

UNIVERSITE SAAD DAHLAB DE BLIDA

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques



MEMOIRE DE MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Recherche Opérationnelle

Les problèmes de partitionnement dominant dans les graphes

Par

Hadri Aida

Devant le jury composé de :

Tami Omar

Maitre assistant, U. de Blida

Président.

Boumediene M. Hocine

Maitre assistant, U. de Blida

Promoteur.

IKHIEF ESCHOUF Nouredine

Maitre assistant, U. de Médéa

Examineur.

Bouzefrane Mohamed

Maitre assistant, U. de Blida

Examineur.

MA-510-09-1

Blida, 2011

**UNIVERSITE SAAD DAHLAB DE BLIDA**

**Faculté des Sciences**

**Département de Mathématiques**

**MEMOIRE DE MASTER**

**Spécialité : Mathématiques**

**Option : Recherche Opérationnelle**

**Les problèmes de partitionnement dominant dans les graphes**

**Par**

**Hadri Aida**

**Devant le jury composé de :**

<b>Tami Omar</b>	<b>Maitre assistant, U. de Blida</b>	<b>Président.</b>
<b>Boumediene M. Hocine</b>	<b>Maitre assistant, U. de Blida</b>	<b>Promoteur.</b>
<b>IKHIEF ESCHOUF Nouredine</b>	<b>Maitre assistant, U. de Médéa</b>	<b>Examineur.</b>
<b>Bouzefrane Mohamed</b>	<b>Maitre assistant, U. de Blida</b>	<b>Examineur.</b>

Blida, 2011

## REMERCEMENT

Je tiens en premier lieu à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur **Boumediene Merouane Hocine**, maitre assistant à l'université de Saad Dahlab Blida, pour la confiance qu'il m'a accordée en me permettant de réaliser ce mémoire sous sa direction. Je le remercie également pour ses précieux conseils, sa disponibilité et son aide.

Je remercie tout mes professeurs de l'université Hassiba Benbouali de Chlef ainsi mes professeurs de l'université Saad Dahlab Blida chaqu' un à son nom pour leurs efforts et conseils.

Je souhaite exprimer ma gratitude enver monsieur **Tami Omar**, Professeur à l'université de Saad Dahlab Blida, pour l'accepté d'être le président de jury de ce mémoire. Je remercie aussi les membres de jury chaqu' un à son nom.

Je voudrais aussi remercier toutes les personnes qui m'ont aidé par leur soutien et leur encouragement et qui m'ont permis d'accomplir mon travail à son terme.

Un grand merci à ma famille qui a été là pour m'encourager et me pousser à faire de mon mieux.

## Dédicace

Je dédie ce modeste mémoire à deux chères personnes qui grâce à Dieu et à eux je suis aujourd'hui à ce niveau à mes chère parent mon père et ma mère à qui je souhaite une long vie.

A mes frères et mes sœurs chaque' un à son nom. A toute la famille de kassaa, en particulier, mon mari Mohammed et ses parents.

A tous mes professeurs, sans lesquels je ne serai pas arrivé à un tel résultat, une honorable réussite universitaire tout ce qu'ils m'ont appris, conseillé et orienté mérite bien des considérations dont je ne trouve pas mots adéquats pour les quilliers.

Aussi, je n'oublie pas les étudiants de ma promotion (Amina, Fouzia, Fatima, Soumia, Soumia, et Amira) pour toutes les années d'études que nous avons passées ensemble, marquées netamment par de nombreux souvenirs.

## RESUME

Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple d'ordre  $n$  où  $V$  est l'ensemble des sommets et  $E$  l'ensemble des arêtes. Le problème de partitionnement de  $G$  a pour objectif le découpage de  $G$  en sous graphes induits tout en satisfaisant certaines contraintes. Nous disons qu'un ensemble  $D \subset V$  est un ensemble dominant de  $G$  si chaque sommet de  $G$  est dans  $D$  ou adjacent à un sommet de  $D$ . Dans la littérature, ils existent plusieurs problèmes de partitionnement ayant une propriété additionnelle de domination, définie sur les sommets du graphe ou sur les parties de la partition. Dans ce mémoire, nous nous intéressons à ces problèmes. Nous citons, la partition domatique est une partition  $P$  de  $V(G)$  telle que chaque partie est un ensemble dominant de  $G$ . La partition dominante est une partition de  $V(G)$  telle que : Tout sommet est seul dans sa partie ou il est adjacent à tous les sommets d'une partie. La coloration dominante et la coloration stricte forte sont des cas particuliers de la partition dominante où toute partie induit un stable dans  $G$ .

Nous rappelons ces différents problèmes en donnant leurs définitions, quelques exemples pratiques, quelques problèmes ouverts et les principaux résultats obtenus. Nous proposons la définition de deux nouveaux paramètres.

## ملخص

ليكن  $G=(V,E)$  بيانا بسيطا حيث  $V$  مجموعة رؤوس و  $E$  مجموعة أضلاع. إن مشكل تقسيم بيان  $G$  يهدف إلى تقطيع  $G$  إلى مجموعة بيانات بحيث يحقق مجموعة خصائص. نقول أن  $D \subseteq V$  هو مجموعة مسيطرة إذا كان كل رأس من  $G$  في  $D$  أو يكون مجاور إلى رأس من  $D$ . هناك عدة مشاكل للتقسيم لها خصائص مرتبطة بالمسيطر. في هذه المذكرة نحن نهتم بهذه المشاكل. تقسيم domatique هو تقسيم  $P$  من  $V$  بحيث كل جزء هو مجموعة مسيطرة من  $G$ . تقسيم مسيطر هو تقسيم من  $V$  بحيث كل رأس هو وحيد في جزء أو مجاور لكل رؤوس في الجزء. إن التلوين المسيطر و التلوين stricte forte هما حالات خاصة من تقسيم مسيطر حيث كل جزء ثابت في  $G$ ,

نحن نذكر هذه المشاكل بإعطاء تعاريف أمثلة ممارسة بعض المشاكل التي لم تحل بعد ونتائج المهمة. نقترح كذلك تعريفين جديدين.

## ABSTRACT

Let  $G = (V, E)$  be a simple graph of order  $n$ , with vertex set  $V(G)$  and edge set  $E(G)$ . The problem of the division aims to cut in different parts of a graph that satisfies some constraints. In the literature, there are several problems with partitioning additional property of domination. In this thesis we quote, The domatic partition is a partition  $D$  of  $V(G)$  such that each part is a dominating set for  $G$  (each vertex of  $G$  not in  $D$  is adjacent to a vertex of  $D$ ). The dominator partition is a partition of  $V(G)$  such that: a vertex is alone in this party or is adjacent to all vertex of a party. The dominator coloring and the coloration stricter Strong are special cases of the dominator partition where all dominant part induces independent set in  $G$ .

We present these problems by giving their definitions, practical examples and key results. We recall the various unresolved issues and propose new parameters similaires.

# Table des matières

Remerciements

Dédicace

Résumé

Abstract

Table des matières

Liste des illustrations graphiques.

Introduction.....12

## Chapitre 1. Généralités sur la théorie des graphes

1.1 Généralités sur les graphes.....15

1.1.1 Définitions et notations.....15

1.1.2 Quelques graphes particuliers.....17

1.1.3 Quelques paramètres d'un graphe.....20

1.2 Partitionnement.....21

1.2.1 Coloration propre.....23

1.3 La domination dans les graphes.....24

1.3.1 Application.....26

1.3.2 Quelque type de domination.....26

1.4 Partitionnement et domination.....27

1.5 Problématique.....27

1.5.1 Complexité algorithmique.....27

1.5.2 Les bornes.....28

Caractérisation.....	28
----------------------	----

## Chapitre 2. Les problèmes de partitionnement domatique

2.1 Le nombre domatique.....	30
2.1.1 Application.....	30
2.1.2 Quelques résultats.....	31
2.1.3 Le nombre domatique total.....	32
2.1.4 Le nombre idomatique.....	32
2.1.5 Le nombre k-domatique.....	33
2.1.6 Le nombre domatique connexe.....	34
2.1.7 Le nombre antidomatique.....	34
2.2 La $\chi$ -coloration dominante maximum .....	35
2.2.1 Quelques résultats.....	36
2.2.2 Les problèmes ouverts.....	36
2.3 La $\chi$ -coloration dominante minimum .....	37
2.3.1 Quelques résultats.....	37
2.3.2 Les problèmes ouverts.....	40
2.4 Des nouveaux paramètres.....	40
2.4.1 La coloration Antidomatique.....	40
2.4.2 La coloration k-dominante.....	40

## Chapitre 3. Les problèmes de partitionnement dominant

3.1 La partition dominante.....	43
3.1.1 Les borne de $\pi_d(G)$ et $\prod_d(G)$ .....	44
3.2 La coloration dominante.....	47
3.2.1 Résultats sur le $\chi_d$ .....	49
3.2.1.1 Les borne de $\chi_d(G)$ .....	50
3.2.1.2 Caractérisation du nombre chromatique dominant....	52

3.2.2 Les problèmes ouverts.....	52
3.3 La coloration stricte forte.....	53
3.3.1 Quelques résultats.....	54
Conclusion.....	56
Références.....	57

## Liste des illustrations graphiques

Figure 1.1	Un graphe simple.....	15
Figure 1.2	$G [Y]$ le graphe engendré par $Y$ .....	16
Figure 1.3	Graphe avec $\Delta(G) = 3$ et $\delta(G) = 1$ .....	16
Figure 1.4	Graphe complet (a) $K_5$ , (b) $K_3$ .....	17
Figure 1.5	Une chaine de longueur 5 et un cycle d'ordre 4.....	17
Figure 1.6	Un arbre avec 9 feuilles.....	18
Figure 1.7	L'étoile $K_{1,4}$ .....	18
Figure 1.8	Un graphe biparti.....	19
Figure 1.9	Un graphe biparti-complet $K_{3,3}$ .....	19
Figure 1.10	Un graphe planaire.....	19
Figure 1.11	(a) un graphe $G$ et (b) son complémentaire $\bar{G}$ .....	20
Figure 1.12	Un cactus.....	20
Figure 1.13	Graphe $G$ avec $i(G)=2$ et $\beta(G)=3$ .....	21
Figure 1.14	Un graphe $K_3$ .....	22
Figure 1.15	Un graphe $G$ .....	22
Figure 1.16	Coloration propre avec $\chi(G)=3$ .....	23
Figure 1.17	Coloration propre d'un arbre avec $\chi(G)=2$ .....	24
Figure 1.18	Graphe $G$ avec $\gamma(G)=2$ et $\Gamma(G)=4$ .....	25
Figure 1.19	les reines dans un échiquier.....	25
Figure 1.20	Un graphe $G$ avec $\gamma(G) = 6$ .....	26
Figure 1.21	Un arbre $T$ avec $\gamma(G) = 3$ et $\Gamma(G) = 5$ et $i(G) = 2$ et $\beta(G) = 5$ .....	27
Figure 1.22	Un graphe $G$ avec $\gamma(G)=1$ .....	28
Figure 2.1	Partition domotique avec $d(G)=4$ .....	30
Figure 2.2	Partition domotique totale avec $d_t(G)=3$ .....	32

Figure 2.3	Partition idomatique avec $\text{id}(G)=3$ .....	33
Figure 2.4	Partition 2-domatique avec $d_k(G) = 5$ .....	33
Figure 2.5	Partition domatique connexe avec $d_c(G) = 2$ .....	34
Figure 2.6	Partition antidomatique avec $\bar{d}(G) = 2$ .....	35
Figure 2.7	Le $\chi$ - coloration dominante maximum avec $d_\chi(G)=2$ .....	35
Figure 2.8	Le $\chi$ - coloration dominante maximum avec $d_\chi(G)=2$ .....	35
Figure 2.9	Le $\chi$ - coloration dominante minimum avec $md_\chi(G)=2$ .....	37
Figure 2.10	Le $\chi$ - coloration dominante minimum avec $md_\chi(G)=1$ .....	37
Figure 2.11	Le $\chi$ - coloration dominante minimum avec $0 < md_\chi(G) < \chi(G)$ .....	38
Figure 2.12	Le $\chi$ - coloration dominante minimum avec $md_\chi(G) = \chi(G)$ .....	38
Figure 2.13	Le $\chi$ - coloration dominante minimum dans les cycles d'ordre 11, 7, 3, 4 ...	39
Figure 2.14	Le $\chi$ - coloration dominante minimum avec $md_\chi(G) = 3$ .....	39
Figure 2.15	Un arbre T avec $\bar{d}_\chi(T)=3$ .....	40
Figure 2.16	coloration 2-dominante avec $d_{\chi_k}(G)=5$ .....	41
Figure 2.17	coloration 2-dominante avec $d_{\chi_k}(G)=4$ .....	41
Figure 3.1	Partition dominant.....	43
Figure 3.2	Un graphe G avec $\pi_d(G) = 2$ et $\prod_d(G) = 3$ .....	44
Figure 3.3	Barnes trivial: $1 \leq \pi_d(G) \leq \prod_d(G) \leq n = 5$ .....	44
Figure 3.4	Comparaison entre le $\pi_d(G)$ et $\gamma(G)$ .....	45
Figure 3.5	Comparaison entre le $\pi_d(G)$ , $\prod_d(G)$ , $\delta(G)$ et $\Delta(G)$ .....	46
Figure 3.6	Comparaison entre $\pi_d(G)$ , $\prod_d(G)$ et $\beta(G)$ .....	46
Figure 3.7	Partition dominant d'un arbre avec $\prod_d(G) = 6$ .....	47
Figure 3.8	La partition dominante d'un cycle avec $\prod_d(C_6) = 4$ .....	47
Figure 3.9	Coloration dominante d'un graphe G avec $\chi_d(G) = 3$ .....	48
Figure 3.10	Coloration dominante d'un arbre T avec $\chi_d(G) = 4$ .....	48
Figure 3.11	Coloration dominante des cycles d'ordre 4, 5, 7.....	49

Figure 3.12	Coloration dominante d'un graph G avec $\chi_d(G) = \max(\chi(G), \gamma(G))$ ....	50
Figure 3.13	Coloration dominante avec $\chi_d(G) = \chi(G) + \gamma(G)$ .....	50
Figure 3.14	Figure 3.6. Coloration dominante avec $\chi_d(G) = \gamma(G) = 2$ .....	51
Figure 3.15	Coloration dominante avec $\chi_d(T) = \gamma(T) + 2$ .....	51
Figure 3.16	Coloration dominante avec $\chi_d(T) = \gamma(T) + 1$ .....	51
Figure 3.17	Un Caterpillar.....	52
Figure 3.18	Coloration stricte forte d'un graphe G avec $\chi_{ss}(G) = 4$ .....	53
Figure 3.19	Coloration stricte forte d'un arbre T avec $\chi_{ss}(T) = 6$ .....	54
Figure 3.20	Coloration stricte forte d'un arbre T avec $\chi_{ss} = 2\gamma$ .....	54
Figure 3.21	Coloration stricte forte d'un arbre T avec $\chi_{ss} = \gamma + 1$ .....	55
Figure 3.22.	Coloration stricte forte d'un arbre T avec $\gamma + 1 < \chi_{ss}(T) < 2\gamma$ .....	55

## Introduction

L'époque moderne soumet l'homme aux contraintes d'un système de relation économiques et sociales très complexe. On constate que de plus en plus d'éléments doivent être pris en compte lors des prises de décision concernant une action donnée et que ces prises de décision deviennent l'objet de véritables recherches qui ne peuvent être menées sans l'aide d'outils mathématiques appropriés. C'est ainsi que s'est développé un domaine de mathématiques centré sur l'activité de décision : La recherche Opérationnelle.

Après 1945, les méthodes de recherche opérationnelle se sont appliquées aux problèmes économiques et commerciaux. Elles se sont imposées auprès des dirigeants des grands organismes économiques et industriels comme les seuls outils permettant de prévenir aussi objectivement que possible les conséquences de leurs actions. La théorie des graphes, la programmation linéaire, l'optimisation combinatoire, la théorie de jeux, les files d'attente, ... sont les principales techniques auxquelles recourt la recherche opérationnelle.

La théorie des graphes représente une classe très importante de la recherche opérationnelle, elle constitue un outil très puissant pour schématiser les modèles des liens et relations entre les objets. L'étude des graphes a commencé depuis le 18<sup>ème</sup> siècle par un problème de curiosité mathématique lorsqu'Euler a posé le célèbre problème du pont de Königsberg (Kaliningrad). La théorie des graphes est devenue l'un des instruments les plus efficaces pour résoudre de nombreux problèmes discrets que posent de nombreuses théories très utiles. Autrement dit, elle contribue à résoudre de nombreux problèmes concrets de la vie courante.

