REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

UNIVERSITE SAAD DAHLEB BLIDA

Faculté des sciences

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE MASTER

Spécialité : Recherche opérationnelle

Thème

Contribution à l'étude de la 2-domination dans les arbres, γ_2-excellence et autres

Présenté par :

Melle Meddah Fatma

Devant les membres de jury :

- M^{r} **Blidia Mostafa** — **Président** — Professeur USD, Blida
- M^{me} **Lounes Rahma** — **Examinateur** — Maître Assistante Médea
- M^{me} **Meddah Nacéra** — **Promotrice** — Maître Assistante USD, Blida

PROMOTION : 2010-2011

Table des matières

Remerciements

je tiens à commencer ce mémoire en adressant mes remerciements à toutes les personnes que j'ai côtoyées durant ces années et qui ont chacune apporté leur pierre à l'édifice.

Je tiens à adresser des remerciements tout particuliers aux personnes qui m'ont encadrée durant cette thèse : à Madame Meddah Nacéra pour ses commentaires toujours avisés, m'avoir suivie tout au long de ma thèse et pour m'avoir fait partager son expérience, son enthousiasme et sa passion qui m'ont permis de m'épanouir pleinement dans ce travail.

Je remercie M^r Blidia Mostafa de m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse.

Je remercie aussi M^m Lounes Rahma, qui a accepté de juger ce mémoire.

Enfin, je remercie tous ceux qui étaient à côté de moi durant le déroulement de ce mémoire.

DEDICACE

Je dédie ce mémoire..

A la mémoire de mon cher papa, Je ne saurais exprimer mon grand chagrin en ton absence. J'aurais aimé que tu sois à mes cotés ce jour.

A ma très chère maman

Aucune dédicace ne saurait exprimer mon grand respect, et ma reconnaissance pour les sacrifices que tu as consentis pour mon éducation. J 'implore dieu le tout puissant de vous accorder bonne santé et longue vie.

A mon frère Mohamed et ma soeur Hayat

Votre soutien m'a donné force et encouragement.

A tous mes amis et mes collègues de deuxime année master surtout ma chére Amira, Yassmine, Amina, Hanane, Nassima et Sid ali.

ABSTRACT

Let $G = (V, E)$ be a simple graph. A dominating set of G is a subset S of V such that every vertex of $V - S$ has at least a neighbourd in S. The minimum order of a dominating set of G, called domination number of G, is denoted by $\gamma(G)$. We can define others types of domination if we impose one (or many) additional condition (s) on the dominating set. For example, if we impose that every vertex of $V - S$ has at least k neighbourds in S, we obtain the multiple domination (k-domination). For any parameter of domination $\mu(G)$, a dominating set S of cardinality $\mu(G)$ which verify the desired property is called $\mu(G)$-set. If we say that a vertex is in any or is not in any $\mu(G)$-set, then we characterize this vertex. We say that G is μ-excellent graph if every vertex of G is in a $\mu(G)$-set.

In this thesis, we are interested to excellent graphs for the type 2-domination, by the approache based on the characterization of vertices belonging to all or to no $\gamma_2(G)$-set. Our contribution in this thesis is characterizing trees for the 2-domination type. Finally, we established an algorithm of reconnaissance of γ_2-excellent trees, γ_2-recommendable trees, γ_2-undesired trees, γ_2-justed trees.

RESUME

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Un dominant de G est un sous ensemble S de V tel que tout sommet de $V - S$ possède au moins un voisin dans S. L'ordre minimum d'un ensemble dominant de G, appelé nombre de domination de G, et est noté $\gamma(G)$. On peut définir d'autres types de domination si on impose une (ou plusieurs) condition (s) supplémentaire sur l'ensemble dominant. Par exemple, si on impose la condition que tout sommet de $V - S$ possède au moins k voisins dans S, on obtient la k-domination. Pour tout paramètre $\mu(G)$, un ensemble dominant S de cardinal $\mu(G)$ vérifiant la propriété désirée est appelé $\mu(G)$-ensemble. Si on dit qu'un sommet est dans tout ou dans aucun $\mu(G)$-ensemble, alors on caractérise ce sommet. On dit qu'un graphe G est μ-excellent si tout sommet de V est contenu dans au moins un $\mu(G)$-ensemble.

Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'étude de l'excellence des graphes par rapport à la 2-domination, en suivant l'approche qui consiste à caractériser les sommets qui sont tout ou dans aucun $\gamma_2(G)$-ensemble. Notre contribution dans ce mémoire consiste à caractériser les arbres excellents par rapport à la 2-domination. Enfin, on établit un algorithme de reconnaissance des arbres γ_2-excellents, les arbres γ_2-recommandables, les arbres γ_2-indésirables et les arbres γ_2-justes.

LA LISTE ILLUSTRATIONS GRAPHIQUE

LISTE DES SYMBOLES

G	Le graphe $G = (V, E)$.
$V(G)$	L'ensemble des sommets de graphe G.
$E(G)$	L'ensemble des arêtes de graphe G.
$G[H]$	Le sous graphe induit par l'ensemble des sommets $H \subseteq V(G)$.
$N_G(v)$	Le voisinage ouvert de sommet v dans le graphe G.
$N_G[v]$	Le voisinage fermé de sommet v dans le graphe G.
$N_G(S)$	Le voisinage ouvert d'un ensemble $S \subseteq V(G)$ dans G.
$N_G[S]$	Le voisinage fermé d'un ensemble $S \subseteq V(G)$ dans G.
$pn[v, S]$	Le voisinage privée de sommet v par rapport à un ensemble $S \subseteq V(G)$.
$deg_G(v)$	Le degré de sommet v dans le graphe G.
$\Delta(G)$	Le degré maximum des sommets dans le graphe G.
$\delta(G)$	Le degré minimum des sommets dans le graphe G.
P_n	Une chaîne d'ordre n.
C_n	Un cycle d'ordre n.
$i(G)$	Le nombre d'indépendance (stable) inférieur.
$\beta(G)$	Le nombre d'indépendance (stable) supérieur.
$i_1(G)$	Le nombre de couplage inférieur.
$\beta_1(G)$	Le nombre de couplage supérieur.
$\gamma(G)$	Le nombre de domination inférieur.
$\gamma_t(G)$	Le nombre de domination totale inférieur.
$\gamma_L(G)$	Le nombre de domination localisatrice inférieur.
$\gamma_k(G)$	Le nombre de domination multiple inférieur.
$\gamma_{x2}(G)$	Le nombre de domination double inférieur.
$\gamma_{pr}(G)$	Le nombre de domination couplée inférieur.

INTRODUCTION

La représentation d'un problème par un dessin, un plan, ou une esquisse contribue souvent a sa compréhension. Le langage des graphes est construit, a l'origine, sur ce principe. Nombres de méthodes, de propriétés, de procédures ont été pensées ou trouvées à partir d'un schéma pour être ensuite formalisées et développées. Les graphes sont très utilisés dans l'informatique. On les trouve partout: les réseaux, l'ordonnancement de processus,.... Mais ils sont surtout utilisés pour modéliser des problèmes plus ou moins complexes. Ainsi on pourra représenter un réseau de chemin de fer ou un réseau routier. Et ensuite on peut se servir de cette modélisation pour résoudre des problèmes tels que la recherche du plus court chemin entre deux villes.

La théorie des graphes est très probablement née en 1735 lorsque LEONHARD EULER $(1707-1783)$ résout le problème des sept ponts de Königsberg (De nos jours Kaliningrad en Russie). Ce problème est très simple sur le principe mais un peu plus compliqué à démontrer, en voici l'énoncé : La vile de Königsberg est une ville autour d'un fleuve, elle compte quatre berges et sept ponts les reliant. Le but du jeu est de savoir s'il existe un chemin permettant d'emprunter tous les ponts une fois et une seule et revenir au point de départ. Le problème s'appelle, de façon plus formelle, la recherche d'un cycle eulérien dans un graphe. Euler a démontré que ce problème n'avait pas de solution.

