

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Saad Dahlab, Blida

Faculté des sciences.
Département de mathématique



MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Thème :

Evaluation des options Européennes par le modèle de Black-Scholes

Promoteur :

M. El Mossaoui Hichem

President de jury : Tami Omar

Examinateur 1 : Boutrig Razika

Examinateur 2 : Hannan Farouk

Présenté par : M^{elle} RAÏAH Lila
M^{elle} Zeggai Siham

MA-510-01-1

Remerciement

Nous remercions Dieu le tout puissant Qui nous a donné la volonté, le courage et la patience sans lesquels notre travail n'aurait pas aboutir.

Nous remercions nos chers parents pour leur soutien fidèle et sans faille.

Nous remercions chaleureusement notre promoteur Mr El Mossaoui Hichem pour ces précieuses orientations et ses conseils judicieux

Nous remercions les membres de jury d'avoir accepté d'évaluer la qualité et la valeur de notre travail.

Nous remercions tout le personnel du département de mathématique en particulier Mr le chef de département Tami Omar, ainsi que tous ceux et celles qui de près ou de loin ont contribué à la réalisation de ce travail.

Dédicace

Je dédie ce travail à tous ce que j'aime

À mon père et ma mère, à qui je dois tout

À mes frères Ahmed et Mezian

À ma sœur Dhahbia

À toute ma famille

À toutes mes amies en particulier ; mon Binôme

siham, Lamia, Ratiba, Naima, Chahra, Siham,

Lisa

Dédicace

Je dédie ce travail à tous ce que j'aime

À mon père et ma mère, à qui je dois tout

À mes frères et mes soeurs

À mes nièces Ghems et Nada

À tous mes collègues de magister

À Toutes mes amies en particulier Rabia, Safia,

Belkacem et bien sur à ma chère Lisa.

Siham



Résumé

Résumé

Ce mémoire traite de l'évaluation d'options sur actions européennes, sur base du célèbre modèle de Black-Scholes-Merton.

La première partie du travail consiste en la résolution de l'équation de Black-Scholes-Merton à deux dimensions, au moyen d'un schéma de résolution en différences finies implémenté en Matlab. Un certain nombre de méthodes de résolution sont ainsi comparées, avec au préalable une étude de convergence complète.

Sur la base de ces résultats préliminaires, le schéma de résolution est ensuite étendu au niveau tridimensionnel, c'est-à-dire à des options comportant deux sous-jacents.

Abstract

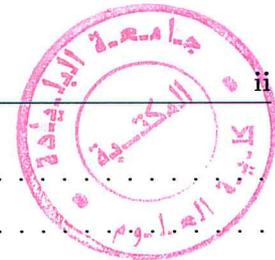
This master's thesis deals with the pricing of European options, on the basis of the so-called Black-Scholes-Merton model.

The first part of this document consists in the resolution of the Black-Scholes-Merton equation in two dimensions, through a finite differences resolution scheme implemented in Matlab. Several resolution methods are compared, after a full survey of their convergence properties.

On the basis of these preliminary results, the resolution scheme is extended to the tri-dimensional level, that is, for options on two different underlyings.

Table des Matières

Introduction générale	1
1 Concepts de base en finance	3
1.1 Les actions, les dérivés, les marchés	3
1.1.1 Un actif financier:	3
1.1.2 Une action:	3
1.1.3 Un portefeuille:	3
1.1.4 Un produit dérivé:	4
1.1.5 La volatilité:	4
1.1.6 Un dividende:	4
1.1.7 Les marchés financiers:	4
1.1.8 Les intervenants:	4
1.2 Les options:	5
1.2.1 Définition:	5
1.2.2 Les composantes du prix d'une option:	5
1.2.3 Les options vanilles:	5
1.2.4 Les stratégies élémentaires	6
1.2.5 Valeurs des options	7
1.2.6 La relation parité call-put:	8
1.2.7 Conclusion	10
2 Le modèle de Black Scholes	11
2.1 Introduction:	11
2.2 Le processus du cours des actions	11
2.2.1 Propriété de Markov	11
2.2.2 Mouvement Brownien (ou Processus de Wiener)	12
2.2.3 Lemme d'Ito	12



2.2.4	Modèle du cours des actions:	16
2.3	Modèle de Black-Scholes:	16
2.3.1	Les concepts sous-jacents à l'EDP de Black-Scholes	16
2.3.2	Démonstration de l'EDP de Black-Scholes sans dividende	17
2.3.3	L'EDP de Black Scholes avec dividende:	17
2.4	Formule d'évaluation de Black-Scholes	18
2.4.1	Formule d'évaluation sans dividende	18
2.4.2	Formule d'évaluation avec dividende:	19
2.5	Les méthodes numériques de résolution de L'EDP de Black Scholes Merton:	19
2.5.1	Les méthodes d'arbres	19
2.5.2	La méthode de Monte Carlo	20
2.5.3	La méthode des différences finies	20
2.5.4	la méthode des volumes finis	20
2.5.5	La méthode des éléments finis	20
2.6	Conclusion	21
3	Application de la méthode des différences finies à la résolution de l'EDP de BSM en 2D et 3D	22
3.1	Etude de l'équation BSM en 2D par différences finies	22
3.1.1	Présentation du problème	22
3.1.2	Les conditions aux limites	22
3.1.3	Convergence, consistance et stabilité d'un schéma numérique	25
3.1.4	Résolution de l'équation de Black Scholes Merton à 2 dimensions	27
3.1.5	Résolution numérique par la méthode des différences finies:	32
3.1.6	Comparaisons des deux schémas	47
3.2	Etude de l'équation de Black-Scholes-Merton en 3D	49
3.2.1	Introduction	49
3.2.2	Le modèle à deux sous-jacents	49
3.2.3	Conditions aux bords	51
3.2.4	Conditions initiales	53
3.2.5	Choix de la méthode	53
3.2.6	Schéma explicite	53
3.2.7	Schéma implicite:	56
3.2.8	Conclusion	59

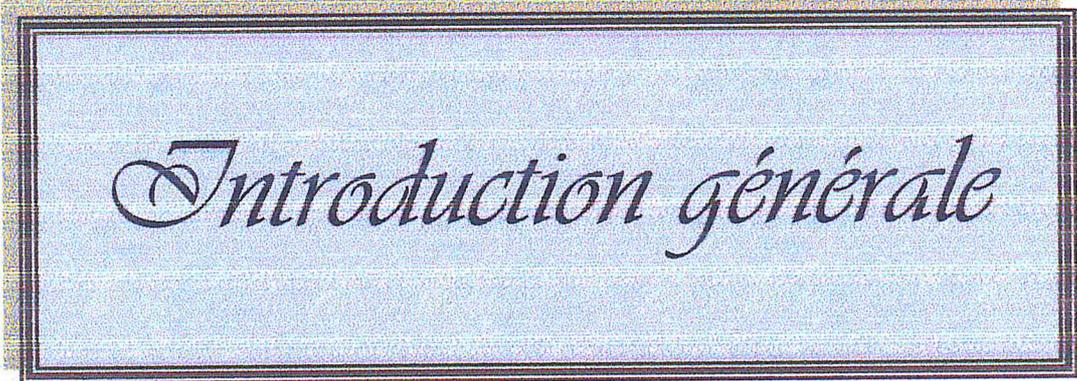
Conclusion générale	59
4 Annexe	61
4.0.9 Implémentation par Mtlab des méthodes étudiées	61
Liste des abreviations et symboles	67
Références	69

Liste des Illustrations graphiques

1.1	Achat d'une option d'achat	7
1.2	Achat d'une option de vente	8
1.3	Vente d'une option d'achat	9
1.4	Vente d'une option de vente	10
3.1	Grille d'un problème bi-dimensionnel	23
3.2	Schéma de discrétisation de la méthode explicite	37
3.3	Evaluation d'un call Européen par la méthode explicite	38
3.4	Evaluation d'un put Européen par la méthode explicite	39
3.5	Schéma de discrétisation de la méthode implicite	41
3.6	Evaluation d'un call Européen par la méthode implicite	44
3.7	Evaluation d'un put Européen par la méthode implicite	46
3.8	Problème tridimensionnel	50
3.9	Molecule de calcul en 3D	52

Liste des Tables

3.1	Put Européen maillage 20*10 (**)	45
3.2	Call Européen maillage 20*10 (**)	45
3.3	Prix du call à maillage donné (**)	48



Introduction générale

Introduction

L'histoire des options se confond, presque, avec l'histoire de l'humanité. Depuis la nuit des temps, en effet, s'échangent des contrats permettant à leurs acquéreurs d'acheter (option d'achat) ou bien de vendre (option de vente) un actif déterminé, à un prix dit d'exercice et à une date future, préalablement, fixés, moyennant le règlement immédiat, au vendeur du contrat, d'une prime, dont le montant est, librement, débattu par les co-contractants.[1].

Avec le développement des marchés financiers, l'étude des options devient un véritable enjeu et n'a pas cessé de prendre de l'importance au cours des dernières années.

Le but de ce projet est d'étudier un modèle financier très largement utilisé, celui de Black et Scholes. Le concept fondamental est de mettre en rapport le prix implicite de l'option et les variations de prix de l'actif sous-jacent.

Le terme de Black-Scholes est utilisé pour désigner deux concepts très proches:

- Le modèle Black-Scholes est un modèle mathématique du marché pour une action dans le prix de l'action est un processus stochastique.

- l'équation aux dérivées partielles de Black-Scholes est l'équation satisfaite par le prix d'un dérivé d'une action.

Robert C.Merton a été le premier à publier un article développant l'aspect mathématique d'un modèle d'évaluation d'option en citant les travaux de Fischer Black et de Myron Scholes. Robert Merton et Myron Scholes ont reçu en 1997 le "prix Nobel d'économie" pour leurs travaux. Fischer Black, décédé en 1995 et donc inéligible, a été cité comme contributeur.[3]..

Ce mémoire nous en propose une étude détaillée de la formule de Black-Scholes et sa résolution par la méthode des différences finies dictée par l'énoncé. L'objectif du présent travail est de comparer les différentes méthodes numériques d'un point de vue convergense et rapidité de calcul et d'implémenter la résolution de cette équation dans le cas d'options simples.

On étendra dans un premier temps l'étude à l'équation de Black-Scholes-Merton en deux dimensions en introduisant des dividendes continus et on poursuivra avec le passage à deux sous jacents, l'équation de Black-Scholes devient alors une équation à trois dimensions.

Ce mémoire est réalisé selon le plan suivant:

Commençant par une introduction

Le premier chapitre présentera de manière succincte les généralités mathématiques et financières indispensables à connaître afin de comprendre les explications et processus considérés dans la suite de la thèse.

Le deuxième chapitre est divisé en trois sections, dans la première section nous avons présenté le modèle de base que nous allons utiliser tout au long de notre étude. La deuxième section est consacrée au modèles de Black-Scholes pour une option européenne, nous verrons les hypothèses du modèle puis nous présentons le modèle de Black-Scholes-Merton. Dans la troisième section, nous allons énoncer les différentes méthodes numériques financières, La méthode des différences finies est la méthode proposée à la résolution de l'EDP de Black-Scholes-Merton.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude de la résolution de l'EDP de Black-Scholes-

Merton en deux et en trois dimensions par la méthode des différences finies, en utilisant les divers schémas numériques, ainsi que nous allons faire leurs implémentation par un outil de calcul qui est le Matlab, il sera alors possibles de comparer les différentes solutions obtenus.

terminant par une conclusion.

Sans plus tarder, nous proposons donc au lecteur de se plonger dans les grands principes de la finance et surtout des mathématiques financières via l'exploration de ce mémoire traitant de ce fameux modèle de Black-Scholes.

CHAPITRE I

Concepts de base en finance

1.1.4 Un produit dérivé:

Un produit dérivé est un produit (instrument financier), qui s'achète et se vend, et qui est toujours bâti sur la base d'un titre financier. Ce dernier est alors appelé "actif sous-jacent" du produit dérivé. Ceux-ci peuvent donc être des actions, des obligations, des devises, ... et même des produits dérivés. Le danger avec les produits dérivés est, à force de les superposer de ne plus savoir exactement quels sont les sous-jacents.[15].

1.1.5 La volatilité:

La volatilité est représentée par l'écart type annualisé des rendements, déterminés à partir des variations relatives des prix de l'actif support de l'option à savoir le sous-jacent.[1].

1.1.6 Un dividende:

Les dividendes sont des somme d'argents perçues par les détenteurs des actions à certains instants, en général une à quatre fois par an.[5].

1.1.7 Les marchés financiers:

Le marché financier est le marché sur lequel sont émis et échangés les titres à moyen ou à long terme, comme les actions et les obligations, à la différence du marché monétaire, où sont émis les titres à court ou très court terme.

La loi définit le "marché financier" comme un lieu où s'échangent des "instruments financiers", c'est à dire en particulier des actions et des obligations.

Les marchés financiers organisés ont l'objet d'une réglementation, et fonctionnent sous la surveillance de l'autorité de régulation, l'Autorité des Marchés financiers.

Le marché des capitaux à long terme comprend trois marchés:

- les marchés primaires sur lesquels sont émis les titres.
- le marchés secondaires sur lesquels sont négociés les titres une fois qu'ils ont été émis.
- les marchés dérivés, avec un marché organisé et un marché de gré à gré.[16].

1.1.8 Les intervenants:

Nous pouvons déterminer trois gammes d'intervenants dans les marchés:

Les opérateurs en couverture ou "Hedgers":

Le role des Hedgers est d'utiliser des options ou d'autres contrats pour réduire leur exposition au risque de variation de la valeur des actifs sous-jacents à ces contarts.

Les spéculateurs:

Ceux ci prennent des positions de pari proprement dites sur l'évolution future des sous-jacents.

Les arbitragistes:

Dans cette catégorie, les protagonistes cherchent à profiter, en prenant position sur plusieurs contrats ou actifs, des incohérences momentanées dans les cotations.[5].

1.2 Les options:**1.2.1 Définition:**

Une option est un contrat qui confère à son détenteur le droit d'acheter ou de vendre une certaine quantité d'un actif sous-jacents, à un prix prédéterminé et ce pendant une période de temps donnée. Un tel contrat représente un droit et non une obligation pour son détenteur. En d'autre terme l'investisseur n'est pas contraint d'acheter ou de vendre l'actif sous-jacent. Pour une option européenne, la décision d'exercer ou de ne pas exercer ce droit aura lieu à l'échéance du contrat. Par contre, pour une option de type américaine, cette décision peut avoir lieu à n'importe quel moment de la vie du contrat. La plupart des options standardisées négociées, aujourd'hui, sur l'ensemble de la planète sont les options américaines.[6].

1.2.2 Les composantes du prix d'une option:

La valeur de l'option est communément partagée en valeur intrinsèque et valeur temps.[3].

La valeur intrinsèque:

est la valeur qu'aurait l'option si le jour de l'échéance était le jour d'achat de l'option. Lorsque le cours du sous-jacent est supérieur au prix d'exercice, la valeur intrinsèque est égale au cours du sous-jacent moins le prix d'exercice. Dans tous les autres cas, la valeur intrinsèque est égale à 0.

La valeur temps:

est en quelque sorte la valeur d'espoir de l'option. Il s'agit de la différence entre le prix de l'option et sa valeur intrinsèque. Cette valeur décroît avec le temps car au fur et à mesure que l'échéance de l'option approche, l'incertitude sur le prix du sous-jacent disparaît, donc l'espoir disparaît. L'option est un "wasting asset", c'est-à-dire un actif qui se déprécie avec le temps.

1.2.3 Les options vanilles:

Il existe deux types des options: les options d'achat (call), et les options de vente (put):

-Un call: est un contrat qui confère à son détenteur le droit d'acheter l'actif sous-jacent à un prix fixé d'avance durant une période de temps donné.

On précise qu'est appelé actif sous-jacent, ou support, tout actif sur lequel porte une option ou plus largement un produit dérivé.

- Une option de vente, put, donne le droit à son détenteur de vendre une certaine quantité d'un actif sous-jacent à une date future et à un prix convenu. Ce prix est appelé prix d'exercice, la date maximale à laquelle le droit peut être exercé est la date d'échéance.

Autant l'acheteur d'un contrat d'option a le choix d'exercer ou non son droit, autant, le vendeur d'un contrat d'option, est totalement soumis à la décision de l'acheteur d'option. En contrepartie, le vendeur du contrat reçoit de l'acheteur une somme égale au prix de marché de l'option, appelée prime de l'option.

Il existe des options simples, des options synthétiques construites par combinaison d'une option simple et d'une position sur le titre support, enfin des options complexes, obtenons par combinaisons d'options.[6].

1.2.4 Les stratégies élémentaires

dans notre travail nous intéressons aux options les plus simples, on peut ainsi envisager les quatre stratégies suivantes:

1. Achat d'une option d'achat.
2. Achat d'une option de vente.
3. Vente d'une option de d'achat.
4. Vente d'une option de vente.

Appelons k le prix d'exercice, C le prix d'un call, P le prix d'un put et analysons ces quatre stratégies.

Achat d'une option d'achat

L'opérateur acquiert le droit d'acheter à l'échéance le titre support, au prix k , moyennant le paiement immédiat de C . Il espère que le cours du sous-jacent atteindra un niveau supérieur au prix d'exercice augmenté de la prime C . Si son anticipation se confirme, il pourra acheter le titre au prix convenu k , puis par exemple le revendre immédiatement en réalisant un profit. Si au contraire sa prévision est mauvaise, il subit une perte dont la valeur maximale est égale à la prime du call, puisque si le cours est inférieur au prix d'exercice, il n'exercera pas son option.

Achat d'une option de vente

L'opérateur acquiert le droit de vendre un titre au prix k jusqu'à l'échéance, moyennant le versement immédiat de P . Il espère que le prix du titre va baisser. Si tel est le cas, il exerce son option, sinon il abandonne l'option et sa perte maximale est de P , même remarque en ce qui concerne le décalage de temps entre le versement de la prime et l'encaissement du produit de la vente éventuelle du support.

Vente d'une option d'achat

C'est la contrepartie de la première opération. L'opérateur s'engage, si l'option est exercée, à livrer le titre à l'échéance au prix k , en échange de C , que lui verse l'acheteur immédiatement. L'opérateur espère une baisse du titre. Si tel est bien le cas, l'acheteur n'exerce pas son option,

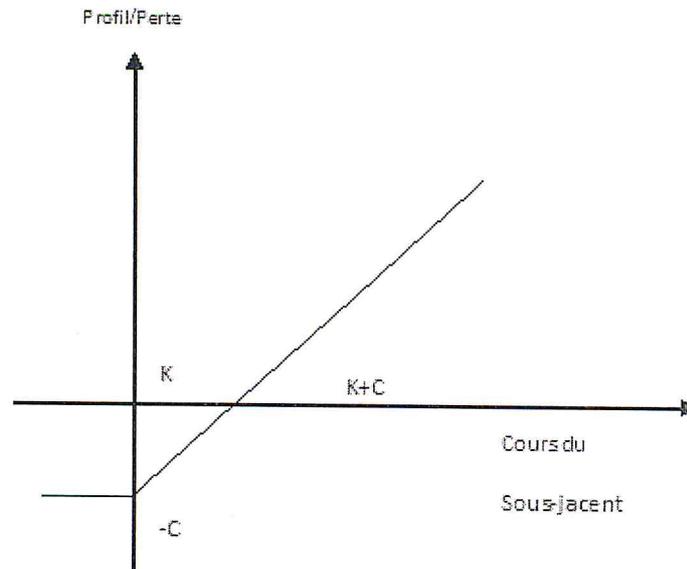


Figure 1.1: Achat d'une option d'achat

le vendeur conserve la prime de toute façon. Si non le cours peut augmenter d'un montant supérieur au prix d'exercice augmenté de C . et la perte peut être très sévère, en théorie sans limite, mais, c'est bien connu, les arbres ne montent pas jusqu'au ciel.

Vente d'une option de vente

c'est la contrepartie de la deuxième opération. L'opérateur s'engage à acheter le titre à l'échéance, au prix k et peut subir une perte également sévère, mêmes remarques que précédemment.

1.2.5 Valeurs des options

Nous présentons d'abord dans ce chapitre les variables que nous allons utiliser tout au long de ce projet, aussi bien dans les codes Matlab que dans les développements théoriques, et leurs significations.

V : valeur de l'option, c'est-à-dire valeur courante de l'actif sous-jacent, S , et du temps t . On distinguera $C(S, t)$ et $P(S, t)$ pour call et put si nécessaire.

σ : volatilité de l'actif sous-jacent

k : prix d'exercice

T : date d'expiration

r : taux d'intérêt

P : premium.

On se place à l'échéance, à savoir la date $t = T$.

Si $S > k$, on exerce le call et le bénéfice est $S - k$, sinon, on n'exerce pas.

