des processus à valeurs réelles. Sa découverte est due à lobservation du biologiste Robert Brown en 1827, interessé par les fluctuations aléatoires d'un grain de pollen dans un liquide qui sont perpétuellement en mouvement. Le premier a avoir formalisé les propriétès du mouvement brownien n'est autre que A. Einstein dans un article fondamental écrit en 1905. Ce processus possède de nombreuses propriétès mathématiques : accroissements indépendants et stationnaires, processus gaussien, martingale, processus de Markov, équation de la diffusion. Cela explique que l'on puisse l´etudier très en détails. Il intervient dans la modélisation de nombreux phénomènes comme une conséquence du théorème de tendance vers la *loi normale*. Les exemples importants sont en physique et en finance.

Dans le but de fortifier la notion de la limite centrale dans le cas où la variance n'existe pas, on va voir dans ce chapitre la notion du principe d'invariance pour les sommes des variables aléatoires modifiées tout en gardant les conditions, les outils mathématiques, les étapes utilisées dans les chapitres qui précèdent on va faire une généralisation en élevant H_t a la puissance β tel que $\beta = \frac{p}{q}$; p, q des entiers impairs.

Notons que pour aboutir a ce qu'on appelle principe d'invariance il faut passer par la convergence finie dimensionnelle vers la loi normale centrée réduite, en quelque sorte c'est le TCL, ainsi que prouver que la fonction est uniformément sérrée .

Notons a titre d'exemple que La notion du principe d'invariance à été déja établie [15] dans le cas d'une suite de variables aléatoires i.i.d avec $EX_j = 0, EX_j^2 = 1$, et que la convergence faible aura lieu dans l'espace de Holder [16] (espace de fonctions définient sur l'espace métrique (X, d) qui vérifie la condition d'Holder suivante: $\exists\ C, \alpha > 0$, $C, \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\ x, y \in X$: $|f(x) - f(y)| \leq Cd(x, y)^{\alpha}$) en équivalence par l' uniformément sérrée de la fonction et la convergence finie dimensionnelle.

Définition 5.1. *[21]On appelle processus aléatoire à temps continu une famille* $\{ X_t; t \in T \}$ *de variables aléatoires indicées par un paramètre réel positif. L'ensemble* T *représente un intervalle de temps, et le plus souvent la demi-droite* IR^+*. Les variables sont définies sur un même espace probabilisé.*

Pour une éventualité du hasard ! fixée, l'application qui à t associe la valeur $X_t(w)$ s'appelle une trajectoire du processus. Les trajectoires constituent généralement les observations concrètes que l'on peut faire d'un processus. Par exemple, les journaux publient chaque jour les trajectoires des valeurs boursières.

Définition 5.2. *Un processus est à valeurs entières si* $X_t \in \mathbb{N}$*, pour tout* $t \geq 0$.

Les exemples de processus à valeurs entières sont les processus de Poisson, les processus de renouvellement liés au comptage d'évènements survenus au hasard.

Définition 5.3. *Un processus est à valeurs réelles si* $X_t \in \mathbb{R}$.

Remarque 5.4. *[3] la convergence en loi d'un processus aléatoire est équivalente à la convergence en loi de tous les vecteurs de dimension finie extraits de ce processus.*

Définition 5.5. *[21]le mouvement brownien modélise un mouvement désordonné et sans orientation privilégiée. Pour le mouvement brownien, le temps et l'espace seront de dimensions continues.Un mouvement brownien standard* $\{W_t, t \geq 0\}$ *est un processus* *stochastique adapté construit sur un espace probabilisé telles que:*

1. $\forall\omega\in\Omega, W_0(\omega)=0.$

2. $\forall\ 0\leq t_0\leq t_1\leq ....\leq t_k$, *les variables aléatoires* $W_{t_1}-W_{t_0},......,W_{t_k}-W_{t_{k-1}}$ *sont indépendantes.*

3. *pour* $s,t\geq 0$ *tel que* $s<t$ *la variable aléatoire* W_t-W_s *d'espérance* 0 *et de variance* $t-s$ *est de distribution normale i.e* $W_t-W_s\backsim N(0,t-s)$, *la trajectoire* $W_t(\omega)$ *est continue.*

Le théorème de Lindeberg suivant illustre aussi la converge asymptotique normale.