Les structures et paramètres intéressants varient selon les applications envisagées car les graphes présentent une grande souplesse d'utilisation. Les sujets d'étude abordés étant trop nombreux pour pouvoir être tous décrits, on peut citer les nombreuses études menées dans des classes de graphes spécifiques et celles portant sur des paramètres de domination. Malgré la grande simplicité de sa définition, il est NP-complet.

De nombreuses types du problème de Domination ont été étudiées. Souvent le problème requiert des propriétés supplémentaires sur l'ensemble dominant. Les livres de HAYNES, HEDETNIEMI et SLATER [1] offrent un panorama encore plus large puisque plus de 75 types y sont citées. Parmi les types de domination les plus connue est la domination total, domination couplée, et la k-domination (domination multiple).

Le problème central que nous étudions dans ce mémoire est de étudié l'excellence des graphe, caractériser des ensemble des sommets qui sont dans tout où si dans aucun ensemble minimum, pour certain types de domination et citer des algorithmes de l'élagage associé à chaque type, les premiers qui a étudié ce problème est HAMMER [2] en 1982, MYNHARDT [3] en 1999.

Le premier chapitre présentera les définitions et les notions habituelles sur la théorie des graphes qui seront utiles pour la suite. Ainsi on donne une présentation générale de la domination dans les graphes. Enfin, le chapitre terminera par un petit résumé sur l'éfficacité des algorithmes et de la difficulté des problèmes.

Nous en profiterons au chapitre 2 pour donner des résultats connus sur l'excellence dans divers types de dominations. Il convient de souligner qu'il existe d'autres résultats sur les mêmes types que nous éxposerons dans ce chapitre.

Nous nous intéressons dans le troisième chapitre à étudier l'excellence des graphes et à caractériser l'ensemble des sommets qui sont dans tout ou ne sont dans aucun γ_2-ensemble. Grâce à des techniques utilisées par MYNHARDT [3] et BLIDIA et al [4], nous donnons quelques théorèmes qui contribuent à proposer un processus d'élagage dans les arbres par rapport à la 2-domination, enfin on donne un algorithme de réconaissance des arbres γ_2-excellents, les arbres γ_2-recommandables, les arbres γ_2-indésirables et les arbres γ_2-justes.

La thèse s'achève par une conclusion sur l'ensemble des travaux réalisés et sur les perspectives futures dans ce mémoire.

CHAPITRE 1

Généralités et Terminologies

Dans cette première partie de ce chapitre on rappelle quelques définitions et notions fondamentales relatives aux graphes auxquels nous nous intéresserons dans la suite de ce mémoire. Nous en profitons également pour introduire les notations utilisées dans la deuxieme partie de ce chapitre, nous étudions une généralisation sur la Domination dans les graphes avec des petites définitions pour quelques types de domination. Enfin, nous donnons un aperçu sur l'éfficacité des algorithmes et sur la complexité des problèmes.

Nous invitons le lecteur à se référer de l'ouvrage de BERGE [5] pour avoir plus de détails concernant les notions de théorie des graphes et de l'ouvrage de HAYNES [1], qui concerne les notions liées à la domination.

1.1 Définitions et notations

1.1.1 Graphe

Un graphe est un couple $G = (V(G), E(G))$, où $V(G)$ est un ensemble *de sommets* non vide et fini, et $E(G)$ est un ensemble *des arêtes* (En générale on note $V(G)$ par V et $E(G)$ par E). Une arête est une paire de sommets de V. Le cardinal de V est appelé *ordre* de G, et est noté par n. Le cardinal de E est noté par m. Les sommets sont notés de manière usuelle par des lettres minuscules: $v, u, x, y...$, etc. Les arêtes sont notées $uv, xy...$ etc. Si $e = uv$ est une arête du graphe G, on dit que les sommets u, v sont les extrémités de e, que u et v sont adjacents et que e est incidente à u et à v. Les graphes peuvent être représentés graphiquement à l'aide de points (sommets) et de segments (arêtes). A titre d'exemple la Figure 1.1 est une représentation d'un graphe G, avec $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

et $E = \{v_1v_2, v_1v_4, v_1v_5, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4, v_3v_5\}$. Les sommets v_1 et v_2 sont adjacents dans G.

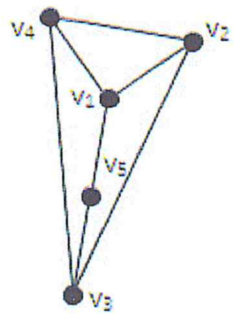

Figure 1.1. Représentation d'un graphe G.

Un graphe d'ordre 1 est dit *trivial*, si non on dit *nontrivial.* Une arête à une extrémité est dite *boucle.* Un graphe G est dit *simple* si G est sans boucles, et si deux sommets quelconques de G sont reliés par au plus une arête. Dans tout ce qui suit, les graphes considérés sont simples et nontriviaux. Par exemples le graphe G dans la Figure 1.1 est un graphe nontrivial et simple.

1.1.2 Sous-graphe

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Pour un sous-ensemble $H \subseteq V$, le sous graphe induit par H noté $G[H]$ ou simplement $\langle H \rangle$, est le graphe ayant H pour ensemble de sommets et dont les arêtes sont celles de E ayant leurs deux extrémités dans H. Dans la Figure 1.2 suivante $G[H]$ est un sous graphe de G avec $H = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

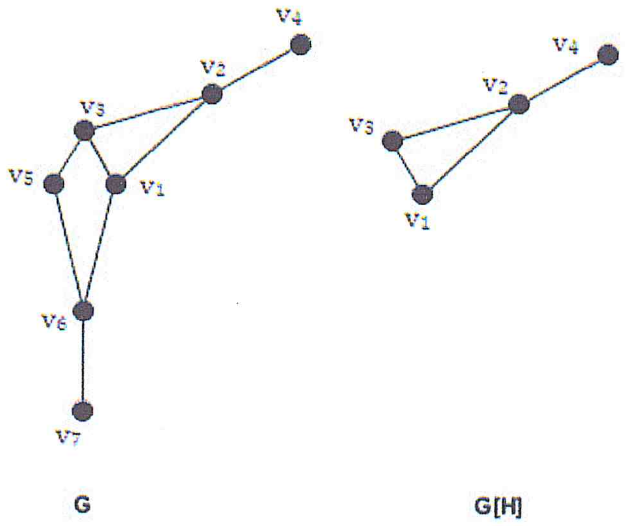

Figure 1.2. le graphe G et le sous graphe induit par $H = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

Nous dirons qu'un sous-ensemble A de V est minimal (resp. maximal) par rapport à une propriété $\mathcal{P}$ s'il n'existe pas un ensemble $B \subseteq A$ (resp. $B \supseteq A$) tel que $G[B]$ vérifie $\mathcal{P}$.

Nous dirons qu'un sous-ensemble A de V est minimum ou de taille minimale (resp. maximum ou de taille maximale) par rapport à une propriété $\mathcal{P}$ s'il n'existe pas un ensemble $B \subseteq A$ (resp. $B \supseteq A$) tel que $G[B]$ vérifie $\mathcal{P}$ et $|A| > |B|$ (resp. $|A| < |B|$) où $|A|$ (resp. $|B|$) est le cardinal de l'ensemble A(resp. B).