La valeur du call à l'expiration est par conséquent :

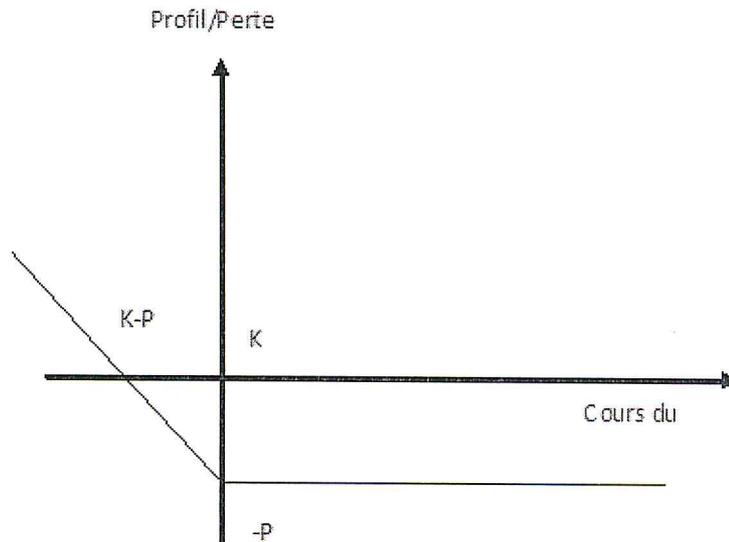


Figure 1.2: Achat d'une option de vente

$$C(S, t) = \max(S - k, 0) \quad (1.1)$$

Inversement, si $S < E$, on exerce le put et le bénéfice est $E - S$, sinon, on n'exerce pas. La valeur du put à l'expiration est alors :

$$P(S, t) = \max(k - S, 0) \quad (1.2)$$

1.2.6 La relation parité call-put:

Options d'achat et de vente peuvent être combinées de manière à devenir parfaitement corrélées. [ALE08].

Supposons un call et un put avec la même date d'expiration T et le même prix d'exercice k . π est la valeur du portefeuille.

$$\pi = S + P - C$$

Le payoff de ce portefeuille à l'expiration est : $S + \max(k - S, 0) - \max(S - k, 0)$

On a :

$$S + (k - S) - 0 = k \text{ si } S \leq k$$

$$S + 0 - (S - k) = k \text{ si } S \geq k$$

Le payoff est le même dans les deux cas. Avec un taux d'intérêt constant, la valeur du portefeuille croît exponentiellement selon : $\frac{d\pi}{\pi} = r \cdot dt$

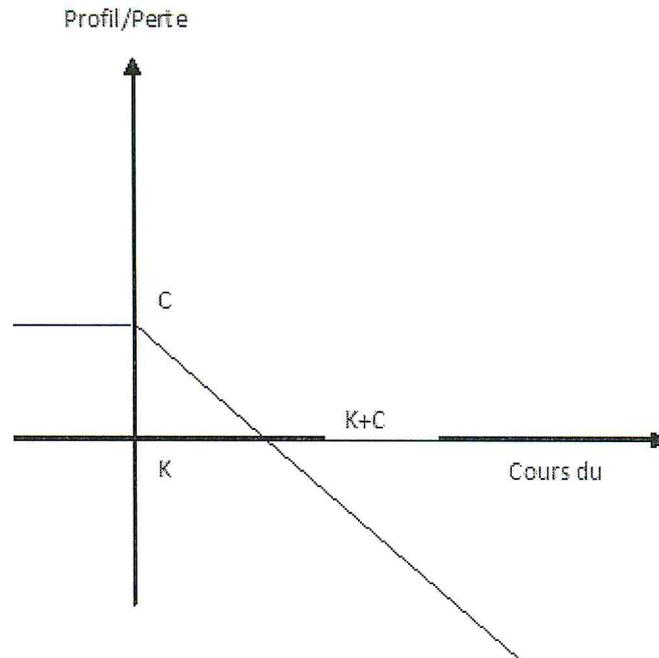


Figure 1.3: Vente d'une option d'achat

La solution est simplement $\pi = ce^{rt}$, c constante d'intégration.

Puisque $\pi = k$ à $t = T$, la valeur du payoff au temps t est $\frac{\pi}{k} = \frac{ce^{rt}}{ce^{rT}}$ ce qui conduit à :

$$\pi = ke^{-r(T-t)}$$

Si le taux d'intérêt est une fonction connue du temps, on peut modifier trivialement l'équation différentielle en :

$$\pi = ke^{\int_t^T r(s)ds}$$

La valeur du portefeuille étant $ke^{-r(T-t)}$, on a

$$S + P + C = ke^{-r(T-t)}$$

Cette relation montre que la valeur d'un call européen avec prix d'exercice k et maturité T peut être déduite de celle d'un put européen avec le même prix d'exercice k et la même maturité T .

En présence de dividendes, la relation de parité call-put devient:

$$C(t) - P(t) = S(t) - D - ke^{-r(T-t)}. \quad (1.3)$$

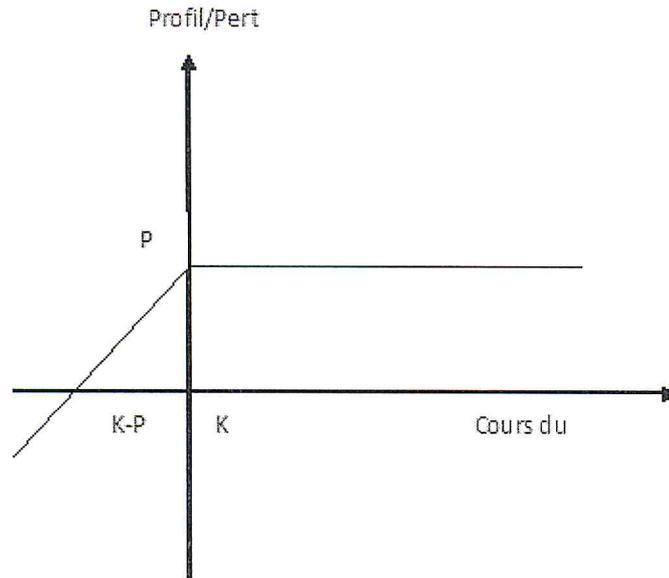


Figure 1.4: Vente d'une option de vente

1.2.7 Conclusion

Rappelons que le but de ce mémoire est de présenter le modèle de Black-Scholes qui sert à évaluer les options, sa résolution par les méthodes des différences finies ainsi de faire une comparaison entre ces méthodes.

Le chapitre que nous venons de développer, nous a permis de découvrir les concepts de base de la finance, nous avons expliqué en détail ce que sont le call et le put, options les plus simples qui seront utilisées tout au long de l'étude qui va suivre.

Pour plus d'informations sur les définitions financières présentées dans ce chapitre, le lecteur peut consulter [7] [8] [9].

CHAPITRE II

*Modèle de Black
Scholes*

Chapitre 2

Le modèle de Black Scholes

2.1 Introduction:

Dans le présent chapitre, nous allons essayer d'expliciter les différentes étapes qui nous mènent au modèle du cours des actions qui sera la base du modèle de Black-Scholes, ainsi que nous allons présenter sa formule sous forme d'une équation dérivée partielle.

2.2 Le processus du cours des actions

On peut modéliser l'évolution aléatoire d'une variable au cours du temps par un 'processus stochastique'. Il s'agit d'une suite de variables aléatoires indexées par le temps. On distingue les processus en temps discret et les processus en temps continu.

L'évolution du cours des actions peut être modélisé par un processus stochastique en temps continu. Mais il faut garder à l'esprit que ce n'est pas exactement ce qui se passe en pratique, car en réalité, il existe des variations minimales comme les cents ou centièmes d'euro, ainsi qu'on ne peut observer des variations que lorsque le marché est ouvert, le temps n'est donc pas vraiment un paramètre continu.

Après la présentation des généralités nancières du chapitre précédent, nous allons dans la présente section définir le modèle mathématique de base que l'on va utiliser tout au long de cette thèse: modèle du cours des actions, mais nous devons passer par la définition de quelques processus stochastiques.

2.2.1 Propriété de Markov

Le processus de Markov est un type particulier de processus stochastique où seulement la valeur présente de la variable en question est déterminante dans la détermination de sa valeur future. L'historique de la variable et la manière, dont le présent a émergé du passé, n'ont aucune influence sur la valeur future de la variable.

La propriété de Markov a une importance capitale dans la modélisation financière, en particulier dans l'évaluation des options, comme c'est le cas dans le présent travail.

2.2.2 Mouvement Brownien (ou Processus de Wiener)

Le mouvement Brownien avec un drift est un processus stochastique $\{X_t, t \geq 0\}$ qui vérifie les propriétés suivantes:[10]

1- Chaque variation $(X_{t+s} - X_s)$ du processus $\{X_t, t \geq 0\}$, entre les instants s et $s + t$, suit la loi normale de moyenne μt et de variance $\sigma^2 t$ où μ et σ sont des paramètres constants.

2- Pour les instants $(t_1 < t_2 < \dots < t_n)$, les variations $(X_{t_2} - X_{t_1}), (X_{t_3} - X_{t_2}), \dots, (X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ sont indépendantes et suivent la loi normale, comme précisée en 1.

3- $\{X_t, t \geq 0\}$ est continue par rapport au temps.

Il est à noter, avec ses propriétés, que la variation $(X_{t+s} - X_s)$ est indépendante de l'historique du processus du processus X_t , puisque la connaissance de X_τ ($\tau < s$) n'a aucun effet sur la distribution de probabilité de $X_{t+s} - X_s$. C'est précisément le caractère Markovien du mouvement Brownien.

Il est à noter, également, que dans le cas où $\mu = 0$ et, le mouvement Brownien Standard, noté, dont la distribution de probabilité en continue est:

$$P(Z_t < z / Z_{t_0} = z_0) = P(Z_t - Z_{t_0} < z - z_0) \quad (2.1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t_0)}} \int_{-\infty}^{z-z_0} e^{-\frac{u^2}{2(t-t_0)}} du \quad (2.1)$$

Le processus $\{X_t, t \geq 0\}$ peut s'écrire en fonction de $\{Z_t, t \geq 0\}$ sous la forme:

$$dX_t = \mu dt + \sigma dZ_t \quad (2.2)$$

ainsi,

- dZ_t est une variable aléatoire suivant une loi normale.
- l'espérance mathématique de dZ_t est $E(dZ_t) = 0$
- la variance de dZ_t est $V(dZ_t) = dt$
- Les valeurs de dZ_t , relatives à des intervalles de temps courts dt , quelconques, sont indépendantes.

Le drift réel μ et la volatilité σ sont deux paramètres qu'on peut estimer à partir de l'historique du prix de l'actif dont le prix suit le processus X_t .

Le processus dZ_t peut s'écrire sous la forme: $dZ_t = U\sqrt{dt}$, où U est une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.

2.2.3 Lemme d'Ito

Le prix d'une option est fonction du prix du sous-jacent et du temps. La connaissance de la fonction de variables suivant des processus stochastiques est, à cet effet, très importante pour l'évaluation des options. Le lemme d'Ito (1951) est la base du calcul stochastique.[1].

Cas d'une seule variable stochastique

Supposons que X est une variable stochastique suivant le processus d'Ito défini par: $dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz$, avec dz suivant un processus de Wiener standard et a et b sont des fonctions de x et du temps t . Ce processus peut s'écrire, également, sous la forme:

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)\sqrt{dt}U \quad (2.3)$$

Où U est une variable aléatoire normale centrée réduite.

soit $G(x, t)$ une fonction de x et du temps. Soit le développement en série de Taylor de la fonction G par rapport à x et au temps:

$$dG = \frac{\delta G}{\delta x}dx + \frac{\delta G}{\delta t}dt + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 G}{\delta x^2}dx^2 + \frac{\delta^2 G}{\delta x \delta t}dxdt + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 G}{\delta t^2}dt^2 + \dots \quad (2.4)$$

A la limite où $dt \rightarrow 0$, on a:

$$dx^2 = (a(x, t)dt + b(x, t)\sqrt{dt}U)^2 \approx b^2 dt U^2 \quad \text{avec } U^2 \rightarrow \chi^2(1)$$

On a, donc, $E(U^2) = 1$ et $V(U^2) = 2$

d'où l'on a:

$$\begin{aligned} E(dx^2) &\approx b^2 dt \\ V(dx^2) &\approx 2b^4 dt^2 \end{aligned}$$

A la limite où $dt \rightarrow 0$, on peut considérer que $V(dx^2) \approx 0$ et que dx^2 se comporte comme une constante tel que: $dx^2 \approx b^2 dt$

Par ailleurs, le produit de dx par dt est donnée par l'équation suivante:

$$dxdt = (a(x, t)dt + b(x, t)\sqrt{dt}U)dt = a dt^2 + b dt^{\frac{3}{2}}$$

On peut, donc, considérer qu'à la limite où $dt \rightarrow 0$ ce produit est nul: $dxdt \approx 0$

Par conséquent, la différentielle de la fonction G peut donc s'écrire sous la forme:

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial t}dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2 dt + \dots$$

en remplaçant dx par son expression, dans cette équation, on obtient l'expression de la différentielle d'une fonction G du temps et d'une variable d'état X suivant le processus prédéfini:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x}bdz \quad (2.5)$$

Cette équation est, donc, l'application du lemme d'Ito à une fonction du temps et d'une seule variable d'état.

Cas de deux variables stochastiques

Dans le cas d'une fonction du temps et deux variables d'états, x_1 , et x_2 , on suppose que celle-ci suivent des processus stochastiques, décrits par les équations suivantes:

$$\begin{aligned} dx_1 &= a_1(x_1, x_2, t)dt + b_1(x_1, x_2, t)dz_1 \\ dx_2 &= a_2(x_1, x_2, t)dt + b_2(x_1, x_2, t)dz_2 \end{aligned}$$

avec dz_1 et dz_2 suivant un processus de Wiener standard et a_1 , a_2 , b_1 et b_2 sont des fonctions des deux variables d'états, (x_1, x_2) et du temps t . Ces processus peuvent s'écrire également sous la forme:

$$\begin{aligned} dx_1 &= a_1(x_1, x_2, t)dt + b_1(x_1, x_2, t)\sqrt{dt}U_1 \\ dx_2 &= a_2(x_1, x_2, t)dt + b_2(x_1, x_2, t)\sqrt{dt}U_2 \end{aligned}$$

où U_1 et U_2 sont des variables aléatoires normales centrées réduites tel que leur coefficient de corrélation est notée: $\rho = \rho(U_1, U_2)$.

Soit $G(x, t)$ est une fonction des deux variables d'états (x_1, x_2) et du temps. Le développement, en série de Taylor, de la fonction G par rapport à (x_1, x_2) et du temps, s'écrit:

$$\begin{aligned} dG &= \frac{\partial G}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial G}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial G}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2} dx_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x_2^2} dx_2^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} dt^2 + \quad 2.6 \\ &\quad \frac{\partial^2 G}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + \frac{\partial^2 G}{\partial x_1 \partial t} dx_1 dt + \frac{\partial^2 G}{\partial x_2 \partial t} dx_2 dt \dots \quad (2.2) \end{aligned}$$

Comme dans le cas d'une seule variable stochastique, on a :

$$dx_1^2 \approx b_1^2 dt \quad \text{et} \quad dx_2^2 \approx b_2^2 dt$$

de même, on a:

$$dx_1 dx_2 = a_1 a_2 dt^2 + (b_1 a_2 U_1 + b_2 a_1 U_2) dt^{\frac{3}{2}} + b_1 b_2 U_1 U_2 dt$$

A la limite où $dt \rightarrow 0$, on peut écrire:

$$\begin{aligned} E(dx_1 dx_2) &\approx b_1 b_2 dt E(U_1 U_2) = b_1 b_2 dt Cov(U_1, U_2) = b_1 b_2 \rho dt \\ V(dx_1 dx_2) &\approx b_1^2 b_2^2 dt^2 E(U_1 U_2 - E(U_1 U_2))^2 = b_1^2 b_2^2 dt^2 E(U_1 U_2 - \rho)^2 \end{aligned}$$

Comme $U_1 U_2 \neq \rho$, à l'ordre dt , on peut faire l'approximation:

$$dx_1 dx_2 \approx b_1 b_2 \rho dt$$

Ainsi, à la limite où $dt \rightarrow 0$, on aura:

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial G}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial G}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2} b_1^2 dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x_2^2} b_2^2 dt + \frac{\partial^2 G}{\partial x_1 \partial x_2} b_1 b_2 \rho dt \dots$$

Soit:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x_1} a_1 + \frac{\partial G}{\partial x_2} a_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2} b_1^2 dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x_2^2} b_2^2 dt + \frac{\partial^2 G}{\partial x_1 \partial x_2} b_1 b_2 \rho dt \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x_1} b_1 dz_1 + \frac{\partial G}{\partial x_2} b_2 dz_2 \quad (2.7)$$

Cette équation constitue donc, l'application de lemme d'Ito fonction du temps et de deux variables d'états.

La version générale du lemme d'Ito

Soit C une fonction du temps t et de n variables stochastiques (des variables d'états) $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$, suivant chacune un processus d'Ito. Les drifts réels instantanés de ces variables sont respectivement, $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n$. Leurs écarts-types instantanés sont, respectivement, $b_1, b_2, \dots, b_i, \dots, b_n$. Ainsi, on peut écrire:

$$dx_i = a_i dt + b_i dz_i \quad 1 \leq i \leq n$$

Où les $dz_i, 1 \leq i \leq n$ sont des processus de Wiener. Les drifts réels sont des fonctions du temps et des n variables d'états: $a_i = a_i(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n, t)$. Les écarts types sont, également, des fonctions du temps et des n variables d'états:

$$b_i = b_i(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n, t)$$

On peut écrire, également:

$$dx_i = a_i dt + b_i U_i \sqrt{dt} \quad 1 \leq i \leq n$$

Où les U_i sont des variables aléatoires normales centrées et réduites. Le coefficient de corrélation entre deux variables U_i et U_j est noté: $\rho_{ij} = \rho(U_i, U_j)$.

Le développement en série de Taylor de la fonction $C = C(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n, t)$ s'écrit:

$$dC = \sum_{i=1}^n \frac{\partial C}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 C}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 C}{\partial x_i \partial t} dx_i dt + \dots$$

En se référant aux calculs relatifs à la démonstration du lemme d'Ito, dans le cas d'une variable et dans le cas de deux variables stochastiques, on peut écrire, à l'ordre dt :

$$\begin{aligned} dx_i^2 &\approx b_i^2 dt \\ dx_i dx_j &= b_i b_j \rho_{ij} dt \\ dx_i dt &\approx 0 \end{aligned}$$

Ces équivalences sont d'autant plus vraies que dt est proche de zéro. Lorsque dt tend vers zéro ($dt \rightarrow 0$), tous les termes d'un ordre supérieur à dt négligés et la différentielle de la fonction C peut s'écrire:

$$dC = \sum_{i=1}^n \frac{\partial C}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 C}{\partial x_i \partial x_j} b_i b_j \rho_{ij} dt$$

En remplaçant dx_i par son expression, on obtient la forme générale du lemme d'Ito:

$$dC = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial C}{\partial x_i} a_i + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 C}{\partial x_i \partial x_j} b_i b_j \rho_{ij} dt \right) dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial C}{\partial x_i} b_i dz_i \quad (2.8)$$

Cette équation constitue, donc, la forme la plus générale du lemme d'Ito.

2.2.4 Modèle du cours des actions:

Le cheminement réalisé dans les sous-sections précédentes nous permet de présenter les processus stochastique généralement utiliser pour modéliser le processus d'une action ne versant pas de dividendes.[ALE08].

Au temps t , le prix de l'actif est S . Considérons un intervalle de temps dt pendant lequel S change à $S + dS$. Le modèle le plus courant d'évolution des cours est l'équation différentielle stochastique suivante:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dX \quad (2.9)$$

avec:

μdt : μ est appelé le dérive. Il correspond à une mesure du taux moyen de croissance du prix de l'actif. μ peut être une constante dans les modèles les plus simples ou une fonction de S et de T pour des modèles plus compliqués.

σdX : modélise la variation aléatoire dans le prix de l'actif en réponse aux effets extérieurs, tels que des nouvelles information. σ est la volatilité. Elle mesure la déviation standard du rendement de l'actif.

Si $\sigma = 0$, le prix de l'actif est entièrement déterministe et on peut prévoir avec certitude le future prix de l'actif.

La variable σ présente la la volatilité de l'action et μ est son espérance de rentabilité.

Ce processus des cours d'action est appelé mouvement brownien géométrique. La version en temps discret est:

$$\frac{\delta S}{S} = \mu \delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\delta t}$$

Cela nous montre que $\frac{\delta S}{S}$ suit une distribution normale de moyenne $\mu \delta t$ et d'écart type $\sigma \sqrt{\delta t}$.

2.3 Modèle de Black-Scholes:

2.3.1 Les concepts sous-jacents à l'EDP de Black-Scholes

L'utilisation du modèle de Black-Scholes nécessite la vérification des hypothèses suivantes:

1. Le cours de l'action suit le processus de l'équation $dS = \mu S dt + \sigma S dX$ avec μ et σ étant des constantes.
2. Il n'y a pas de frais de transactions ou d'impôts.
3. Les ventes à découvert sont autorisées, c'est à dire que l'on peut emprunter une certaine partie du sous-jacents pour la vendre.
4. Il n'y a pas de dividende sur le sous-jacent.
5. Le marché fonctionne en continu.
6. Le taux sans risque r , est constant quel que soit la maturité du produit dérivé.

2.3.2 Démonstration de l'EDP de Black-Scholes sans dividende

Supposons que l'on a une option (put ou call) dont la valeur $V(S, t)$ dépend uniquement de S et de T , alors avec le lemme d'Itô pour une seule variable stochastique (section précédente), on peut écrire :

$$dV(S, T) = \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dX + (\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t}) dt$$

Ceci donne la marche aléatoire suivie par V .