La théorie des graphes regroupe généralement des problèmes assez variés qui ont tous comme caractéristique commune de pouvoir être représentés par un schéma. Ce schéma appelé graphe est constitué par un ensemble de points (sommets) représentant des individus, des objets, etc.... et qui sont reliés par des flèches ou des lignes (arcs ou arêtes) symbolisant les relations existant entre eux.

Les graphes sont un outil de modélisation naturel, voire indispensable dans de nombreuses disciplines. On peut bien sûr penser aux réseaux rencontrés dans de nombreux domaines des sciences de l'Ingénieur (télécommunication, réseaux électriques, logistique, etc. ....). De plus, l'essor de l'informatique a fortement contribué au développement de la théorie des graphes, où les graphes apparaissent comme un outil essentiel dans certains domaines de l'informatique fondamentale.

L'idée de la domination trouve son origine dans le jeu d'échec depuis 16<sup>ème</sup> siècle. En 1862 De. Jaenish posa le problème suivant : Déterminer le nombre de reines à placer sur l'échiquier de telle manière que chaque case soit occupée en un seul mouvement par l'une des reines. En 1985, Claude Berge donna la première formulation de la domination

dans les graphes orientés. A l'exception de quelques résultats, la domination n'a connu sa véritable expansion qu'après la parution de l'article de Cockayne et Hedetniemi en 1977.

En 1852, un certain Guthrie a remarqué qu'il pouvait se contenter de quatre couleurs pour colorer une carte géographique de manière à pouvoir distinguer les régions qui la composent, d'où le problème posé : Toute carte géographique peut-elle être coloriée sans que deux pays voisins aient la même couleur ? Ce problème n'a pu être résolu qu'en 1976 par K. Appel et W. Haken. La recherche d'une réponse à ce problème est à l'origine de nombreux résultats relatifs à la coloration dans les graphes. La technique de coloration est devenue donc un outil très puissant dans la résolution des problèmes de la théorie des graphes.

Le problème du partitionnement de graphe a pour but de découper un graphe en différentes parties (partitions) qui satisfont certaines contraintes et qui optimisent une certaine fonction objectif. Il possède de nombreuses applications comme la conception de circuits intégrés électroniques, la répartition de charge pour les machines parallèles ou la segmentation d'images. Cependant, tous les problèmes mentionnés ci-dessus sont d'un point de vue algorithmique, difficiles.

Dans ce mémoire, trois chapitres fondamentaux sont développés. Dans le chapitre un, nous présentons cinq parties, chaque partie comporte les définitions et les notions de base nécessaires utilisées tout au long de ce mémoire. Dans le deuxième chapitre, nous présentons quelques problèmes de partitionnement où la propriété de domination est définie sur les parties de la partition : le problème de la partition domotique et ses variantes, les  $\chi$ -coloration dominante minimum et maximum et deux nouveaux paramètres.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude de la partition dominante. En effet, nous présentons d'abord la définition de la partition dominante. Ensuite, nous donnons quelque résultat et finalement nous donnons quelques cas particulier (la coloration dominante et la coloration stricte forte).

# **CHAPITRE 7**

Généralités sur la théories des graphes

Ce chapitre est consacré aux concepts de base de la théorie des graphes et à la définition de notions étudiées dans ce mémoire. Il est composé de cinq parties, dans la première, nous donnons la définition des graphes non orientés, de quelques classes de graphes particulières et de la notion d'extrémalité (minimal ou maximal) par rapport à une propriété particulière. La deuxième partie est consacrée à l'étude du partitionnement des graphes. La troisième partie nous faisons une brève présentation de la domination dans les graphes et la quatrième à l'étude du partitionnement et domination. Dans la dernière partie, nous présentons les problématiques classiques qu'on rencontre en théorie des graphes.

## Partie 1.1 Généralités sur les graphes :

### 1.1.1 Définitions et notations :

#### 1.1.1.1 Graphe et sous-graphe

Un graphe fini  $G = (V, E)$  est défini par l'ensemble fini  $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$  dont les éléments sont appelés sommets, et par l'ensemble fini  $E = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$  ( $|E|=m$ ) dont les éléments sont appelés arêtes. Une arête  $e$  de l'ensemble  $E$  est définie par une paire non-ordonnée des sommets, appelés les extrémités de  $e$ . Si l'arête  $e$  relie les sommets  $a$  et  $b$ , on dira que ces sommets sont adjacents, ou encore que l'arête  $e$  est incidente avec les sommets  $a$  et  $b$ . Nous appelons ordre d'un graphe le nombre de sommets  $n$  de ce graphe.

Un graphe  $G$  est dit *simple* s'il ne contient ni boucles, ni arête multiples. Dans ce mémoire, tous les graphes considérés sont des graphes simples non orientés. Par exemple, la figure 1.1 montre un graphe  $G = (V, E)$  avec  $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  et

$$E(G) = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 5)\}.$$

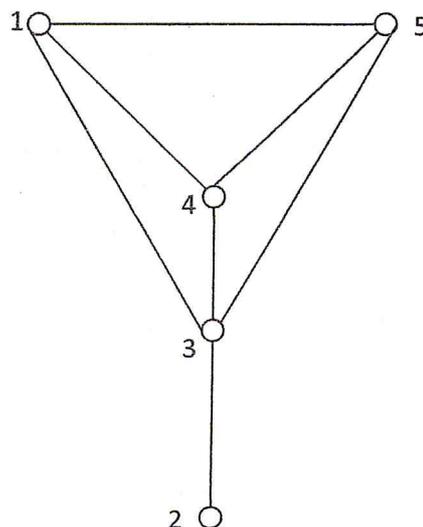


Figure 1.1. Un graphe simple

Soit un graphe  $G = (V, E)$ . Un sous-graphe de  $G$  est un graphe de la forme  $H = (Y, F)$  où  $Y \subseteq X$  et  $F \subseteq E$ . Tel que toute arête de  $F$  a ses extrémités dans  $Y$ . Un sous-graphe de  $H$  de  $G$  est dit engendré, ou induit, et on peut préciser par un ensemble de sommets  $Y \subseteq X$ , s'il est de la forme  $H = (Y, F)$  où  $F$  est l'ensemble des arêtes de  $E$  qui ont leurs extrémités dans  $Y$ . Pour l'exemple précédent, voir le sous graphe induit par  $Y = \{1, 3, 5\}$  dans le figure 1.2

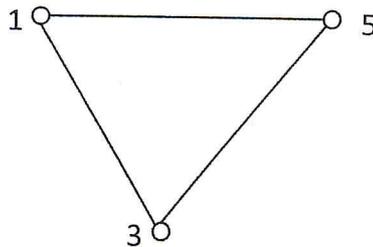


Figure 1.2.  $G[Y]$  le graphe engendré par  $Y$ .

### 1.1.1.2 Voisinages :

Pour un sommet  $v$  de  $G$ , le voisinage ouvert est défini par l'ensemble suivant :  $N_G(v) = \{u \in V(G) : uv \in E\}$  et le voisinage fermé est défini par  $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$ . Pour un sous ensemble  $S \subseteq V$ ,  $N_G(S) = \bigcup_{v \in S} N_G(v)$  (resp.  $N_G[S] = N_G(S) \cup S$ ) est le voisinage ouvert (resp. fermé) de  $S$ . Parfois pour alléger les notations et lorsqu'il n'y a aucune confusion sur le graphe  $G$ , les voisinages ouverts et fermés d'un sommet  $v$  sont notés par  $N(v)$  et  $N[v]$  à la place de  $N_G(v)$  et  $N_G[v]$  respectivement. De même, nous utiliserons les notations  $N(S)$  et  $N[S]$  au lieu de  $N_G(S)$  et  $N_G[S]$  respectivement.

### 1.1.1.3 Degré d'un sommet :

Le degré d'un sommet  $x$  d'un graphe  $G$ , noté  $d_G(x)$ , est égal au nombre d'arêtes de  $G$  incidents à  $x$ , c'est-à-dire admettons le sommet  $x$  comme extrémité. On note par  $\Delta(G)$  et  $\delta(G)$  le degré maximum et minimum dans  $G$  respectivement. Un sommet de degré nul est dit sommet isolé et un sommet de degré un est dit sommet pendant. Par exemple, soit le graphe  $G = (V, E)$  défini dans la figure 1.3. Il admet.

$d_G(1) = 2, d_G(2) = 1, d_G(3) = 3, d_G(4) = 2, d_G(5) = 1, d_G(6) = 1$ , et alors

$\Delta(G) = 3, \delta(G) = 1$  et

$N(1) = \{3, 4\}, N(2) = \{3\}, N(3) = \{1, 4\}, N(4) = \{1, 3\}, N(5) = \{6\}, N(6) = \{5\}$ .

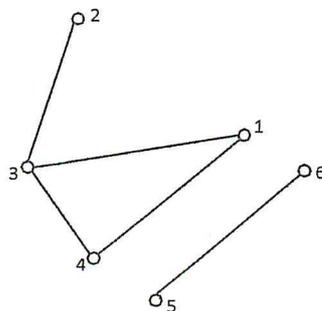


Figure 1.3. Graphe avec  $\Delta(G) = 3$  et  $\delta(G) = 1$

### 1.1.2 Quelques graphes particuliers :

Un graphe est dit *complet* si tous les sommets sont de degré  $n - 1$  (c-à-dire que tous les sommets sont adjacents deux à deux). Le graphe complet d'ordre  $n$  est noté  $K_n$ . Voir la figure 1.4

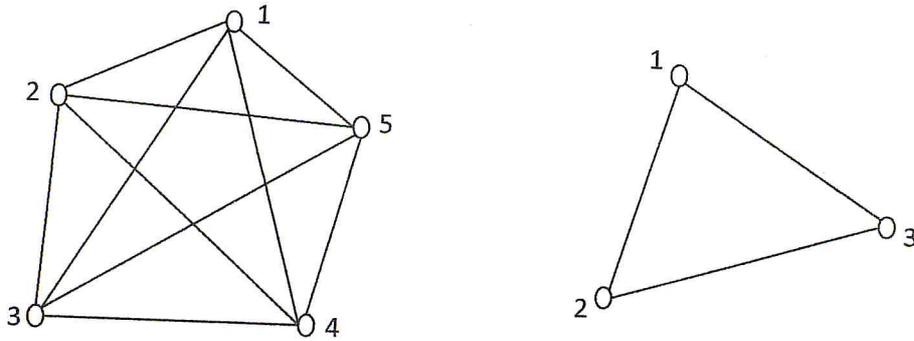


Figure 1.4. Graphe complet (a)  $K_5$  (b)  $K_3$

Une chaîne  $P_k$  de longueur  $k$  dans un graphe  $G = (V, E)$  est une suite  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  de sommets distincts tels que pour chaque  $i \in \{1, \dots, k - 1\}$ ,  $e_i = v_i v_{i+1}$  soit une arête de  $G$ . Les sommets  $v_1$  et  $v_k$  sont appelés les extrémités de la chaîne. Une chaîne qui n'utilise pas deux fois la même arête est dite simple. Une chaîne qui ne passe pas deux fois par le même sommet est dite élémentaire. Nous appelons *cycle* dans un graphe  $G$  une chaîne simple dont les extrémités initiale et finale sont confondues. La longueur d'un cycle est le nombre d'arrêts le formant.

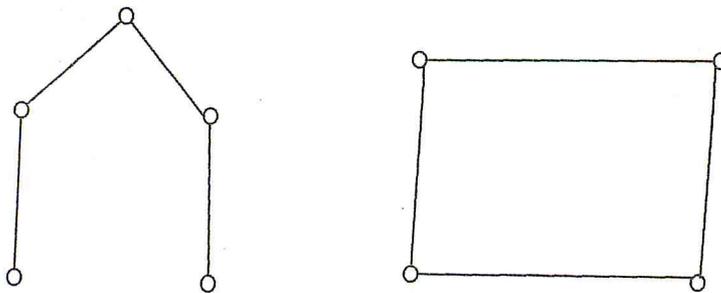


Figure 1.5. Une chaîne de longueur 4 et un cycle d'ordre 4

Soient  $u$  et  $v$  deux sommets d'un graphe  $G$ . Nous appelons distance entre  $u$  et  $v$ , notée  $d(u, v)$ , la longueur d'une plus courte chaîne entre  $u$  et  $v$ . Cette chaîne est appelée chaîne géodésique.

Nous appelons *arbre*, noté  $T$ , un graphe connexe et sans cycles. Un arbre comporte exactement  $n - 1$  arêtes. Nous appelons *feuille* d'un arbre tout sommet pendant. (Voir la figure 1.6).

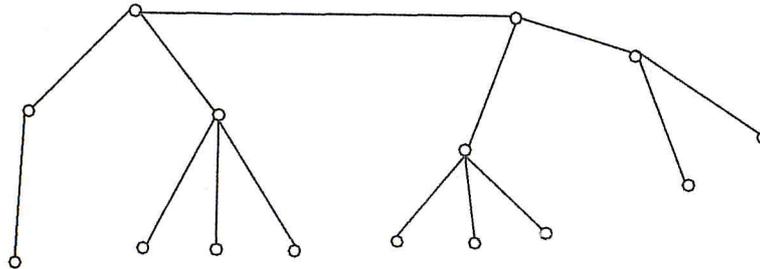


Figure 1.6. Un arbre avec 9 feuilles

Nous appelons *étoile*, notée  $K_{1,n}$ , l'arbre à  $n + 1$  sommets ayant  $n$  feuilles. Un exemple d'une étoile est montré dans la figure 1.7.

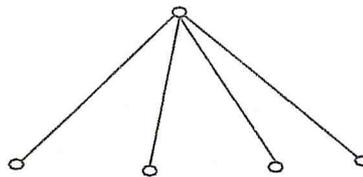


Figure 1.7. L'étoile  $K_{1,4}$

Un sous ensemble  $S \subset V$  est dit *stable* si les sommets de  $S$  ne sont pas adjacents deux à deux. Un stable  $S$  est maximal si pour tout sommet  $x \in V : S \cup \{x\}$  n'est pas un stable. Nous notons par  $i(G)$  (resp.  $\beta(G)$ ) le cardinal minimum (resp. maximum) d'un stable maximal de  $G$ .

Soient  $G = (V, E)$  un graphe et  $A$  un sous ensemble de sommets de  $V$ . L'ensemble  $A$  est appelé une *clique* si pour chaque paire de sommets distincts  $a, b \in A$ ,  $a$  est adjacent à  $b$ . Autrement dit le sous-graphe de  $G$  engendré par  $A$  est un graphe complet. Le cardinal d'une clique maximum de  $G$  est noté par  $w(G)$ .

Un graphe  $G = (V, E)$  est dit *biparti* si l'ensemble de ses sommets peuvent être partitionnés en deux sous-ensembles  $A$  et  $B$  telles que toute arête a une extrémité dans chaque classes. Nous notons alors le graphe  $G$  par  $(A, B, E)$ . La figure 1.8 donne un exemple de graphe biparti.

**Théorème :** Un graphe est biparti si et seulement si il ne contient pas de cycles de longueurs impairs.

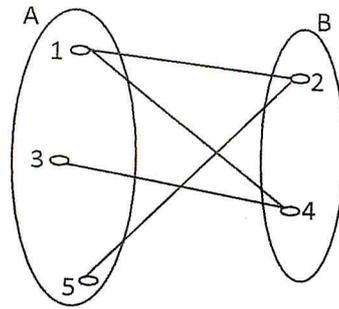


Figure 1.8. Un graphe biparti

Un graphe  $G = (V, E)$  est dit *multi-parti* s'il existe une partition de  $V$  en  $K$  sous ensemble  $V_1, V_2, \dots, V_k$  tels que chaque partie  $V_i, i = 1, \dots, k$  est un stable dans  $G$ .

Nous appelons graphe *biparti complet*, un graphe biparti tel que pour tout sommet  $u \in V_1$  et  $v \in V_2$  alors  $uv \in E$ . Si  $|V_1| = p$  et  $|V_2| = q$  alors le graphe biparti complet est noté  $K_{p,q}$ . Un exemple du graphe biparti complet est illustré dans la figure 1.9.