Théorème 5.6. *[3] Soit* $X_{n1},X_{n2},X_{n3},.............,X_{nk_n},n\geq 1$ *une suite de variables aléatoies sous forme d'un rang triangulé d'espérance nulle et soit* $S_n=X_{n1}+X_{n2}+..........+X_{nk_n}$, *tel que*

$\sigma_{nj}^2=Var(X_{nj})$ *et supposons que* $\sigma_n^2=\sum\limits_{j=1}^{k_n}\sigma_{n\ j}^2$

Supposons que pour chaque $\varepsilon>0$:

$\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n^{-2}\sum\limits_{j=1}^{k_n}\int\limits_{(\mid X_{nj}\mid>\varepsilon\sigma_n)}\mid X_{nj}|^2\,dp=0$

Alors

$$\frac{S_n}{\sigma_n}\xrightarrow{D}N(0,1)$$

Comme cas particulier de ce théorème, on retrouve également la convergence d'une suite de loi binomiale vers la loi normale (théorème de Bernoulli). Ce théorème justifie l'utilisation de la loi normale lorsqu'il y a répétition d'expériences identiques. Par contre, ce théorème reste strict sur les conditions d'applications. On considère souvent que ce théorème reste valable même si les distributions individuelles sont différentes, pour autant que la variance de chacun des termes individuels soit négligeable vis-à-vis de la variance de la somme. C'est en fait un théorème plus général du à Lindeberg.

La condition de Lindeberg exprime que les v.a $\frac{X_i-\mu_i}{\sigma_i}$ sont "uniformément petites" avec une grande probabilité. Le résultat veut dire qu'à force d'ajouter de telles variables, on finit par obtenir une loi normale. Autrement dit, si une variable est la résultante d'un grand nombre de causes, petites, à effet additif, cette variable suit une loi normale. C'est à cause de cette interprétation que la loi normale est très souvent employée comme modèle (malheureusement pas toujours à raison).

Au point de vue processus, beaucoup de résultats ont une relation avec le Théorème central limite pour les processus stochastiques, d'importants résultats ont été déduit des travaux de Kasahara et Watanabe [12].

5.2 Convergence vers le mouvement Brownien

Théorème 5.7. *[6]soit $B(t)$ un mouvement brownien standard ei soit $f_n, (n \in N)$ une fonction mesurable tel que:*

$M_n(s) = \sum_{i \leq ns} (f_n(X_i) - Ef_n(X_i))$

supposons qu'il existe une constante positive b_n, $b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ telles que

1. $\sup_{x\in\Re} |\, f_n(X)| \leq b_n$

2. $VarM_n(s) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} s, \forall s \geq 0$

Alors

$$M_n(.) \longrightarrow B(.) \tag{5.2.1}$$

Preuve. **1**· Convergence finie dimensionnelle □

Soit $0 \leq s_0 \leq s_1 \leq .... \leq s_n \leq 1$, définissons:

$$M_n(s_j) = \sum_{i \leq ns_j} (f_n(X_i) - Ef_n(X_i)) = \sum_{i \leq ns_j} Y_{ni}.$$

Vérifions:

a) La convergence a une dimension, montrons que $M_n(s_j) \Longrightarrow N(0, s_j)$

On doit vérifie les conditions de convergence d'ordre triangulé en utilisant le théorème de Lindeberg.