1.1.3 Voisinage

Etant donné le graphe $G = (V, E)$. *Le voisinage ouvert* d'un sommet $v \in V$ est $N_G(v) = \{u \in V \mid uv \in E\}$. *Le voisinage fermée* de v est $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. L'ensemble $N_G(S) = \underset{v \in S}{\cup} N_G(v)$ (resp. $N_G[S] = N_G(S) \cup S$) est le voisinage ouvert (resp. le voisinage fermé) du sous-ensemble $S \subseteq V$. *Le voisinage privé* d'un sommet v par rapport à un ensemble S est l'ensemble des sommets du voisinage fermé de v qui n'ont pas d'autres voisins dans S. Cet ensemble noté par $pn[v, S]$ est donné par $pn[v, S] = \{u : N[u] \cap S = \{v\}\}$.Dans la Figure 1.1, $N(v_2) = \{v_1, v_3, v_4\}$ et $N[v_2] = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Si $S = \{v_2, v_4, v_5\}, N[S] = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, pn[v_1, S] = \{v_5\}$.

1.1.4 Degré d'un sommet

Le degré d'un sommet v noté par $\deg_G(v)$, est le nombre des voisins de v. Le sommet de degré 0 est un sommet *isolé,* le sommet de degré 1 est un sommet *pendant.* Un sommet adjacent à au moins un sommet pendant est appelé *sommet support.* On note par $\Delta(G)$ et $\delta(G)$ le degré maximum et minimum dans G, respetivement. Si tous les sommets de G ont le même degré k, alors G est dit *k-régulier.* Dans la Figure 1.1, $\deg_G(v_1) = 3$, $\delta(G) = 2$ et $\Delta(G) = 3$.

1.1.5 Chaîne et cycle

Une chaîne P d'un graphe G est une suite $[v_1, v_2, ..., v_k]$ de sommets distincts tels que pour chaque $i \in \{1, ..., k-1\}$, $v_i v_{i+1}$ soit une arête de G. De plus, si $v_1 v_k \in E$, alors $[v_1, v_2, ..., v_k, v_1]$ est applé *un cycle.* Pour simplifier les notations, la chaîne $[v_1, v_2, ..., v_k]$ sera notée $v_1, v_2, ..., v_k$. Les sommets $v_2, ..., v_{k-1}$ sont appelés *sommets intermédiaires* de la chaîne. *Une corde* est une arête reliant deux sommets non consécutifs dans une chaîne ou dans un cyle. Une chaîne (rep. cycle) sans cordes est dite (resp. dit) induite (resp. induit). La longueur d'une chaîne (resp. cycle) est le nombre d'arêtes qu'elle (resp. qu'il) contient. Ainsi, la longueur de la chaîne $v_1, v_2, ..., v_k$ (resp. cycle $v_1, v_2, ..., v_k, v_1$) est $k-1$ (resp. k). Une chaîne induite (resp. cycle induit) par k sommets est notée P_k (resp. noté C_k). En effet les graphes de la Figure 1.3.

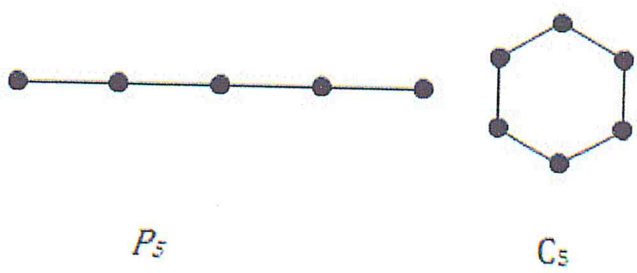

Figure 1.3. Une chaine P_5 et un cycle C_6.

1.1.6 Distance et diamètre

Dans un graphe G, *la distance* $d_G(x, y)$ dans G entre deux sommets x, y est la longueur de la plus courte chaîne $x - y$ dans G, si aucune chaîne existe nous fixons $d(x, y) = \infty$. Le diamètre de G est notée par $diam(G) = \max(d_G(x, y))$. Un sommet est *central* dans G si sa plus grande distance à partir de n'importe quel autre sommet est aussi petite que possible, cette distance est *le rayon.*

1.2 Graphes particuliers

1.2.1 Graphe connexe

Un graphe G est appelé *connexe* si chaque paire de sommets sont reliés par une chaîne dans G. Un sous-graphe maximal connexe de G est appelé *composante connexe.* Une arête e est appelée un *isthme* (arête d'articulation du graphe G) si le graphe $G - e$ possède plus de composantes connexes que G. Un sommet v du graphe G est appelé *un sommet d'articulation* du graphe G si le graphe $G - v$, a plus de composantes connexes que G. Dans la Figure1.3, les graphes P_5 et C_6 sont connexes et toutes les arêtes de P_5 sont des isthmes, et ses sommets intermédiaires sont des sommets d' articulations.

1.2.2 Graphe complet

Le graphe *complet* d'ordre n, noté K_n, est un graphe dont tous les sommets distincts sont adjacents, donc K_n est un $(n - 1)-$régulier. En effet le graphe complet K_6 de la Figure 1.4.

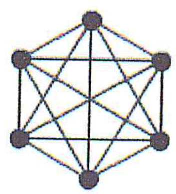

Figure 1.4. Un graphe complet d'ordre 6.

1.2.3 Graphe biparti

Un graphe est dit *biparti* si son ensemble des sommets peut être partitionné en deux sous-ensembles X et Y de telle sorte que chaque arête à une extrémité dans X et une dans Y, une telle partition (X, Y) est appelée une bipartition du graphe, telle que X et Y sont ses parties. On note un graphe biparti G avec la bipartition (X, Y) par $G[X, Y]$, ou bien $K_{r,s}$, tel que $r = |X|$ et $s = |Y|$. Si $G[X, Y]$ est simple et tous les sommets dans X sont reliés à chaque sommet de Y, alors G est appelé un graphe *biparti complet.* La Figure 1.5 est un exemple sur un graphe biparti $K_{3,4}$.

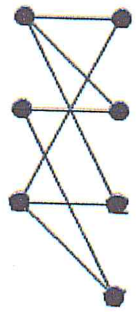

Figure 1.5. Un graphe biparti $K_{3,4}$

1.2.4 Les étoiles

Une étoile est un graphe biparti complet $G[X, Y]$ avec $|X| = 1$ ou $|Y| = s$, et est notée par $K_{1,s}$. On appelle le sommet de X, le sommet central de l'étoile. En effet, dans la Figure 1.6, le sommet v_1 est le centre de l'etoile $K_{1,s}$.

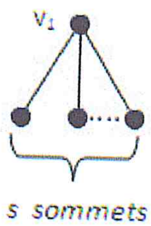

Figure 1.6. L'étoile $K_{1,s}$ de centre v_1.

Une étoile subdivisée SS_k est une étoile dans laquelle toutes les arêtes sont subdivisées en deux. En effet le graphe de la Figure 1.7.

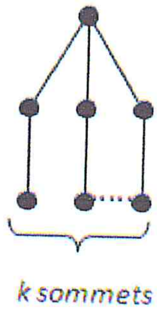

Figure 1.7. Une étoile subdivisée SS_k.

Une double étoile $S_{r,k}$ est le graphe formé par les deux étoiles $K_{1,r}$ et $K_{1,k}$ avec une arête reliant les deux sommets centres. En effet le graphe de la Figure 1.8.

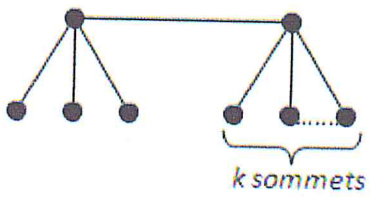

Figure 1.8. Une double étoile $S_{3,k}$.

Une étoile double subdivisée $S^*_{r,k}$ est un graphe obtenu à partir d'une étoile double en subdivisant l'arête reliant les deux sommets supports par un sommet. En effet le graphe de la Figure 1.9.

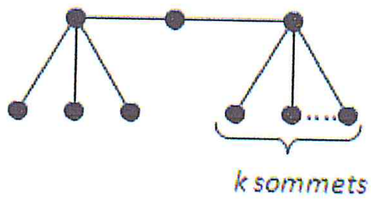

Figure 1.9. Une étoile double subdivisée $S^*_{3,k}$.