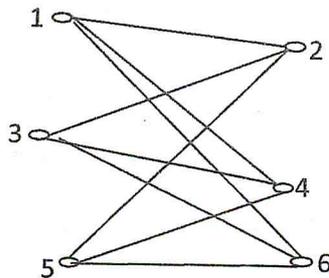
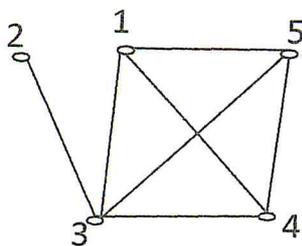
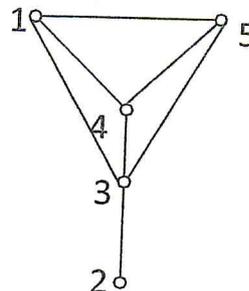


Figure 1.9. Un graphe biparti-complet  $K_{3,3}$

Nous disons que le graphe est planaire si nous arrivons à dessiner le graphe sans qu'aucune arête n'en coupe une autre (les arêtes ne sont pas forcément rectilignes). Voir la figure 1.10 qui illustre un graphe  $G$  et le sous graphe planaire.



Représentation non planaire de  $G$



Représentation planaire de  $G$

Figure 1.10. Un graphe planaire.

Le graphe complémentaire de  $G = (V, E)$  noté  $\bar{G} = (V, \bar{E})$  est un graphe ayant le même ensemble de sommets que  $G$  et l'ensemble des arêtes est l'ensemble complémentaire de  $E$ , c'est à dire pour toute arête  $e, e \in E \Leftrightarrow e \notin \bar{E}$ . Voir la figure 1.11 qui illustre un graphe  $G$  et son complémentaire  $\bar{G}$ .

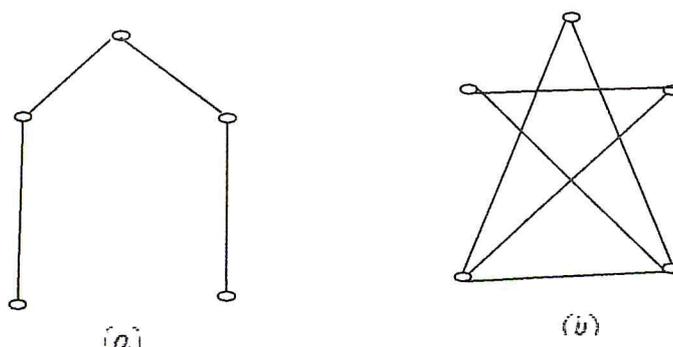


Figure 1.11 (a) un graphe  $G$  et (b) son complémentaire  $\bar{G}$ .

Nous disons qu'un graphe  $G$  est connexe si pour chaque paire des sommets distincts  $v$  et  $u$  de  $V(G)$ , il existe une chaîne joignant  $v$  et  $u$ .

Un graphe  $G$  est dit  $d$ -régulier si tous ses sommets sont de degré  $d$ . Un graphe 3-régulier est aussi appelé cubique. Par exemple, les cycles sont des graphes 2-réguliers.

Un graphe  $G = (V, E)$  est dit *cactus*, si chaque arête de  $G$  appartient à non ou plus, un cycle. Un cactus ayant un seule cycle est dit uni cycle. Un arbre est un graphe cactus connexe sans cycles. (Voire la figure suivante)

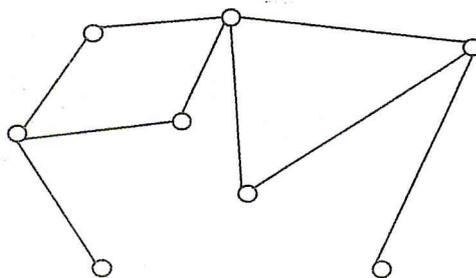


Figure 1.12 Un cactus

### 1.1.3 Quelques paramètres d'un graphe :

Nous disons qu'un sous ensemble  $A$  de  $V$  est *minimal* (resp. *maximal*) par rapport a une propriété  $P$  s'il n'existe pas d'ensemble  $B \subseteq A$  (resp  $A \subseteq B$ ) tel que  $G[B]$  (le graphe engendré par  $B$  dans  $G$ ) vérifie  $P$ . Par exemple, une composante connexe d'un graphe est un sous-graphe maximal connexe.

Nous disons qu'un sous ensemble  $A$  de  $V$  est minimum ou de taille minimum (resp. maximum ou de taille maximum) par rapport a une propriété  $P$  s'il n'existe pas d'ensemble  $B \subseteq V$  tel que  $G[B]$  vérifie  $P$  et  $|B| < |A|$  (resp.  $|A| < |B|$ ) Ou  $|A|$  est le cardinal de l'ensemble  $A$ , c'est-à-dire le nombre de ses éléments. Par exemple le cardinal d'une clique maximum de  $G$  est noté par  $\omega(G)$  et le cardinal d'un stable maximum est noté  $\beta(G)$ .

**Exemple :** soit le graphe dans la figure 1.13. Il admet les ensembles stable maximal suivants :  $\{2, 3, 5\}$ ,  $\{1,5\}$ ,  $\{1,4\}$  où l'ensemble  $\{1, 4, 5\}$  est un stable maximal maximum et les autres ensemble sont stable maximal minimum.

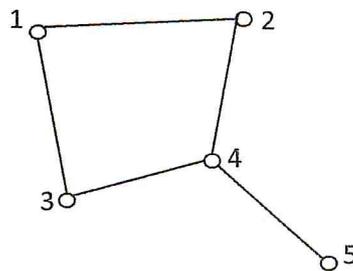


Figure1.13. Graphe  $G$  avec  $i(G)=2$  et  $\beta(G)=3$ .

Pour plus détails sur les notions de la théorie des graphes nous orientons le lecteur aux références [1] et [2].

## Partie 1.2. Partitionnement

Commençons par donner les trois définitions suivantes, le premier est d'ordre général alors que la deuxième et la troisième sont relatives respectivement, à la théorie des ensembles et théorie des graphes :

**Définition 1.1 :** Le mot "partitionnement" correspond au mot « partitioning » en anglais, qui exprime la création d'une partition. La partition est le résultat de la division en parties d'un ensemble. En mathématiques, une partition d'un ensemble  $E$  est une famille de sous-ensembles de  $E$  tels qu'elles sont disjointes deux à deux et dont la réunion est l'ensemble  $E$ .

**Définition 1.2 : Partitionnement en théorie des ensembles :**

Soit un ensemble  $S$  quelconque. Un ensemble  $P$  de sous-ensembles de  $S$  est appelé une partition de  $S$  si :

1. Aucun élément de  $P$  n'est vide ;
2. L'union des éléments de  $P$  est égale à  $S$  ;
3. Les éléments de  $P$  sont deux à deux disjoints.

Les éléments de  $P$  sont appelés les parties de la partition  $P$ .

### Définition 1.3 : Partitionnement en théorie des graphes

Etant donné un graphe simple non-orienté. Au point de vue de la théorie des graphes, on peut partitionner les sommets ou bien les arrêtes. Dans la plupart des applications, on s'intéresse qu'au partitionnement des sommets du graphe. Soient un graphe  $G = (V, E)$  et un ensemble de  $k$  sous-ensembles de  $V$ , noté  $P = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ . On dit que  $P$  est une partition de  $G$  si :

- Aucun élément de  $P$  n'est vide :

$$\forall i \in 1, \dots, k, i \neq \emptyset$$

- Les éléments de  $P$  sont disjoints deux à deux :

$$\forall i, j \in 1, \dots, k, i \neq j, V_i \cap V_j = \emptyset.$$

- L'union de tous les éléments de  $P$  est  $V$  :

$$\bigcup_{i=1}^k V_i = V$$

Les éléments  $v_i$  de  $P$  sont appelés les parties de la partition. Le nombre  $k$  est appelé le cardinal de la partition, ou encore le nombre de parties de la partition.

**Exemples 1.4 :** Dans les figures 1.14 et 1.15. Nous donnons deux exemples de partitionnement de graphes. Dans la première figure nous donnons toutes les partitions possibles  $P_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ ,  $P_2 = \{\{1,2\}, \{3\}\}$ ,  $P_3 = \{\{1,3\}, \{2\}\}$ ,  $P_4 = \{\{1\}, \{2,3\}\}$ ,  $P_5 = \{1,2,3\}$  et dans la seconde nous donnons quelques partitions

Erreur ! Signet non défini.  $P_1 = \{\{1,4,5\}, \{2,6\}, \{3\}\}$ ,  $P_2 = \{\{1,2\}, \{3,4,5,6\}\}$ ,  $P_3 = \{\{1,3\}, \{2,6\}, \{4,5\}\}$ ,  $P_4 = \{\{1,6\}, \{2,3\}, \{4,5\}\}$ ,  $P_5 = \{1,2,3,4,5,6\}$ ,  $P_6 = \{\{3\}, \{1,2,4,5,6\}\}$ .

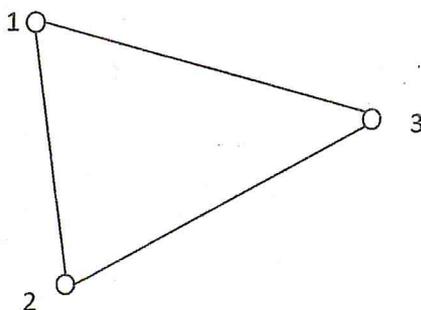


Figure 1.14. Un graphe  $K_3$ .

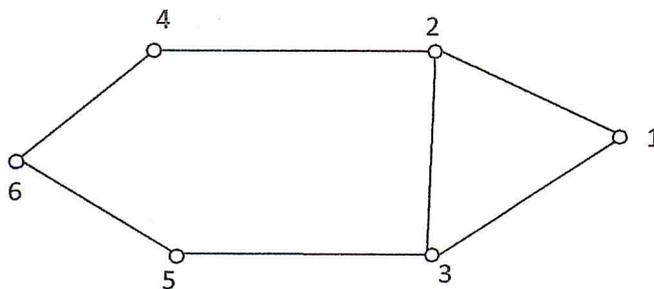


Figure 1.15. Un graphe  $G$

On remarque que l'ordre d'une partition (le nombre de parties de la partition) varie entre 1 et  $|V|$ . En ajoutant des contraintes sur le partitionnement de  $G = (V, E)$  (par exemple exiger que chaque partie induit un stable dans  $G$ ), nous limitons le nombre de partitionnement possibles et nous pouvons aussi définir des problèmes d'optimisation.

Comme exemple d'application du partitionnement, on peut citer la coloration.

### 1.2.1 Coloration propre

La coloration d'un graphe est l'affectation de couleurs aux sommets du graphe.

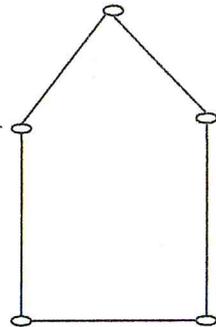
**Définition 1.5 :** Une *coloration propre* est une coloration telle que si deux sommets  $x$  et  $y$  sont adjacents, alors leurs couleurs correspondants sont différentes.

Une classe de couleur est l'ensemble de sommets ayant cette couleur. Le nombre minimum de classe de couleurs est le nombre chromatique, noté  $\chi(G)$ .

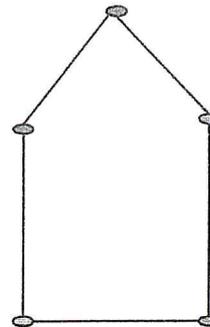
**Remarque 1.6:** Toute classe de couleur induit un stable dans  $G$ .

**Exemple 1.7 :**

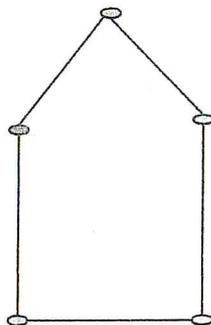
- Etant donné un graphe  $G = (V, E)$  voire la figure 1.16.



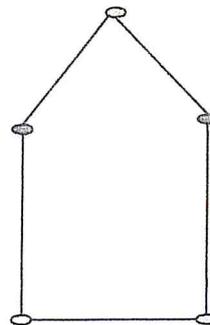
Un graphe  $G$



Coloration non propre



Coloration propre



Coloration propre minimum  $\chi(G)=3$

Figure 1.16. Coloration propre avec  $\chi(G)=3$ .

- Soit un arbre  $T$  (voire la figure 1.17).

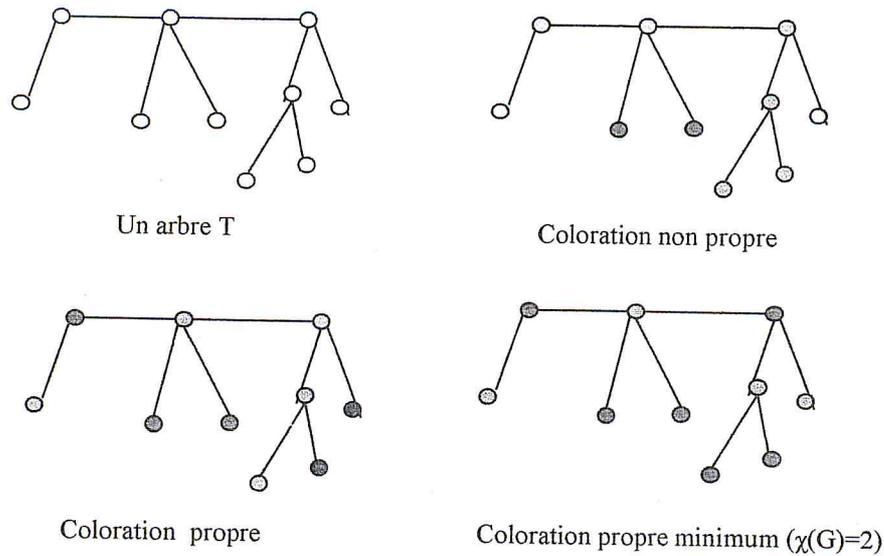


Figure 1.17. Coloration propre d'un arbre avec  $\chi(G)=2$ .

Pour plus détails sur les notions de la partition nous orientons le lecteur aux références [3] et [4].

### Partie 1.3 La domination dans les graphes

Commençons par donner la définition des ensembles dominants dans les graphes. Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple. Un sous ensemble  $D$  de  $V$  est un dominant si tout sommet de  $V \setminus D$  est adjacent à au moins un sommet de  $D$ . Le cardinal minimum d'un ensemble dominant de  $G$  est appelé nombre de domination, il est noté par  $\gamma(G)$ , et le cardinal maximum d'un ensemble dominant minimal de  $G$  appelé nombre de domination supérieur, il est noté par  $\Gamma(G)$ .

Dans la littérature, il existe d'autres définitions équivalentes aux ensembles dominants dans les graphes. En voici quelques unes.

Un ensemble  $D \subseteq V$  est un dominant si pour tout sommet  $x \in V \setminus D : |N(x) \cap D| \geq 1$ .

Un ensemble  $D \subseteq V$  est un dominant si  $N[D] = V$ .

**Exemple 1.8 :** Soit un graphe  $G = (V, E)$  dans la figure 1.18. Il admet les ensembles dominants suivants :

$D = \{\{2,5\}, \{1,2,5\}, \{1,3,5\}, \{1,4,7\}, \{2,4,7\}, \{2,7,6\}, \{3,1,5\}, \{4,2,5\}, \{1,2,6,7\}, \{1,3,6,7\}\}$   
 Alors  $\gamma(G) = 2, \Gamma(G) = 4$ .

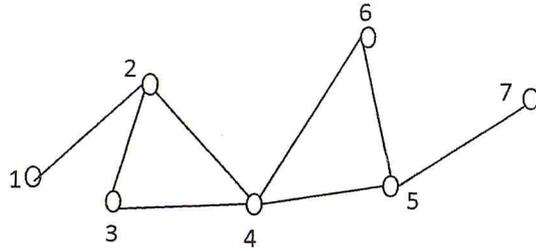


Figure 1.18 Graphe G avec  $\gamma(G)=2$  et  $\Gamma(G)=4$ .

Le concept de la domination trouve son origine dans le jeu d'échec, le principe est de dominer l'ensemble des cases par certaines pièces du jeu. L'idée semble remonter au 16<sup>ème</sup> siècle en Inde [5]. En 1862 De. Jaenish [6] posa le problème suivant : Déterminer le nombre de reines à placer sur l'échiquier de telle manière que chaque case soit occupée en un seul mouvement par l'une des reines.

Pour un échiquier  $3 \times 3$  le nombre minimum est 1 et pour échiquier  $5 \times 5$  le nombre minimum est 3. Le nombre minimum dans un échiquier  $n \times n$  reste indéterminé jusqu'à présent. Pour plus de détails voir [7].