Notons que Y_{ni} prend la forme suivante :

$Y_{11}, Y_{12}, ..., Y_{1ns_1}$

$Y_{21}, Y_{22}, ..., Y_{2ns_2}$

$Y_{n1,}Y_{n1},$ ....Y_{nns_j}

et que

$E(Y_{ni}) = E(f_n(X_i) - Ef_n(X_i)) = 0$

$\sigma_{nj}^2 = Var(Y_{ni}) = E(Y_{ni}^2)$

De (2) $s \longleftarrow Var(M_n(s)) = [ns]\,EY_{ni}^2 = \frac{[ns]}{n} nEY_{ni}^2.$

puisque $\frac{[ns]}{n} \longrightarrow s$,on peut conclure que $nEY_{ni}^2 \longrightarrow 1, et$ qu'il existe $c > 1$ tel que

$$\left|nEY_{ni}^2\right| \leq c \tag{5.2.2}$$

D'où : $EY_{ni}^2 \longrightarrow \frac{1}{n}$

$\sigma_n^2 = \sum_{j=1}^{ns_j} \frac{1}{n} \longrightarrow s_j$

D'après Lindeberg montrons que:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{s_j} \sum_{i=1}^{ns_j} \int_{\left(|Y_{ni}|>\varepsilon\sqrt{s_j}\right)} |Y_{ni}|^2 \, dp = 0$$

$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{s_j} \sum_{i=1}^{ns_j} \int_{\left(|Y_{ni}|>\varepsilon\sqrt{s_j}\right)} |Y_{ni}|^2 \, dp \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{s_j} \sum_{i=1}^{ns_j} \int |Y_{ni}|^2 \, I\left(|Y_{ni}| > \varepsilon\sqrt{s_j}\right) dp$

$\underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{s_j} \sum_{i=1}^{ns_j} E\left(|Y_{ni}|^2 \, I\left(|Y_{ni}| > \varepsilon\sqrt{s_j}\right)\right)$

$\leq \frac{ns_j}{s_j} E\,|Y_{ni}|^2 \, E\left(I\left(|Y_{ni}| > \varepsilon\sqrt{s_j}\right)\right) \begin{pmatrix} \text{ce passage est vérifié car} \\ I\left(|Y_{ni}| > \varepsilon\sqrt{s_j}\right) \text{prend les} \\ \text{valeurs 0 ou 1} \end{pmatrix}$

$\leq c\; p\left(|Y_{ni}| > \varepsilon\sqrt{s_j}\right)$d'après 5.2.2

$\underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0$

Et alors $\frac{M_n(s_j)}{s_j} \longrightarrow N(0,1)$ $i.e$ $M_n(s_j) \longrightarrow N(0, s_j)$

b) la convergence a deux dimensions

Pour j<l on a $M_n(s_l) - M_n(s_j) \Rightarrow B(s_l) - B(s_j)$

$(M_n(s_j), M_n(s_l) - M_n(s_j)) \longrightarrow (B(s_j), B(s_l) - B(s_j))$

Soit h une fonction continue définie par $h(x, y) = (x, x + y)$

Appliquons le théorème d'arrangement de continuité(mapping continuity), on aura

$h(M_n(s_j), M_n(s_l) - M_n(s_j)) \longrightarrow h(B(s_j), B(s_l) - B(s_j))$

Donc $M_n(s_l) - M_n(s_j) \Rightarrow B(s_l) - B(s_j)$

2. Montrons que la fonction est uniformément serrée a)$p(B(1) \neq B(-1)) = 0$(car la fonction est continue a gauche).

b) vérifions qu'il existe une fonction F continue croissante sur $[0,1]$, des constantes $\gamma \geq 0$, $\alpha \geq \frac{1}{2}$ telles que:

$E\left\{|M_n(s) - M_n(s_1)|^\gamma |M_n(s_2) - M_n(s)|^\gamma\right\} \leq (F(s_2) - F(s_1))^{2\alpha}$

Soit $s_1 \leq s \leq s_2$, par hypothèse $Var(M_n(s)) \longrightarrow s$, d'autre part de (5.2.2) on a $|nEY_{ni}^2| \leq c\ \forall n, i$.