1.2.5 Couronne

La couronne $G = H \circ K_1$ d'un graphe H est le graphe obtenu à partir d'une copie de H en attachant un sommet pendant à chaque sommet de H. Il est évident que l'ordre de G est egal à $2|H|$. A titre d'exemple le graphe de la Figure 1.10.(b) est une couronne de graphe G de la Figure 1.10.(a).

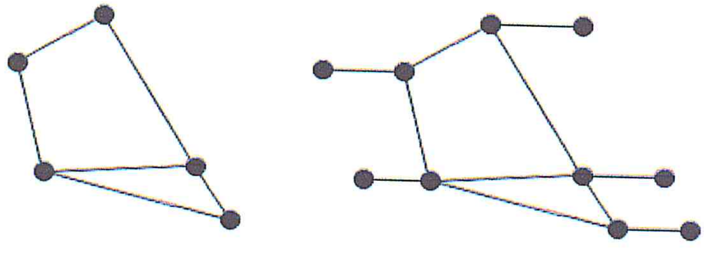

Figure 1.10. Un graphe G et la couronne associeé à G.

1.2.6 Forêt et arbre

Un graphe *acyclique* est un graphe ne contenant pas de cycles, est appelée aussi *la forêt*, une forêt connexe est appelé *un arbre*, en général un arbre est noté par T. Le sommet de degré un est *une feuille* ou un sommet *pendant*. Il est parfois commode de considérer un sommet spécial d'un arbre, un tel sommet est appelé *la racine*. *Un* arbre pendu T avec une racine r fixé est *un arbre enraciné*. Les Figures 1.6, 1.7, 1.8, 1.9 et 1.11, sont des représentations des arbres. Dans la Figure 1.11 suivante, le sommet r est la racine de l'arbre T ayant 4 sommets pendants.

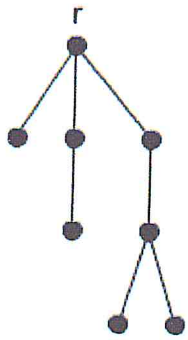

Figure 1.11. Un arbre T enraciné en r.

1.3 Quelques paramètres structuels d'un graphe

1.3.1 Un stable

Un stable dans un graphe G, appelé aussi, ensemble *indépendant*, est un ensemble S de sommets deux à deux non adjacents. Le cardinal minimum (resp. maximum) d'un stable maximal de G noté $\iota(G)$ (resp. $\beta(G)$) est appelé le nombre de domination stable (resp. le nombre de stabilité) de G.

1.3.2 Un couplage

Un couplage dans un graphe G est un sous-ensemble d'arêtes non incidentes deux à deux. Le cardinal minimum (resp. maximum) d'un couplage maximal de G noté $\iota_1(G)$ (resp. $\beta_1(G)$). Le couplage E est dit parfait dans G si tout sommet de V est incident à une arête de E.

1.4 La domination dans les graphes

Ayant présenté les notions fondamentales de la théorie des graphes, nous sommes maintenant en mesure de définir et discuter la notion d'ensemble dominant dans un graphe.

Considérons le problème suivant qui a été à l'origine de l'étude des ensembles dominants dans les graphes. La notion de domination dans les graphes tire son origine des problèmes des jeux d'échecs, introduit par D. JAENISCH [6]. La Figure 1.12 montre un échiquier standard 8×8 dans lequel est placée une reine "R". D'après les règles du jeu d'échecs, une reine peut, en un coup, se déplacer à n'importe quelle case horizontalement, verticalement ou diagonalement. Ainsi, la reine dans la Figure 1.12. peut se déplacer à (ou attaquer ou dominer) n'importe quelle case marquée par un "X". Au 19 éme siècle, les échephiles européens ont considéré le problème de déterminer le nombre minimum de reines qui peuvent être placées sur l'échiquier de telle sorte que toutes les cases de ce dernier soient attaquées ou occupées par une reine. La Figure 1.12. montre un ensemble de six reines qui attaquent ou dominent toutes les cases de l'échiquier

A cette même époque, on croyait que le nombre minimum de reines pour dominer les cases d'un échiquier 8×8 était 5. Ce qui est d'ailleurs vrai.

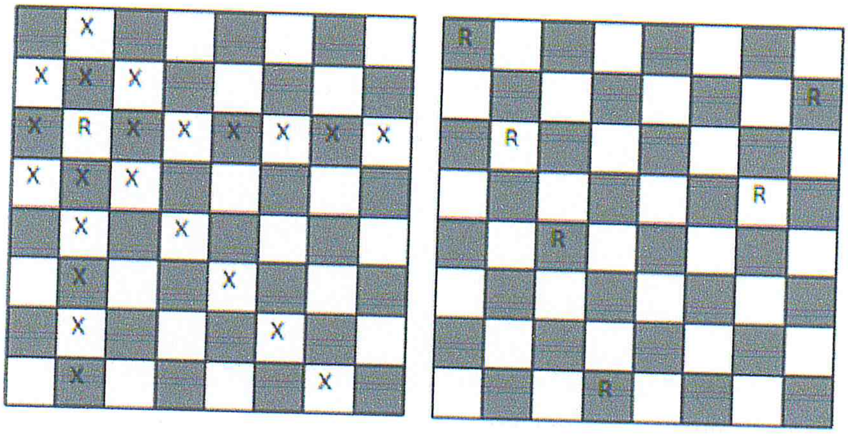

Figure 1.12: Les reines dans échiquier.

Le problème de domination des cases d'un échiquier peut être présenté d'une manière plus générale pour n'importe quelle pièce du jeu d'échecs en un problème de domination des sommets d'un graphe. En effet, soit $G = (V, E)$ un graphe simple dont les sommets représentent les cases de l'échiquier. Deux sommets de G sont adjacents si on peut se déplacer à partir de l'un vers l'autre en un coup de la pièce considérée. Un sous-ensemble de sommets D de V est *un dominant* de G si tout sommet de $V - D$ est adjacent à au moins un sommet de D. Le cardinal minimum d'un ensemble dominant de G, appelé *nombre de domination*, est noté $\gamma(G)$. Tout ensemble dominant de cardinal $\gamma(G)$ est appelé $\gamma(G)$-ensemble. Le cardinal maximum d'un ensemble dominant minimal de G appelé *nombre de domination supérieur* est noté $\Gamma(G)$.

Notons qu'un graphe G peut avoir plusieurs $\gamma(G)$-ensembles mais un seul nombre de domination. Dans la Figure 1.13, $\gamma(G) = 2$, mais il existe trois $\gamma(G)$-ensembles : $D_1 = \{v_1, v_6\}, D_2 = \{v_2, v_6\}, D_3 = \{v_4, v_6\}$. Notons qu'un ensemble dominant est minimal si et seulement si $pn[v, D] \neq 0$ pour tout $v \in S$

Bien que l'histoire de l'étude mathématique des ensembles dominants n'a commencé qu'à la fin des années 50 du siècle précédent, ce sujet a des origines qui remontent à 1862, quand JAENISCH [6] a étudié le problème des reines dans un jeu d'échecs présenté précédement.

En 1958, BERGE [7] donna une formulation de la domination dans les graphes orientés et appela le nombre de domination *coefficient de stabilité externe*. En 1962,ORE [8] publia son livre de théorie des graphe dans lequel il utilisa pour la premièr fois les appellations "ensemble dominant" et "nombre de domination" quoi qu'il ait noté le nombre de domination $d(G)$.

Quoi qu'il en soit, l'article de COCKAYNE et HEDETNIEMI [9] publie en 1977 qui a fait le tour des résultats obtenus dans le domaine de la domination a été le premier indice du grand intérêt que portaient les chercheurs pour ce domaine à cette époque.