Construisons un portefeuille contenant une option et un nombre $-\Delta$ d'actif sous-jacent. La valeur du portefeuille est:

$$\pi = V - \Delta S$$

La variation de cette valeur sur un intervalle de temps est: $d\pi = dV - \Delta dS$, Δ maintenu fixe pendant l'intervalle de temps considéré.

Rappelons que $dS = \sigma S dX + \mu S dt$ (Equation Différentielle Stochastique)

en choisissant $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$, on peut arriver à un portefeuille dont l'incrément est totalement déterministe:

$$d\pi = (\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}) dt$$

La rentabilité d'un montant π investi dans des actifs sans risque présente une croissance $r\pi dt$ pendant dt .

Si $(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}) dt \geq r\pi dt$, un arbitragiste peut assurément faire un profit sans risque en empruntant un montant π dans le portefeuille. La rentabilité sera supérieure au coût de l'emprunt.

Dans le cas inverse, l'arbitragiste investira π à la banque.

Dans ces deux cas, l'arbitragiste ferait un profit sans risque, sans coût, instantanément. Il faut donc définir:

$$r\pi dt = (\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}) dt$$

$$r(V - \Delta S) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \text{ avec } \Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad (2.10)$$

Il s'agit de l'équation différentielle de Black et Scholes en deux dimensions.

2.3.3 L'EDP de Black Scholes avec dividende:.

On peut étendre le modèle de Black-Scholes à la prise en compte de dividende si ceux-ci sont continus.[5].

En effet, le paiement des dividendes (continus) au cours d'une période de temps $[t, t + \delta t]$ est notée:

$$DS_t dt$$

donc l'équation aux dérivées partielles de Black-Scholes, se transforme à l'équation de Black-Scholes-Merton qui est sous la forme:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad (2.11)$$

Dans la suite du travail, c'est précisément cette EDP de Black-Scholes-Merton que nous allons résoudre par la méthode des différences finies.

2.4 Formule d'évaluation de Black-Scholes

2.4.1 Formule d'évaluation sans dividende

La formule de Black-Scholes nous permet d'évaluer le prix exacte d'une option simple (call ou put) à partir des 5 données suivantes:[5]

1. S_t la valeur actuelle de l'action sous-jacente.
 2. t le temps qui reste à l'option avant son échéance (exprimée en année).
 3. K le prix d'exercice fixé par l'option.
 4. r le taux d'intérêt sans risque.
 5. σ volatilité du prix de l'action.
1. Call Européen:

$$C(S, K, r, t, \sigma) = SN(d_1) - Ke^{-rt}N(d_2) \quad (2.12)$$

2. Put Européen:

$$P(S, K, r, t, \sigma) = -SN(d_1) + Ke^{-rt}N(-d_2) \quad (2.13)$$

Avec

- N qui est la fonction de répartition de la loi normale centrale réduite $N(0, 1)$ c'est à dire

$$\begin{aligned} N(x) &= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\mu^2} \\ d_1 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \left[\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)t \right] \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{t} \end{aligned}$$

2.4.2 Formule d'évaluation avec dividende:

La valeur des calls et des puts européens se déduit du remplacement de S par Se^{-Dt} dans les formules d'évaluation. Les nouvelles formules sont appelées formules de Black-Scholes-Merton car ces résultats sont dus à Robert Merton.

Pour un call nous avons:

$$C(S, K, r, D, t, \sigma) = e^{-DT} SN(d_1) - Ke^{-rt} N(d_2) \quad (2.14)$$

Et pour un put nous avons:

$$P(S, K, r, D, t, \sigma) = -Se^{-DT} N(-d_1) + Ke^{-rt} N(-d_2) \quad (2.15)$$

Avec

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} [\ln(\frac{S}{K}) + ((r - q) + \frac{1}{2}\sigma^2)t]$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$$

La démonstration de ces formules sera présentée dans la résolution analytique du modèle de Black-Scholes dans le chapitre suivant..

2.5 Les méthodes numériques de résolution de L'EDP de Black Scholes Merton:

Il existe différentes méthodes d'approximation numérique en mathématiques financières et trois méthodes sont particulièrement utilisées: les arbres, les simulations de Monte Carlo et les différences finies.

La distinction dans le classement des méthodes se situe dans l'objet à discrétiser: les méthodes de Monte Carlo, par exemple discrétisent les modèles présentés sous forme de processus stochastiques, tandis que les différences finies, ou les éléments finis, discrétisent l'EDP associée au modèle grâce à l'application du lemme d'Ito.

2.5.1 Les méthodes d'arbres

On peut évaluer les produits dérivés en élaborant, un arbre représentant les trajectoires possible de l'actif sous jacent pendant la durée de vie de l'option. L'arbre binomial le plus répandu est celui développé par Cox et All (1979). L'approche par arbre binomial est d'une grande flexibilité et son usage est simple pour les options européennes et américaines.[11].

2.5.2 La méthode de Monte Carlo

La simulation Monte Carlo a la particularité d'être simple à utiliser dans l'évaluation des produits dérivés. Cette méthode consiste à générer de nombreuses trajectoires possibles de l'actif sous-jacent, calculer les valeurs terminales du produit dérivé pour chaque trajectoire, prendre leur moyenne et l'actualiser.

La technique de simulation Monte Carlo s'applique aisément aux dérivés de taux d'intérêt, et reste performante lorsque le modèle fait appel à plusieurs variables d'état, son taux de convergence est indépendant du nombre de variables d'états utilisées.

Un autre avantage est qu'elle peut être utilisée avec plusieurs modèles ayant des structures différentes pour la fonction de paiement (payoff). Cependant, elle souffre d'un grave défaut puisqu'elle se révèle très gourmande en espace mémoire et peut devenir inutilisable au quotidien en raison de la complexification croissante tant des modèles que des produits dérivés.[11]

2.5.3 La méthode des différences finies

Les méthodes des différences finies sont héritées de la physique et des mathématiques, leur application en finance est due à Bernan et Schwartz (1977). Elles s'apparentent à l'approche binomiale. Au lieu de travailler avec un arbre et des noeuds, on construit une grille parsemée de mailles.

Cette méthode consiste à remplacer les dérivées partielles de l'équation à traiter par des développements de Taylor autour des points d'un maillage préalablement défini, et on applique éventuellement des conditions aux bords. On obtient alors un problème algébrique dont la solution est le vecteur des valeurs approchées de la solution de l'équation différentielle aux noeuds.

- Avantages: grande simplicité d'écriture et faible coût de calcul.
- Inconvénient: Limitation à des géométries simples.[11]

2.5.4 la méthode des volumes finis

Cette méthode intègre sur des volumes élémentaires de forme simple les équations préalablement écrites sous forme conservatrice. Sa mise en oeuvre est relativement simple avec des volumes élémentaires rectangles.

- Avantages: Possibilité de traiter des géométries complexes.
- Inconvénient: peu de résultats théoriques de la convergence.[5].

2.5.5 La méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis consiste à approcher, dans un sous-espace de dimension finie, un problème écrit sous forme variationnelle (comme minimisation de l'énergie, en général) dans un espace de dimension infinie. La solution approchée est dans ce cas une fonction déterminée par un nombre fini de paramètres comme, par exemple, ses valeurs en certains points (les noeuds du maillage).

Avantages: traitement possible de géométries complexes, détermination plus naturelle des conditions aux limites, possibilité de démonstrations mathématiques de convergence et majoration d'erreurs.

Inconvénients: Complexité de mise en oeuvre et coût en temps de calcul et en mémoire.[?]

Dans le cadre de ce travail, c'est la méthode des différences finies, imposée par l'énoncé, que nous allons exploiter. Contrairement à la méthode particulièrement lourde des éléments finis, la méthode des différences finies reste relativement simple et très utilisée en finance, plus compliquée qu'une méthode de Monte Carlo, qui permet néanmoins de résoudre des problèmes complexes en des temps très raisonnables.

2.6 Conclusion

Le développement de ce chapitre permet au lecteur de savoir que le prix que nous cherchons est le prix d'une option, c'est à dire d'un produit dérivé dont le sous-jacent est une action.

Nous avons éclairé le lecteur au sujet du processus du cours des actions qui est à la base du modèle de Black Scholes, ainsi que nous avons démontré sans entrer dans les détails cette fameuse équation de Black-Scholes, pilier du mémoire. Les formules analytiques dans les cas d'options simples ont également été mentionnées.

Nous avons terminé par l'énonciation des différentes méthodes numériques de résolution du modèle de Black Scholes, et nous avons choisi la méthode la plus utilisée en finance qui est la méthode des différences finies pour résoudre l'EDP de Black Scholes. L'étude complète de la résolution sera présentée dans le chapitre suivant.

CHAPITRE III

*Application de la méthode
des différences finies à la
résolution de l'EDP de BSM
en 2D et 3D*

Chapitre 3

Application de la méthode des différences finies à la résolution de l'EDP de BSM en 2D et 3D

Dans ce chapitre, nous intéressons à la résolution de l'équation de Black Scholes Merton à 2 et 3 dimensions, de manière approchée, à l'aide de la méthode des différences finies, en utilisant successivement le schéma implicite et le schéma explicite. En représentant aussi une étude sur les conditions aux limites, ainsi qu'une étude sur la notion de convergence numérique.

Nous finissons ce chapitre par une comparaison entre le résultat analytique et celui obtenu par les procédures numériques considérées.

3.1 Etude de l'équation BSM en 2D par différences finies

3.1.1 Présentation du problème

La résolution approchée de l'équation de BSM nous permet de évaluer le prix d'une option de vente (PUT) ou d'achat (CALL). Le prix d'exercice k , le taux d'intérêt sans risque r , le cours de l'action S , la volatilité σ , et le taux de dividende q sont connus.

Comme on a présenté précédemment, le modèle de Black Scholes Merton à 2 dimensions se traduit par une équation aux dérivées partielles d'ordre 2 qui est sous la forme:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = rV(t, S)$$

Le prix de l'option $V(t, S)$ dépend donc du temps t et du cours de l'action S . Le but étant d'obtenir le prix de l'option au temps $t = 0$, et comme le domaine de résolution de l'EDP en 2D est un maillage, dont l'axe des abscisses représente le temps (t), et l'axe des ordonnées représente le cours de l'action (S), donc à chaque itération nous reculons d'un pas de temps. La figure suivante présente le domaine de résolution:

3.1.2 Les conditions aux limites

La substitution des dérivées partielles de l'équation de BSM par leurs approximations en différences finies nous permet de obtenir une équation discrétisée. L'écriture en chaque point

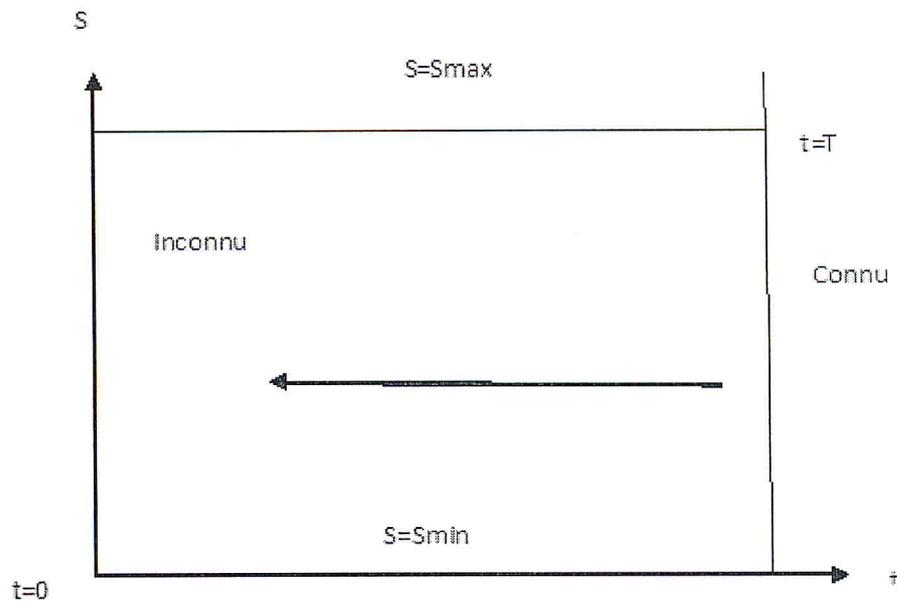


Figure 3.1: Grille d'un problème bi-dimensionnel

de maillage de cette équation fournit un système d'équation linéaire à autant d'inconnues qu'il y a de points dans le reseau. La résolution de ce système fournit la résolution du problème. Cette étape pourant présenter certaines difficultés pour les points situés sur les frontières, certaines points voisins peuvent manquer et empêcher l'écriture des équations discrétisées. Les conditions aux limites permettent de lever cette difficulté, et d'assurer l'unicité de la résolution du problème.[4].

Les conditions de Dirichlet

Cette condition est réalisé en donnant une valeur constante à la fonction aux niveaux des noeuds bordant le domaine de résolution, elle sont de type:

$$V(x) = \alpha \tag{3.1}$$

Les conditions de Newman

Elle consiste à donner une valeur constante à la dérivée de la fonction, pour les noeuds bordant le domaine:

$$kV'(x) = \alpha \tag{3.2}$$

Les conditions de Robin

Elles s'appellent aussi les conditions mixtes, se sont les conditions aux limites de types:

$$kV'(x) + cV(x) = \alpha \quad (3.3)$$

Si $\alpha = 0$, les conditions aux limites sont dites homogènes.

Les conditions aux limites en finance

Rappelons le problème à résoudre:[13]

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = rV(t, S)$$

Cette équation admet plusieurs solutions. Celles-ci sont caractérisées par les valeurs que l'action atteint aux bornes des ensembles des valeurs possibles de t et de S . Pour déterminer une seule solution, il faut donc lui associer des conditions aux bords.

1. Cas de l'option d'achat (Call):

L'option d'achat considérée est de type européen, pour que l'équation de BSM admette une solution unique, il faut avoir 3 conditions aux limites. Une condition sur le temps t et deux conditions sur le prix du sous-jacent S .

- La condition sur le temps t :

$$V(T, S) = \text{Max}(S - k, 0) \quad (3.4)$$

Avec T : date de l'échéance.

En effet, à l'échéance T , puisque l'option est de type européen, la valeur de l'option est égale à sa valeur intrinsèque.

- Les conditions aux limites, pour le prix du sous-jacent S :

- Pour $S = 0$:

$$V(t, 0) = 0 \quad (3.5)$$

En effet, si la valeur de sous-jacent est nulle, la valeur de l'option est nulle, puisque, la valeur de l'option ne peut excéder la valeur du sous-jacent.

- Pour $S = S_{\max}$:

$$V(t, S_{\max}) = S_{\max} e^{-D(T-t)} - k e^{-r(T-t)} \quad (3.6)$$

2. cas de l'option de vente (Put):

Cette option nécessite aussi trois conditions aux limites,

Pour $t = T$:

$$V(T, S) = \max(k - S, 0) \quad (3.7)$$

Pour $S = 0$:

$$V(t, 0) = k, \text{ car } V(t, 0) = \max(k - 0, 0) = k. \quad (3.8)$$

Pour $S = S_{\max}$:

$$V(t, S_{\max}) = 0, \text{ car } V(t, S_{\max}) = \max(k - S_{\max}, 0) = 0 \quad (3.9)$$

Cependant, on ne pourra faire un raisonnement semblable que pour des calls et des puts simples, pour des options plus évoluées, des problèmes de discontinuité apparaitront et seront plus visibles en 3D, pour cela, nous proposons une conditions qui s'appellent zéro-gamma.

La condition zéro-gamma: Cette technique revient à supposer que le prix recherché de l'option varie linéairement en fonction du cours de l'action sur les bords du domaine, donc, elle consiste à annuler la dérivée seconde sur les bord du domaine.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial S^2}(t, S) \rightarrow 0 \text{ quand } S \rightarrow \infty$$

Revient à poser:

$$V_{i,j+1} - 2V_{i,j} + V_{i,j-1} = 0. \quad (3.10)$$

3.1.3 Convergence, consistance et stabilité d'un schéma numérique

Type de problème

Rappelons que l'on peut classer les EDPs en diverses catégories. voici la forme générale d'une équation quasi-linéaire(c'est à dire linéaire par rapport aux dérivées d'ordre le plus élevé) du seconde ordre à deux variables:

$$R \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + 2S \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + T \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + H = 0 \quad (3.11)$$

Où R, S, T , et H sont des fonctions de x, y , $\frac{\partial V}{\partial x}$ et de $\frac{\partial V}{\partial y}$.

La théorie nous apprend que si:

1. $S^2 - RT > 0$, le problème est hyperbolique.
2. $S^2 - RT = 0$, le problème est parabolique.
3. $S^2 - RT < 0$, le problème est elliptique.

Revenons à notre équation de Black-Scholes Merton:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (r - D) S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = rV(t, S)$$

L'application du critère de classification nous montre que l'EDP de Black-Scholes est une équation parabolique. Une équation parabolique bien connue est la fameuse équation (2, 34) dite 'équation de la valeur':

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0 \quad (3.12)$$

Convergence, consistance et stabilité

Soulignons que la connaissance de la classe à laquelle un problème apparait est cruciale pour pouvoir choisir une méthode numérique appropriée. D'autre part, c'est principalement la méthode des différences finies qui est employée pour la discrétisation de la variable temporelle des problèmes d'évolution (dans le temps) même lorsque les autres variables sont discrétisées par d'autres méthodes (éléments finis, etc.). Enfin, lorsque des méthodes de différences finies sont employées, la propriété de convergence s'établit généralement de manière indirecte en faisant appel aux concepts de consistance et de stabilité.

Ecrivons l'équation de BSM sous la forme $L(U) = 0$, et soient:

L_h : schéma de discrétisation.

U : est la solution exacte de l'équation $L(U) = 0$

U_h : est la solution du schéma aux différences finies $L_h(U) = 0$

Resoudre numériquement l'équation $L(U) = 0$ revient à considérer la solution U_h comme solution approchée de sa solution exacte U .

Avant d'admettre que U_h est une approximation valable de U , il faut vérifier les trois exigences suivantes:

- La consistance du schéma numérique avec l'équation d'origine.
- La stabilité de la résolution du schéma numérique.
- La convergence de la solution numérique U_h vers la solution théorique U .

La consistance La consistance est mesurée par l'erreur de troncature, on appelle erreur de troncature (ou erreur de discrétisation) l'expression définie par:

$$R_h(U) = L_h(U) - L(U)$$

c'est l'erreur traduite par l'approximation des dérivées de l'équation différentielle avec les dérivées discrètes. L'approximation de $L(U)$ par $L_h(U)$ est dite consistance si l'erreur de troncature $R_h(U)$ tend vers 0 lorsque tous les pas de la discrétisation tendent vers 0.[13]

$$\text{ie } \lim_{\text{maillage} \rightarrow 0} [L_h(U) - L(U)] = \lim_{\text{maillage} \rightarrow 0} (R_h(U)) = 0$$

La stabilité: La stabilité d'un schéma aux différences finies se traduit par le fait qu'à une petite perturbation du schéma et des données du problème $L(U) = 0$, correspond une petite perturbation de la solution approchée donnée par le schéma.

Un schéma numérique est dit stable si la solution numérique en une valeur T de la variable d'évolution t reste bornée lorsqu'on fait tendre le pas de maillage δt vers 0.

La convergence: On dit que le schéma aux différences finies est convergent si la quantité $U - U_h$ tend vers 0 quand les pas de discrétisation tendent vers 0. Autrement dit, un schéma numérique est dit convergent si la solution numérique U_h de l'EDP tend vers sa solution exacte, ie $\lim_{h \rightarrow 0} (U - U_h) = 0$.

loi de convergence: théorème de Lax: Pour un problème linéaire bien posé et satisfaisant la condition de consistance, alors convergence et stabilité sont deux notions équivalentes. Autrement dit, pour un problème linéaire et bien posé, la consistance et la stabilité sont nécessaires et suffisantes pour assurer la convergence.

Ce théorème fait la liaison entre d'une part la convergence et d'une autre part la consistance et la stabilité d'un schéma numérique.[1].

ie: consistance + stabilité \iff convergence

3.1.4 Résolution de l'équation de Black Scholes Merton à 2 dimensions

La résolution analytique

Compte tenu des conditions aux limites précitées, l'équation de BSM admet une solution analytique unique. Cette solution peut être déterminée analytiquement, à partir de la solution de l'équation de la chaleur, sous sa forme canonique. Il faut dans un premier temps, faire des changements de variables qui transforment l'équation de BSM sous la forme de l'équation de la chaleur, sous sa forme canonique.