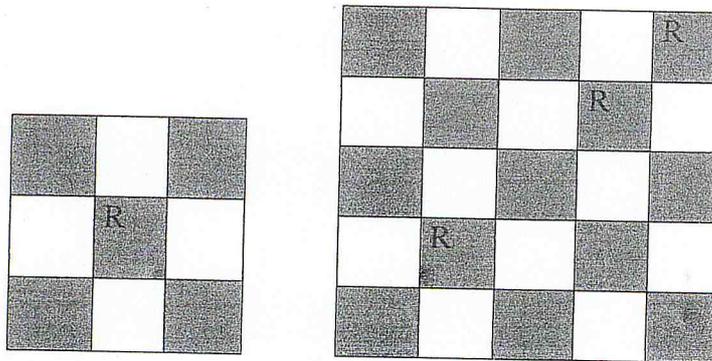


Figure 1.19. les reines dans un échiquier

En 1958, Claude Berge [8] donna la première formulation de la domination dans les graphes orientés. Le nombre de domination s'appelait alors le coefficient de stabilité externe. L'appellation actuelle du nombre de domination est due à Ore [9] 1962. A l'exception de quelques résultats, la domination n'a connu sa véritable expansion qu'après la parution de l'article de Cockayne et Hedetniemi [10] en 1977. Depuis, l'étude de la domination dans les graphes avec des propriétés additionnelles a donné naissance à plusieurs paramètres de domination. Par exemple en exigeant sur l'ensemble de domination induit un stable dans  $G$ , on a la domination indépendante.

Pour un aperçu détaillé, le lecteur peut consulter les deux livres de Haynes, Hedetniemi et Slater ([11], [5]). Plusieurs applications réelles existent.

### 1.3.1 Application :

#### Couverture d'une ville:

Combien faut-il placer de policiers pour contrôler toutes les allées d'une ville ? Nous nous intéressons au nombre minimum bien sûr.

Nous considérons le graphe associé où les sommets sont les carrefours et deux sommets sont reliés si les carrefours associés constituent une allée. Déterminer le nombre minimum de policiers pour contrôler tous les carrefours d'une ville revient à déterminer le nombre de domination dans le graphe associé.

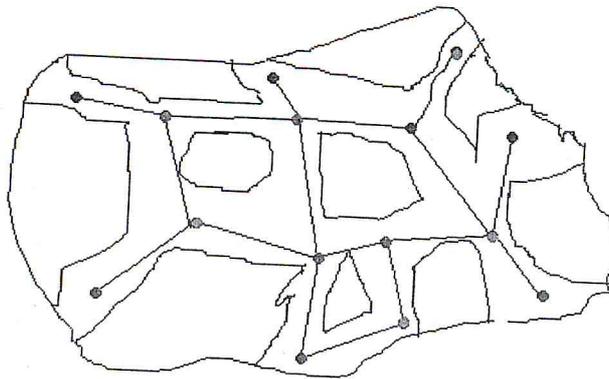


Figure 1.20. Un graphe  $G$  avec  $\gamma(G) = 6$ .

### 1.3.2 Quelques types de domination :

La notion de stabilité dans les graphes a un lien avec la notion de domination. En effet, il est facile de voir que tout ensemble stable maximal est un dominant minimal, par conséquent :

$$\gamma(G) \leq i(G) \leq \beta(G) \leq \Gamma(G)$$

**Exemple 1.9 :** Etant donné un arbre  $T$  donne la figure 1.21. Les ensembles dominants sont :  $D = \{\{1, 2\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{6, 7, 1\}, \{3, 4, 5, 6, 7\}\}$ . Alors  $\gamma(G) = 2$  et  $\Gamma(G) = 5$ . Et les ensembles stables sont :  $S = \{\{1, 6, 7\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{3, 4, 5, 6, 7\}\}$ . Alors  $i(G) = 3$  et  $\beta(G) = 5$ .

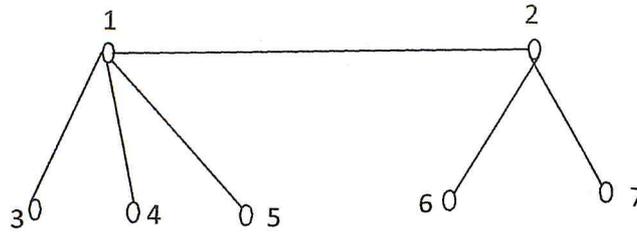


Figure 1.21 Un arbre  $T$  avec  $\gamma(G) = 2$  et  $\Gamma(G) = 5$  et  $i(G) = 3$  et  $\beta(G) = 5$ .

## Partie 1.4 partitionnement et domination

Nous avons introduit les notions de partitionnement et de domination dans les graphes. Dans la littérature, ils existent plusieurs problèmes de partitionnement ayant une propriété additionnelle de domination. La propriété de domination peut être définie sur les sommets ou sur les arêtes. Dans le chapitre 2, nous allons étudier quelques uns de ces problèmes

## Partie 1.5 Problématiques

Dans cette partie, nous allons présenter les problématiques classiques de la théorie des graphes

### 1.5.1 Complexité algorithmique :

Les problèmes de théorie des graphes sont des problèmes d'optimisation combinatoire, pour mesurer la difficulté de ce type de problèmes, plusieurs approches existent, la complexité algorithmique définie par Cook [12]. Cette mesure détermine l'existence ou non d'algorithmes efficaces pour les résoudre. Un algorithme de résolution d'un problème donné, est une procédure décomposable en opérations élémentaires, transformant une chaîne de caractères représentant les données de n'importe quel exemple ou instance du problème en une chaîne de caractères représentant ses résultats. La performance d'un algorithme est généralement mesurée selon la relation existante entre la taille de l'exemple traité, exprimée en termes du nombre de caractères nécessaires pour le codage des données, et le temps d'exécution, exprimé en termes du nombre d'opérations élémentaires. Le codage des données est tel que l'encombrement mémoire nécessaire pour stocker un nombre positif  $N$ , est égal au plus petit entier supérieur ou égal à  $\log_2(N + 1)$ .

En 1965, J. Edmonds a introduit la notion d'algorithme efficace ou polynomial. Un algorithme est dit polynomial si le nombre d'opération  $f(n)$ , nécessaire pour résoudre un exemple de taille  $n$ , est borné par un polynôme en  $n$ . Autrement dit, il existe deux constantes  $c$  et  $k$  telles que  $f(n) \leq cn^k$ . Un tel algorithme est dit de complexité  $O(n^k)$ . Un problème est dit polynomial. Ou appartient à la classe  $P$  (problèmes déterministes polynomiaux), s'il existe un algorithme polynomial pour le résoudre. Les problèmes de la classe  $P$  sont dits « faciles ».

Un problème est dans la classe  $NP$  si on peut vérifier en un temps polynomial une solution réalisable du problème. Il est clair qu'un problème polynomial appartient à  $NP$  d'où  $P \subseteq NP$ . Il existe des problèmes pour lesquels on ne connaît pas d'algorithme polynomial de résolution et la question est ce que  $NP \subseteq P$  est ouverte.

Un problème de classe  $NP$  est dit  $NP$ -complet si tout problème de la classe  $NP$  peut être réduit en temps polynomial à lui. Ainsi, s'il existe un algorithme polynomial permettant de résoudre un problème  $NP$ -complet alors il existe un algorithme polynomial pour résoudre tous les problèmes de la classe  $NP$  et ainsi  $NP \subseteq P$  d'où  $NP = P$ . Les problèmes  $NP$ -complets sont dits "difficiles". Par exemple, trouver un ensemble dominant de cardinal minimum  $\gamma(G)$  est un problème  $NP$ -complet.

### 1.5.2 Les Bornes :

Une borne est une extrémité réelle d'un intervalle dans lequel se situent tous les éléments d'un ensemble donné ou toutes les valeurs d'une fonction donnée. Une borne est un majorant si elle est supérieure à toutes ces valeurs; elle est un minorant si elle est inférieure à toutes ces valeurs. S'il existe à la fois un minorant et un majorant, l'ensemble ou la fonction sont dits "Bornés". Comme exemple, nous avons la borne suivante  $\gamma(G) \leq n$  où  $n = |V|$ .

Nous utilisons les bornes si le calcul de la solution optimale est difficile ou il prend beaucoup de temps. Les bornes sont également utilisées dans la conception d'algorithmes (voir les algorithmes par séparation et évaluation).

### 1.5.3 Caractérisation :

En mathématique, l'affirmation qu'une propriété  $P$  caractérise un objet  $X$  signifie non seulement que  $X$  possède la propriété  $P$  mais de plus que  $X$  est le seul objet à posséder cette propriété. Et on a l'exemple suivant :

Quels sont les graphes qui satisfont  $\gamma(G) = 1$ ?

$X$  = les graphes complets, les étoiles sont des graphes qui vérifient la propriété. Mais le graphe dans la figure 1.22 vérifie aussi la propriété. Nous pouvons caractériser les graphes avec  $\gamma(G) = 1$  par les graphes  $G = (V, E)$  contenant au moins un sommet  $x$  adjacents à tous les sommets, i.e.  $\exists x \in V : N[x] = V$ .

$P = \langle \gamma(G) = 1 \rangle$ .

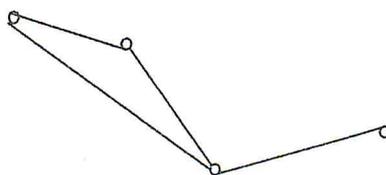


Figure 1.22. Un graphe  $G$  avec  $\gamma(G) = 1$

# Chapitre 2

Les problèmes de partitionnement domatique.

Dans ce chapitre, nous présentons des problèmes de partitionnement ayant une propriété aditionnelle de domination, définie sur les parties de la partition. Le chapitre comporte les quatre sections suivantes : dans la première, nous donnons les différentes définitions et les principaux résultats concernant le problème de partition domatique (*domatic partition*) et quelques unes de ses variantes, dans la deuxième partie nous présentons la  $\chi$ -coloration dominante maximum et dans la troisième la  $\chi$ -coloration dominante minimum et finalement nous proposons deux nouveaux paramètres.

## Partie 2.1 Le nombre domatique

Commençons par donner la définition du nombre domatique dans les graphes.

**Définition 2.1 :** une partition  $D$  de  $V(G)$  est appelée une *partition domatique* de  $G$  si chaque partie de  $D$  est un ensemble dominant de  $G$ . Le nombre maximum de classe d'une partition domatique de  $G$  est appelé le *nombre domatique* de  $G$  et noté  $d(G)$ .

Le nombre domatique est l'un des paramètres de la domination, qui a été présenté pour la première fois en 1977 par Cockayne et Hedetniemi [10], et étudié par Zelinka dans [13].

**Exemple 2.2 :** Soit  $G = (V, E)$  un graphe défini dans la figure 2.1. Les partitions domatique sont :  $D_1 = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}\}$ ,  $D_2 = \{\{1, 2\}, \{4\}, \{3, 5\}\}$ ,  $D_3 = \{\{1, 3\}, \{2, 5\}, \{4\}\}$ ,  $D_4 = \{\{1, 3\}, \{4, 5\}, \{5\}\}$ ,  $D_5 = \{\{1, 4\}, \{3, 5\}, \{2\}\}$ ,  $D_6 = \{\{1, 5\}, \{2, 3\}, \{4\}\}$ ,  $D_7 = \{\{1\}, \{3\}, \{2\}, \{5, 4\}\}$  alors  $d(G)=4$ . La partition  $D = \{\{1, 2, 5\}, \{4\}, \{3\}\}$  n'est pas une partition domatique car la partie  $\{3\}$  n'est pas dominante.

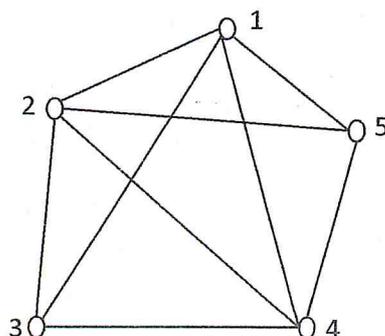


Figure2.1 partition domatique avec  $d(G)=4$

### 2.1.1 Application :

Soient l'ensemble des partis politiques, une partie peut attirer l'électorat de l'autre (une partie de droite peut attirer l'électorat de toute partie de droite). On veut former le maximum de coalitions tel que chaque coalition peut attirer l'électorat de chaque partie, la coalition possède un minimum de représentativité pour toute tendance (partie politique). Nous considérons le graphe associé à notre problématique suivant : les sommets sont les parties politiques, deux sommets sont liés si l'un peut attirer l'électorat de l'autre. Pour former le

maximum de coalitions, nous partitionnons l'ensemble des sommets tel que les parties sont dominantes et le nombre de partitions soit maximum.

Le problème de la partition domatique est déjà recensé dans la longue liste des problèmes NP-complet et il est prouvé NP-complet par Goddard et al. [14] en 1979 pour les graphes arbitraires et par Kaplan et Shamir [15] en 1994 pour les graphes bipartis.

### 2.1.2 Quelques résultats :

Certaines études ont été réalisées pour borner ou donner la valeur exacte du nombre domatique pour des classes particulières de graphes. B.Zelinka a montré que, pour les graphes ayant tout sommet de degré supérieure ou égale à  $k$  (où  $k$  est différent du zéro),  $d(G) \geq 2$ , [16]. Et pour les cactus  $d(G) = 2$  ou  $d(G) = 3$  [17].

D'autres résultats sont donnés dans ce qui suit :

#### 2.1.2.1 Les bornes :

En 1972, Jaeger et Payan [18] ont donné une borne inférieure de nombre domatique de graphe  $G$  avec le nombre de domination de graphe complémentaire.

$$d(G) \geq \gamma(\bar{G})$$

En 1977, Cockayne et Hedetniemi [10] ont donné la première borne de nombre domatique  $d(G)$  avec le nombre de domination  $\gamma(G)$ , et le degré minimum d'un graphe  $\delta(G)$ ,

$$d(G) \leq \delta(G) + 1$$

$$d(G) \leq n / \gamma(G)$$

B. Zelinka [19], a donné une borne inférieure du nombre domatique  $d(G)$  le liant avec le degré minimum  $\delta(G)$  et le nombre des sommets ( $|V| = n$ ).

$$d(G) \geq n/n - \delta(G)$$

#### 2.1.2.2 Caractérisation :

En 1962, O. Ore dans [21] a caractérisé les graphes avec  $d(G) = 1$  comme les graphes ayant au moins un sommet isolé.

La caractérisation des graphes avec  $d(G) = d(\bar{G})$  a été obtenu pour les classes suivantes : les arbres, les cycles, les bipartis réguliers et les graphes cubiques.

Dans la littérature, Plusieurs variantes du nombre domatique existent, nous présentons quelques unes.

### 2.1.3 Le nombre domatique total:

Commençons par donner la définition de l'ensemble dominant total dans les graphes.

**Définition 2.3 :** Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple. Un sous ensemble  $D$  de  $V(G)$  est appelé dominant total si pour chaque sommet  $x \in V(G)$  il existe un sommet  $y \in D$  qui est adjacent à  $x$ . Ou bien :  $D$  est un dominant total s'il engendré un graphe sans sommet isolé.

**Définition 2.4 :** une partition domatique de l'ensemble de  $V(G)$  d'un graphe  $G$ , dont toutes les parties sont dominants totals est appelé *la partition dominante totale*. Le nombre maximum de partie d'une partition totale domatique de  $G$  et noté  $d_t(G)$ .

Le nombre total domatique à été présenté en 1980 par E.J. Cockayne, R.M. Dawes et S.T. Hedetniemi [24].

**Exemple 2.5:** Soit le graphe  $G = (V, E)$  dans la figure 2.2. Les partitions domatiques totales possibles sont :  $\{\{1, 2\}, \{3,6\}, \{4,5\}\}, \{\{1,4\}, \{2, 5\}, \{3, 6\}\}, \{\{1, 4\}, \{2, 3\}, \{5, 6\}\}, \{\{1, 6\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}\}, \{\{1, 5\}, \{2, 4\}, \{3, 6\}\}, \{\{1,2,3\}, \{4,5,6\}\}, \{\{1, 2, 5\}, \{3, 4, 6\}\}$  alors  $d_t(G)=3$ .

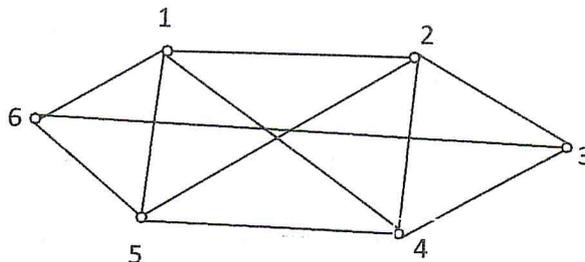


Figure2.2. Partition domatique totale avec  $d_t(G)=3$ .

### 2.1.4 Le nombre idomatique :

**Définition 2.6:** une partition domatique de l'ensemble des sommets  $V(G)$  d'un graphe, dont toutes les partie sont indépendantes de  $G$  est appelée une *partition idomatique* de  $G$ . Donc une partition domatique indépendante est une partition domatique tel que toute partie induit un stable. Le nombre maximum de classe d'une partition idomatique de  $G$  est appelé le nombre idomatique noté  $id(G)$ .