Par indépendance:

$$E\left\{(M_n(s) - M_n(s_1))^2 (M_n(s_2) - M_n(s))^2\right\}$$

$$\begin{aligned}
&= E(M_n(s) - M_n(s_1))^2 E(M_n(s_2) - M_n(s))^2 \\
&= E\left(\sum_{[ns_1] \leq\ i \leq [ns]} Y_{ni}\right)^2 E\left(\sum_{[ns] \leq\ i \leq [ns_2]} Y_{ni}\right)^2 \\
&= ([ns] - [ns_1])([ns_2] - [ns])\left(E\left(Y_{ni}^2\right)\right)^2
\end{aligned}$$

On distingue deux cas :

- Si $s_2 - s_1 \leq \frac{1}{n}$: $[ns] = [ns_1]$ ou $[ns] = [ns_2]$.

D'où $E\left\{(M_n(s) - M_n(s_1))^2 (M_n(s_2) - M_n(s))^2\right\} = 0$

- Si $s_2 - s_1 > \frac{1}{n} \Longrightarrow ns_2 - ns_1 > \frac{1}{n} \Longrightarrow ns_2 - ns_1 + 1 \geq [ns_2] - [ns_1]$

$$E\left\{(M_n(s) - M_n(s_1))^2 (M_n(s_2) - M_n(s))^2\right\} \leq$$

$$\leq \ ([ns_2] - [ns_1])([ns_2] - [ns_1])\left(E\left(Y_{ni}^2\right)\right)^2$$

D'après (5.2.2) :
$$\begin{aligned}
&\leq \left(\frac{[ns_2] - [ns_1]}{n}\right)^2 c^2 \\
&\leq \left(\frac{ns_2 - ns_1 + 1}{n}\right)^2 c^2 \\
&= \left(s_2 - s_1 + \frac{1}{n}\right)^2 c^2 \\
&\leq (2(s_2 - s_1))^2 c^2 \\
&= 4c^2 (s_2 - s_1)^2
\end{aligned}$$

Pour que la fonction soit uniformément serrée il suffit de prendtre $\alpha = 1$, $\gamma = 2$, $F(s) = 2cs$.

Notons que les théorèmes décrits dans les chapitres précédents sont toujours utiles soit pour la modification légère ou lourde pourvu qu'il reste a montrer pour le principe d'invariance (convergence vers le mouvement brownien) la notion d 'étroitement de la fonction (tighteness) .

Notons qu'on ne va pas redémontrer totalement les théorèmes mais seulement les énoncer sous forme d'indications concernant les modifications faites pour aboutir aux résultats.

5.3 Principe d'invariance pour les v.a totalement modifiées

Le premier principe d'invariance est obtenue en modifiant tout les termes, tout dépend bien sur de H_t, r_n où $r_n \longrightarrow \infty$, $\frac{r_n}{n} \longrightarrow 0$

Théorème 5.8. *Soit H_t définie comme* (3.2.1) *avec le fait que k croissante et soit $\beta = \frac{p}{q}$ où p et q sont des entiers impairs ,et $\alpha \in R$ satisfaisant $0 < \beta \leq \alpha$,soit r_n définie comme* (3.2.2) *, on suppose qu'il existe une suite $\{a_n\}$ tel que $a_n \longrightarrow \infty$ tel que*

$$EH_{a_n}^{2\beta}(X) = \frac{a_n^{2\alpha}\ r_n}{n}$$

·Si $E\left|k(X)\right|^{\beta} < \infty$, supposons que $E\left(k\left(X\right)\right)^{\beta} = 0$.

Soit

$$M_n(s) = \sum_{i \leq\ ns} \frac{H_{a_n}^{\beta}\ (X_i) - EH_{a_n}^{\beta}\ (X)}{a_n^{\alpha}\ \sqrt{r_n}}$$

Alors

$$M_n(.) \xrightarrow{D} B(.)$$

où B est le mouvement brownien standard.