On pose dans un premier temps:[1].

$$S = ke^x \Rightarrow \frac{\partial S}{\partial x} = ke^x \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial S} = \frac{e^{-x}}{k}$$

$$t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2} \Rightarrow \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{-2}{\sigma^2} \Rightarrow \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{-\sigma^2}{2}$$

$$V = kw(x, \tau) \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = k \frac{\partial w}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial \tau} = k \frac{\partial w}{\partial \tau}$$

Ainsi les dérivées du prix de l'option par rapport aux temps et par rapport au prix du sous-jacents ainsi que sa dérivée seconde par rapport au prix du sous-jacents sont les suivantes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} &= \frac{\partial V}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = -\frac{\sigma^2 k}{2} \frac{\partial w}{\partial \tau} \\ \frac{\partial V}{\partial S} &= \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial S} = k \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial S} = k \frac{\partial w}{\partial x} \frac{e^{-x}}{k} = e^{-x} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} &= \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial V}{\partial S} \right) = \frac{\partial}{\partial S} \left(e^{-x} \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{-x} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial S} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{-x} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{e^{-x}}{k} \\ &= \frac{e^{-x}}{k} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(e^{-x} \right) \frac{\partial w}{\partial x} + e^{-x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] \\ &= \frac{e^{-x}}{k} \left[-e^{-x} \frac{\partial w}{\partial x} + e^{-x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \\ &= \frac{e^{-2x}}{k} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{e^{-2x}}{k} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ &= \frac{e^{-2x}}{k} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

En remplaçant les expressions de ces dérivées dans l'équation de Black-Scholes, on obtient l'équation différentielle, en w , suivante:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \sigma^2 k \frac{\partial w}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{e^{-2x}}{k} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + r S e^{-x} \frac{\partial w}{\partial x} &= r k w \\ -\frac{1}{2} \sigma^2 k \frac{\partial w}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \sigma^2 k^2 \frac{e^{-2x}}{k} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + r k e^x e^{-x} \frac{\partial w}{\partial x} &= r k w \end{aligned}$$

Après simplification et en divisant par k , on aura:

$$-\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial w}{\partial \tau} = rw$$

En divisant par $\frac{\sigma^2}{2}$ et en posant, $R = \frac{r}{\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)}$, il vient:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + (R - 1)\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial \tau} = R w$$

Comme:

Quand $t = T \Rightarrow \tau = 0$

Quand $S = 0 \Rightarrow x \rightarrow -\infty$

Quand $S \rightarrow \infty \Rightarrow x \rightarrow +\infty$

Les conditions aux limites deviennent:

$$V(t, 0) \Rightarrow w(\tau, -\infty) = 0$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_{S=+\infty} = 1 \Rightarrow \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=+\infty} = (e^x)_{x=+\infty} = +\infty$$

$$V(T, S) = \max(S - k, 0) \Rightarrow w(0, x) = \frac{\max(k(e^x - 1), 0)}{k} = \max(e^x - 1, 0)$$

Pour arriver à la forme canonique de l'équation de la chaleur, un deuxième changement de variables est nécessaire. Ainsi, on pose:

$w(x, \tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} U(x, \tau)$ et on peut écrire:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \beta e^{\alpha x + \beta \tau} U + e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial U}{\partial \tau} = e^{\alpha x + \beta \tau} (\beta U + \frac{\partial U}{\partial \tau})$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \alpha e^{\alpha x + \beta \tau} U + e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial U}{\partial x} = e^{\alpha x + \beta \tau} (\alpha U + \frac{\partial U}{\partial x})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \alpha^2 e^{\alpha x + \beta \tau} U + \alpha e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial U}{\partial x} + \alpha e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial U}{\partial x} + e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \\ &= e^{\alpha x + \beta \tau} (\alpha^2 U + 2\alpha \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}) \end{aligned}$$

Après simplification, l'équation devient:

$$\alpha^2 U + 2\alpha \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + (R - 1)(\alpha U + \frac{\partial U}{\partial x}) - (\beta U + \frac{\partial U}{\partial \tau}) = R U$$

En réarrangeant les termes de cette équation, on obtient:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + (2\alpha + R - 1)\frac{\partial U}{\partial x} + (\alpha^2 + \alpha(R - 1) - \beta - R)U = \frac{\partial U}{\partial \tau}$$

Pour trouver la forme canonique de l'équation de la chaleur, il suffit de choisir α et β suivant le système:

$$2\alpha + R - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2}(R - 1)$$

$$\alpha^2 + \alpha(R - 1) - \beta - R = 0 \Rightarrow \beta = \left(-\frac{1}{4}(R - 1)^2 - R\right) = -\frac{1}{4}(R + 1)^2$$

Le changement de variables est donc:

$$w(x, \tau) = e^{-\frac{1}{2}(R-1)x - \frac{1}{4}(R+1)^2\tau} U(x, \tau) \text{ avec } R = \frac{2r}{\sigma^2}$$

Soit $U(x, \tau) = e^{-\frac{1}{2}(R-1)x + \frac{1}{4}(R+1)^2\tau} w(x, \tau)$

L'équation prend, donc, la forme canonique de l'équation de la chaleur:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial U}{\partial \tau}$$

Les conditions aux limites deviennent:

$$\begin{aligned} \cdot V(T, S) = \max(S - k, 0) &\Rightarrow w(0, x) = \frac{\max(k(e^x - 1), 0)}{k} = \max(e^x - 1, 0) \\ \Rightarrow U(0, x) &= e^{\frac{1}{2}(R-1)x} w(0, x) \\ &= e^{\frac{1}{2}(R-1)x} \max((e^x - 1), 0) \\ &= \max\left(e^{\frac{1}{2}(R+1)x} - e^{\frac{1}{2}(R-1)x}, 0\right) \end{aligned}$$

Or, on a:

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{2}(R+1)x} - e^{\frac{1}{2}(R-1)x} > 0 &\Rightarrow e^{\frac{1}{2}(R+1)x} > e^{\frac{1}{2}(R-1)x} \\ &\Rightarrow x > -x \\ x > 0 \end{aligned}$$

Si $x > 0 \Rightarrow U(0, x) = e^{\frac{1}{2}(R+1)x} - e^{\frac{1}{2}(R-1)x}$

Si $x \leq 0 \Rightarrow U(0, x) = 0$

$\cdot V(t, 0) = 0 \Rightarrow w(\tau, -\infty) = 0 \Rightarrow U(\tau, -\infty) = 0$

$\cdot \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_{S=+\infty} = 1 \Rightarrow \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=+\infty} = (e^x)_{x=+\infty} = +\infty$

$\Rightarrow \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{x=+\infty} = \left[e^{\frac{1}{2}(R-1)x + \frac{1}{4}(R+1)^2\tau} \left(\frac{1}{2}(R-1)w(\tau, x) + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]_{x=+\infty} = 0.$

Résolution de l'équation de la chaleur sous sa forme canonique: On a vu que l'équation de la chaleur, sous sa forme canonique, s'écrit

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial U}{\partial \tau} \quad \tau > 0 \text{ et } x \in \mathbb{R}$$

Pour résoudre une telle équation, il faut déterminer sa solution générale ainsi qu'une solution particulière.

Si $U(t, x)$ est une solution de cette équation, alors à l'instant $t = 0$, la solution de cette équation est notée: $U(0, x) = U_0(x)$; d'après les équations $U(0, x) = e^{\frac{1}{2}(R+1)x} - e^{\frac{1}{2}(R-1)x}$ et $U(0, x) = 0$, cette solution s'écrit:

$$U_0(x) = \max\left[e^{\frac{1}{2}(R+1)x} - e^{\frac{1}{2}(R-1)x}, 0\right]$$

La solution générale de cette équation est:

$$U(\tau, x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} U_0(x) e^{-\frac{1}{4\tau}(R-S)^2} dS$$

Si on pose $y = \frac{S-x}{\sqrt{2\tau}} \Rightarrow S = x + \sqrt{2\tau}y$, $U(\tau, x)$ devient

$$U(\tau, x) = \frac{1}{\sqrt{2\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} U_0(x + y\sqrt{2\tau}) e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

Si $S > 0 \Rightarrow U_0(S) = e^{\frac{1}{2}(R+1)S} - e^{\frac{1}{2}(R-1)S}$ et donc, si $y > \frac{-x}{\sqrt{2\tau}} \Rightarrow U_0(x + y\sqrt{2\tau}) = 0$

Ainsi, la solution de l'équation de la chaleur s'écrit:

$$U(\tau, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(R+1)(x+y\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(R-1)(x+y\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

$$= I_1 - I_2$$

Elle se calcule comme la différence des quantités I_1 et I_2 . L'intégrale I se calcul comme suit:

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(R+1)(x+y\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

Soit

$$I_1 = \frac{e^{\frac{1}{2}(R-1)x + \frac{1}{4}(R+1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}} - \frac{1}{2}(R+1)\sqrt{2\tau}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\tau^2} d\tau$$

La fonction à intégrer étant paire, l'intégrale I_1 , peut s'écrire:

$$I_1 = \frac{e^{\frac{1}{2}(R-1)x + \frac{1}{4}(R+1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}} - \frac{1}{2}(R+1)\sqrt{2\tau}} e^{-\frac{1}{2}\tau^2} d\tau$$

En désignant par $N(\cdot)$ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, on peut écrire:

$$I_1 = e^{\frac{1}{2}(R+1)x + \frac{1}{4}(R+1)^2\tau} N(d_1) \text{ avec } d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(R+1)\sqrt{2\tau}$$

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(R-1)(x+y\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

Le calcul de I_2 est I_1 , il suffit de remplacer $(R+1)$ par $(R-1)$.

Ainsi, l'intégrale I_2 s'écrit:

$$I_2 = e^{\frac{1}{2}(R-1)x + \frac{1}{4}(R-1)^2\tau} N(d_2) \text{ avec } d_2 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(R-1)\sqrt{2\tau} = d_1 - \sqrt{2\tau}$$

Etant donné que la fonction $U(\tau, x)$ est la différence des intégrales I_1 et I_2 .

On peut l'écrire sous la forme:

$$U(\tau, x) = I_1 - I_2 = e^{\frac{1}{2}(R+1)x + \frac{1}{4}(R+1)^2\tau} N(d_1) - e^{\frac{1}{2}(R-1)x - \frac{1}{4}(R-1)^2\tau} N(d_2)$$

Solution de l'équation de Black-Scholes En considérant l'expression de w en fonction de U , on peut écrire:

$$w(\tau, x) = e^{-\frac{1}{2}(R-1)x - \frac{1}{4}(R-1)^2\tau} U(\tau, x)$$

$$\Rightarrow w(\tau, x) = e^{-\frac{1}{2}(R-1)x - \frac{1}{4}(R-1)^2\tau} (I_1 - I_2)$$

$$\Rightarrow w(\tau, x) = e^{-\frac{1}{2}(R-1)x - \frac{1}{4}(R-1)^2\tau} \left[e^{\frac{1}{2}(R+1)x + \frac{1}{4}(R+1)^2\tau} N(d_1) - e^{\frac{1}{2}(R-1)x - \frac{1}{4}(R-1)^2\tau} N(d_2) \right]$$

$$\Rightarrow w(\tau, x) = e^x N(d_1) - e^{-R\tau} N(d_2)$$

En remplaçant la valeur de l'option V , par son expression en fonction de w ,

$$\begin{aligned} \text{on a: } V(t, S) &= kw(\tau, x) = k [e^x N(d_1) - e^{-R\tau} N(d_2)] \\ &= ke^x N(d_1) - ke^{-R\tau} N(d_2) \end{aligned}$$

Comme, on a $S = ke^x \Rightarrow e^x = \frac{S}{k}$ et $R = \frac{2r}{\sigma^2}$, on obtient:

$$V(t, S) = SN(d_1) - ke^{-\frac{2r}{\sigma^2}\tau} N(d_2)$$

$$\text{Or on a: } t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2} \Rightarrow 2\tau = (T - t)\sigma^2$$

En conjuguant ces deux dernières équations, on obtient l'expression définitive de la valeur de l'option qui correspond à la formule de Black-Scholes: $V(t, S) = SN(d_1) - ke^{-r(T-t)} N(d_2)$ où

$$d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(R + 1)\sqrt{2\tau} \text{avec } x = \ln\left(\frac{S}{k}\right) \text{ et } R = \frac{2r}{\sigma^2}$$

Donc,

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\tau}} \left[\ln\left(\frac{S}{k}\right) + \left(\frac{2r}{\sigma^2} + 1\right)\tau \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sigma^2(T-t)}} \left[\ln\left(\frac{S}{k}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) \right] \end{aligned}$$

En définitive, on a:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{k}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

Alors que:

$$d_2 = d_1 - \sqrt{2\tau} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

La solution de l'équation de Black-Scholes, pour une option d'achat (call) de type européen, en l'absence de dividendes, est la suivante:

$$V(t, S) = SN(d_1) - ke^{-r(T-t)} N(d_2)$$

Avec:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{k}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

et

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

D'après cette formule, il s'avère bien que cinq variables suffisent pour déterminer la valeur d'une option. Trois, d'entre elles, sont directement définies, à savoir, le cours du titre S , le prix d'exercice k et la durée de vie T . Les deux variables restantes, le taux d'intérêt et la volatilité, sont plus délicates à définir, et ce qui concerne le taux d'intérêt, il peut être observé sur le marché ou estimé, implicitement, à partir d'un modèle d'évaluation d'options. Quant

à la volatilité, elle exige une estimation puisqu'elle n'est pas directement observable sur le marché.

En général, les deux méthodes d'estimation de la volatilité les plus connues sont celles de la volatilité historique et de la volatilité implicite.

Pour le cas de put, on peut procéder de la même manière que le call ayant déjà évalué, on peut utiliser la parité put-call:

$$C - P = S - ke^{-r(T-t)}$$

Avec

$$V(t, S) = SN(d_1) - ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

$$\text{En utilisant } N(d) + N(-d) = 1$$

On aura:

$$P(t, S) = ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1)$$

3.1.5 Résolution numérique par la méthode des différences finies:

Dans cette section, nous allons résoudre l'équation de Black-Scholes de manière approchée, à l'aide de la méthode des différences finies, en utilisant successivement deux schémas numériques: le schéma explicite, puis le schéma implicite. On écrit une équation en chaque noeud en remplaçant l'équation aux dérivées partielles exacte par une approximation obtenue en approchant les dérivées exactes par des différences finies.

Discrétisation du domaine de résolution

Posons immédiatement le schéma type du problème que nous devons résoudre. notre domaine de résolution est composé de 2 axes: le temps t et le cours de l'action S . L'échelle du temps couvre la zone 0 à T . Le pas de temps est δt . Nous avons alors l'expression suivante pour caractériser chaque noeud du maillage.

$$t = T - i\delta t \quad \text{et} \quad i = \overline{0, N}$$

L'échelle du cours de l'action couvre la zone 0 à S_{\max} . Le pas de S est δS . Nous avons l'expression suivante pour caractériser chaque noeud du maillage.

$$S = S_0 + j\delta S \quad \text{et} \quad j = \overline{0, M}$$

On suppose que $S_0 = 0$. La durée du vie de l'option T , est divisée en N intervalles de durée $\delta t = \frac{T}{N}$. Nous disposons donc $N + 1$ dates qui sont alors $0, \delta t, 2\delta t, \dots, T$. Et la même chose pour le prix de l'action S_{\max} , on divise l'intervalle $[0, S_{\max}]$ en M intervalles de longueur $\delta S = \frac{S_{\max}}{M}$, on obtient $M + 1$ points: $0, \delta S, 2\delta S, \dots, S_{\max}$.

Les développements de Taylor:

Un développement de Taylor, permet décrire:

$$V(t, S + \delta S) = V(t, S) + \delta S \frac{\partial V}{\partial S}(t, S) + \frac{\delta S^2}{2!} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t, S) + O(\delta S^3) \quad (3.13)$$

$$V(t, S - \delta S) = V(t, S) - \delta S \frac{\partial V}{\partial S}(t, S) + \frac{\delta S^2}{2!} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t, S) - O(\delta S^3) \quad (3.14)$$

Au point (i, j) :

$$V(i, j + 1) = V(i, j) + \delta S \frac{\partial V}{\partial S}(i, j) + \frac{\delta S^2}{2!} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(i, j) + O(\delta S^3) \quad (3.15)$$

$$V(i, j - 1) = V(i, j) - \delta S \frac{\partial V}{\partial S}(i, j) + \frac{\delta S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(i, j) - O(\delta S^3) \quad (3.16)$$

Si on note: $V(i, j) = V_{i,j}$, les expressions (3.15) et (3.16) de viennent:

$$V_{i,j+1} = V_{i,j} + \delta S \frac{\partial V}{\partial S}(i, j) + \frac{\delta S^2}{2!} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(i, j) + O(\delta S^3) \quad (3.17)$$

$$V_{i,j-1} = V_{i,j} - \delta S \frac{\partial V}{\partial S}(i, j) + \frac{\delta S^2}{2!} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(i, j) - O(\delta S^3) \quad (3.18)$$

(3.17) – (3.18) donne:

$$V_{i,j+1} - V_{i,j-1} = 2\delta S \frac{\partial V}{\partial S}(i, j) + O(\delta S^3) \quad (3.19)$$

D'ou:

$$\frac{\partial V}{\partial S}(i, j) = \frac{V_{i,j+1} - V_{i,j-1}}{2\delta S} + O(\delta S^2) \quad (3.20)$$

Donc, au point (i, j) on peut approcher $\frac{\partial V}{\partial S}$ par $\frac{V_{i,j+1} - V_{i,j-1}}{2\delta S}$

On écrit:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_{(i,j)} \simeq \frac{V_{i,j+1} - V_{i,j-1}}{2\delta S} \quad (3.21)$$

Pour la dérivée seconde de notre équation de BSM sera discrétisé comme suit:

$$V(i, j+1) = V(i, j) + \delta S \frac{\partial V}{\partial S}(i, j) + \frac{\delta S^2}{2!} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(i, j) + \frac{\delta S^3}{3!} \frac{\partial^3 V}{\partial S^3}(i, j) + O(\delta S^4) \quad (3.22)$$

$$V(i, j-1) = V(i, j) - \delta S \frac{\partial V}{\partial S}(i, j) + \frac{\delta S^2}{2!} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(i, j) - \frac{\delta S^3}{3!} \frac{\partial^3 V}{\partial S^3}(i, j) + O(\delta S^4) \quad (3.23)$$

D'ou:

$$V_{i,j+1} = V_{i,j} + \delta S \frac{\partial V}{\partial S}(i, j) + \frac{\delta S^2}{2!} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(i, j) + \frac{\delta S^3}{3!} \frac{\partial^3 V}{\partial S^3}(i, j) + O(\delta S^4) \quad (3.24)$$

$$V_{i,j-1} = V_{i,j} - \delta S \frac{\partial V}{\partial S}(i, j) + \frac{\delta S^2}{2!} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(i, j) - \frac{\delta S^3}{3!} \frac{\partial^3 V}{\partial S^3}(i, j) + O(\delta S^4) \quad (3.25)$$

(3.24) + (3.25) donne:

$$V_{i,j+1} + V_{i,j-1} = 2V_{i,j} + \delta S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(i, j) + O(\delta S^4) \quad (3.26)$$

D'ou:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(i, j) = \frac{V_{i,j+1} - 2V_{i,j} + V_{i,j-1}}{\delta S^2} + O(\delta S^2) \quad (3.27)$$

Donc, au point (i, j) on peut approcher $\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ par $\frac{V_{i,j+1} + V_{i,j-1} - 2V_{i,j}}{\delta S^2}$.
On écrit:

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)_{(i,j)} \simeq \frac{V_{i,j+1} - 2V_{i,j} + V_{i,j-1}}{\delta S^2} \quad (3.28)$$

Pour $\frac{\partial V}{\partial t}$, on choisissons une approximation qui permettra de lier le point (i, j) au point $(i+1, j)$.

$$V(i+1, j) = V(i, j) + \delta t \frac{\partial V}{\partial t}(i, j) + O(\delta t^2) \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}(i, j) = \frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{\delta t} + O(\delta t) \quad (3.30)$$

Au point (i, j) on peut approcher $\frac{\partial V}{\partial t}$ par $\frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{\delta t}$.
On écrit:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_{(i,j)} \simeq \frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{\delta t} \quad (3.31)$$

Schéma explicite

Rappelons notre problème à résoudre:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = rV(t, S) \quad (3.32)$$

On approchons les dérivées $\frac{\partial V}{\partial S}$ et $\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ par leurs différences finies au point $(i+1, j)$

$$\begin{aligned} \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_{(i,j)} &\simeq \frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{\delta t} \\ \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_{(i+1,j)} &\simeq \frac{V_{i+1,j+1} - V_{i+1,j-1}}{2\delta S} \\ \cdot \left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)_{(i+1,j)} &\simeq \frac{V_{i+1,j+1} - 2V_{i+1,j} + V_{i+1,j-1}}{\delta S^2} \end{aligned}$$

On les remplace dans notre équation, on aura:

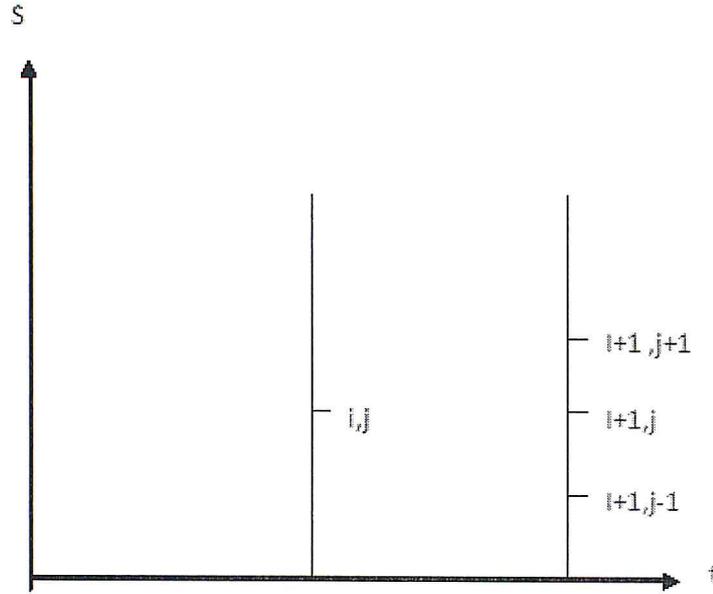


Figure 3.2: Schéma de discrétisation de la méthode explicite

Avec: A est une matrice tri-diagonale de taille $((M - 1) \times (M - 1))$, les valeurs $V_{N,0}$ et $V_{N,M}$ sont données par les conditions aux limites.