Le nombre idomatique est défini par Cockayne et Hedetniemi [10] et par B.Zelinka [13].

**Exemple 2.7 :** Soit  $G = (V, E)$  un graphe défini dans la figure 2.3. Les partitions idomatique possibles sont :

$\{\{1,2\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}\}, \{\{1,3\}, \{4,6\}, \{2,5\}\}, \{\{1, 2\}, \{3,5\}, \{4,6\}\}, \{\{2, 5\}, \{1, 3\}, \{4,6\}\},$   
 $\{\{1, 2\}, \{3,5\}, \{4,6\}\}$  et alors  $id(G) = 3$ .

La partition  $\{\{3,5\}, \{2,6\}, \{1,4\}\}$  n'est pas une partition idomatique car la partie  $\{1,4\}$  n'est pas indépendante.

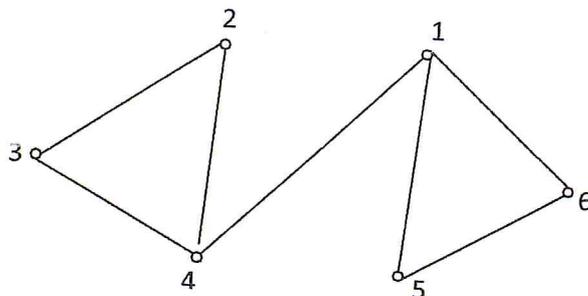


Figure 2.3. Partition idomatique avec  $id(G)=3$ .

### 2.1.5 Le nombre k-domatique :

Commençons par donner la définition de l'ensemble k-dominant dans les graphes

**Définition 2.8 :** Un ensemble *k-dominant* dans un graphe  $G$  est un sous ensemble  $D$  de  $V(G)$  avec la propriété pour chaque sommet  $x \in V(G) \setminus D$ , il existe un sommet  $y \in D$  tel que  $d(x, y) \leq k$  avec,  $k$  entier positif différente de zéro et  $d(x, y)$  est la distance entre  $x$  et  $y$ .

**Définition 2.9 :** une partition domatique de l'ensemble de sommet  $V(G)$  d'un graphe  $G$ , dont tous les parties sont k-dominant est appelé la partition k-domatique de  $G$ . Le nombre maximum d'une partition k-domatique et appelé le nombre k-domatique et noté  $d_k(G)$ .

Le nombre k-domatique est l'un des paramètres de la domination, qui à été présenté en 1976 par M. Borowiecki et M. Kuzak [25].

**Exemple 2.10 :** Etant donné un graphe  $G = (V, E)$  de la figure 2.4 il admet les partitions 2-domatique suivantes:  $\{\{1,2\}, \{3,4\}, \{5\}\}, \{\{1, 3\}, \{2, 5\}, \{4\}\}, \{\{1,4\}, \{2, 5\}, \{3\}\},$   
 $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$ . Alors  $d_k(G) = 5$ .

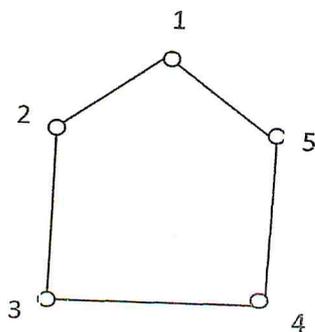


Figure 2.4. Partition 2-domatique avec  $d_k(G) = 5$

### 2.1.6 Le nombre domatique connexe :

Commençons par donner la définition des ensembles dominants connexes.

**Définition 2.11 :** un ensemble dominant dans un graphe  $G$  est appelé connexe si le sous-graphe de  $G$  induit par cet ensemble est connexe.

**Définition 2.12 :** une partition domatique dont toutes les parties sont dominantes connexes est appelée la *partition domatique connexe*. Le nombre maximum d'une partition domatique connexe est appelé le *nombre domatique connexe* et noté par  $d_c(G)$ .

Le nombre domatique connexe à été présenté en 1984 par Hedetniemi et Laskar [26].

**Exemple 2.13 :** Etant donné le graphe  $G = (V, E)$  de la figure 2.5, il admet les partitions domatique connexe suivantes :  $\{\{2, 3\}, \{1, 4, 5, 6\}\}, \{\{1, 2, 6\}, \{3, 4, 5\}\}, \{\{1, 6, 5\}, \{2, 3, 4\}\}$  et alors  $d_c(G) = 2$ .

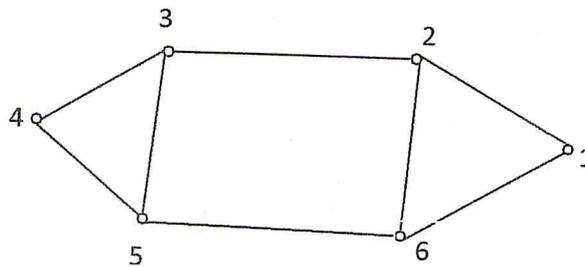


Figure 2.5. Partition domatique connexe avec  $d_c(G) = 2$

### 2.1.7 Le nombre Antidomatique :

**Définition 2.14 :** une partition domatique dont toutes les parties ne sont pas dominant est appelé *partition antidomatique*. Le nombre minimum de classes d'une partition antidomatique de  $G$  est appelé le *nombre antidomatique* de  $G$  et noté  $\bar{d}(G)$ .

Le nombre antidomatique est l'un des paramètres de la domination, qui à été présenté en 1988 par B. Zelinka [27].

**Exemple 2.15:** Etant donné un graphe  $G = (V, E)$  donne la figure 2.6 il admet les partitions antidomatique suivantes :  $\{\{1,6\}, \{4, 5\}, \{3, 2\}\}, \{\{1,2\}, \{3, 4\}, \{5,6\}\}, \{\{1,2,3\}, \{4, 5, 6\}\}, \{\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6\}\}$ . Alors  $\bar{d}(G) = 2$ . La partition  $\{\{2,6\}, \{1,5\}, \{3, 4\}\}$  n'est pas une partition antidomatique car le partie  $\{2, 6\}$  dominante.

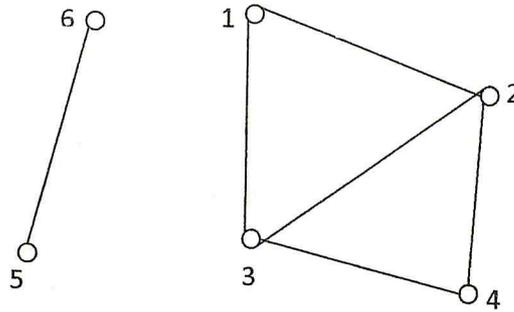


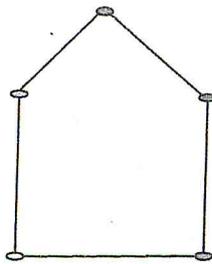
Figure 2.6. Partition antidomatique avec  $\bar{d}(G) = 2$ .

## 2.1 La $\chi$ -coloration dominante maximum:

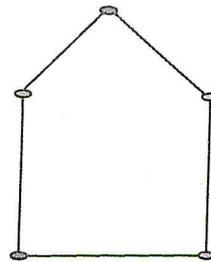
Dans cette section, nous présentons deux problèmes de coloration (partition en stables) avec une propriété de domination définie sur les couleurs.

**Définition 2.16 :** la  $\chi$ -coloration dominante maximum de  $G$  est la coloration propre minimum avec le maximum de classe de couleurs dominantes. Le nombre de  $\chi$ -coloration dominante de  $G$  est le nombre maximum de classes de couleurs dominantes dans une  $\chi$ -coloration dominante, il est noté  $d_\chi(G)$ .

**Exemple 2.17:** Soit le graphe  $G = (V, E)$  dans la figure 2.7. Il admet  $\chi(G) = 3$  et  $d_\chi(G) = 2$ .



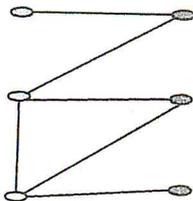
Coloration propre



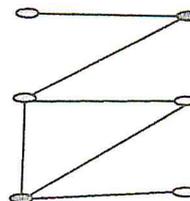
Coloration propre minimum avec le nombre de classe dominante égale à 2

Figure 2.7. La  $\chi$ -coloration dominante maximum avec  $d_\chi(G) = 2$

**Exemple 2.18 :** Soit le graphe  $G = (V, E)$  donne la figure 2.8. Il admet  $\chi(G) = 3$  et  $d_\chi(G) = 2$  :



Coloration propre minimum avec le nombre de classe dominante égale à 1



Coloration propre minimum avec le nombre de classe dominante égale à 2

Figure 2.8 La  $\chi$ -coloration dominante maximum avec  $d_\chi(G) = 2$

Le  $\chi$ -coloration dominante a été défini pour la première fois en 2008 par S. Arumugam, I. Sahul Hamid et A. Muthukamatchi [37], et étudié par S. Arumugam, Teresa W. Haynes, Michael A. Henning et Yared Nigussie dans [38].

Le problème de  $\chi$ -coloration dominante is prouvé NP-comple pour des graphes particuliers [38].

### 2.2.1 Quelques résultats :

Les résultats suivant sont observés par S. Arumugam, I. Sahul Hamid et A. Muthukamatchi en 2008 [37].

1. Les bornes supérieure et inférieure du nombre de  $\chi$ -coloration dominante de G en fonction du nombre minimum de couleur  $\chi(G)$ .

$$1 \leq d_\chi(G) \leq \chi(G)$$

2. Les valeurs exacte du  $d_\chi(G)$  pour quelques graphes

$$\chi(G)=n \Leftrightarrow d_\chi(G) = n \Leftrightarrow G = K_n$$

$$G \text{ est biparti} \Rightarrow d_\chi(G) = 2$$

3. Les bornes supérieures et inférieure de nombre de  $\chi$ -coloration dominante de graphe G en fonction du degré minimum du sommet.

$$d_\chi(G) \leq \delta(G) + 1$$

4. La valeur exacte de  $d_\chi(C_n)$  dans les cycles.

$$d_\chi(C_n) = \begin{cases} 3 & \text{si } n \equiv 3 \\ 2 & \text{sinon} \end{cases}$$

5. Caractérisé les graphes avec  $d_\chi(G) = 1$  et  $d_\chi(G) = \chi(G)$ .

### 2.2.2 Les problème ouverts :

Pour qu'elle classe de graphes, on a le nombre chromatique dominante du graphe G égale ou nombre de  $\chi$ -coloration dominante de graphe G ( $d_\chi(G) = \chi(G)$ ) ?

Pour qu'elle classe des graphes on a  $d_\chi(G) = 1$  ?

Quel est la complexité de la  $\chi$ -coloration dominante ?

## 2.2 Le $\chi$ -coloration dominante minimum :

**Définition 2.19 :** la  $\chi$ -coloration dominante minimum est une coloration propre minimum avec le minimum de couleurs dominantes. Le nombre de  $\chi$ -coloration dominante minimum c'est le nombre minimum de classe de couleur dominante dans le problème  $\chi$ -coloration dominante minimum, il est noté  $md_\chi(G)$ .

**Exemple 2.20 :** Soit un graphe  $G=(V, E)$  dans la figure 2.9. Il admet  $\chi(G)=2$ ,  $md_\chi(G)=2$ .

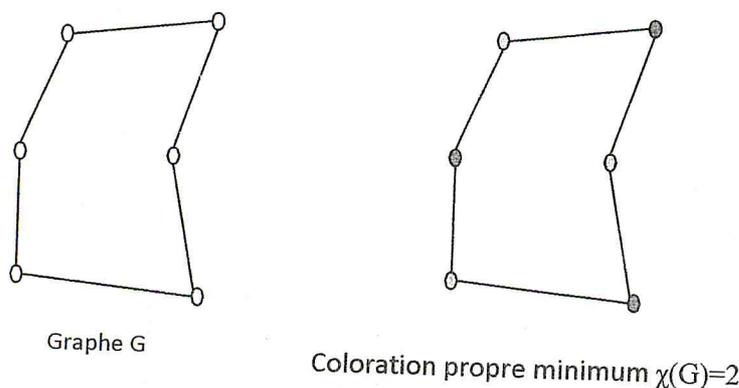


Figure 2.9 le nombre  $\chi$ -coloration dominante minimum avec  $md_\chi(G)=2$

**Exemple 2.21 :** Soit le graphe dans la figure 2.10. Il admet  $md_\chi(G)=1$ .

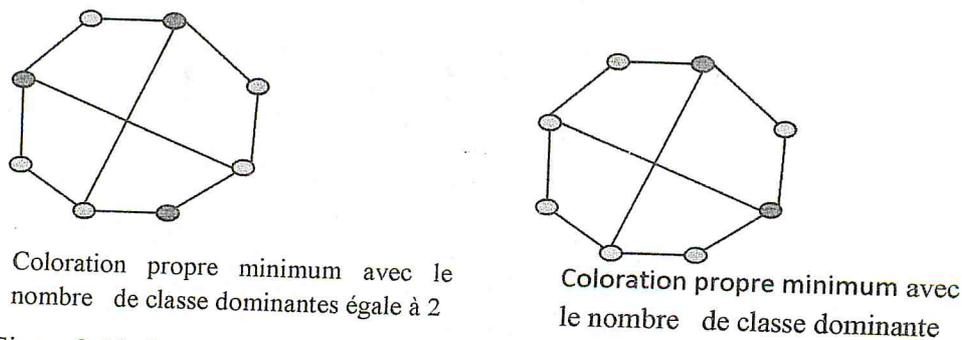


Figure 2.10. Le nombre  $\chi$ -coloration dominante minimum avec  $md_\chi(G)=1$

### 2.3.1 Quelques résultats :

Les résultats suivant sont observés par J. John Arul et R. Kala.

- I. Les bornes supérieures et inférieure de nombre min-couleur- dom de G en fonction du nombre de couleur minimum  $\chi(G)$ .

$$0 \leq md_\chi(G) \leq \chi(G)$$

**Exemple 2.22 :** Soit le graphe  $G = (V, E)$  dans la figure 2.11. Il admet

$$md_\chi(G) = 1, \chi(G) = 3.$$

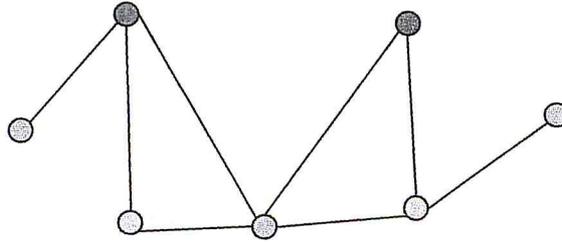


Figure 2.11. La  $\chi$ -coloration dominante minimum avec  $0 < md_\chi(G) < \chi(G)$

**Exemple 2.23 :** Soit le graphe  $G = (V, E)$  dans la figure 2.12. Il admet  $md_\chi(G) = 2, \chi(G) = 2$ .

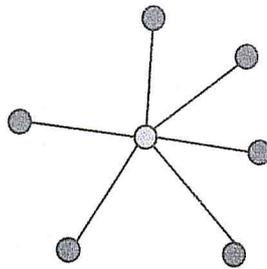


Figure 2.12 le  $\chi$ -coloration dominante minimum avec  $md_\chi(G) = \chi(G)$

II. La valeur exacte de  $md_\chi(G)$  pour des classes particulières de graphes

1. Pour les graphes complets  $md_\chi(K_n) = n$

Il existe une seule coloration propre et dans cette coloration tout couleur domine  $G$ .

2. Pour les cycles :

$$md_\chi(C_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geq 9 \text{ et } n \text{ impaire} \\ 1 & \text{si } n = 7 \\ 3 & \text{si } n = 3 \\ 2 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Exemple 2.24 :** Soient les graphes dans la figure 2.13. Il admet  $md_\chi(C_{11}) = 0, md_\chi(C_7) = 1, md_\chi(C_3) = 3, md_\chi(C_4) = 2$ .