Remarque 5.9. *pour la démonstration de ce théorème on a besoin du lemme énoncé dans* (3.2.1) *qui aura comme résultat en généralisant:* $\left(EH_{a_n}^{\beta}(X)\right)^2 = o\left(EH_{a_n}^{2\beta}(X)\right)$.

Preuve. on doit vérifie les conditions du théorème (5.7)

$$\sup_{x\in R}\left| f_n(x)\right| = \sup_{x\in R}\left|\frac{H^{\beta}_{a_n}(x)}{a_n^{\alpha}\sqrt{r_n}}\right| \leq \frac{(k(a_n)+C_2\, a_n)^{\beta}}{a_n^{\alpha}\sqrt{r_n}} \leq \frac{(C_1+C_2)^{\beta} a_n^{\beta}}{a_n^{\alpha}\sqrt{r_n}} \text{ pour n grand}$$

$$\leq \frac{(C_1+C_2)^{\beta}}{\sqrt{r_n}} \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow \infty.$$

Montrons que $VarM_n(s) \longrightarrow s$

$$VarM_n(s) = Var\left(\sum_{i\leq ns}\frac{H^{\beta}_{a_n}(X_i)-EH^{\beta}_{a_n}(X)}{a_n^{\alpha}\sqrt{r_n}}\right) = \sum_{i\leq ns}\left(Var\frac{H^{\beta}_{a_n}(X_i)-EH^{\beta}_{a_n}(X)}{a_n^{\alpha}\sqrt{r_n}}\right)$$

$$= \frac{[ns]}{a_n^{2\alpha}\, r_n}\left(EH^{2\beta}_{a_n}(X) - \left(EH^{\beta}_{a_n}(X)\right)^2\right)$$

On distingue deux cas

1. Si $E(k(X))^{2\beta} < \infty \Longrightarrow E(k(X))^{\beta} < \infty$, et par hypothèse $E(k(X))^{\beta} = 0$

   $$VarM_n(s) \approx \frac{[ns]}{a_n^{2\alpha}\, r_n}EH^{2\beta}_{a_n}(X) = \frac{[ns]n}{a_n^{2\alpha}\, r_n\, n}EH^{2\beta}_{a_n}(X) = \frac{[ns]}{n}\frac{nEH^{2\beta}_{a_n}(X)}{a_n^{2\alpha}\, r_n} \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} s$$

2. Si $E(k(X))^{2\beta} = \infty \Longrightarrow EH^{2\beta}_{a_n}(X) \longrightarrow \infty$

   $VarM_n(s) = \frac{[ns]}{n}\frac{nEH^{2\beta}_{a_n}(X)}{a_n^{2\alpha}\, r_n}\left(1 - \frac{\left(EH^{\beta}_{a_n}(X)\right)^2}{EH^{2\beta}_{a_n}(X)}\right) \longrightarrow s$ quand $n \longrightarrow \infty$ tout en utilisant le lemme (3.2)

$\square$

Il est aussi possible de modifier par g_t une proportion de termes sans changer la validité du principe d'invariance c'est ce qu'on va appliquer dans le théorème suivant:

Théorème 5.10. *Soit H_t définie comme* (3.2.1) *, k croissante et soit $\{r_n\}$satisfaisant* (3.2.2) *, et soit $\beta = \frac{p}{q}$ où p et q sont des entiers impairs, et $\alpha \in R$ satisfaisant $0 < \beta \leq \alpha$, suppososons qu'il existe une suite $a_n, a_n \longrightarrow \infty$ telles que $EH^{2\beta}_{a_n}(X) = \frac{a_n^{2\alpha}\, r_n}{n}$ pour n suffisamment grand,alors:*

il existe une suite$\{\psi_n\}$avec $\frac{\psi_n r_n}{n} \longrightarrow 0$ telle que:

$$S_n(s) = \frac{\sum_{i=[\psi_n r_n]+1}^{[ns]} k^{\beta}\left(X_i^{(n)}\right) + \sum_{i=1}^{[\psi_n r_n]} H^{\beta}_{a_n}\left(X_i^{(n)}\right) - [ns]\, EH^{\beta}_{a_n}(X)}{a_n^{\alpha}\sqrt{r_n}} \xrightarrow{D} B(s)$$

l'idée de la démonstration est de décomposer $S_n(s)$ sous forme:

$$S_n(s) = \sum_{i=1}^{[ns]}\frac{H^{\beta}_{a_n}\left(X_i^{(n)}\right)-EH^{\beta}_{a_n}(X)}{a_n^{\alpha}\sqrt{r_n}} + \sum_{i=[\psi_n r_n]+1}^{[ns]}\frac{K^{\beta}\left(X_i^{(n)}\right)-H^{\beta}_{a_n}\left(X_i^{(n)}\right)}{a_n^{\alpha}\sqrt{r_n}}$$

$$= \qquad M_n(s) \qquad + \qquad C_n(s)$$

Il suffit de montrer que $\sup\limits_{0 \leq s \leq 1} |C_n(s)| \xrightarrow{P} 0$ en procédant le même processus prouvé dans (3.3)

Remarque 5.11. *[11]En ajoutant la condition $\beta = \frac{p}{q}$ où p et q sont des entiers impairs , et $\alpha \in R$ satisfaisant $0 < \beta \leq \alpha$, toutes les propositions , théorèmes décrivent aux chapitres 3 et 4 restent valables.*

Conclusion

Nous nous sommes intéressés dans cette étude au théorème central limite par rapport aux différentes modifications faites sur les variables aléatoires. Nous avons d'abord essayé de faire le point sur ce qui a été fait dans ce domaine, puis nous nous sommes orientés vers l'étude de l'aspect de ce théorème lorsque les moments n'existent pas par rapport à deux types de modifications qui sont la modification intermédiaire et la modification lourde.

Les résultats que nous avons obtenus sont intéressants du fait qu'en plus de l'obtention de la convergence vers la loi normale pour les fonctions d'influence et leurs versions empiriques par rapport à ces deux types de modications, nous avons pu d'une part obtenus la notion de la principe d'invariance qui illustre en plus du conformément asymptotique normale, l'étroitement de la fonction, d'autre part on a étudie la vitesse de convergence, en d'autre termes on a préciser les fonctions qui donnent la plus grande vitesse de convergence .

On a pu aussi généraliser l'ensemble des théorèmes et résultats trouvés dans un cas plus large en ajoutant une condition très forte qui va permettre de bien préciser le cas d'obtention de ce fameux théorème, ainsi que ses différentes suites.

Bien que ces résultats et ceux qui ont été obtenus bien avant soient importants, reste délicat de répondre aux nombreuses questions ou d'aborder les différents problèmes que présente ce théorème. En effet, on ne peut obtenir le principe d'invariance pour tous les cas étudiés, et c'est difficile d'étudier la vitesse de convergence dans plusieurs cas .

De ce fait, le théorème central limite constitue la base de plusieurs études probabilistes soit que dans la théorie que dans la pratique d'où des perspectives de recherche ont été ouverts, pourquoi pas trouver d'autres fonctions qui préservent toujours le conformément asymptotique normale.

APPENDICE

LISTE DES SYMBOLES ET DES ABREVIATIONS

$B(n,p)$	: loi binomiale de paramètre n et p
$E(X)$	: espérance de X
F_X	: fonction de répartition de la variable aléatoire X
$I_X(x)$	: fonction indicatrice
$L(X)$	: la loi de la variable aléatoire X
$N(0,1)$	: loi normale centrée et réduite
$T.C.L$	: théorème central limite
$V(X)$	: variance de X
$f(x)$	: fonction densité
i.i.d	: indépendante,identiquement distribuée
p.s	: presque sûrement
$sgn(x)$	: signe de x
$v.a.r$	: variable aléatoire réelle
$(x \wedge t)$	: minimum entre x et t
$\Longrightarrow$	: convergence faible
$\xrightarrow{D}$	: convergence en distribution
$\xrightarrow{P}$	: convergence en probabilité
$\varphi_X(t)$	: fonction caractéristique de la variable aléatoire X

Références

[1] Hahn, M.G., Kuelbs.J., and Weiner.D.C., "The Asymptotic joint distribution of self normalised censored sums and sums -of-squares".To appear in Ann.probab, (1989).