Rappelons le problème à résoudre:

$$a_j V_{i+1,j-1} + b_j V_{i+1,j} + c_j V_{i+1,j+1} = V_{i,j}$$

Option de Call:

Rappelons les conditions aux limites:

$$V_{i,0} = 0 \quad \forall i = \overline{0, N-1}$$

$$V_{i,M} = S_{\max} e^{-D(T-t)} - K e^{-r(T-t)} \quad \forall i = \overline{0, N-1}$$

$$V_{N,j} = \max(S - K, 0) \quad \forall j = \overline{0, M}$$

$$\text{pour } j = 1 : b_1 V_{N,1} + c_1 V_{N,2} = V_{N-1,1}$$

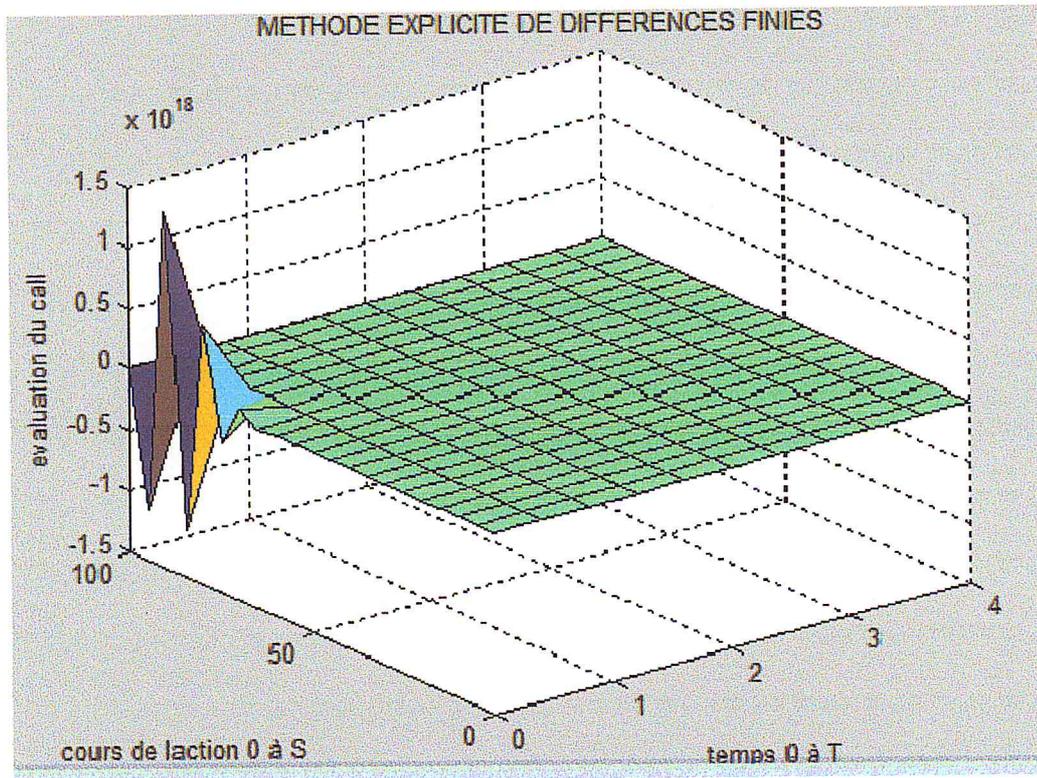
$$\text{pour } j = 2 : a_2 V_{N,1} + b_2 V_{N,2} + c_2 V_{N,3} = V_{N-1,2}$$

\vdots

$$\text{Pour } j = M - 1 : a_{M-1} V_{N,M-2} + b_{M-1} V_{N,M-1} + c_{M-1} (S_{\max} e^{-D(T-t)} - K e^{-r(T-t)}) = V_{N-1,M-1}$$

On pourrait donc écrire un système d'équation $AX = b_1$ suivant:

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & & & \\ & a_2 & b_2 & c_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & a_{M-2} & b_{M-2} & c_{M-2} & \\ & & & & a_{M-1} & b_{M-1} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{N,1} \\ V_{N,2} \\ \vdots \\ V_{N,M-2} \\ V_{N,M-1} \end{bmatrix} =$$



$$\begin{bmatrix} V_{N-1,1} \\ V_{N-1,2} \\ \vdots \\ V_{N-1,M-2} \\ V_{N-1,M-1} - c_{M-1} (S_{\max} e^{-D(T-t)} - K e^{-r(T-t)}) \end{bmatrix}$$

Avec A est une matrice tri-diagonale de taille $((M - 1) \times (M - 1))$.

Cette méthode nous conduit donc à une relation entre une valeur de l'option à la date $i\delta t$: $V_{i,j}$ et 3 valeurs différentes de l'option à la date $(i + 1)\delta t$, $(V_{i+1,j-1}, V_{i+1,j}, V_{i+1,j+1})$.

La résolution consiste donc à la multiplication à la multiplication d'une matrice tri diagonale (contenant les paramètres (a_j^*, b_j^*, c_j^*) avec le vecteur solution de l'étape précédente.

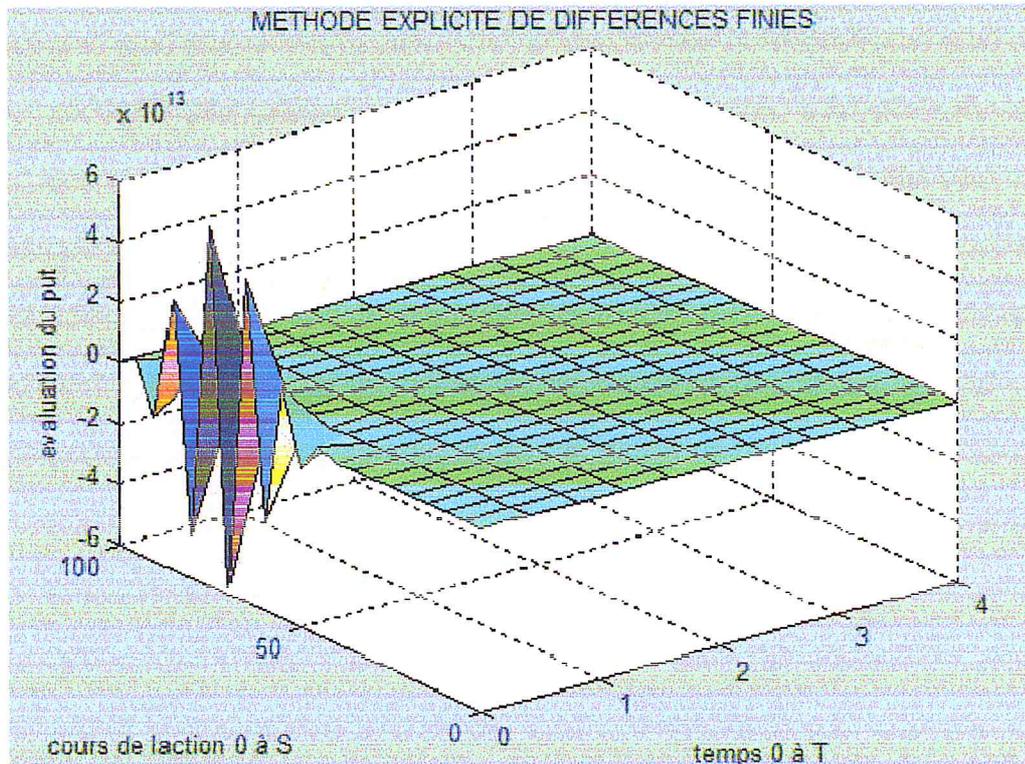
prenons à présent un exemple de call avec les paramètres suivants: $k = 50 e$, $S_0 = 50 e$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $T = 5\text{mois}$, $S_{\max} = 100 e$, $M = 20$, $N = 10$

La grille d'évaluation fournit un prix de l'option de 6.03e. La valeur analytique étant alors de 6.11e.

Figure 3.3: Evaluation d'un call Européen par la méthode explicite

•Option de Put:

$$\begin{aligned} \cdot V_{i,0} &= K \quad \forall i = \overline{0, N-1} \\ \cdot V_{i,M} &= 0 \quad \forall i = \overline{0, N-1} \\ \cdot V_{N,j} &= \max(K - S, 0) \quad \forall j = \overline{0, M} \end{aligned}$$



On raisonnant de même manière que précédemment on aura Le système d'équation $AX = b_2$ suivant:

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & & \\ & a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{M-2} & b_{M-2} & c_{M-2} \\ & & & & a_{M-1} & b_{M-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{N,1} \\ V_{N,2} \\ \vdots \\ V_{N,M-2} \\ V_{N,M-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{N-1,1} - Ka_1 \\ V_{N-1,2} \\ \vdots \\ V_{N-1,M-2} \\ V_{N-1,M-1} \end{bmatrix}$$

Avec A est une matrice tri-diagonale de taille $((M - 1) \times (M - 1))$.

Pour trouver le vecteur d'inconnus b_2 , il faudra de multiplier la matrice A par le vecteur X . En reprenant les paramètres de l'exemple précédent. La méthode implicite fournit un prix de l'option de 4.040e., dans le cas d'un put. La valeur analytique étant alors de: 4.067e.

Figure 3.4: Evaluation d'un put Européen par la méthode explicite

Malheureusement, l'enorme désavantage de cette méthode est la condition sur le pas de temps. En effet, un critère très sévère régit le choix du pas de temps:

Le nombre du pas de temps doit être de l'ordre de la racine carrée du pas de temps. On peut traduire cela sous forme de conditions:

$$\frac{\delta t}{\delta S^2} \leq \frac{1}{\sigma^2 S^2}$$

Ce qui revient à écrire:

$$\delta t \leq \frac{1}{\sigma^2 M^2}$$

Toute fois, il n'est pas exclu de trouver des plages de valeurs du couple $(\delta t, \delta S)$ qui ne vérifient pas le critère mais qui ne semblent impliquer aucune oscillation de la solution! Il faut donc se méfier car le résultat peut avoir une bonne tête alors qu'en réalité il est faux.

Mais soulignons bien que si le critère n'est pas vérifié, il y a de fortes chances d'obtenir des oscillations similaires à la figure 3.2, conduisant à un prix de l'option complètement erroné!

En effet, nous modifions le nombre $N=40$ et laissons $M=20$.

Ces oscillations parasites ont une origine purement numérique. Remarquons que le respect du critère de convergence nous garantit l'absence d'oscillations, mais il nous contraint à utiliser des maillages très fins. Même si à priori, cela ne semble pas encore être un vrai problème étant donné que des maillages encore raisonnable fournissent des résultats tout à fait satisfaisants, ce critère de convergence risque de devenir beaucoup trop contraignant lors d'un passage à une étude multidimensionnelle.

Schéma implicite

Rappelons notre fameuse équation:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (r - D) S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = rV(t, S)$$

Pour arriver à ce schéma, nous prenons les approximations de $\frac{\partial V}{\partial S}$ et $\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ au point (i, j) et nous poursuivons la même démarche qu'à la section précédente (schéma explicite).

En raisonnant de la même manière avec le schéma explicite, la seule différence est: Au lieu de prendre les approximations de $\frac{\partial V}{\partial S}$ et $\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ au point $(i + 1, j)$ on les prenant au point (i, j) .

$$\begin{aligned} \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)_{(i,j)} &\simeq \frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{\delta t} \\ \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial S} \right)_{(i,j)} &\simeq \frac{V_{i,j+1} - V_{i,j-1}}{2\delta S} \\ \cdot \left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right)_{(i,j)} &\simeq \frac{V_{i,j+1} - 2V_{i,j} + V_{i,j-1}}{\delta S^2} \end{aligned}$$

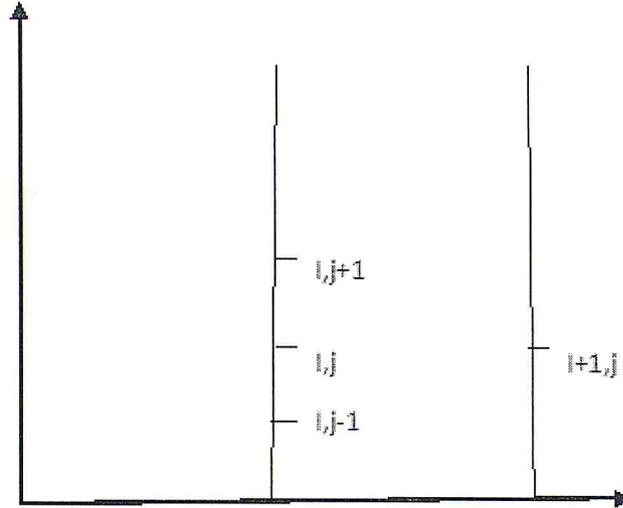
En substituant dans notre équation, les dérivées par les expressions ci-dessus, nous obtenons:

$$\frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{\delta t} + (r - D) S \frac{V_{i,j+1} - V_{i,j-1}}{2\delta S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{V_{i,j+1} - 2V_{i,j} + V_{i,j-1}}{\delta S^2} = rV_{i,j} \quad (3.38)$$

$$V_{i+1,j} - V_{i,j} + (r - D) S \frac{V_{i,j+1} - V_{i,j-1}}{2\delta S} \delta t + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{V_{i,j+1} - 2V_{i,j} + V_{i,j-1}}{\delta S^2} \delta t = rV_{i,j} \delta t \quad (3.39)$$

$$V_{i+1,j} - V_{i,j} + \frac{(r - D)}{2} j \delta t (V_{i,j+1} - V_{i,j-1}) + \frac{1}{2} \sigma^2 j^2 \delta t (V_{i,j+1} - 2V_{i,j} + V_{i,j-1}) = r \delta t V_{i,j} \quad (3.40)$$

$$\frac{1}{2} (\sigma^2 j^2 - (r - D)) \delta t V_{i,j-1} - (1 + \sigma^2 j^2 \delta t + r \delta t) V_{i,j} + \frac{1}{2} ((r - D) j + \sigma^2 j^2) \delta t V_{i,j+1} = -V_{i+1,j} \quad (3.41)$$



En fin, on obtient le schéma suivant:

$$\frac{1}{2}((r - D) - \sigma^2 j^2) \delta t V_{i,j-1} + (1 + \sigma^2 j^2 \delta t + r \delta t) V_{i,j} - \frac{1}{2}((r - D) j + \sigma^2 j^2) \delta t V_{i,j+1} = V_{i+1,j} \quad (3.42)$$

Ce qui nous mène à l'équation aux différences suivante:

$$a_j^* V_{i,j-1} + b_j^* V_{i,j} + c_j^* V_{i,j+1} = V_{i+1,j} \quad (3.43)$$

Avec les paramètres suivants:

$$a_{j^*} = \frac{1}{2}((r - D) - \sigma^2 j^2) \delta t$$

$$b_{j^*} = (1 + \sigma^2 j^2 \delta t + r \delta t)$$

$$c_{j^*} = -\frac{1}{2}((r - D) j + \sigma^2 j^2) \delta t$$

Figure 3.5: Schéma de discrétisation de la méthode implicite

Ce schéma relie la valeur de l'option à la date $(i + 1)\delta t : V_{i+1,j}$ avec trois valeurs différentes de l'option à la date $(i)\delta t : (V_{i,j-1}, V_{i,j}, V_{i,j+1})$. Les valeurs $V_{i,j}$ ne sont pas calculer directement par ce schéma. Ce schéma consiste donc à résoudre un système d'équations linéaires.

L'équation traduisant un système tri-diagonal s'écrire de la manière suivante à l'étape $N - 1$:

Cette matrice est entièrement nulle à l'exception de ses trois diagonales centrales.

Si nous supposons que la factorisation de Gauss LU de cette matrice A existe, les deux matrices L et U doivent donc être respectivement des matrices triangulaires inférieure et supérieure.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ \beta_2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & \beta_n & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} \alpha_1 & c_1 & & 0 \\ & \alpha_2 & c_2 & \\ & & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & & & \alpha_n \end{bmatrix}$$

Pour déterminer les facteurs α_i et β_i , on fera appel aux relations récursives suivantes:

$$\alpha_1 = a_1$$

$$\beta_i = \frac{b_i}{\alpha_i - 1}$$

$$\alpha_i = a_i - \beta_i c_{i-1}$$

Et

$$i = \overline{2, n}$$

En utilisant ces relations, on peut ainsi aisément résoudre les deux systèmes bidiagonaux $LY = b$ et $UX = Y$ pour obtenir les formules suivantes:

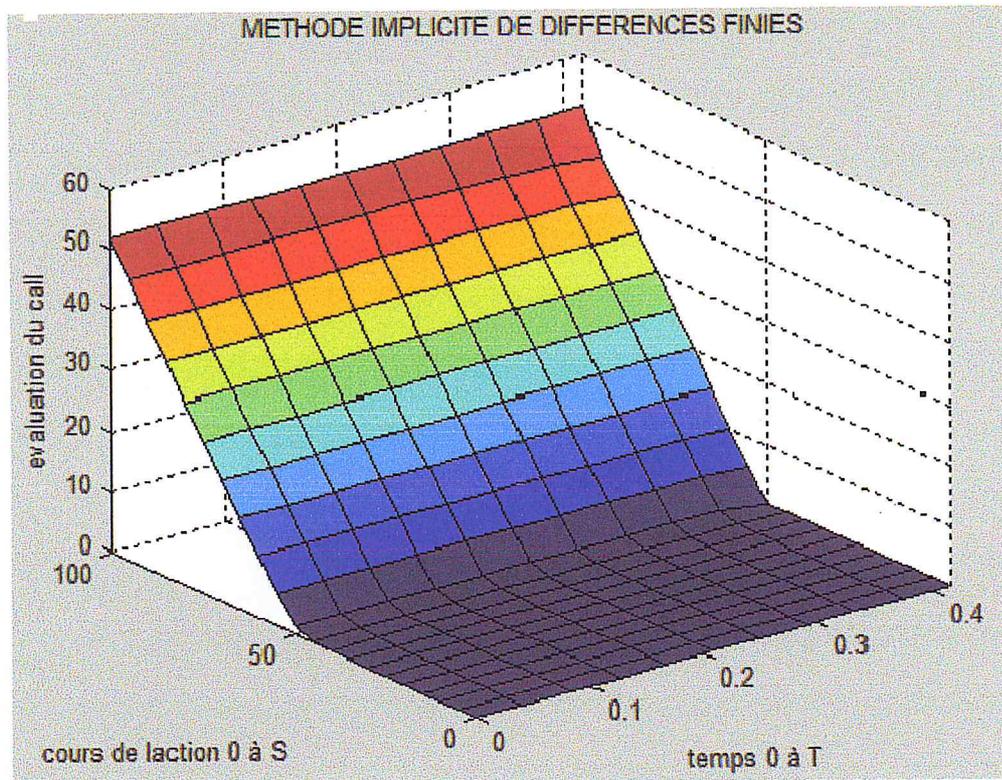
$$LY = b \quad y_1 = b_1, y_i = b_i - \beta_i y_{i-1}, i = \overline{2, n}$$

$$UX = Y \quad x_n = \frac{y_n}{\alpha_n}, x_i = \frac{(y_i - c_i x_{i+1})}{\alpha_i}, \quad i = \overline{n-1, 1}$$

C'est précisément cette méthode qui est la plus efficace pour résoudre les systèmes tri-diagonaux et elle est connue sous l'appellation d'Algorithme de Thomas.

Conditions aux limites: Les deux options ont le même système $A^* X^* = b^*$, mais il faut tenir compte des conditions aux limites. Le vecteur b^* aura donc un changement dans la première et la dernière composante.

Dans le cas de Call, les valeurs $V_{N-1,0}$ et $V_{N-1,M}$ sont égaux respectivement aux 0 et $S_{\max} e^{-D(T-t)} - K e^{-r(T-t)}$ dans la première et la dernière composante respectivement.



prenons à présent un exemple de call avec les paramètres suivants: $k = 50 e$, $S_0 = 50 e$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $T = 5\text{mois}$, $S_{\max} = 100 e$, $M = 20$, $N = 10$

La grille d'évaluation fournit un prix de l'option de 5,994e. La valeur analytique étant alors de 6.116e.