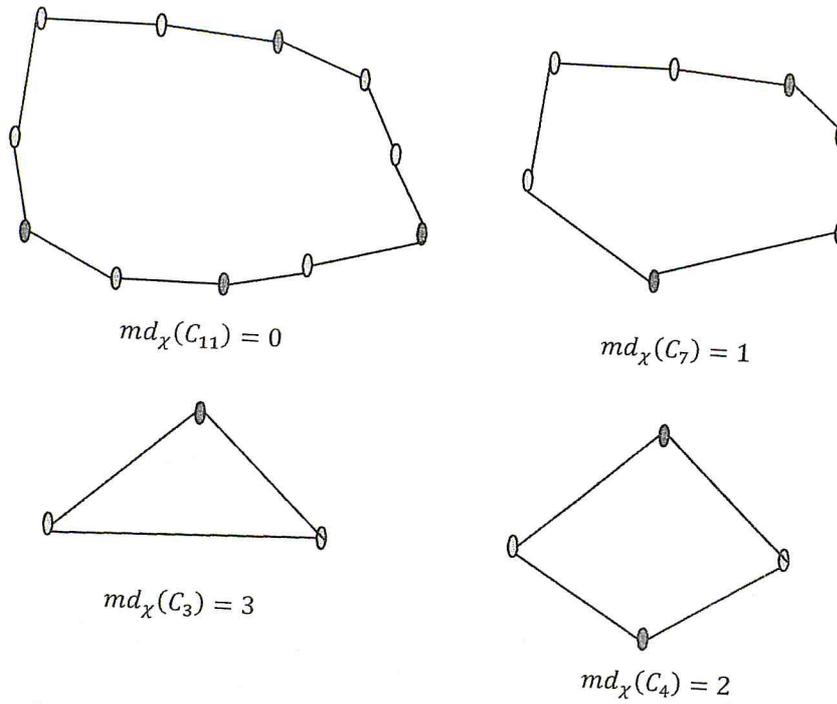


Figure 2.13 Le  $\chi$ -coloration dominante minimum dans les cycles d'ordre 11, 7, 3, 4

3. Pour les graphes bipartite  $md_\chi(G) = 2$ . Il existe deux partis stables d'où la coloration propre minimum égale à 2 est les deux partis sont dominants.

III. Si  $\Delta(G) = n-1$  alors  $md_\chi(G) \geq 1$ .

**Exemple 2.25 :** Soit le graphe dans la figure 2.14. Il admet  $md_\chi(G) = 3$

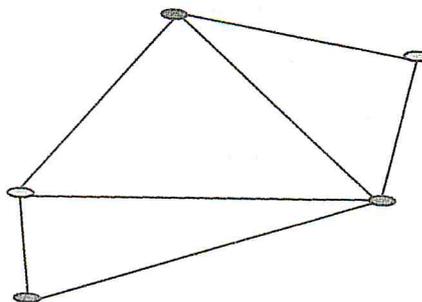


Figure 2.14 le  $\chi$ -coloration dominante minimum avec  $md_\chi(G) = 3$

Caractérisé les graphes avec  $md_\chi(G) = 0$  et  $md_\chi(G) = \chi(G)$ .

### 2.3.2 Les problème ouverts :

Pour qu'elle classe des graphes on a  $md_\chi(G) = 0$  ?

Pour qu'elle classe des graphes on a  $md_\chi(G) = d_\chi(G)$  ?

Pour qu'elle classe des graphes on a  $md_\chi(G) = \chi(G)$  ?

Quel est la complexité de la min-couleur- dom ?

## 2.4 Des nouveaux paramètres :

### 2.4.1 La coloration Antidomatique :

**Définition 2.26 :** une coloration propre dont toutes les classes ne sont pas dominantes est appelé la coloration Antidomatique. Le nombre minimum de classes d'une coloration Antidomatique de G est noté  $\overline{d}_\chi(G)$ .

**Exemple 2.27 :** Soit l'arbre T dans la figure 2.15. Il admet les colorations propres non dominantessuivantes :  $\{\{1,7\},\{2,9\},\{8,4\},\{5,6\}\},\{\{1,4,9\},\{2,7,6\},\{3,5,8\}\},\{\{1,5,6,8,9\},\{2,7\},\{3\},\{4\}\}$  alors  $\overline{d}_\chi(T)=3$ .

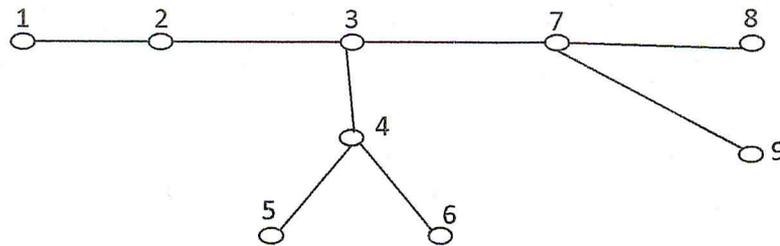


Figure 2.15. Un arbre T avec  $\overline{d}_\chi(T)=3$

**Remarque 2.28 :**

1. la coloration Antidomatique est un cas particulier de la partition antidomatique ou les partis sont des couleurs.
2. La coloration Antidomatique n'existe pas toujours dans quelques graphes par exemple les étoiles, les graphes complets, les graphes ayant un sommet adjacent à tous les sommets.

### 2.4.2 La coloration k-dominante :

**Définition 2.29 :** une coloration propre dont toutes les classes sont k-ensembles dominants dans G sont appelé col-pro- k-dominante. Le nombre maximum de classe d'une coloration k-dominante est noté par  $d_{\chi k}(G)$ .

**Exemple 2.30** : étant donné un graphe  $G = (V, E)$  dans la figure 2.16. Il admet les colorations 2-dominantes suivantes :  $\{\{1,4\}, \{2,5\}, \{3\}\}$ ,  $\{\{1,5\}, \{2,3\}, \{4\}\}$ ,  $\{\{2,5\}, \{3,4\}, \{1\}\}$ ,  $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$  alors  $d_{\chi_k}(G) = 5$ .

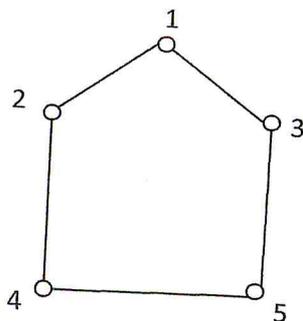


Figure 2.16. coloration 2-dominante avec  $d_{\chi_k}(G) = 5$

**Exemple 2.31** : Soit le graphe dans la figure 2.17. Il admet les colorations 2-dominantes suivantes :  $\{\{1,4\}, \{2,5\}, \{6\}, \{3,7\}\}$ ,  $\{\{1,3\}, \{2,5\}, \{6\}, \{4,7\}\}$ ,  $\{\{1,6\}, \{2, 7, 4\}, \{3,5\}\}$

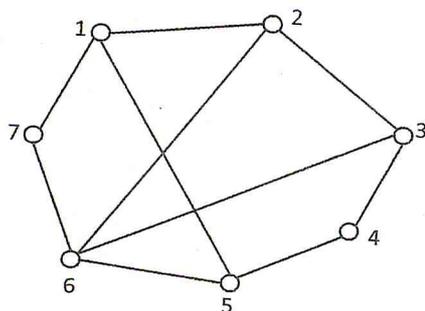


Figure 2.17. coloration 2-dominante avec  $d_{\chi_k}(G) = 4$

**Remarque 2.32** : la coloration propre k-dominante est un cas particulier de la partition k-dominante où les parties sont des couleurs.

# Chapitre 3

les problèmes de partitionnement dominant

Dans ce chapitre nous étudions quelques problèmes de partitionnement avec une propriété de domination définie sur les sommets. Nous donnons d'abord la définition et quelques exemples de partition dominante. Ensuite, nous donnons quelques résultats et nous terminons par les colorations dominante et stricte forte qui sont partitions dominantes tel que chaque partie induit un stable dans  $G$ .

### 3.1 La partition dominante

**Définition 3.1 :** La partition dominante est une partition de l'ensemble des sommets tel que : Toute sommet est seul dans sa partie ou il est adjacent à tous les sommets d'une partie.

La partition dominante a été présentée par S. M. Hedetniemi, R. C. Laskar, A. A. McRae and C.K. Wallis [28]. Et étudié par Jobby Jacob et Wayne Goddard dans [29].

**Exemple 3.2 :** Soit le graphe  $G = (V, E)$  de la figure 3.1. Il admet les partitions dominantes suivantes :

$$\Pi_1 = \{\{1\}, \{5\}, \{3\}, \{2,4\}\}, \Pi_2 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4,5\}\}, \Pi_3 = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}, \{5\}\},$$

$$\Pi_4 = \{\{1\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}\}, \Pi_5 = \{\{1\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}\}, \Pi_6 = \{\{1, 2\}, \{5\}, \{3, 4\}\},$$

$$\Pi_7 = \{\{1, 3\}, \{5\}, \{2\}, \{4\}\}, \Pi_8 = \{\{1,3\}, \{2, 5\}, \{4\}\}, \Pi_9 = \{\{1, 4\}, \{5\}, \{2\}, \{3\}\}.$$

La partition  $\{\{1, 2\}, \{3, 5\}, \{4\}\}$  n'est pas une partition dominante car le sommet 1 n'est pas adjacent à tous les sommets d'une partie.

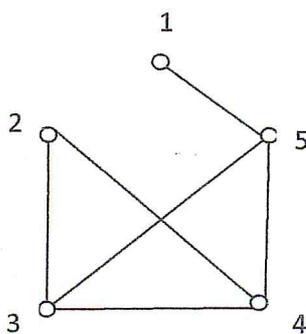


Figure3.1. Partition dominante

**Définition 3.3 :** La partition dominante  $\Pi = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$  est minimal si quelque soit la partition  $\Pi'$  obtenue à partir de  $\Pi$  par l'union de n'importe quelles deux classes, n'est pas une partition dominante.

**Définition 3.4 :** Le nombre de partition dominante de  $G$ , noté  $\pi_d(G)$ , est l'ordre minimum d'une partition dominante de  $G$ . Le nombre supérieure de partition dominante d'un graphe  $G$ , notée  $\prod_d(G)$ , est le maximum d'une partition dominante minimale de  $G$ .

**Exemple 3.5 :**

- Soit  $G = (V, E)$  un graphe défini dans la figure 3.2 Les partitions dominantes sont :

$\Pi_1 = \{\{1,2\}, \{3,4\}\}$ ,  $\Pi_2 = \{\{1,3\}, \{2,4\}\}$ ,  $\Pi_3 = \{\{1\}, \{4\}, \{2,3\}\}$ ,  $\Pi_4 = \{\{1,2,3\}, \{4\}\}$ . La partition dominante  $\Pi_3$  n'est pas minimale, les autres partitions le sont. Alors  $\pi_d(G) = 2$  et  $\Pi_d(G) = 3$ .

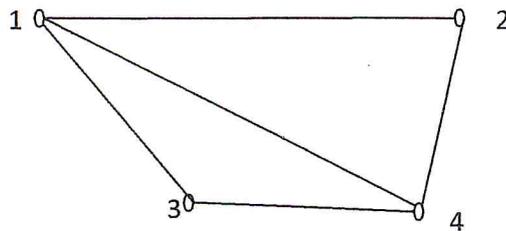


Figure 3.2. Un graphe  $G$  avec  $\pi_d(G) = 2$  et  $\Pi_d(G) = 3$ .

**2.2.1 Les bornes de  $\pi_d(G)$  et  $\Pi_d(G)$  :**

Les résultats suivants sont observés et démontrés par S. M. Hedetniemi, R. C. Laskar, A. A. McRae and C.K. Wallis [28].

S. M. Hedetniemi, R. C. Laskar, A. A. McRae and C.K. Wallis [28] ont donné les bornes supérieure et inférieure triviales de  $\pi_d(G)$  et  $\Pi_d(G)$  dans Le cas d'un graphe  $G = (V, E)$  avec le nombre de sommet égale a  $n$ .

$$1 \leq \pi_d(G) \leq \Pi_d(G) \leq n$$

**Exemple 3.6:** Le graphe défini dans la figure 3.3 admet les partitions dominante suivantes :  $\Pi_1 = \{\{1\}, \{2,3\}, \{4\}, \{5\}\}$ ,  $\Pi_2 = \{\{1,2\}, \{3,4\}, \{5\}\}$ ,  $\Pi_3 = \{\{1,5\}, \{2,4\}, \{3\}\}$ ,  $\Pi_4 = \{\{1,3,4\}, \{2\}, \{5\}\}$  alors  $\pi_d(G) = 3$ ,  $\Pi_d(G) = 4$ .

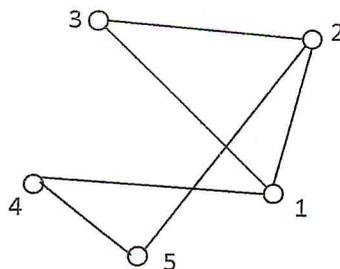


Figure 3.3 Borne trivial:  $1 \leq \pi_d(G) \leq \Pi_d(G) \leq n = 5$ .

S. M. Hedetniemi, R. C. Laskar, A. A. McRae and C.K. Wallis [28] ont donné les valeurs exacte du  $\pi_d(G)$  et  $\prod_d(G)$  dans quelque graphe

$$\pi_d(G) = 1 = \prod_d(G) \Leftrightarrow G = K_n$$

$$\pi_d(G) = n = \prod_d(G) \Leftrightarrow G = K_n$$

S. M. Hedetniemi, R. C. Laskar, A. A. McRae and C.K. Wallis dans [28] ont donné une borne supérieure et inférieure de  $\pi_d(G)$  avec le nombre de domination  $\gamma(G)$ .

$$\gamma(G) \leq \pi_d(G) \leq \gamma(G) + 1$$

**Exemple 3.7 :** Soit un graphe  $G=(V, E)$  dans la figure 3.4. Il admet les partitions dominantes suivantes :  $\prod_1 = \{\{1\}, \{3,5\}, \{2,4\}, \{6\}\}$ ,  $\prod_2 = \{\{1\}, \{3,5\}, \{2,6\}, \{4\}\}$ ,  $\prod_3 = \{\{1\}, \{2,3\}, \{6, 5\}, \{4\}\}$ ,  $\prod_4 = \{\{1\}, \{2,5\}, \{3,6\}, \{4\}\}$ ,  $\prod_5 = \{\{3,5\}, \{2,6\}, \{1,4\}\}$ ,  $\prod_6 = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 6\}, \{4\}\}$ ,  $\prod_7 = \{\{2, 4, 6\}, \{3, 5\}, \{1\}\}$  alors  $\pi_d(G) = 3$  et les ensembles dominants sont :  $\{\{1,4\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{2,3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{5, 6\}\}$  alors  $\gamma(G) = 2$ .

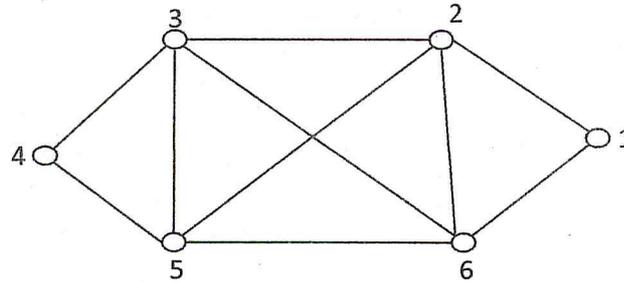


Figure3.4. Comparaison entre le  $\pi_d(G)$  et  $\gamma(G)$ .

S. M. Hedetniemi, R. C. Laskar, A. A. McRae and C.K. Wallis [28] ont donné une borne supérieure et inférieure de  $\pi_d(G)$  et  $\prod_d(G)$  avec le degré maximum et minimum de graphe.

$$n/[1 + \Delta(G)] \leq \pi_d(G) \leq \prod_d(G) \leq n - \delta(G)$$

**Exemple 3.8:** Soit le graphe  $G = (V, E)$  dans la figure 3.5. Il admet les partitions dominantes suivantes :  $\prod_1 = \{\{1\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}\}$ ,  $\prod_2 = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}\}$ ,  $\prod_3 = \{\{1,3\}, \{2,5\}, \{4\}\}$ ,  $\prod_4 = \{\{1,4\}, \{2,5\}, \{3\}\}$ ,  $\prod_5 = \{\{1,3, 4\}, \{2,5\}\}$  alors  $\pi_d(G) = 2$ ,  $\prod_d(G) = 3$ . On a aussi  $n = |V| = 5$ ,  $\Delta(G) = 3$  et  $\delta(G) = 2$ .