La domination a pu attirer plus d'attention dans les années qui ont suivi et en 1990, HEDETNIEMI et LASKAR [10] ont publié un numéro dans la reine spécial de discrete maths consacré entièrement à la domination. La bibliographie de 1990 a révélé une augmentation impressionnante du nombre de références dans ce domaine. En effet, dans une période de 30 ans, ce nombre est passé de 20 a 400 références. Cette croissance intensive est actuellement plus évidente avec plus de 1200 références dont 950 Figurent dans le livre de HAYNES, HEDETNIEMI et SLATER [1] publié en 1998.

1.4.1 Concept de domination

Il se peut que ce grand intérêt à la domination provienne en partie de la variété des perspectives avec lesquelles ce problème peut être vu. Par exemple, voici quelques définitions équivalentes d'un ensemble dominant:

Recouvrement sommet-sommet: Un ensemble $S \subset V$ est un ensemble dominant du graphe G si tout sommet dans $V - S$ possède au moins un voisin (est couvert ou dominé par un sommet) dans S.

Intersection d'ensemble: Un ensemble $S \subseteq V$ est un ensemble dominant du graphe G si tout sommet $x \in V - S$, $N(x) \cap S = \emptyset$.

Réunion de voisinages: Un ensemble $S \subset V$ est un ensemble dominant du graphe G si $N[S] = \bigcup_{v \in S} N[v] = V$.

Fonction de domination: Soit f la fonction $f : V \longrightarrow \{0, 1\}$ telle que pour tout sommet $v \subset V$, $\sum_{u \in N[v]} f(u) \geq 1$.

1.4.2 Quelques types de domination

Une autre movitation pour l'étude de la domination est la possibilité de former de nouveaux paramètres de domination. En effet, beaucoup de paramètres de domination ont vu le jour en combinant la domination avec une ou plusieures propriété (s) ou condition (s) supplémentaire (s) P dans les graphes. Ainsi, des paramètres peuvent être définis en imposant une ou plusieures contrainte (s) additionelle (s) sur l'ensemble dominant ou sur l'ensemble dominé ou même sur la façon de dominer. considérons maintenant quelques types de domination parmi ceux qui feront l'objet des prochains chapitres:

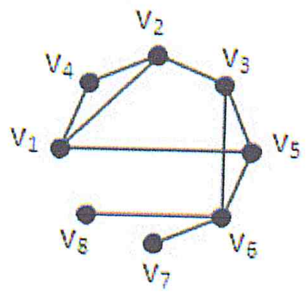

Figure 1.13. Un graphe G.

La domination totale: La domination totale a été introduite par COCKAYNE, DAWES, et HEDETNIEMI [11]. Un sous-ensemble D de V est dit dominant total de G si tout sommet de V possède un voisin dans D. Le nombre de domination totale, noté $\gamma_t(G)$, est la taille minimum d'un ensemble dominant minimal total de G. Dans la Figure 1.13, l'ensemble $D = \{v_1, v_5, v_6\}$ est un ensemble dominant total minimum, d'où $\gamma_t = 3$.

Pour son application, on considère l'exemple de la selection d'un comité à partir d'un ensemble d'individus tels que:

i) Tout individu non membre du comité connait au moins un membre du comité. L'ensemble des individus du comité représente un dominant.

ii) Tout membre du comité connait au moins un autre membre du comité pour qu'il ne soit pas isolé. Ainsi l'ensemble des membres du comité représente un dominant total. Le plus petit comité en taille avec ces propriétés est un γ_t–ensemble dans le graphe des connaissances sur l'ensemble des individus.

La domination localisatrice : La notion d'ensemble dominant localisateur a été introduit par P.J. SLATER [12]. Un sous-ensemble D de V est dit dominant localisateur de G si D est un ensemble dominant de G et, de plus, pour toute paire de sommets u, v de $V - D, N(v) \cap D \neq N(u) \cap D$. Le nombre de domination localisateur, noté γ_L, est le cardinal minimum d'un ensemble dominant localisateur de G. Dans la Figure 1.13, l'ensemble $D = \{v_1, v_2, v_6, v_7\}$ est un ensemble dominant localisateur minimum, d'où $\gamma_L = 4$.

La domination multiple : Le concept de la k-domination a été introduit par FINK et JACOBSON [13] en 1984. Un sous ensemble D de V est dit dominant multiple ou k-dominant de G si tout sommet de $V - D$ possède au moins k voisins dans D. Le nombre de domination multiple ou nombre de k-domination, noté par $\gamma_k(G)$, est la taille minimum d'un ensemble dominant multiple minimal de G. Dans la Figure 1.13, si $k = 2$, alors l'ensemble $D = \{v_1, v_2, v_3, v_7, v_8\}$ est un ensemble dominant multiple minimum, d'où $\gamma_2 = 5$.

Pour son application, on considère le problème de la localisation des radars pour contrôler une région donnée : Un certain nombre de points stratégiques $A, B, ..$ (les cellules) sont surveillés par des unités militaires pourvues de radars ; On exige que chaque cellule soit surveiller par au moins k radars. Le problème consiste à déterminer le nombre minimum de radars à installer ainsi que leur emplacement de telle sorte qu'on contrôle toutes les cellules en respectant la contrainte de la k-domination.

La domination double : Le concept de la domination double a été introduit par HARARY et HAYENES [14]. Un sous-ensemble D de V est dit dominant double de

G si tout sommet de V est dominé par au moins deux sommets de D, c'est à dire ou bien le sommet $v \in D$ et possède au moins un voisin dans D, ou bien $v \in V - D$ et possède au moins deux voisins dans D. Le nombre de domination double, noté $\gamma_{\times 2}$, est le cardinal minimum d'un ensemble dominant double de G. Dans la Figure 1.13, l'ensemble $D = \{v_1, v_2, v_3, v_7, v_8\}$ est un ensemble dominant douple minimum, d'où $\gamma_{\times 2} = 5$.

La domination couplée : La domination couplée a été introduite par HAYNES et SLATER [15]. Un sous-ensemble D de V est dit dominant couplé de G si D est un dominant de G et le sous graphe induit par D admet au moins un couplage parfait. Le nombre de domination couplée, noté $\gamma_{pr}(G)$, est le cardinal minimum d'un ensemble dominant couplé de G. Par exemple dans la Figure 1.13, l'ensemble $D = \{v_2, v_3, v_6, v_7\}$ est un ensemble dominant couplée minimum, d'où $\gamma_{pr} = 4$.

Pour son application on considère le problème du placement des gardiens dans une prison de tel facons que chaque gardien doit avoir un partenaire désigné. Dans ce cas l'ensemble D cherché n'est autre qu'un ensemble dominant couplé minimum.

Dans ce mémoire nous ne considérons que l'aspect théoriques des problèmes de domination. Puisque le problème de détermination des paramètres de domination dans les graphes est NP-complet en général (voir la définition de la NP-complétude dans la section suivante), la recherche d'algorithmes polynomiaux dans des classes particulièrs de graphes ayant des structures simples s'avère l'un des problèmes les plus intéressants liés à la domination, par exemples : les arbre et les graphe bipartis, etc.

1.4.3 Les sommets $\mu-$bons et $\mu-$mauvais

Dans un graphe $G = (V, E)$, et pour un paramètre $\mu(G)$, le sommet v de V est $\mu-$bon s'il est contenu dans au moins un $\mu(G)$-ensemble, et qu'il est μ-mauvais sinon. On note par μg (resp. μb) le nombre de sommets de V qui sont μ-bons (resp. μ-mauvais)

Un graphe G est est dit :

- μ-excellent si tout sommet de V est μ-bon, en d'autres termes si $\mu b = 0$.

- μ-recommandable (ou μ-acceptable) si $\mu g > \mu b \geq 1$.
- μ-juste (ou μ-équitable) si $\mu b = \mu b$.
- μ-pauvre (ou μ-indésirable) si $0 < \mu g < \mu b$.

Ce concept a été introduit par FRICKE et al. dans [16] où ils ont posé le problème de la caractérisation des graphes $\mu-$excellents pour un paramètre $\mu(G)$ tel que $\mu(G) = \iota(G)$, $\gamma(G)$ ou $\beta(G)$.