Figure 3.6: Evaluation d'un call Européen par la méthode implicite

Dans le cas de Put, les valeurs $V_{N-1,0}$ et $V_{N-1,M}$ sont égaux respectivement aux K et 0

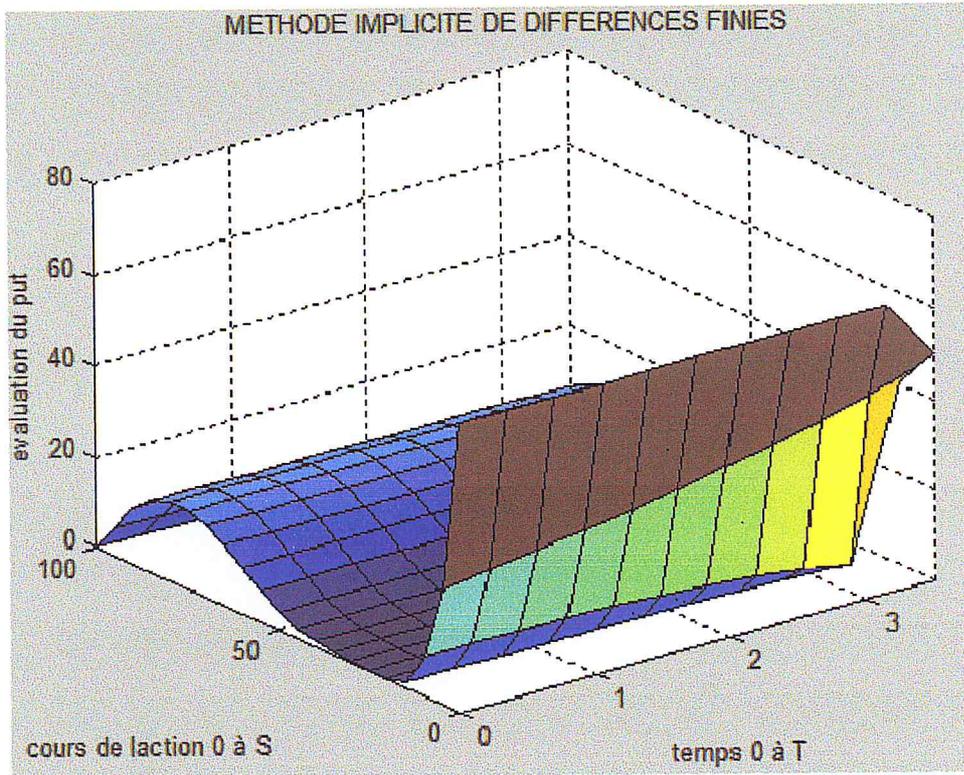
En reprenant les paramètres de l'exemple précédent. La méthode implicite fournit un prix de l'option de 3.90e., dans le cas d'un put. La valeur analytique étant alors de:4.067e.

Les résultats sont très concluants pour un maillage aussi grossier. Il reste à savoir si la méthode converge rapidement si l'on affine le maillage.

Si nous rasserrons le maillage, aussi bien pour le call que pour le put, nous atteignons une valeur très correcte pour un simple maillage de 100×60 et des temps de l'ordre du 100ème de seconde comme présenté dans les tableaux 3.1 et 3.2.

Nous posons donc deux questions, à savoir le problème de la convergence et de la rapidité de celle-ci.

Rappelons donc que la méthode implicite calcule la solution à l'étape n à partir de la solution à l'étape $n+1$ en résolvant un système linéaire d'équation, c'est à dire en inversant une matrice tridiagonale dans notre cas. La méthode implicite est une méthode stable. Nous



Put Européen			
M	N	Prix	Temps($10^{-3}s$)
20	10	3.91	2.2
30	10	3.97	3.2
40	20	4.02	9.2
80	30	4.04	28.5
100	60	4.06	99.7

Table 3.1: Put Européen maillage 20*10 (**)

Call Européen			
M	N	Prix	Temps($10^{-3}s$)
20	10	5.94	2.1
30	10	5.99	4.9
40	20	6.05	8.3
80	30	6.08	39.2
100	60	6.09	59.3
150	80	6.10	151.8

Table 3.2: Call Européen maillage 20*10 (**)

Figure 3.7: Evaluation d'un put Européen par la méthode implicite

n'avons donc aucune condition sur le nombre de pas de temps. Cependant on peut remarquer que c'est une méthode du 1er ordre dans le temps. Or, en règle général, un schéma du premier ordre fournit une moins bonne précision qu'un schéma du second ordre.

Mais l'avantage de la méthode implicite est qu'elle converge toujours vers la solution de l'équation aux dérivées partielles quand δt et δS tendent vers 0. Cependant le coût en calcul de cette méthode est clairement non négligeable par rapport aux méthodes qui suivront et ne pourra être justifié que par une rapidité de convergence notable. Nous comparerons les vitesses de convergence dans une section suivante.

Les implémentations Matlab de la méthode implicite résolvant l'EDP de BSM figurent en annexe.

Schéma explicite et implicite, en utilisant la condition zéro-gamma:

Au lieu d'affectuer ces adaptations, faisons appel à la méthode zéro-gamma, comme on a vu dans la section(3.2.2) précédente

$$V_{N-1,j-1} - 2V_{N-1,j} + V_{N-1,j+1} = 0$$

Démonstration: Utilisant le développement de Taylor, on peut approcher $(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2})_{(i,j)}$ par $\frac{V_{i,j+1} - 2V_{i,j} + V_{i,j-1}}{\delta S^2}$ présenté dans la section (3.2.5)

On écrit:

$$(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2})_{(i,j)} \simeq \frac{V_{i,j+1} - 2V_{i,j} + V_{i,j-1}}{\delta S^2}$$

$$\text{D'après la condition zéro-gamma: } \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{V_{i,j+1} - 2V_{i,j} + V_{i,j-1}}{\delta S^2} = 0$$

$$\Rightarrow V_{i,j+1} - 2V_{i,j} + V_{i,j-1} = 0 \text{ s'appelle}$$

la condition zéro-gamma.

Schéma explicite: Rappelons le problème à résoudre:

$$a_j V_{N,j-1} + b_j V_{N,j} + c_j V_{N,j+1} = V_{N-1,j}$$

Pour $j = 1$ et pour $j = M - 1$ l'expression ci-dessus devient respectivement:

$$a_1 V_{N,0} + b_1 V_{N,1} + c_1 V_{N,2} = V_{N-1,1} \tag{3.44}$$

$$a_{M-1} V_{N,M-2} + b_{M-1} V_{N,M-1} + c_{M-1} V_{N,M} = V_{N-1,M-1} \tag{3.45}$$

		Call			
		Explicite		Implicite	
M	N	Prix	Temps(s)	Prix	Temps(s)
20	30	6.0375	0.0056	5.9918	0.0056
40	108	6.0957	0.0046	6.0836	0.0646
60	242	6.1059	0.2017	6.1005	0.2017
80	430	6.1094	0.4059	6.1064	0.4059
100	680	6.1111	1.8697	6.1092	1.8697

Table 3.3: Prix du call à maillage donné (**)

Matrices 'zeros' Rappelons que les matrices que nous utilisons sont tri-diagonales. Elles sont donc, hormis les diagonales, complètement creuses. Nous avons deux possibilités pour définir ces matrices: les commandes 'zeros' et 'sparse'. La première génère une matrice pleine de zéros tandis que la 2ème ne retient que les valeurs non nulles. Matlab nous suggère d'utiliser les matrices 'sparse' lorsque c'est possible car on augmente la gamme d'algorithmes d'inversion que Matlab va utiliser en incluant ceux qui se basent sur des matrices sparse..

Cependant, il se pourrait tout à fait que l'algorithme optimal dans notre cas ne nécessite pas l'utilisation des matrices 'sparse'. Nous augmenterions donc le temps de résolution en utilisant celle-ci.

Enfin, remarquons que dans le cas des matrices creuses, il faut éviter la commande 'inv', plutôt réservée aux systèmes pleins. Nous utiliserons par conséquent simplement la commande '\ ' et Matlab se chargera de sélectionner l'algorithme adéquat.

Comparaisons de la convergence des deux schémas:

Nous allons comparer les deux schémas d'un point de vue convergence et rapidité de calcul.

Prenons l'exemple simple d'un call avec les paramètres suivants:

$$k = 50 e, S_0 = 50 e, r = 0.1, \sigma = 0.4, T = 5 \text{ mois}, S_{\max} = 100 e, M = 20, N = 10$$

On choisit 5 combinaisons de M et de N qui permettent d'éviter toute oscillation dans la méthode explicite. On peut ainsi comparer le prix du call et le temps mis pour l'obtenir par chacun des schémas que nous reprenons dans le tableau suivant.

D'autre part, nous nous pouvons calculer la valeur analytique de ce call et trouver 6.1168e.

On observe que la méthode qui converge le plus vite est bien la méthode explicite. En effet, on obtient la valeur de 6.1059e en 20 centièmes de secondes et un maillage de 60 pas de temps sur 242 pas de cours de l'action, tandis que la méthode implicite est moins performante que la méthode explicite. Elle présente néanmoins l'avantage d'être stable quel que soit le choix de la combinaison M et N. Mais cette dernière méthode converge donc presque aussi rapidement que la méthode explicite.

Temps de calcul:

L'autre comparaison à effectuer est le temps de calcul nécessaire à chacune des méthodes en fonction de la taille du maillage et non pas en fonction de la valeur obtenue. On peut conclure quel que soit le maillage, la méthode implicite est sensiblement plus lente que la méthode explicite.

Des constatations précédentes, nous pouvons donc déduire que la méthode explicite présente une mauvaise stabilité ce qui impose d'utiliser un pas de temps relativement faible. Le schéma implicite quant à lui présente une stabilité inconditionnelle ce qui permet d'utiliser des pas de temps élevés. En général, une méthode implicite sera plus complexe à mettre en oeuvre et plus coûteuse en temps de calcul par pas de temps qu'une méthode explicite. Cependant, en raison de leur stabilité absolue, les méthodes implicites permettent bien d'utiliser un pas de temps plus grand (et donc de réduire le nombre de pas de temps nécessaires).

3.2 Etude de l'équation de Black-Scholes-Merton en 3D

3.2.1 Introduction

Si on considère un modèle de Black-Scholes Merton possédant une variable d'évolution t (le temps) et deux variables d'espace S_1 et S_2 , nous passons à un problème dit 'tri-dimensionnel' étant donné que nous avons trois variables mais on parle également 'à deux sous-jacents'.

Plusieurs problèmes financiers populaires sont des problèmes des problèmes tri-dimensionnels. La méthode des différences finies est relativement bien adaptée à ce type de problème. Toutefois, dès que l'on a 3 sous-jacents, elle devient très lente et coûteuse en temps de calcul.

La méthode des différences finies fonctionne très bien jusqu'à deux sous-jacents et a l'avantage de permettre le traitement aisé des exercices prématurés, c'est à dire des options américaines.

Rappelons que nous validerons notre outil à l'aide de cas d'étude obtenus à l'aide de formules analytiques correspondant à des cas simples. Une fois validé, il suffira d'adapter les conditions initiales du problème, c'est à dire le 'payoff' de l'option pour résoudre un nouveau problème pour lequel nous n'avons pas de solution analytique.

Le but de la présente section est donc l'étude complète du modèle de Black-Scholes Merton en 3D par différences finies.

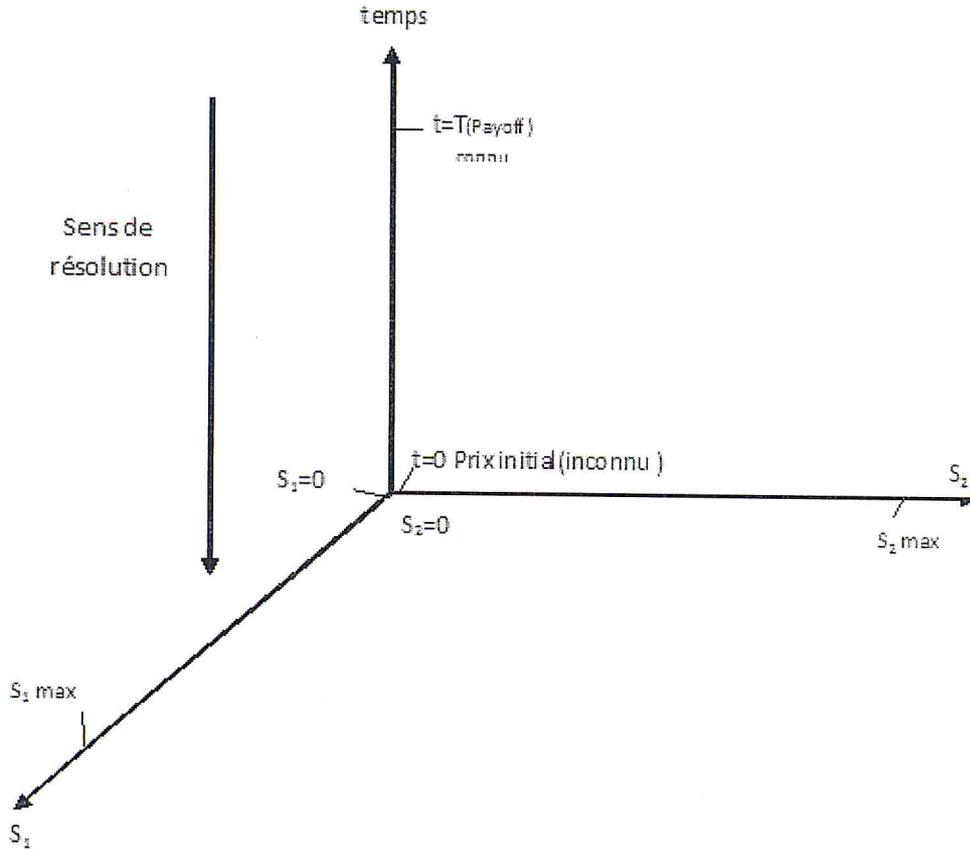
3.2.2 Le modèle à deux sous-jacents

on peut écrire un modèle général à deux sous-jacents comme suit:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + a(S_1, S_2, t) \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + b(S_1, S_2, t) \frac{\partial V}{\partial S_1} + c(S_1, S_2, t) V + e(S_1, S_2, t) \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 S_2} + f(S_1, S_2, t) \frac{\partial V}{\partial S_2} = 0$$

Pour qu'un tel problème soit qualifié de parabolique il faut vérifier la relation:

$$e(S_1, S_2, t)^2 < 4a(S_1, S_2, t) d(S_1, S_2, t) \tag{3.47}$$



le modèle de Black-Scholes Merton en 3D quand à lui est exactement un problème du type (2, 35) puisqu'il s'écrit

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + (r - D_1) S_1 \frac{\partial V}{\partial S_1} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} + \rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2} + (r - D_2) S_2 \frac{\partial V}{\partial S_2} - rV = 0 \quad (3.48)$$

Avec D_1 et D_2 qui sont respectivement les taux de dividendes continus relatifs au premiers et au deuxième sous-jacent. Le paramètre ρ quand à lui représente la corrélation entre les deux sous-jacents.

Si nous appliquons la relation (2, 36), nous observons que l'équation de Black-Scholes est bien une équation de type parabolique puisque la corrélation vérifié $-1 \leq \rho \leq 1$.

Le domaine à dimensionner est devenu un maillage tri-dimensionnel. Nous crétiserons les 3 variables comme suit:

$$S_1 = i\delta S_1, S_2 = j\delta S_2, t = T - k\delta t \quad (3.49)$$

Figure 3.8: Problème tridimensionnel

Rappelons que nous remontons toujours l'axe de temps étant donné que $k = 0$ correspond à la maturité $t = T$. δS_1 et δS_2 sont respectivement les pas du cours de l'action S_1 et S_2 .

Nous avone donc:

$$\begin{aligned}
 M_1 &= \frac{S_{1\max} - S_{1\min}}{\delta S_1} \\
 M_2 &= \frac{S_{2\max} - S_{2\min}}{\delta S_2} \\
 N &= \frac{T}{\delta t} \\
 i &= \overline{0, M_1 + 1} \\
 j &= \overline{0, M_2 + 1} \\
 k &= \overline{0, N + 1}
 \end{aligned}$$

Les conditions initiales dépendront du type d'option que l'on traite. Nous pourrions utiliser comme conditions aux bords la condition zéro-gamma présentée au section précédente.

3.2.3 Conditions aux bords

Nous avons étudié de manière détaillée dans le chapitre 2 du présent rapport, les diverses possibilités à notre disposition pour établir des conditions aux bords de notre problème. Nous pouvons reprendre la totalité du développement et l'appliquer à notre cas tri-dimensionnel en tirant les mêmes conclusions.

Rappelons que la condition initiale de notre problème est le 'payoff'. Nous gardons les définitions précédentes pour M_1, M_2 et N .

Nous avons une grille de valeurs initiales de dimension $(M_1 + 1) \times (M_2 + 1)$.

Nous allons à présent appliquer les conditions zéro-gamma. Cela consiste à réduire notre grille d'inconnues à la dimension $(M_1 - 1) \times (M_2 - 1)$ étant donné que nous allons utiliser les bords du domaine de résolution comme conditions aux bords. En effet, rappelons nous qu'en 2 dimensions, nous étions parvenus à poser le problème comme un système tridiagonal. La matrice du système subissait des adaptations dans sa première et sa dernière ligne pour tenir compte de la condition zéro-gamma. Cela était possible car pour chaque noeud i, j de la grille à obtenir, nous faisons intervenir un maximum de 3 autres noeuds.

En 3 dimensions ce ne sera plus le cas. En effet, comme nous le verrons lors de la discrétisation de notre équation de BSM en 3D, la dérivée croisée est représentée par un schéma aux différences faisant intervenir 4 points. Les dérivées secondes font toujours intervenir 3 points. Quand aux dérivées premières, elles font intervenir 2 points. Le bilan de cette énumération nous conduit à la conclusion suivante: Chaque noeud de la grille à un pas de temps donné, fera intervenir 9 points du pas de temps précédent comme le montre la figure (3,8). Il est important de connaître le nombre de points intervenant dans le calcul.

Donc il va nous falloir déterminer les conditions aux bords sur les 4 faces et les 4 arêtes de notre domaine de résolution cubique. En pratique, cela revient à discrétiser l'équation de départ et à modifier celle-ci sur chaque face et chaque arête. Nous devons donc réécrire à 8 reprises la discrétisation. Toutefois, il faut rappeler qu'une fois que ces 8 adaptations sont effectuées. Quel que soit le payoff que l'on choisira ultérieurement, les conditions aux bords sont calculées une fois pour toutes. C'est d'ailleurs là l'un des grands avantages de la technique zéro-gamma.

En pratique:

· Nous réduisons donc notre domaine de résolution à un domaine $(M_1 - 1) \times (M_2 - 1)$.

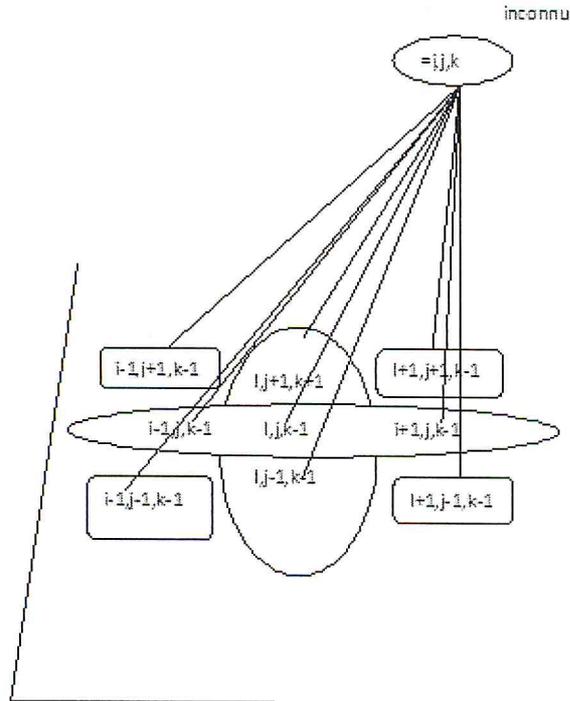


Figure 3.9: Molecule de calcul en 3D

·Pour chacune des faces et des arêtes du domaine, nous adaptons la discrétisation en différences finies en faisant intervenir la condition zéro-gamma dans la formule aux différences.

·Nous appliquons la discrétisation de base pour le reste des noeuds et nous résolvons le système et nous itérons dans le temps jusqu'à obtenir le prix voulu au temps zéro.

Explicitons le point 2 de cette énumération par un exemple. Supposons que nous sommes en train de traiter la face du cube $S_1 = 0$. Cela correspond à tous les points pour lesquels $i = 1$. Si dans notre formule aux différences finies, nous avons un point en $i - 1, j, k - 1$, nous nous rendons compte que ce point n'est pas accessible vu qu'il sort du domaine de résolution cubique car correspond à $i = 0$. Cependant, le biais de la condition zéro-gamma, nous pouvons exprimer ce point comme une combinaison linéaire de deux autres points qui eux appartiennent bien au domaine:

$$V(i - 1, j, k) = 2V(i, j, k) - V(i + 1, j, k).$$

Nous effectuons ainsi la même démarche pour chaque point qui apparaîtra dans notre formule et pour chaque face ou arête du domaine. Remarquons que même si cela semble être relativement fastidieux, il ne faut donc le faire qu'une seule fois.

Soulignons également que nous appliquons la condition zéro-gamma sur les arêtes en utilisant tout simplement les points de la diagonale.

Enfin, il faut préciser qu'en général, le choix des conditions aux bords dépendra du contrat à traiter. On pourra bien évidemment penser à d'autres méthodes comme l'estimation de ces conditions en se basant sur des approximations lorsqu'on est capable d'imaginer l'évolution

du prix de notre option.