[2] Levy, P., "Théorie de l'addition des variables aléatoires", Gauthier -Villars,Paris. (1990).

[3] Billingsley, P., "Convergence of probability measures", John Wiley , New York, (1968).

[4] Kasahara, Y., and Watanabe, S., "Limit theorems for point processes and their functionals"J. Math.Soc.Japan, 38, 543-574, (1986).

[5] Hall, P., "Rates of convergence in the central limit theorem",Pitman Advanced Publishing Program, (1982).

[6] Ould-rouis, H.," Invariance principles and self -normalizations for sums trimmed according to choice of influence function.Sums", trimmed sums and extremes.Prog.Probab.23(Birkhauser) 81-110.(1991).

[7] Hahn, M.G., and Kuelbs, J.,"Universal asymptotic normality for conditionally trimmed sums".Stat.Prob.Letters (1990).

[8] Fang, W., and Shi Hong, C., "Almost sure central limit theorems for heavily trimmed sums". Acta Math. Sinica, Vol. 20, No. 5, 869-878 (2004).

[9] Baum, L. E., and Katz, M., "Convergence rates in the law of large numbers", Trans. Am. Math. Soc., 120, 108-123 (1965).

[10] Spitzer, F., "A combinatorial lemma and its application to probability theory". Trans. Am.Math. Soc., 82, 323-339 (1956).

[11] Ould rouis, H., Boukoftane, A., " Empirical central limit theorems for totally and partially modified sums with intermediate modifications" soumis (2006).

[12] Kasahara ,Y.,Watanabe,S., "Limits theorem for point processes and their functionals", J.Math.Soc .Japan, 38 ,543-574 (1968)

[13] Christian Leboeuf.,Jean louis Rock.,Guegand Cours de probabilités , Préasup, Paris (1983).

[14] Marjorie G -Hahn., Jim Kuelbs., and Daniel C.Weiner.,"The asymptotic distribution of magnitude cuinsorized sums via Self-Normalization", Journal of theoretical probability (1990).

[15] Hamadouche, D.," Invariance principles in Holder spaces", Portugal Mathematica .vol 57 Fasc.2-(2000).

[16] Hamadouche, D.,and Suquet.,"CH-weak Holder convergence of processes with application to the perturbed empirical process", Applications Math.26; 63-83 (1999).

[17] Aranjo, A., Giné , E.,"The central limit theorem for Banach and real valued random variables", Journal of american statistical association, Vol 79, No. 387, p.735 (1984).

[18] Bentkus, V., Gotze, F., "The Berry-Essees bound for student's statistic", Ann. Probab. 24-491-503, (1996).

[19] Janos Galambos., "Advanced probability theory : pure and applied", New York-Basel-Hong kong , ISBN-0-8247-9332-3 (1995).

[20] Feller,W.,"An introduction to probability theory and its applications" ,1.New York London-Sydney. (1968).

[21] Geneviève Gauthier., "les méthodes stochastiques dans les sciences de la gestion" 6-640-93 (2003).

[22] Ould rouis, H., Boukoftane, A., " Théorème central limite pour les sommes des variables aléatoires modifiées", exposé présenté dans le séminaire du département de mathématiques de l'université Saad Dahleb . (09-2006).

[23] Mazet, P.," Théorie de la mesure et intégration" , Univ Pierre et Marie curie LM363 (2000)

[24] Spitzer, F., "A Tauberian theorem and its probability interpretation" Trans. Am. Math. Soc., 94, 150-169 (1960)