1.5 Complexité algorithmique

Le concept d'algorithmes a été souvent défini par des termes équivalents plus ou moins précis : méthode, procédé, processus,.....etc. Ces termes indiquent l'utilisation de règles ou d'instructions pour obtenir un résultat en un nombre fini d'étapes.

Le terme d'algorithme tient son origine du moyen orient du savant ABOU DJAAFAR MOHAMMED IBN MOUSSA el KHAWARIZMI dans un ouvrage considéré comme le propulseur de ce domaine clé des mathématiques.

Un algorithme de résolution d'un problème (P) donné est une procédure décomposable en opérations élémentaires transformant une chaîne de caractères représentant les données de n'importe quel exemple ou instance du problème (P) en une chaîne de caractères représentant les résultats de (P).

La performance d'un algorithme est généralement mesurée selon la relation existante entre la taille de l'exemple traité (exprimée en termes du nombre $f(n)$ de caractères nécessaires d'opérations élémentaires). Les opérations élémentaires à comptabiliser sont principalement les quatre opérations usuelles, les affectations et les comparaisons. Le codage des données est tel que l'encombrement mémoires nécessaire pour stoker un nombre positif N, est égale au plus petit entier supérieur ou égal à $log_2(N+1)$.

Un algorithme est dit efficace ou encore polynomial si le nombre total d'opérations élémentaires effectuées pour aboutir à la solution est borné par un polynôme en la taille du problème. Autrement dit : il existe deux constantes C et k telles que $f(n) = Cn^k$. Un tel algorithme a une complexité $O(n^k)$.

Un problème est dit polynomial ou appartient à la classe P (problèmes déterministes polynomiaux) s'il existe un algorithme polynomial ou efficace pour le résoudre. Les problèmes de la classe P sont dits « faciles ».

Un problème d'optimisation combinatoire consiste à chercher une meilleure solution parmi un ensemble fini de solutions réalisables. À chaque problème d'optimisation combinatoire, on peut associer un problème de reconnaissance de la manière suivante :

Soit un problème d'optimisation combinatoire :

Trouver $s' \in S \mid f(s') = \min\{f(s) \mid s \in S\}$

Soit un nombre a, on définit le problème de reconnaissance ou de décision associé :

Existe-t-il un $s' \in S \mid f(s') \leq a$?

Un problème d'optimisation combinatoire est au moins aussi difficile que le problème de reconnaissance associé. De plus, on peut généralement prouver que le problème de reconnaissance n'est pas plus facile que le problème d'optimisation combinatoire. En d'autres termes, cela signifie qu'un problème d'optimisation combinatoire est souvent du même niveau de difficulté que le problème de reconnaissance associé.

Pour la plupart des problèmes d'optimisation combinatoire que l'on connait, on ne dispose pas d'algorithmes de résolution efficaces.

Un problème de décision est dit dans NP (problèmes non déterministes polynomiaux) (resp. $CO - NP$) si dans la réponse est affirmative (resp. négative), on peut produire un certificat qui permet de vérifier en temps polynomial la réponse donné.

Etant donné que les algorithmes efficaces sont des algorithmes non déterministes, il est clair que $P \subseteq NP$. Mais la classe NP contient des problèmes pour lesquels on ne connait pas d'algorithme polynomial de résolution. La conjecture $P \neq NP$ demeure cependant ouverte.

On dit qu'un problème (P_1) se réduit en temps polynomial à un problème (P_2) s'il existe un algorithme pour (P_1) qui fait appel à un algorithme de résolution de (P_2) et si cet algorithme de résolution (P_1) est polynomial lorsque la résolution de (P_2) est comptabilisée comme une opération élémentaire.

Un problème de décision dans NP est dit NP-complet si tout problème de la classe NP peut lui être réduit en temps polynomial. Ainsi, s'il existe un algorithme polynomial permettant de résoudre un problème NP-complet, il existerait un algorithme polynomial pour tous les problèmes de la classe NP.

Les problèmes NP-durs sont des problèmes au moins aussi difficiles que les problèmes NP-complets et tout problème d'optimisation combinatoire dont le problème de reconnaissance est NP- complet est NP-dur.

Le problème de reconnaissance d'une classe de graphes : étant donné un graphe G, peut-on reconnaitre par un algorithme polynomial si G appartient à une classe donné ou non.

CHAPITRE 2

LES GRAPHES μ−EXCELLENTS

De nombreux chercheurs se sont intéressés à caractériser les sommets de G qui sont dans tout ou dans aucun ensemble de cardinalité $\mu(G)$. En effet, HAMMER et al. [2], ont caractérisé ces sommets dans un graphe pour les ensembles indépendants avec les cardinalités maximales. MYNHARDT [3], a caractérisé les sommets appartenant à tout ou à aucun ensembles dominant minimum dans les arbres, COCKAYNE et al. [17], ont caractérisé l'ensemble des sommets appartenat à tout ou à aucun dominant total minimum dans les arbres et BLIDIA et al. [4], ont caractérisé l'ensemble des sommets contenant dans tout ou dans aucun ensemble dominant double minimum dans les arbres....ect.

2.1 Les arbres γ-excellents

Avant de présenter les arbres γ-excellents, nous donnons quelques résultats concernant les graphes γ-excellents d'une manière générale. FRICKE donne les remarques et les propositions suivantes:

Remarque 2.1. *[16] Pour tout graphe G tel que $G \neq K_2$ alors tout sommet support de G est γ-bon et il existe un $\gamma(G)$-ensemble qui contient tous les sommets support de G.*

Remarque 2.2. *[16] Si G est un graphe γ-excellent, alors tout sommet pendant de G est dans au moins un $\gamma(G)$-ensemble et il n'exite aucun sommet pendant de G qui soit contenu dans tout $\gamma(G)$-ensemble.*

Remarque 2.3. *[16] Si G est un graphe γ-excellent, alors tout sommet support de G n'est adjacent qu'à un seul sommet pendant.*

Proposition 2.4. *[16] Tout graphe est un sous graphe induit d'un graphe γ-excellent.*

Remarque 2.5. *[16] Il n'existe pas de caractérisation des graphe γ-excellent en terme de sous graphes induits interdits.*

Maintenant nous donnons des resultats sur des arbre γ-excellents.

2.1.1 Caractérisation descriptive des arbres γ-excellents

Dans [16], FRICKE et al. ont donné une caractérisation descriptive des arbres γ-excellents. Ils ont définit la famille $\mathcal{F}$ par les couronnes des étoiles et les couronnes des doubles étoiles. Comme la couronne $G \circ K_1$ de tout graphe G est γ-excellent. Dans [16], FRICKE et al. ont montré que tous les arbres T qui sont γ-excellents avec $diam(T) \leq 5$ sont des couronnes.

Théorème 2.6. *[16] Un arbre non trivial T avec $diam(T) \leq 5$ est γ-excellent si et seulement si $T \in \mathcal{F}$.*

Corollaire 2.7. *[16] Si $T \notin \mathcal{F}$ est un arbre γ-excellent, alors $diam(T) \geq 6$.*

Il est clair que, la couronne $P_5 \circ K_1$ qui est γ-excellente atteint cette borne, mais les couronnes ne sont pas les seuls graphes excellents atteignant cette borne inférieure. Parmi les graphes excellents atteignant cette borne nous pouvons citer la famille des étoiles subdivisées.