3.2.4 Conditions initiales

Nous pouvons évidemment généraliser les conditions initiales 2D pour un cas tri-dimensionnel si nous traitons toujours des options de type Call simple ou Put simple. Nous travaillerons également avec un autre type d'option dans la suite de cette étude. Les nouvelles conditions initiales (payoff) de cette option exotique seront alors précisées.

Pour un panier d'option de type Call simple, lae payoff est:

$$V(S_1, S_2, t) = \max(\omega_1 S_1 + \omega_2 S_2, -K, 0) \quad (3.50)$$

et pour un panier d'option de type Put simple:

$$V(S_1, S_2, t) = \max(K - \omega_1 S_1 + \omega_2 S_2, 0) \quad (3.51)$$

Avec ω_1 et ω_2 qui sont respectivement les poids des sous-jacents 1 et 2.

3.2.5 Choix de la méthode

Comme pour l'étude bi-dimensionnelle(2D),deux grandes familles de méthodes s'offrent à nous pour résoudre l'équation de Black-Scholes Merton tri-dimensionnelle: Les méthodes explicites, implicites.

Nous avons remarqué que la méthode explicite était très efficace en 2D et la méthode implicite qui consiste à inverser un système de taille $(M_1 - 1) \times (M_2 - 1)$. Cependant, des adaptations permettent de garder un caractère implicite de la méthode sans pour autant devoir résoudre des systèmes monstres. Le souci majeur qui nous freinera sera en réalité la dérivée croisée qui intervient dans l'équation de BSM 3D.

3.2.6 Schéma explicite

La méthode explicite est une manière relativement simple pour résoudre l'équation de BSM 3D. En effet, dans un premier tempsdiscrétiser notre équation BSM 3D:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + (r - D_1) S_1 \frac{\partial V}{\partial S_1} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} + \rho \sigma_1 \sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2} + (r - D_2) S_2 \frac{\partial V}{\partial S_2} - rV = 0 \quad (3.52)$$

Pour simplifier les calculs nous porposer de réécrire l'équation (3.52) comme suit:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + a \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + b \frac{\partial V}{\partial S_1} + c \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} + d \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2} + e \frac{\partial V}{\partial S_2} - rV = 0 \quad (3.53)$$

Nous allons approximer les dérivées $\frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2}$, $\frac{\partial V}{\partial S_1}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2}$ et $\frac{\partial V}{\partial S_2}$ au point $(i, j, k + 1)$ comme suit:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)_{(i,j,k)} \simeq \frac{V_{i,j,k+1} - V_{i,j,k}}{\delta t}$$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial V}{\partial S_1}\right)_{(i,j,k+1)} &\simeq \frac{V_{i+1,j,k+1} - V_{i-1,j,k+1}}{2\delta S_1} \\
 \left(\frac{\partial V}{\partial S_2}\right)_{(i,j,k+1)} &\simeq \frac{V_{i,j+1,k+1} - V_{i,j-1,k+1}}{2\delta S_2} \\
 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2}\right)_{(i,j,k+1)} &\simeq \frac{V_{i+1,j,k+1} + V_{i-1,j,k+1} - 2V_{i,j,k+1}}{\delta S_1^2} \\
 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2}\right)_{(i,j,k+1)} &\simeq \frac{V_{i,j+1,k+1} + V_{i,j-1,k+1} - 2V_{i,j,k+1}}{\delta S_2^2} \\
 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2}\right)_{(i,j,k+1)} &\simeq \frac{V_{i+1,j+1,k+1} - V_{i+1,j-1,k+1} - V_{i-1,j+1,k+1} + V_{i-1,j-1,k+1}}{4\delta S_1 \delta S_2}
 \end{aligned}$$

La démonstration de cette dernière est la suivante:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2} \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2} = \frac{\partial}{\partial S_1} \left(\frac{\partial V}{\partial S_2} \right) \approx \frac{\frac{\partial V}{\partial S_2}(i+1, j, k) - \frac{\partial V}{\partial S_2}(i-1, \delta S_1, j, k)}{2\delta S_1} \quad (3.55)$$

Or

$$\frac{\partial V}{\partial S_2}(i+1, j, k) \approx \frac{V(i+1, j+1, k) - V(i+1, j-1, k)}{2\delta S_2} \quad (3.56)$$

Nous pouvons alors proposer la discrétisation suivante:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2} &= \frac{\frac{V_{i+1,j+1,k} - V_{i+1,j-1,k}}{2\delta S_2} - \frac{V_{i-1,j+1,k} - V_{i-1,j-1,k}}{2\delta S_2}}{2\delta S_1} \\
 &= \frac{V_{i+1,j+1,k} - V_{i+1,j-1,k} - V_{i-1,j+1,k} + V_{i-1,j-1,k}}{4\delta S_1 \delta S_2}
 \end{aligned}$$

On remplaçons ses deniers dans notre équation (3.53) on aura:

$$\begin{aligned}
 &\frac{V_{i,j,k+1} - V_{i,j,k}}{\delta t} + a \frac{V_{i+1,j,k+1} + V_{i-1,j,k+1} - 2V_{i,j,k+1}}{\delta S_1^2} + b \frac{V_{i+1,j,k+1} - V_{i-1,j,k+1}}{2\delta S_1} \\
 &+ c \frac{V_{i,j+1,k+1} + V_{i,j-1,k+1} - 2V_{i,j,k+1}}{\delta S_2^2} \\
 &+ d \frac{V_{i+1,j+1,k+1} - V_{i+1,j-1,k+1} - V_{i-1,j+1,k+1} + V_{i-1,j-1,k+1}}{4\delta S_1 \delta S_2} \\
 &+ e \frac{V_{i,j+1,k+1} - V_{i,j-1,k+1}}{2\delta S_2} \\
 &= rV_{i,j,k}
 \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned}
 & V_{i,j,k+1} - V_{i,j,k} + \frac{a\delta t}{\delta S_1^2} [V_{i+1,j,k+1} + V_{i-1,j,k+1} - 2V_{i,j,k+1}] + \frac{b\delta t}{2\delta S_1} [V_{i+1,j,k+1} - V_{i-1,j,k+1}] \\
 & + \frac{c\delta t}{\delta S_2^2} [V_{i,j+1,k+1} + V_{i,j-1,k+1} - 2V_{i,j,k+1}] \\
 & + \frac{d\delta t}{4\delta S_1\delta S_2} [V_{i+1,j+1,k+1} - V_{i+1,j-1,k+1} - V_{i-1,j+1,k+1} + V_{i-1,j-1,k+1}] \\
 & + \frac{e\delta t}{2\delta S_2} [V_{i,j+1,k+1} - V_{i,j-1,k+1}] \\
 = & r\delta t V_{i,j,k}
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

On aura:

$$\begin{aligned}
 & \left[1 - 2\frac{a\delta t}{\delta S_1^2} - 2\frac{c\delta t}{\delta S_2^2} \right] V_{i,j,k+1} + \left[\frac{c\delta t}{\delta S_2^2} + \frac{e\delta t}{2\delta S_2} \right] V_{i,j+1,k+1} + \left[\frac{c\delta t}{\delta S_2^2} - \frac{e\delta t}{2\delta S_2} \right] V_{i,j-1,k+1} \\
 & + \left[\frac{a\delta t}{\delta S_1^2} + \frac{b\delta t}{2\delta S_1} \right] V_{i+1,j,k+1} + \left[\frac{a\delta t}{\delta S_1^2} - \frac{b\delta t}{2\delta S_1} \right] V_{i-1,j,k+1} + \frac{d\delta t}{4\delta S_1\delta S_2} V_{i+1,j+1,k+1} \\
 & - \frac{d\delta t}{4\delta S_1\delta S_2} V_{i+1,j-1,k+1} - \frac{d\delta t}{4\delta S_1\delta S_2} V_{i-1,j+1,k+1} + \frac{d\delta t}{4\delta S_1\delta S_2} V_{i-1,j-1,k+1} \\
 = & (1 + r\delta t) V_{i,j,k}
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

On a donc:

$$\begin{aligned}
 & \left[1 - \frac{\sigma_1^2 S_1^2 \delta t}{\delta S_1^2} - \frac{\sigma_2^2 S_2^2 \delta t}{\delta S_2^2} \right] V_{i,j,k+1} + \frac{1}{2} \left[\frac{\sigma_2^2 S_2^2}{\delta S_2^2} + \frac{(r - D_2) S_2}{\delta S_2} \right] \delta t V_{i,j+1,k+1} \\
 & + \frac{1}{2} \left[\frac{\sigma_2^2 S_2^2}{\delta S_2^2} - \frac{(r - D_2) S_2}{\delta S_2} \right] \delta t V_{i,j-1,k+1} + \frac{1}{2} \left[\frac{\sigma_1^2 S_1^2}{\delta S_1^2} + \frac{(r - D_1) S_1}{\delta S_1} \right] \delta t V_{i+1,j,k+1} \\
 & + \frac{1}{2} \left[\frac{\sigma_1^2 S_1^2}{\delta S_1^2} - \frac{(r - D_1) S_1}{\delta S_1} \right] \delta t V_{i-1,j,k+1} + \frac{\rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \delta t}{4\delta S_1\delta S_2} V_{i+1,j+1,k+1} \\
 & - \frac{\rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \delta t}{4\delta S_1\delta S_2} V_{i+1,j-1,k+1} - \frac{\rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \delta t}{4\delta S_1\delta S_2} V_{i-1,j+1,k+1} + \frac{\rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \delta t}{4\delta S_1\delta S_2} V_{i-1,j-1,k+1} \\
 = & (1 + r\delta t) V_{i,j,k}
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

Rappelons que $S_1 = i\delta S_1$ et $S_2 = j\delta S_2$ en les remplaçant dans l'équation (3.60) on aura:

$$\begin{aligned}
 & [1 - \sigma_1^2 i^2 \delta t - \sigma_2^2 j^2 \delta t] V_{i,j,k+1} + \frac{1}{2} [\sigma_2^2 j^2 + (r - D_2) j] \delta t V_{i,j+1,k+1} \\
 & + \frac{1}{2} [\sigma_2^2 j^2 - (r - D_2) j] \delta t V_{i,j-1,k+1} + \frac{1}{2} [\sigma_1^2 i^2 + (r - D_1) i] \delta t V_{i+1,j,k+1} \\
 & + \frac{1}{2} [\sigma_1^2 i^2 - (r - D_1) i] \delta t V_{i-1,j,k+1} + \frac{\rho\sigma_1\sigma_2 i j}{4} \delta t V_{i+1,j+1,k+1} \\
 & - \frac{\rho\sigma_1\sigma_2 i j}{4} \delta t V_{i+1,j-1,k+1} - \frac{\rho\sigma_1\sigma_2 i j}{4} \delta t V_{i-1,j+1,k+1} + \frac{\rho\sigma_1\sigma_2 i j}{4} \delta t V_{i-1,j-1,k+1} \\
 = & (1 + r\delta t) V_{i,j,k}
 \end{aligned} \tag{3.61}$$

On divisons l'équation par $(1 + r\delta t)$ on obtient:

$$\begin{aligned}
& \frac{1 - \sigma_1^2 i^2 \delta t - \sigma_2^2 j^2 \delta t}{(1 + r\delta t)} V_{i,j,k+1} + \frac{\sigma_2^2 j^2 + (r - D_2) j}{2(1 + r\delta t)} \delta t V_{i,j+1,k+1} \\
& + \frac{\sigma_2^2 j^2 - (r - D_2) j}{2(1 + r\delta t)} \delta t V_{i,j-1,k+1} + \frac{\sigma_1^2 i^2 + (r - D_1) i}{2(1 + r\delta t)} \delta t V_{i+1,j,k+1} \\
& + \frac{\sigma_1^2 i^2 - (r - D_1) i}{2(1 + r\delta t)} \delta t V_{i-1,j,k+1} + \frac{\rho\sigma_1\sigma_2 ij}{4(1 + r\delta t)} \delta t V_{i+1,j+1,k+1} \\
& - \frac{\rho\sigma_1\sigma_2 ij}{4(1 + r\delta t)} \delta t V_{i+1,j-1,k+1} - \frac{\rho\sigma_1\sigma_2 ij}{4(1 + r\delta t)} \delta t V_{i-1,j+1,k+1} + \frac{\rho\sigma_1\sigma_2 ij}{4(1 + r\delta t)} \delta t V_{i-1,j-1,k+1} \\
& = V_{i,j,k+1}
\end{aligned}$$

Si on pose :

$$\begin{aligned}
a_j^* &= \frac{1 - \sigma_1^2 i^2 \delta t - \sigma_2^2 j^2 \delta t}{(1 + r\delta t)} \\
b_j^* &= \frac{\sigma_2^2 j^2 + (r - D_2) j}{2(1 + r\delta t)} \delta t \\
c_j^* &= \frac{\sigma_2^2 j^2 - (r - D_2) j}{2(1 + r\delta t)} \delta t \\
d_j^* &= \frac{\sigma_1^2 i^2 + (r - D_1) i}{2(1 + r\delta t)} \delta t \\
e_j^* &= \frac{\sigma_1^2 i^2 - (r - D_1) i}{2(1 + r\delta t)} \delta t \\
f_j^* &= \frac{\rho\sigma_1\sigma_2 ij}{4(1 + r\delta t)} \delta t \\
h_j^* &= -\frac{\rho\sigma_1\sigma_2 ij}{4(1 + r\delta t)} \delta t
\end{aligned}$$

On aura :

$$a_j^* V_{i,j,k+1} + b_j^* V_{i,j+1,k+1} + c_j^* V_{i,j-1,k+1} + d_j^* V_{i+1,j,k+1} + e_j^* V_{i-1,j,k+1} \quad (3.62)$$

$$+ f_j^* V_{i+1,j+1,k+1} + \quad (3.4)$$

$$h_j^* V_{i+1,j-1,k+1} + h_j^* V_{i-1,j+1,k+1} + f_j^* V_{i-1,j-1,k+1} \quad (3.5)$$

$$= V_{i,j,k+1} \quad (3.6)$$

3.2.7 Schéma implicite:

Reprennant notre problème est

$$\frac{\partial V}{\partial t} + a \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + b \frac{\partial V}{\partial S_1} + c \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} + d \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 S_2} + e \frac{\partial V}{\partial S_2} - rV = 0$$

Nous allons appliquer les mêmes approximations que le schéma explicite, quoique nous allons les faire au point (i, j, k) , on aura :

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_{(i,j,k)} &\simeq \frac{V_{i,j,k+1} - V_{i,j,k}}{\delta t} \\
 \left(\frac{\partial V}{\partial S_1}\right)_{(i,j,k)} &\simeq \frac{V_{i+1,j,k} - V_{i-1,j,k}}{2\delta S_1} \\
 \left(\frac{\partial V}{\partial S_2}\right)_{(i,j,k)} &\simeq \frac{V_{i,j+1,k} - V_{i,j-1,k}}{2\delta S_2} \\
 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2}\right)_{(i,j,k)} &\simeq \frac{V_{i+1,j,k} + V_{i-1,j,k} - 2V_{i,j,k}}{\delta S_1^2} \\
 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2}\right)_{(i,j,k)} &\simeq \frac{V_{i,j+1,k} + V_{i,j-1,k} - 2V_{i,j,k}}{\delta S_2^2} \\
 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2}\right)_{(i,j,k)} &\simeq \frac{V_{i+1,j+1,k} - V_{i+1,j-1,k} - V_{i-1,j+1,k} + V_{i-1,j-1,k}}{4\delta S_1 \delta S_2}
 \end{aligned}$$

On remplace ces dernières approximation dans notre équation :

$$\begin{aligned}
 &\frac{V_{i,j,k+1} - V_{i,j,k}}{\delta t} + a \frac{V_{i+1,j,k} + V_{i-1,j,k} - 2V_{i,j,k}}{\delta S_1^2} + b \frac{V_{i+1,j,k} - V_{i-1,j,k}}{2\delta S_1} \\
 &+ c \frac{V_{i,j+1,k} + V_{i,j-1,k} - 2V_{i,j,k}}{\delta S_2^2} + d \frac{V_{i+1,j+1,k} - V_{i+1,j-1,k} - V_{i-1,j+1,k} + V_{i-1,j-1,k}}{4\delta S_1 \delta S_2} \\
 &+ e \frac{V_{i,j+1,k} - V_{i,j-1,k}}{2\delta S_2} \\
 = & rV_{i,j,k}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &V_{i,j,k+1} - V_{i,j,k} + \frac{a\delta t}{\delta S_1^2} [V_{i+1,j,k} + V_{i-1,j,k} - 2V_{i,j,k}] + \frac{b\delta t}{2\delta S_1} [V_{i+1,j,k} - V_{i-1,j,k}] \\
 &+ \frac{c\delta t}{\delta S_2^2} [V_{i,j+1,k} + V_{i,j-1,k} - 2V_{i,j,k}] + \frac{d\delta t}{4\delta S_1 \delta S_2} [V_{i+1,j+1,k} - V_{i+1,j-1,k} - V_{i-1,j+1,k} + V_{i-1,j-1,k}] \\
 &+ \frac{e\delta t}{2\delta S_2} [V_{i,j+1,k} - V_{i,j-1,k}] \\
 = & r\delta t V_{i,j,k}
 \end{aligned}$$

On aura:

$$\begin{aligned}
 &\left[\frac{a\delta t}{\delta S_1^2} - \frac{b\delta t}{2\delta S_1}\right]V_{i-1,j,k} + \left[-1 - 2\frac{a\delta t}{\delta S_1^2} - 2\frac{c\delta t}{\delta S_2^2} - r\delta t\right]V_{i,j,k} \\
 &+ \left[\frac{a\delta t}{\delta S_1^2} + \frac{b\delta t}{2\delta S_1}\right]V_{i+1,j,k} + \left[\frac{c\delta t}{\delta S_2^2} - \frac{e\delta t}{2\delta S_2}\right]V_{i,j-1,k} + \left[\frac{c\delta t}{\delta S_2^2} + \frac{e\delta t}{2\delta S_2}\right]V_{i,j+1,k} \\
 &+ \frac{d\delta t}{4\delta S_1 \delta S_2}V_{i+1,j+1,k} - \frac{d\delta t}{4\delta S_1 \delta S_2}V_{i+1,j-1,k} - \frac{d\delta t}{4\delta S_1 \delta S_2}V_{i-1,j+1,k} + \frac{d\delta t}{4\delta S_1 \delta S_2}V_{i-1,j-1,k} \\
 = & -V_{i,j,k+1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{a}{\delta S_1^2} - \frac{b}{2\delta S_1} \right] \delta t V_{i-1,j,k} - \left[1 + 2\frac{a\delta t}{\delta S_1^2} + 2\frac{c\delta t}{\delta S_2^2} + r\delta t \right] V_{i,j,k} \\
& + \left[\frac{a}{\delta S_1^2} + \frac{b}{2\delta S_1} \right] \delta t V_{i+1,j,k} + \left[\frac{c}{\delta S_2^2} - \frac{e}{2\delta S_2} \right] \delta t V_{i,j-1,k} + \left[\frac{c}{\delta S_2^2} + \frac{e}{2\delta S_2} \right] \delta t V_{i,j+1,k} \\
& + \frac{d\delta t}{4\delta S_1\delta S_2} V_{i+1,j+1,k} - \frac{d\delta t}{4\delta S_1\delta S_2} V_{i+1,j-1,k} - \frac{d\delta t}{4\delta S_1\delta S_2} V_{i-1,j+1,k} + \frac{d\delta t}{4\delta S_1\delta S_2} V_{i-1,j-1,k} \\
& = -V_{i,j,k+1}
\end{aligned}$$

On a donc:

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{\sigma_1^2 S_1^2}{\delta S_1^2} - \frac{(r-D_1)S_1}{2\delta S_1} \right] \delta t V_{i-1,j,k} - \left[1 + 2\frac{\sigma_1^2 S_1^2 \delta t}{2\delta S_1^2} + 2\frac{\sigma_2^2 S_2^2 \delta t}{2\delta S_2^2} + r\delta t \right] V_{i,j,k} \quad (3.63) \\
& + \frac{1}{2} \left[\frac{\sigma_1^2 S_1^2}{\delta S_1^2} + \frac{(r-D_1)S_1}{\delta S_1} \right] \delta t V_{i+1,j,k} + \frac{1}{2} \left[\frac{\sigma_2^2 S_2^2}{\delta S_2^2} - \frac{(r-D_2)S_2}{\delta S_2} \right] \delta t V_{i,j-1,k} \\
& + \frac{1}{2} \left[\frac{\sigma_2^2 S_2^2}{\delta S_2^2} + \frac{(r-D_2)S_2}{\delta S_2} \right] \delta t V_{i,j+1,k} + \frac{\rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \delta t}{4\delta S_1\delta S_2} V_{i+1,j+1,k} \\
& - \frac{\rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \delta t}{4\delta S_1\delta S_2} V_{i+1,j-1,k} - \frac{\rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \delta t}{4\delta S_1\delta S_2} V_{i-1,j+1,k} + \frac{\rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \delta t}{4\delta S_1\delta S_2} V_{i-1,j-1,k} \\
& = -V_{i,j,k+1}
\end{aligned}$$