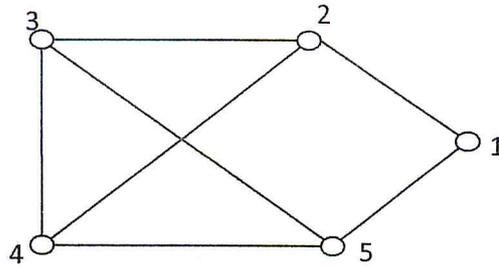


Figure 3.5. Comparaison entre le  $\pi_d(G)$ ,  $\prod_d(G)$ ,  $\delta(G)$  et  $\Delta(G)$

En 2006, Jobby Jacob et Wayne Goddard dans [29] ont donné une borne inférieure du nombre de partition dominante  $\pi_d(G)$  avec le cardinal maximum d'un stable maximal de  $G$  ( $\beta(G)$ ).

$$\pi_d(G) > \beta(G)$$

**Exemple 3.9 :** Etant donné un graphe  $G = (V, E)$  donne la figure 3.6. Il admet Les ensembles stables maximaux suivants :  $\{\{2, 4\}, \{3, 5\}, \{1, 6\}, \{1, 5\}, \{1, 4\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 6\}\}$  alors  $\beta(G) = 3$  et Les partitions dominantes sont:  $\prod_1 = \{\{1\}, \{2,3\}, \{5,6\}, \{4\}\}$ ,  $\prod_2 = \{\{1\}, \{2,4\}, \{3,5\}, \{6\}\}$  alors  $\prod_d(G) = 4$ .

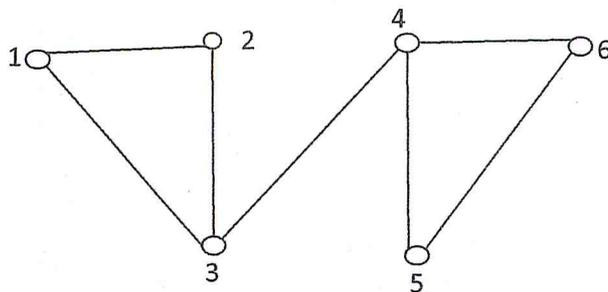


Figure 3.6 Comparaison entre  $\pi_d(G)$ ,  $\prod_d(G)$  et  $\beta(G)$ .

En 2006, Jobby Jacob et Wayne Goddard dans [29] ont étudiés le problème de la partition dominante, et ont donné des résultats sur les classes d'arbre et les cycles.

$$\prod_d(T) \geq \lceil (n+1)/2 \rceil$$

$$\prod_d(C_n) = \lfloor (2n+1)/3 \rfloor$$

**Exemple 3.10 :**

Etant donné un arbre d'ordre  $n = 8$  dans la figure 3.7 il admet les partitions dominantes suivantes :  $\prod_1 = \{\{1,2\}, \{3\}, \{4, 7, 8\}, \{6\}, \{5\}\}$ ,  $\prod_2 = \{\{1,4\}, \{3\}, \{6\}, \{7,8\}, \{2\}, \{5\}\}$ ,  $\prod_3 = \{\{1\}, \{2,4\}, \{3\}, \{6\}, \{5\}, \{7,8\}\}$  donc  $\prod_d(T) = 6$ .

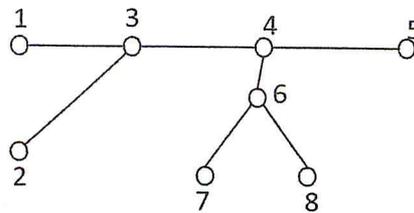


Figure 3.7. Partition dominante d'un arbre avec  $\Pi_d(T) = 6$

Etant donné un cycle  $C_6$  il admet les partitions dominantes suivantes :

$\Pi_1 = \{\{1,3\}, \{2\}, \{4,6\}, \{5\}\}$ ,  $\Pi_2 = \{\{2,4\}, \{1\}, \{3\}, \{6\}\}$ ,  $\Pi_3 = \{\{1,2\}, \{3\}, \{6\}, \{4,5\}\}$ ,  
 $\Pi_4 = \{\{1,3,5\}, \{2\}, \{4\}, \{6\}\}$ ,  $\Pi_5 = \{\{2,4,6\}, \{1\}, \{3\}, \{5\}\}$ . Alors  $\Pi_d = 4$ .

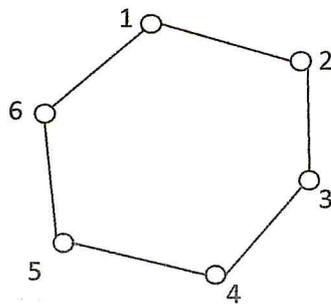
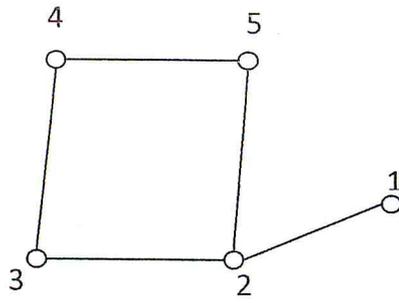


Figure 3.8. La partition dominante d'un cycle avec  $\Pi_d(C_6) = 4$

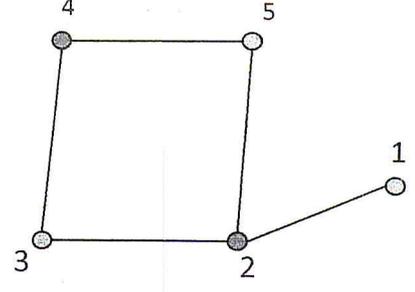
## Partie 3.2 Coloration dominante

**Définition 3.11 :** La *coloration dominante* est une coloration propre tel que : Tout sommet est seul dans sa classe de couleur ou adjacent à tous les sommets d'une classe de couleur. Le nombre minimum de classes de couleurs dans une coloration dominante, est appelé le nombre chromatique dominant et il est noté  $\chi_d(G)$ .

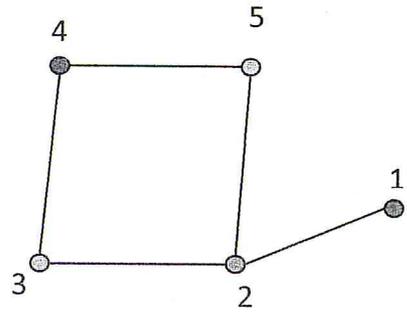
**Exemple 3.12:** Voir les graphes dans les figures 3.9 et 3.10.



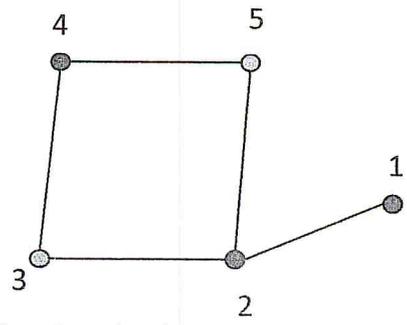
Graphe G



Coloration propre non dominante  
(sommets 1 et 4 ne dominent pas)

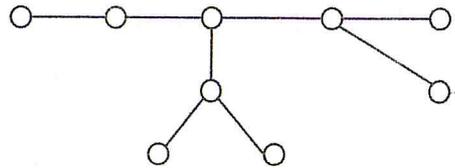


Coloration dominante

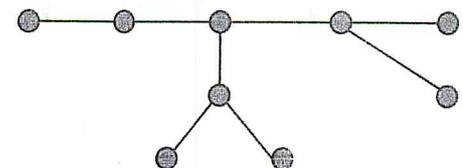


Coloration dominante minimum  $\chi_d(G) = 3$

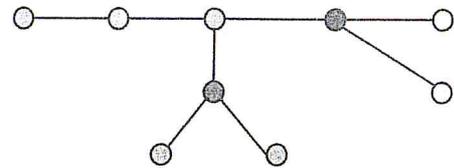
Figure 3.9. Coloration dominante d'un graphe G avec  $\chi_d(G) = 3$



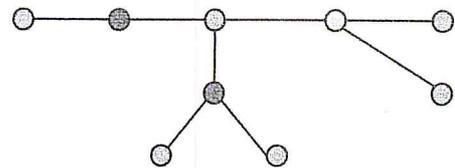
Un arbre T



Coloration propre non dominante



Coloration dominante



Coloration dominante minimum ( $\chi_d(T)=4$ )

Figure 3.10. Coloration dominante d'un arbre T avec  $\chi_d(T) = 4$

La coloration dominante a été présentée par S.M. Hedetniemi, S.T. Hedetniemi et A. A. McRae en 2006[31] et étudiée par R. Gera, S. Horton, C. Rasmussen en 2006[30], par R. Gera en 2007[32, 33] et par M. Chellali et F. Maffray en 2011[34].

Le problème de décision lié à ce paramètre ( $\chi_d(G)$ ) est NP-complet dans le cas général [30]. De nombreux travaux ont été menés pour définir des bornes pour le nombre chromatique dominant en fonction d'autres paramètres, aussi des résultats ont été obtenus sur des classes particulières.

### 3.2.1 Résultats sur le $\chi_d$ :

En 2006, R. Geras, S Horton, C. Rasmussen [30] ont donné les valeurs exactes du nombre chromatique dominant pour des graphes particuliers:

1. Pour le graphe complet  $K_n$   $\chi_d(K_n) = n$ . Tout sommet prend nécessairement une couleur différente des autres, il est seul dans sa classe.
2. Pour une étoile  $K_{1, n}$   $\chi_d(K_{1, n}) = 2$ . Le centre de l'étoile prend une couleur seul (il est seul dans sa classe) et les autres sommets prennent la même couleur (ils dominent la classe de couleur du centre.).
3. pour les cycles  $C_n$

$$\chi_d(C_n) = \begin{cases} \lfloor n/3 \rfloor & \text{si } n = 4 \\ \lfloor n/3 \rfloor + 1 & \text{si } n = 5 \\ \lfloor n/3 \rfloor + 2 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Exemple 3.3 :** Soient les graphes dans la figure 3.11. Ils admettent.  $\chi_d(C_4) = 2$ ,  $\chi_d(C_5) = 3$ ,  $\chi_d(C_7) = 5$ .

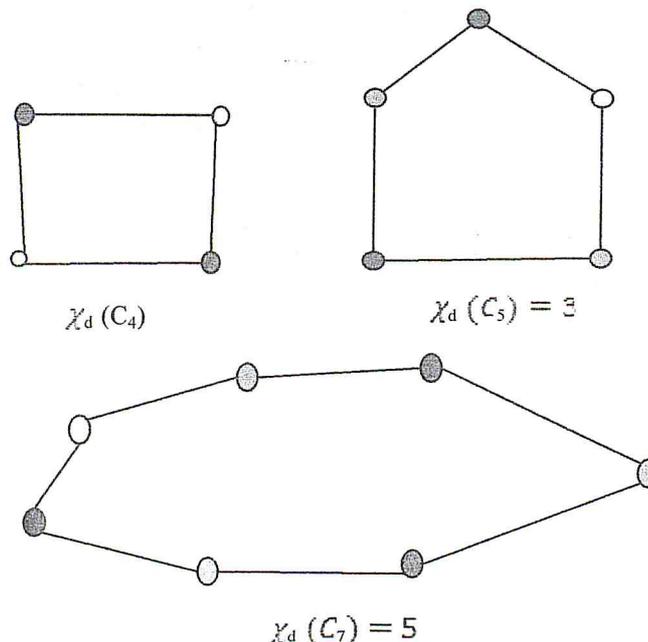


Figure3.11. Coloration dominante des cycles d'ordre 4, 5, 7.



### 3.2.1.1 Bornes supérieure et inférieure de $\chi_d(G)$ dans un graphe quelconque :

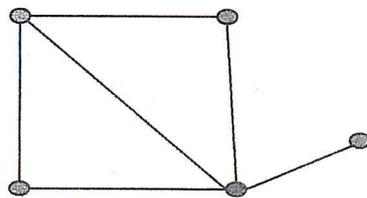
Il est clair que le nombre chromatique est une borne inférieure du nombre chromatique dominant car toute coloration dominante est une coloration propre.

$$\chi_d(G) \geq \chi(G)$$

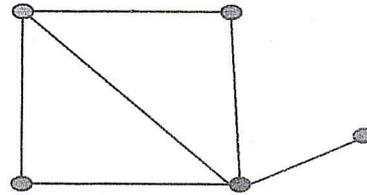
Gera, Ramssen et Horton [6] ont démontré quelques relations liant les nombres dominant, chromatique et chromatique dominant.

$$\text{Max} (\chi(G), \gamma(G)) \leq \chi_d(G) \leq \chi(G) + \gamma(G)$$

**Exemple 3.13 :** Soit le Graphe dans la figure3.12. Il admet :  $\chi_d(G)=3$ ,  $\chi(G)=3$ ,  $\gamma(G)=1$ .



Coloration propre  $\chi(G)=3$



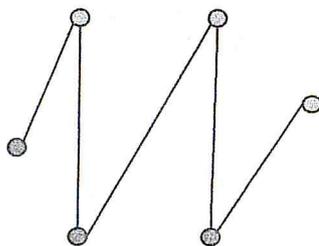
Coloration dominante minimum  $\chi_d(G)=3$

Figure3.12. Coloration dominante d'un graphe G avec  $\chi_d(G) = \text{max} (\chi(G), \gamma(G))$ .

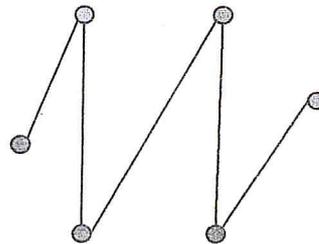
**Exemple 3.14:** Dans la figure3.9 précédent on a  $\chi_d(G) = 5$ ,  $\gamma(G) = 4$ ,  $\chi(G) = 2$ . Alors :

$$\text{Max} (\chi(G), \gamma(G)) = \text{max} (2, 4) \leq \chi_d(G) = 5 \leq \chi(G) + \gamma(G) = 6.$$

**Exemple 3.15 :** Soit le Graphe dans la figure3.13. Il admet  $\chi(G) = 2$ ,  $\gamma(G) = 2$ ,  $\chi_d(G) = 4$ . Alors :  $\chi_d(G) = \chi(G) + \gamma(G)$ .



Coloration propre minimum



Coloration dominante minimum  $\chi_d(G)=2$

Figure3.13. Coloration dominante avec  $\chi_d(G) = \chi(G) + \gamma(G)$ .

**Exemple 3.16 :** Soit un graphe  $G = (V, E)$  dans la figure 3.14. Il admet  $\chi_d(G) = 2$ ,  $\gamma(G) = 2$ ,  $\chi(G) = 2$ .

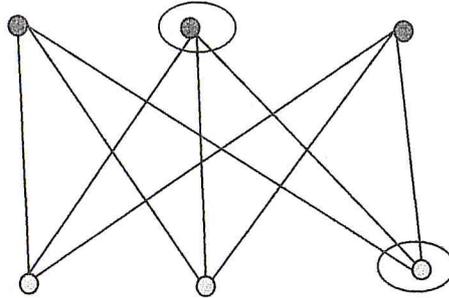


Figure 3.14. Coloration dominante avec  $\chi_d(G) = \gamma(G) = 2$ .

D'où, les bornes de la relation en haut sont atteintes.

Chellali et Maffray [34] en 2011, ont donné une borne supérieure et inférieure de  $\chi_d$  dans l'arbre avec le nombre de domination minimum.

$$\gamma(G) + 1 \leq \chi_d(T) \leq \gamma(G) + 2$$

**Exemple 3.17 :**

- Soit un arbre  $T$  donné dans la figure 3.15. Il admet :  $\gamma(T) = 4$ ,  $\chi_d(T) = 6$ .

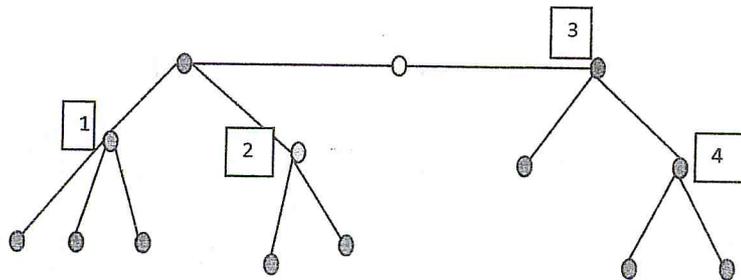


Figure 3.15. Coloration dominante avec  $\chi_d$

- Soit un arbre  $T$  dans la figure 3.16. Il admet  $\gamma(T) = 4$ ,  $\chi_d(T) = 5$ .

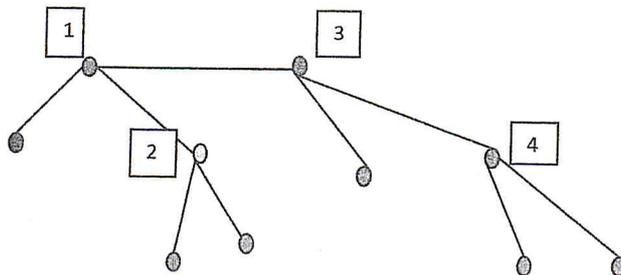


Figure 3.16. Coloration dominante avec  $\chi_d(T) = \gamma(T) + 1$

### 3.2.1.2 Caractérisation du nombre chromatique dominant :

En 2006, R. Geras, S Horton, C. Rasmussen [30] ont caractérisé les graphes avec  $\chi_d(G) = n$  (resp.  $\chi_d(G) = 2$ ). Comme les graphes complets (resp. les graphes biparti complet.