2.1.2 Construction d'une classe des arbres γ-excellents

Dans [16], FRICKE et al ont "construit" une classe d'arbres γ-excellents, c'est à dire qu'en partant de deux arbres γ-excellents d'ordre au moins 4, et en opérant sur ces deux arbres une "construction" qu'on définira plus loin, ils produisent une famille d'arbres γ-excellents. Cette construction est fondée sur le lemme suivant:

Lemme 2.8. *[16] Si T est un arbre γ-excellent d'ordre $n \geq 4$, alors il existe un $\gamma(T)$-ensemble S tel que S n'est pas un indépendant.*

Nous définissons à présent la construction des arbres notée $\mathcal{A}$ développée dans [16] obtenue à partir des étapes suivantes :

1. Soient T_1 et T_2 deux arbres γ-excellents d'ordre au moins 4 et soient S_1 un $\gamma(T_1)$-ensemble et S_2 un $\gamma(T_2)$-ensemble tels que S_1 (resp. S_2) n'est pas un ensemble indépendant de T_1 (resp. de T_2). Soient u un sommet non isolé dans $\langle S_1 \rangle$, le sous graphe induit par S_1 et v un sommet non isolé dans $\langle S_2 \rangle$ le sous graphe induit par S_2.

2. Soit T l'arbre obtenu à partir des deux arbres T_1 et T_2 en reliant le sommet u de S_1 au sommet v de S_2 par l'arête uv alors, il s'ensuit la proposition suivante:

Proposition 2.9. *[16] L'arbre obtenu par la construction $\mathcal{A}$ est un arbre γ-excellent*

2.1.3 Caractérisation des arbres γ-excellents

Nous présentons dans la suit une caractérisation des arbres γ-excellents basée sur la détermination des sommets contenus dans tout ou dans aucun γ-excellents d'un arbre.

1-Les sommets appartenant à tout ou à aucun γ-ensemble d'un arbre

Avant de présenter les résultats, donnons les définition et notations suivantes:

Définition 2.10. *[3] Dans un arbre T, on définit les ensembles $\mathcal{A}(T)$ et $\mathcal{N}(T)$ par:*

$\mathcal{A}(T) = \{v \in V \ / \ v$ *est dans tout* $\gamma(T)-$*ensemble*$\}$;

$\mathcal{N}(T) = \{v \in V \ / \ v$ *n'est pas dans aucun* $\gamma(T)-$*ensemble*$\}$.

Afin de faciliter la représentation, nous utiliserons souvent des arbres enracinés, on définit un arbre enraciné en un sommet r comme un arbre pendu en r, c'est à dire une arborescence de racine r (arbre orienté) où l'orientation est implicite, c'est à dire que les sommets sont classés par niveaux suivant leur distance par rapport au sommet racine r. On définit le sommet parent $p(v)$ de v comme étant le sommet de niveau plus haut que v et adjacent à v. Le sommet u est un sommet fils de v si $p(u) = v$, un sommet fils n'a qu'un seul parent mais un parent peut avoir plusieurs fils. Un sommet u est un descendant de v

s'il est situé sur un niveau inférieur à celui de v et il existe une chaîne (allant d'un niveau à un niveau plus bas) reliant v et u. On note pour un sommet w d'un arbre enraciné T:

$C(w) = \{u \in V \ / \ u$ est un sommet fils de $w\}$,

$D(w) = \{u \in V \ / \ u$ est un sommet descendant de $w\}$,

$D[w] = D(w) \cup \{w\}$, et

$T_w = D[w] \cap T$.

On note par $L(T)$ l'ensemble des sommets pendants de T et par $S(T)$ l'ensemble des sommets supports de T. Un sommet de degré au moins trois est dit sommet branches et on note par $B(T)$ l'ensemble des sommets branches de T. Une chaîne P dans T est dite une chaîne $v - L$ chaîne, si elle joint v à un sommet pendant de T. On note la longueur de P par $l(P)$, et pour $j = 0, 1$ et 2, on definit:

$C^j(v) = \{u \in C(v) : T_u$ contient une $u - L$ chaîne P avec $l(P) \equiv j (\mathrm{mod}\, 3)\}$.

Pour un arbre T enraciné en un sommet $v(T = T_v)$ dans lequel $deg_T(u) \leq 2, \forall u \in V(T) - \{v\}$, les ensembles $\mathcal{A}(T)$ et $\mathcal{N}(T)$ sont caractérisés par le théorème suivant:

Théorème 2.11. *[3] Soit T un arbre enraciné en un sommet v avec* $\deg_T(u) \leq 2$, $\forall u \in V(T) - \{v\}$, *alors:*

- $v \in \mathcal{A}(T)$ *si et seulement si* $|C^0(v)| \geq 2$.
- $v \in \mathcal{N}(T)$ *si et seulement si* $C^0(v) = \emptyset$ *et* $C^1(v) \neq \emptyset$.

Processus d'élagage d'un arbre par rapport à la domination [3]:

Nous décrivons maintenant une technique appelée *élagage d'un arbre* (en anglais, tree pruning) qui permet de caractériser les ensembles $\mathrm{A}(T)$ et $\mathcal{N}(T)$ pour un arbre T quelconque.

Pour n'importe quel sommet u d'un arbre enraciné T, l'ensemble de toutes les $u - L$ chaînes dans T_u est noté $\Pi(u)$. Pour $j = 0, 1, 2$, on définit:

$$\Pi^j(u) = \{P \in \Pi(u) \mid l(P) \equiv j (\mathrm{mod}\, 3)\}.$$

L'élagage de T est effectué par rapport au sommet racine.Supposons que T est enraciné en v ($T = T_v$). Soit u le sommet branche à distance maximum de v (notons que $|C(u)| \geq 2$ et $\deg(x) \leq 2$ pour tout $x \in D(u)$).

Pour tout $w \in C(u)$, une priorité est assignée à w ou à la chaîne $P \in \Pi(w)$, où $w^0 \in C^0(u)$ et $P^0 \in \Pi^0(u)$ ont une priorité supérieure à celle de $w^1 \in C^1(u)$ et $P^1 \in \Pi^1(u)$ qui ont encore une priorité supérieure à celle de $w^2 \in C^2(u)$ et $P^2 \in \Pi^2(u)$.

Soit z le fils de u ayant la plus grande priorité. Pour tout $w \in C(u) - \{z\}$, effacer $D[w]$. Cette étape de l'élagage, où tous les fils de u excepté un sont effacé avec leurs descendants pour donner un arbre dans lequel u est de degré 2, est appelé un élagage de T_v en u. Ce processus est répété jusq'à l'obtention d'un arbre $\overline{T}_v$ dans lequel $deg(u) \leq 2$ $\forall u \in V(\overline{T}_v) - \{v\}$. ($\overline{T}_v$ est l'arbre élagué obtenu à partir de T_v). Afin de simplifier les notations, on écrit $\overline{C}^j(v)$ au lieu de $C^j_{\overline{T}_v}(v)$.

Venons maintenant aux résultats montrons qu'un sommet v d'un arbre T est dans tout γ-ensemble (resp. dans aucun γ-ensemble) de T si et seulement si v est dans tout γ-ensemble (resp. dans aucun γ-ensemble) de l'arbre $\overline{T}_v$.

Théorème 2.12. *[3] Soit un arbre T enraciné en un sommet v et soit $\overline{T}_v$ l'arbre élagué obtenu à partir de T. Pour tout γ-ensemble $\overline{X}$ de $\overline{T}_v$, il existe un γ-ensemble X de T tel que $v \in X$ si et seulement si $v \in \overline{X}$. Réciproquement, pour tout γ-ensemble X de T, il existe un γ-ensemble $\overline{X}$ de $\overline{T}_v$ tel que $v \in \overline{X}$ si et seulement si $v \in X$.*

Corollaire 2.13. *[3] Pour tout arbre T et tout sommet v de T, $v \in A(T)$ si et seulement si $|C^0(v)| \geq 2$, et $v \in \mathcal{N}(T)$ si et seulement si $C^0(v) = \emptyset$ et $C^1(v) \neq \emptyset$.*

Ayant caractérisé l'ensemble $N(T)$ des sommets de T qui n'appartiennent à aucun $\gamma(T)$-ensemble pour tout arbre T, nous en déduisons le corollaire suivant qui donne une caractérisation des arbres γ-excellents.