Rappelons que : $S_1 = i\delta S_1$ et $S_2 = j\delta S_2$ en les remplaçant dans l'équation (3.63) on aura:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left[\sigma_1^2 i^2 - (r-D_1)i \right] \delta t V_{i-1,j,k} - \left[1 + \sigma_1^2 i^2 \delta t + \sigma_2^2 j^2 \delta t + r\delta t \right] V_{i,j,k} \quad (3.64) \\
& + \frac{1}{2} \left[\sigma_1^2 i^2 + (r-D_1)i \right] \delta t V_{i+1,j,k} + \frac{1}{2} \left[\sigma_2^2 j^2 - (r-D_2)j \right] \delta t V_{i,j-1,k} \\
& + \frac{1}{2} \left[\sigma_2^2 j^2 + (r-D_2)j \right] \delta t V_{i,j+1,k} + \frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{4} ij \delta t V_{i+1,j+1,k} - \frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{4} ij \delta t V_{i+1,j-1,k} \\
& - \frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{4} ij \delta t V_{i-1,j+1,k} + \frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{4} ij \delta t V_{i-1,j-1,k} \\
& = -V_{i,j,k+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \left[\sigma_1^2 i^2 - (r-D_1)i \right] \delta t V_{i-1,j,k} + \left[1 + \sigma_1^2 i^2 \delta t + \sigma_2^2 j^2 \delta t + r\delta t \right] V_{i,j,k} \quad (3.65) \\
& -\frac{1}{2} \left[\sigma_1^2 i^2 + (r-D_1)i \right] \delta t V_{i+1,j,k} - \frac{1}{2} \left[\sigma_2^2 j^2 - (r-D_2)j \right] \delta t V_{i,j-1,k} \\
& -\frac{1}{2} \left[\sigma_2^2 j^2 + (r-D_2)j \right] \delta t V_{i,j+1,k} - \frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{4} ij \delta t V_{i+1,j+1,k} + \frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{4} ij \delta t V_{i+1,j-1,k} \\
& + \frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{4} ij \delta t V_{i-1,j+1,k} - \frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{4} ij \delta t V_{i-1,j-1,k} \\
& = V_{i,j,k+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_j V_{i-1,j,k} + b_j V_{i,j,k} + c_j V_{i+1,j,k} + d_j V_{i,j-1,k} + e_j V_{i,j+1,k} + f_j V_{i+1,j+1,k} + h_j V_{i+1,j-1,k} + h_j V_{i-1,j+1,k} \\
& = V_{i,j,k+1}
\end{aligned}$$

Avec les paramètres suivants:

$$\begin{aligned}
 a_j &= -\frac{1}{2} [\sigma_1^2 i^2 - (r - D_1) i] \delta t \\
 b_j &= [1 + \sigma_1^2 i^2 \delta t + \sigma_2^2 j^2 \delta t + r \delta t] \\
 c_j &= -\frac{1}{2} [\sigma_1^2 i^2 + (r - D_1) i] \delta t \\
 d_j &= -\frac{1}{2} [\sigma_2^2 j^2 - (r - D_2) j] \delta t \\
 e_j &= -\frac{1}{2} [\sigma_2^2 j^2 + (r - D_2) j] \delta t \\
 f_j &= -\frac{\rho \sigma_1 \sigma_2}{4} i j \delta t \\
 h_j &= \frac{\rho \sigma_1 \sigma_2}{4} i j \delta t
 \end{aligned} \tag{3.67}$$

En appliquant la condition zero-gamma sur les deux formules obtenues par les deux schémas explicite et implicite on aura des systèmes à résoudre afin d'avoir la valeur approchée de l'option.

3.2.8 Conclusion

Ce chapitre nous a détaillé l'étude des conditions limites que nous appliquons au cas 2D et au cas 3D ainsi que le développement complet de la résolution numérique de l'équation bi-dimensionnelle de BSM. Soulignons également le travail important réalisé sur le problème du choix des conditions aux bords. Nous avons trouvé une manière simple et efficace d'imposer des conditions aux bords du domaine indépendamment de l'option traitée. Il s'agit de la condition Zéro-gamma qui a été utilisé au cas tri-dimensionnel.

Nous retiendrons donc au terme de la résolution bi-dimensionnelle que la solution approchée obtenu en appliquant les deux schéma explicite et implicite de la méthode des différences finies converge toujours vers la solution exacte, quoique le schéma explicite peut fournir des résultats très raisonnables pour des coûts en calculs très faible mais il nécessite la réalisation d'une condition sur le nombre du pas de temps.

Dans la deuxième section de ce chapitre, nous avons essayé de résoudre l'EDP de Black-Scholes-Merton tri-dimensionnelle. Cela signifie que nous cherchons le prix d'une option sur deux sous-jacents corrélés. En effet, même si l'EDP tri-dimensionnelle est une généralisation de la forme 2D, le problème était très différent. Les 'stencils' des schémas aux différences ne font plus intervenir 3 points mais 9 points, impliquant une explosion de la taille de systèmes à résoudre. Il faut donc recommencer une étude des méthodes existantes pour ce problème et refaire des choix de discrétisation de l'EDP, de technique de résolution, etc.

Conclusion générale

Conclusion générale

Le but ultime du présent mémoire était donc la résolution du modèle de Black-Scholes-Merton en deux et en trois dimensions en utilisant la méthode des différences finies avec ces deux schémas explicite et implicite, cette résolution nous fournit une valeur qui représente la valeur d'une option européenne.

La première phase de cette étude consistait en l'appropriation des concepts fondamentaux de la finance et du vocabulaire associé dans le but de saisir les enjeux du problème.

Le prix que nous cherchons est le prix d'une option c'est à dire d'un produit dérivé dont le sous-jacent est une action. Le premier volet du mémoire consistait en l'étude bidimensionnelle du problème: l'EDP de Black-Scholes-Merton dépend de deux variables qui sont le temps et le cours de l'action sous-jacente. La tâche consistait donc essentiellement à comprendre ces méthodes, à les implémenter et à les comparer d'un point de vue vitesse de convergence et temps de calculs.

Nous avons ainsi retenu à cette étape de l'étude que la résolution numérique de notre équation de Black-Scholes-Merton par les deux schémas convergent toujours vers la solution exacte, cependant nous avons remarqué que le schéma explicite pouvait fournir des résultats très raisonnables pour des coûts en calculs très faibles, mais un critère sévère sur le pas de temps handicapait la méthode.

Nous avons présenté la technique du Zéro-gamma qui est simple et efficace, elle permet d'imposer des conditions aux bords du domaine indépendamment de l'option traitée et nous l'avons même transposée au cas tri-dimensionnelle, dans ce cas nous avons étudié l'EDP Black-Scholes-Merton avec deux sous jacents, cette étude était complètement différente à l'étude au cas de deux dimensions. Les 'stencils' des schémas aux différences ne font plus intervenir 3 points mais 9 points, impliquant une explosion de la taille de systèmes à résoudre. Il faut donc recommencer une étude des méthodes existantes pour ce problème et refaire des choix de discrétisation de l'EDP, de technique de résolution, etc. comme nouvelle méthodes nous proposons une célèbre méthode ADI (Alternating Direction Implicit Method).

ANNEXE

Chapitre 4

Annexe

4.0.9 Implémentation par Matlab des méthodes étudiées

Code analytique:

Le calcul de $N(d)$ pourra être effectué à l'aide de la fonction d'erreur Matlab appelée `erf` que nous allons présenter afin de montrer comment l'appliquer à la résolution de l'équation de Black et Scholes. La fonction erreur $\text{erf}(X)$ correspond à l'intégrale de la distribution gaussienne de moyenne 0 et de variance 1/2:

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

La fonction erreur complémentaire $\text{erfc}(x)$ est définie par:

$$\text{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{-\infty} e^{-t^2} dt = 1 - \text{erf}(x)$$

Dans notre code, c'est cette deuxième fonction que nous allons utiliser; Exprimons donc $N(d)$ en fonction de erfc :

$$\begin{aligned} N(d) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-\frac{1}{2}s^2} ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^0 e^{-\frac{1}{2}s^2} ds + \int_0^d e^{-\frac{1}{2}s^2} ds \right] \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^d e^{-\frac{1}{2}s^2} ds \end{aligned}$$

Puisque nous avons affaire à une fonction de densité paire, c'est à dire: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds = 1$.

On effectue le changement de variables $\frac{1}{2}s^2 = t^2$, donc $\frac{1}{\sqrt{2}}s = t$. Quand $s = d$, on a alors $t = \frac{1}{\sqrt{2}}d$.

$$\begin{aligned} N(d) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{d}{\sqrt{2}}} e^{-\frac{1}{2}2t^2} \sqrt{2} dt \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{d}{\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{erf}\left(\frac{d}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left[1 - \text{erfc}\left(\frac{d}{\sqrt{2}}\right) \right] \\ &= 1 - \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{d}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

Cette expression peut encore être simplifiée en considérant que $\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^0 e^{-t^2} dt$ et donc: $\operatorname{erf}(-x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^0 e^{-t^2} dt + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^0 e^{-t^2} dt + 1 = \operatorname{erf}(x) + 1 = 2 - \operatorname{erf} c(x)$.

En remplaçant dans l'expression obtenue précédemment, ceci donne:

$$N(d) = 1 - \frac{1}{2} \left[2 - \operatorname{erf} c\left(\frac{-d}{\sqrt{2}}\right) \right].$$

$$N(d) = \frac{1}{2} \operatorname{erf} c\left(\frac{-d}{\sqrt{2}}\right)$$

Voici le programme de la résolution analytique:

```
%entrer les données nécessaires
k=50; s0=50; r=0.1; sigma=0.4; T=5; S=100; M=20; N=10;q=0;
deltat=T/N;
callput=2;
if callput==1
x=log(s0-q*exp(r*T)/k);
y=(r+(sigma*sigma)/2)*T;
z=x+y;
d1=z/(sigma*sqrt(T));
d2=d1-(sigma*sqrt(T));
N1=(erfc(-d1/sqrt(2)))/2;
N2=(erfc(-d2/sqrt(2)))/2;
C1=s0-q*exp(-r*T)*N1;
C2=C1-(k*exp(-r*T)*N2);%la valeur de loption en cas de call
disp ('le prix recherché est =')
prix=C2;
elseif callput==2
x=log(s0-q*exp(r*T)/k);
y=(r+(sigma*sigma)/2)*T;
z=x+y;
d1=z/(sigma*sqrt(T));
d2=d1-(sigma*sqrt(T));
N1=(erfc(d1/sqrt(2)))/2;
N2=(erfc(d2/sqrt(2)))/2;
C1=-s0*exp(-q*T)*N1;
C2=C1+k*exp(-r*T)*N2;%la valeur de loption en cas de put
disp ('le prix recherché est =prix')
prix=C2;
end,
```

Code explicite en 2D

```
%entrer les données
k=50; s0=50; r=0.1; sigma=0.4; T=4; S=100; M=20; N=10;
%entrer le callput
```

```

deltas=S/M;%le pas pour le prix de l'action
deltat=T/N;%le pas pour le temps
n=N+1;%pour tenir compte des indices nuls
m=M+1;
callput=1;
%construction de la matrice A
A=zeros(M-1,M-1);
D=0;
for i=1:M-1
coefficientsexp=abcexp(i,r,sigma,deltat);
bj=coefficientsexp(1,2);
A(i,i)=bj;
end,
for i=2:M-1
coefficientsexp=abcexp(i,r,sigma,deltat);
aj=coefficientsexp(1,1);
A(i,i-1)=aj;
end,
for i=1:M-2
coefficientsexp=abcexp(i,r,sigma,deltat);
cj=coefficientsexp(1,3);
A(i,i+1)=cj;
end,
%construction de maillage
v=zeros(n,m);
if callput==1%l'option est call
%si le cours de l'action est à smin
for i=1:n
v(i,1)=0;
end,
%le pris à la date d'échéance
for i=1:m
v(n,i)=max(((i-1)*deltas)-k,0);
end,
%si le prix de l'action est à smax
for i=1:n
v(i,m)=S*exp(-D*(T-deltat))-k*exp(-r*(T-deltat));
end,
elseif callput==2%l'option est put
%%si le cours de l'action est à smin
for i=1:n
v(i,1)=S*exp(-D*(T-deltat))-k*exp(-r*(T-deltat));
end,

```

```

%%le pris à la date échéance
for i=1:m
v(n,i)=max(k-((i-1)*deltas),0);
end,
%%si le prix de l'action est à smax
for i=1:n
v(i,m)=0;
end,
end,
%construction du vecteur des inconnus
X=zeros(M-1,1);
for i=1:M-1
X(i,1)=v(n,i+1);
end,
B=zeros(M-1,1);
B=A*X
coefficients=abc(1,r,D,sigma,deltat);
aj=coefficients(1,1);
coefficients=abc(M-1,r,D,sigma,deltat);
cj=coefficients(1,3);
B(1,1)=B(1,1)-aj*v(n,1);
B(M-1,1)=B(M-1,1)-cj*v(n,m);
y=zeros(1,M-1);
for n=n-1:-1:1
B(1,1)=B(1,1)-aj*v(n,1);
B(M-1,1)=B(M-1,1)-cj*v(n,m);
y=B';
for i=2:m-1
v(n,i)=y(1,i-1);
end,
X=B;
B=A*X;
end,
disp ('les colonnes representant le cours de l'action croissant de 0 à 100')
disp ('les lignes representant lechelle du temps de 0 à 5 mois')
sol=v';%la solution est tout simplement la dernière matrice F
disp ('la taille de solution est =')
size(sol)
disp ('le prix recherché est =')
prix= sol((M/2)+1,1)%element central de la première colonne
n_ =0:deltat:T;
m_ =0:deltas:S;
sol=v';

```

```

figure
grid on
hold on
view(3);
AXIS([0 T 0 S]);
surf(n_,m_,sol);
ylabel('cours de l'action 0 à S');
xlabel('temps 0 à T');
if callput==1
zlabel('évaluation du call');
elseif callput==2
zlabel('évaluation du put');
end,
title 'METHODE EXPLICITE DE DIFFERENCES FINIES'

```

Code implicite en 2D

```

%entrer les données
k=50; s0=50; r=0.1; sigma=0.4; T=2; S=100; M=60; N=80;
%entrer le callput
deltas=S/M;%le pas pour le prix de l'action
deltat=T/N;%le pas pour le temps
n=N+1;%pour tenir compte des indices nuls
m=M+1;
callput=2;
%construction de la matrice A
A=zeros(M-1,M-1);
D=0;
tic
for i=1:M-1
coefficients=abc(i,r,D,sigma,deltat);
bj=coefficients(1,2);
A(i,i)=bj;
end,
for i=2:M-1
coefficients=abc(i,r,D,sigma,deltat);
aj=coefficients(1,1);
A(i,i-1)=aj;
end,
for i=1:M-2
coefficients=abc(i,r,D,sigma,deltat);
cj=coefficients(1,3);
A(i,i+1)=cj;

```

```

end,
%construction de maillage
v=zeros(n,m);
if callput==1%loption est call
%si le cour de l'action est à smin
for i=1:n
v(i,1)=0;
end,
%le pris à la date d'échéance
for i=1:m
v(n,i)=max(((i-1)*deltat)-k,0);
end,
%si le prix de l'action est à smax
for i=1:n
v(i,m)=S*exp(-D*(T-deltat))-k*exp(-r*(T-deltat));
end,
elseif callput==2%loption est put
%%si le cour de l'action est à smin
for i=1:n
v(i,1)=S*exp(-D*(T-deltat))-k*exp(-r*(T-deltat));
end,
%%le pris à la date d'échéance
for i=1:m
v(n,i)=max(k-((i-1)*deltat),0);
end,
%%si le prix de l'action est à smax
for i=1:n
v(i,m)=0;
end,
end,
%construction du second membre B
B=zeros(M-1,1);
coefficients=abc(1,r,D,sigma,deltat);
aj=coefficients(1,1);
coefficients=abc(M-1,r,D,sigma,deltat);
cj=coefficients(1,3);
B(1,1)=v(n,2)-aj*v(n-1,1);
B(M-1,1)=v(n,m-1)-cj*v(n-1,m);
for i=2:M-2
B(i,1)=max((i*deltat)-k,0);
end,
%calcul de vecteur des inconnus
X=A\B;

```

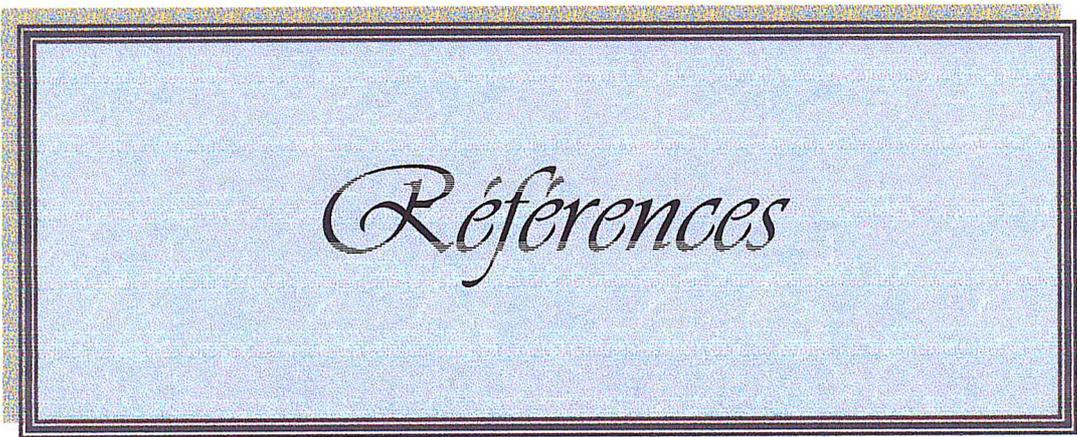
```

y=zeros(1,M-1);
for n=n-1:-1:1
y=X';
for i=2:m-1
v(n,i)=y(1,i-1);
end,
coefficients=abc(1,r,D,sigma,deltat);
aj=coefficients(1,1);
coefficients=abc(M-1,r,D,sigma,deltat);
cj=coefficients(1,3);
B(1,1)=X(1,1)-aj*v(n,1);
B(M-1,1)=X(M-1,1)-cj*v(n,m);
for i=2;M-2
B(i,1)=X(i,1);
end,
X=A\B;
end,
toc
disp ('les colonnes representant le cours de l'action croissant de 0 à 100')
disp ('les lignes representant lechelle du temps de 0 à 5 mois')
sol=v';%la solution est tout simplement la dernière matrice F
disp ('la taille de solution est =')
size(sol)
disp ('le prix recherché est =')
prix= sol((M/2)+1,1)%element central de la première colonne
n_ =0:deltat:T;
m_ =0:deltas:S;
sol=v';
figure
grid on
hold on
view(3);
AXIS([0 T 0 S]);
surf(n_,m_,sol);
ylabel('cours de l'action 0 à S');
xlabel('temps 0 à T');
if callput==1
xlabel('evaluation du call');
elseif callput==2
xlabel('evaluation du put');
end,
title 'METHODE IMPLICITE DE DIFFERENCES FINIES';

```

LISTE DES SYMBOLES ET DES ABREVIATIONS

<i>EDP</i>	: Equation aux Dérivées Partielles
<i>BS</i>	: Modèle de Black scholes
<i>BSM</i>	: Modèle de Black scholes Merton
<i>LU</i>	: algorithme de Tomas
<i>S</i>	: Prix de cours de l'action
<i>T</i>	: Temps
<i>D</i>	: dividende
<i>K</i>	: Prix de l'exercice
<i>r</i>	: taux de risque
σ	: volatilité
ρ	: Coefficient de corrélation
<i>C</i>	: Prix de call
<i>P</i>	: Prix de put
<i>V</i>	: Valeur de l'option



Références

References

- [1] Yacin Jerbi , "évaluation des options et gestion des risques financiers par les réseaux de neurones et par les modèles à volatilité stochastique", 2006.
- [2] Alexane Verraux "Résolution de l'équation de Black et Scholes" these scientifique. 2008.
- [3] Alexane Verraux "Résolution de l'équation de Black et Scholes" these scientifique. 2008.
- [4] Raphaelae Herlin, " Analyse numérique des équations aux dérivées partielles", 2006-2007.
- [5] Nadia Tanouti, " Outil d'évaluation d'options par différences finies via Matlab", mémoire de fin d'étude; 2007.
- [6] Bertrand Jacquillat, Bruno Solnik, 3 marchés financiers, gestion de portefeuille et des risques" Bordas, Paris, 1990.
- [7] Dany Mubibulu " l'efficience des marchés financiers, cas de Matif".
- [8] François Quittard. Pinon. " Marchés des capitaux et théorie financière". Economica, 2003.
- [9] Moez Foudi, " Bourse des valeurs et marché financier" 2005-2006.
- [10] Bassel Solaiman, "Processus stochastiques pour ingénieur" 2006.
- [11] Fatiath Oketokoun, " Méthode monte carlo pour l'évaluation des options américaines", HEC Montreal, 2007.
- [12] Fausto Saleri, Riccardo Sacco, " Méthodes numériques", 2007.
- [13] Paul willmot, " Introduces quantitative finance.
- [14] [http://fr.wikipedia.org/wiki/Action_\(finance\)](http://fr.wikipedia.org/wiki/Action_(finance)).
- [15] <http://www.sciences.ch/htmlfr/mathssociales/mathseconomie02.php#toppage>.
- [16] http://www.boursilex.com/les_marches_financiers.htm.
- [17] Riccardo sacco, Fausto Saleri, "Méthodes numériques", 2007