En 2011, Chellali et Maffray [34] caractérisent les graphes avec  $\chi_d(G) \leq 3$ . Comme exemple, nous avons les sommets isolés, les graphes où le nombre de sommets est inférieure ou égale à 3.

Remarquer que pour calculer  $\gamma(G)$  d'un arbre, il existe un algorithme polynomial [36]. Donc si nous pouvons déterminer si un arbre est de  $\chi_d(G) = \gamma(G) + 1$  ou de  $\chi_d(G) = \gamma(G) + 2$  en temps polynomial, nous pouvons alors calculer  $\chi_d$  en temps polynomial.

En 2011, Boumediene et Chellali caractérisent les arbres avec  $\chi_d(G) = \gamma(G) + 1$  (et donc ceux avec  $\chi_d(G) = \gamma(G) + 2$ ). La caractérisation évoque l'existence ou non d'un ensemble dominant minimum particulier, voir [35].

Ils déterminent aussi le  $\chi_d(G)$  d'un Caterpillar.

**Définition 3.18 :** un Caterpillar est un arbre  $T$  tel qu'en enlevant les feuilles, on obtient une chaîne. Voir la figure 3.17.

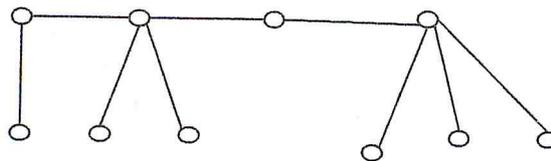


Figure3.17.Un Caterpillar.

Pour un Caterpillar,  $\chi_d(G) = \gamma(G) + 1$  si  $T$  est une étoile ou la distance entre tous deux supports (Un Support est le sommet adjacent à une feuille) est 1, 2 ou 4. Sinon  $\chi_d(G) = \gamma(G) + 2$ .

En 2011, Chellali et Maffray [34] donnent la valeur exacte où l'algorithme qui permet de le calculer le nombre chromatique dominant pour les graphes sans  $P_4$ .

### 3.2.2 Les problèmes ouverts :

Pour quelle classe de graphes, on a le nombre chromatique dominant du graphe  $G$  égale au nombre chromatique de sont complémentaire dominant  $\bar{G}$  ( $\chi_d(G) = \chi_d(\bar{G})$ ) ?

La relation qui lie les nombres dominant, chromatique et chromatique dominant.  
 $\max(\chi(G), \gamma(G)) \leq \chi_d(G) \leq \chi(G) + \gamma(G)$ . Donne les problèmes qui restent ouverts jusqu'à maintenant.

Les problèmes sont :

Pour quelle classe des graphes on a  $\chi_d(G) = \chi(G)$  ?

Pour quelle classe des graphes on a  $\chi_d(G) = \gamma(G)$  ?

Pour quelle classe des graphes on a  $\chi_d(G) = \chi(G) + \gamma(G)$  ?

La caractérisation des graphes avec  $\chi_d(G) = \chi(G) = \gamma(G) = 2$ , donne le problème suivant :

Pour quelle classe de graphes on a  $\chi_d(G) = \chi(G) = \gamma(G)$  ?

Le nombre chromatique dominant est prouvé NP-complet dans le cas général.

Quelle est la complexité de la coloration dominante dans des graphes particuliers ?

### 3.3 La coloration stricte forte :

**Définition 3.19 :** la coloration stricte forte c'est une coloration propre telle que tout sommet est adjacent à tous les sommets d'une classe de couleur (différente de sa propre classe). Le nombre minimum de classes de couleurs dans une coloration stricte forte, est appelé le nombre chromatique stricte forte et il est noté  $\chi_{ss}(G)$ .

**Exemple 3.20 :** voici quelques exemples pour illustrer la définition.

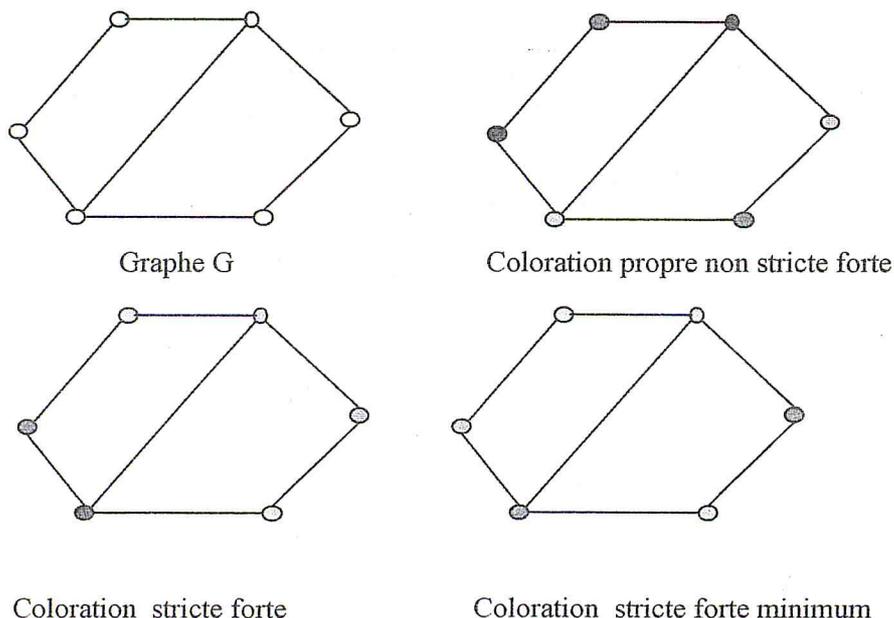


Figure 3.18. Coloration stricte forte d'un graphe G avec  $\chi_{ss}(G) = 4$

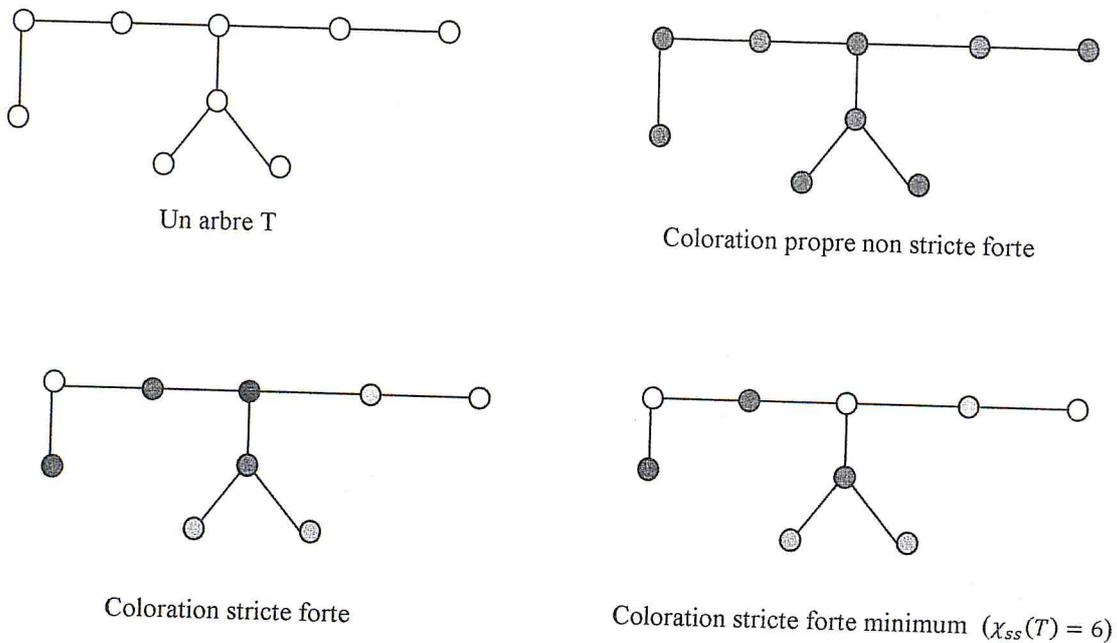


Figure 3.19. Coloration stricte forte d'un arbre T avec  $\chi_{ss}(T) = 6$

La coloration stricte forte a été présentée par Kheddouci et Haddad en 2008.

**Remarque 3.21 :** Toute coloration stricte forte est une coloration dominante ( $\chi_d \leq \chi_{ss}$ ).

### 3.3.1 Quelques résultats :

En 2008, Kheddouci a donné les bornes supérieure et inférieure du nombre chromatique stricte forte en fonction du nombre de domination dans les arbres.

$$\gamma + 1 \leq \chi_{ss}(G) \leq 2\gamma$$

**Exemple 3.22 :** Soit l'arbre T dans la figure 3.20, il admet :  $\chi_{ss}(T)=4$ ,  $\gamma(T)=2$ .

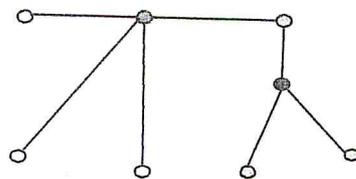


Figure 3.20. Coloration stricte forte d'un arbre T avec  $\chi_{ss} = 2\gamma$

**Exemple 3.23 :** Soit l'arbre T dans la figure 3.21. Il admet  $\gamma(T) = 1$ ,  $\chi_{ss}(T) = 2$ . Alors :

$$\chi_{ss}(T) = \gamma(t) + 1.$$

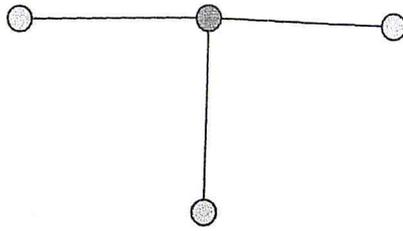


Figure 3.21. Coloration stricte forte d'un arbre  $T$  avec  $\chi_{ss} = \gamma + 1$

**Exemple 3.24 :** Soit un arbre  $T$  dans la figure 3.22. Il admet  $\chi_{ss}(T) = 5, \gamma(T) = 3$ .

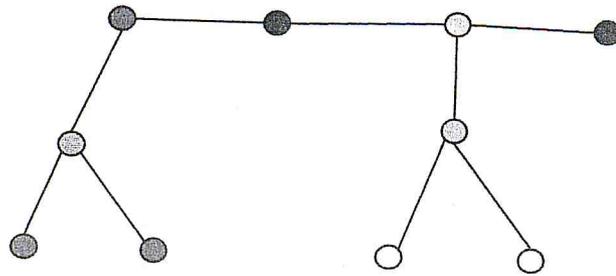


Figure 3.22. Coloration stricte forte d'un arbre  $T$  avec  $\gamma + 1 < \chi_{ss}(T) < 2\gamma$

## Conclusion

Dans ce mémoire nous nous sommes intéressés principalement aux notions de partitionnement de graphes et de domination. Le partitionnement est la partition de l'ensemble des sommets et la domination est définie sur les sommets ou sur les parties de la partition.

De la littérature, il existe plusieurs problèmes utilisant ces deux notions, parmi lesquelles il y en a qui sont bien étudiés et d'autres qui sont peu étudiés.

Principalement, les problèmes présentés dans ce mémoire, appartiennent à deux familles selon que la propriété de domination est définie sur les sommets du graphe ou sur les parties de la partition. Les problèmes faisant appel à la coloration ne sont que des variantes de problèmes plus généraux car la coloration propre n'est qu'une partition du graphe en parties induisant chacune un stable.

Biens que les résultats présentés ici soient importants, plusieurs questions restent ouvertes. Aussi de nouveaux problèmes liés aux deux notions de partitionnement et domination, peuvent être définis.

## Références

- [1] C. Berge, Graphes et Hypergraphe, North Holland, 1985.
- [2] Jean Claude Fournier et Jorge L. Ramirez Alfonsion, Graphes et application 1,
- [3] Duong Khanh Chong, Partitionnement de graphe, Thèse d'université, université Catholique de Louvain, Hnoi, 2009.
- [4] Charles Edmond Bichot, Elaboration d'une Nouvelle Métaheuristique pour partitionnement de graphe, Thèse d'université, l'université Polytechnique de Toulouse, 2007.
- [5] S.T Hedetniemi et R.C Laskar, Bibliography on domination in graphs and some basic definitions of domination parameters, 1990.
- [6] C.F de Jaenish, Applications de l'analyse mathématique au jeu d'échecs Petrograd, 1862.
- [7] Fricke G.H, S.M. Hedetniemi, S.T. Hedetniemi, A.A. Merae, C.K. Wallis, M.S. Jacobson, H. W. Martin et W.D. Wealkley, Combinatorial problems chessboards. Abriesurvey dens graph theory, Combinatorics and applications proc seventh quad, 1995.
- [8] C. Berge, theory of graphs and its applications, London (1962, 1985).
- [9] O. Orc, theory of graphs. Amer. Soc. Colloq. Pub 38, Providence, R.I, 1962.
- [10] E.J. Cokayne et S.T Hedetniemi, Towards a theory of dominations in graphs. Network, 1977.
- [11] Haynes T.W, Hedetniemi et D. J. Miller, Properts of heridetry hyper graphs and middle graph, Canad. Math. Bull, 1978.
- [12] C00k, The complexity of theorem Proving procedures, 1971.
- [13] B. Zelinka, Domatic numbers of cube graphs. Math. Slovaca 32, No.2, (1982).
- [14] M. R. Garey and D. S. Johnson. Computer and Intractability: A guide to the theory of NP-completeness Freeman. San Francisco. CA. (1979)
- [15] H. Kaplan, R. Shamir. The Domatic Number Problem on Some Perfect Graph Families. In information processing letters 49, 1994.
- [16] B. Zelinka, Domatic number of a graph and its variants, 1992.
- [17] B. Zelinka, Domatic number and linear arboricity of cacti. Math. Slovaca, A986.
- [18] F.Jaeger and C. Payan, Relations du type Nordhaus-Gaddum pour le nombre d'absorption d'un graphe simple, 1972.

- [19] B. Zelinka, On  $k$ -domatic numbers of graphs. Czechoslovak Mathematical Journal, 1983.
- [20] B. Zelinka, Domatic number and degrees of vertices of a graph. Math. Slovaca, 1983.
- [21] O. Ore, Theory of graphs. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 38, Providence 1962.
- [22] J. E. Dunbar, Teresa W. Haynes, Michael A. Henning, The domatic number of a graph and its complement. Congressus Numerantium 126, 1997.
- [23] Dunbar, Teresa W. Haynes, Michael A. Henning, Nordhaus-Gaddum type results for the domatic number of a graph. In Graph Theory, Combinatorics, and Applications, 1999.
- [24] E. J. Cockayne, R. M. Dawes, and S. T. Hedetniemi, Total domination in graphs. Networks, 1980.
- [25] M. Borowiecki and M. Kuzak, On the  $K$ -stable and  $K$ -dominating sets of graphs. Graphs, Hypergraphe and Block systems, Proc. Symp. Zielona Góra 1976, Eds. M. Borowiecki, Z. Skupieri and L. Szamkolowicz, Univ. Zielona Gora, 1976.
- [26] S. T. Hedetniemi and R. C. Laskar. Connected domination in graphs. In B. Bollobas, editor, Graph Theory and Combinatorics. Academic Press, London, 1984.
- [27] B. Zelinka, Complementarily domatic number of a graph. Math. Slovaca 38, 1988.
- [28] S. M. Hedetniemi, R. C. Laskar, A. A. McRae and C.K. Wallis, Dominator Partitions of graphs, (To appear).
- [29] Jobby Jacob, Renu Laskar, and Wayne Goddard, Clemson University, May, 2006.
- [30] R. Gera, S Horton, C. Rasmussen, Dominator Colorings and Safe Clique partitions, Congressus Numerantium, 2006.
- [31] S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, and A. A. McRae, Dominator colorings of graphs, 2006.
- [32] R. Gera. On dominator coloring in graphs, Graph Theory Notes of New York, 2007.
- [33] R. M. Gera. On the dominator coloring in bipartite graphs, 2007.
- [34] Mustapha Chellali et Frederic Maffray, Dominator Colorings in Some Classes of Graphs, 2001
- [35] Boumediene M.H. et Chellali M., Une note sur la Coloration Dominante, Université Saad Dahlab de Blida, 2011.
- [36] E. Cockayne, S. Goodman et S. Hedetniemi, A linear algorithm for the domination number of a tree, 1975.

- [37] S. Arumugam, I. Sahul Hamid, A. Muthukamatchi, Independent domination and graph colorings, Ramanujan Mathematical Society lecture notes series, 2008.
- [38] S. Arumugam, I. Sahul Hamid et A. Muthukamatchi, Maximal independent sets in minimum coloring, 2008. (Article)