Corollaire 2.14. *[3] Un arbre T est γ-excellent si et seulement si pour tout sommet v de T, $\overline{C}^0(v) \neq \emptyset$ ou $\overline{C}^1(v) \neq \emptyset$.*

2.2 Les arbres i-excellents

2.2.1 Une caractérisation constructive des arbres ι-excellents

Un arbre T est dit i-excellent si tout sommet de T appartient à au moins un $i(T)$-ensemble. Avant de passer à la caractérisation des arbres i-excellents, nous présentons un résultat obtenu par FRICKE et al dans [16] au niveau duquel il est prouvé que tout arbre γ-excellent est un arbre i-excellent.

Théorème 2.15. *[16] Si T est un arbre γ-excellent, alors $\gamma(T) = i(T)$ et T est un arbre i-excellent.*

Notons que la réciproque n'est pas vraie à savoir qu'un arbre i-excellent n'est pas nécessairement un arbre γ-excellent. En effet, prenons par exemple la double étoile $S_{p,p}$ avec $p \geq 2$, $S_{p,p}$ est i-excellente mais elle n'est pas γ-excellente. Notons aussi que le théorème précédent ne peut être étendu aux graphes bipartis complets. En effet, le graphe biparti complet $K_{p,p}$ avec $p \geq 3$, est γ-excellent et i-excellent mais

$\gamma(K_{p,p}) = 2 \neq i(K_{p,p}) = p$, et pour $3 < p < q$, $K_{p,q}$ est γ-excellent mais non i-excellent et de plus $\gamma(K_{p,q}) = 2 \neq i(K_{p,q}) = p$.

Dans [18] HAYNES et HENNING ont établi une caractérisation des arbres i-excellents en construisant la famille $\mathcal{T}$ des arbres i-excellents et ce en effectuant de manière récursive les deux opérations définies ci-dessous:

La famille $\mathcal{T}$: Soit $\mathcal{T}$ la famille d'arbres qui peuvent être obtenus à partir de la séquence d'arbres $T_1, ..., T_j$ $(j \geq 1)$ tels que T_1 est une double étoile $S_{p,p}$ avec $p \geq 1$ et $T = T_j$ et si $j \geq 2, T_{i+1}$ peut être obtenu récursivement à partir de T_i pour $i = 1, ..., j-1$ à l'aide de l'une des deux opérations $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ definies comme suit:

Le statut d'un sommet v, noté $sta(v)$, peut être A ou B: Initialement, $sta(v) = A$ si $v \in S(T_1)$ ($S(T_1)$ est l'ensemble des sommets support de T_1) et $sta(v) = B$ pour tout sommet pendant de T_1. Une fois qu'un statut est attribué à un sommet, ce statut demeure inchangé au cours des operations de construction de l'arbre T:

Opération $\mathcal{T}_1$. T_{i+1} est obtenu à partir de T_i en ajoutant une étoile $S_{1,t}$ $(t \geq 1)$ de centre w, une arête wy où $y \in V(T_i)$ et $sta(y) = A$ et $t-1$ sommets pendants adjacents à y. Poser $sta(w) = A$ et $sta(v) = B$ pour tout nouveau sommet pendant v.

Opération $\mathcal{T}_2$. T_{i+1} est obtenu à partir de T_i en ajoutant une double étoile $S_{t,t+1}$ et l'arête wy où w est le sommet de $S_{t,t+1}$ qui est adjacent à $t \geq 0$ sommets pendants et $y \in V(T_i)$ avec $sta(y) = B$. Poser $sta(v) = A$ si $v \in S(S_{t,t+1}) \cup \{w\}$ et $sta(v) = B$ pour chaque nouveau sommet pendant ajouté à T_i.

Il s'ensuit de cette construction le théorème qui donne une caractérisation des arbres i-excellents:

Théorème 2.16. *[18] Un arbre T est i-excellent si et seulement si $T \in \{K_1, K_2\}$ ou bien $T \in \mathcal{T}$.*

2.3 Les arbres γ_t-excellents

On rappelle qu'un graphe $G = (V, E)$ est γ_t-excellent si tout sommet de V appartient à un $\gamma_t(G)$-ensemble. Partant de cette définition on peut voir que tout graphe complet est γ_t-excellent, il en est de même pour tous les cycles ainsi que pour tous les graphes bipartis complets $K_{p,q}$ et ce quels que soient $p \geq 1$ et $q \geq 1$.

Nous présentons à présent quelques observations et propositions concernant les graphes γ_t-excellents d'une manière générale, ensuite nous nous intéresserons à une classe particulière de graphes γ_t-excellents que sont les arbres.

Remarque 2.17. *[19] Tout sommet support d'un graphe G doit être dans tout $\gamma_t(G)$-ensemble.*

Proposition 2.18. *[19] Tout graphe H est un sous graphe induit d'un graphe γ_t-excellent.*

Suite à cette proposition, DAUTERMAN a déduit le corollaire ci-aprés:

Corollaire 2.19. *[19] Il n'existe pas de caractérisation des graphes γ_t-excellents en terme de sous graphes induits interdits.*

Dans [19] DAUTERMAN a montré une propositon concernant les chaînes γ_t-excellentes

Proposition 2.20. *[19] Toute chaîne P_n avec $n = 3$ ou $n \equiv 2(mod4)$ est γ_t-excellente.*

2.3.1 Une caractérisation constructive des arbres γ_t-excellents

Dans [20], HENNING a donné une caractérisation construtive des arbres γ_t-excellents. Avant de présenter cette caractérisation, nous donnons les définitions nécéssaires à la compréhension de cette approche constructive.

Définition 2.21. *[20] Etant donné un graphe $G = (V, E)$, le nombre de domination totale d'un graphe G relatif à un sommet v de V, noté $\gamma_t^v(G)$, désigne la cardinalité minimale d'un ensemble dominant total de G contenant le sommet v. Un ensemble dominant total relatif à un sommet v, de cardinalité $\gamma_t^v(G)$ est appelé un $\gamma_t^v(G)$-ensemble.*

Comme conséquence de cette définition, nous pouvons dire qu'un graphe $G = (V, E)$ est $\gamma_t(G)$-excellent si pour tout sommet v de V, $\gamma_t^v(G) = \gamma_t(G)$.

Définition 2.22. *[20] Etant donné un graphe $G = (V, E)$ un ensemble quasi dominant total de G relatif à un sommet v de V est un sous ensemble de sommets de V qui domine totalement tous les sommets de G excepté le sommet v éventuelllement. Le nombre de quasi domination totale, noté $\gamma_t^v(G, v)$, désigne la cardinalité minimale d'un ensemble quasi dominant total relatif au sommet v.*

Définition 2.23. *[20] Etant donnés un graphe $G = (V, E)$, et U un sous ensemble de sommets de V, on dit que S un sous ensemble de V est un dominant total de l'ensemble U dans G si l'ensemble S domine totalement l'ensemble U. Le nombre de domination totale d'un ensemble U, noté $\gamma_t(G, U)$, désigne la cardinalité minimum d'un ensemble dominant total de U.*

Nous présentons à présent la famille $\mathcal{T}$ des arbres γ_t-excellents.

La famille $\mathcal{T}$: Soit $\mathcal{T}$ la famille d'arbres qui peuvent être obtenus à partir de la séquence d'arbres $T_1, .., T_j$ $(j \geq 1)$ tels que T_1 est une étoile $S_{1,r}$ pour $r \geq 1$ et $T = T_j$ et si $j \geq 2$, T_{i+1} peut être obtenu récursivement à partir de T_i pour $i = 1, .., j-1$ à l'aide de l'une des quatre opérations T_1, T_2, T_3 et T_4 définies ci-dessous.

Le statut d'un sommet v; noté $sta(v)$, peut être A, B ou C. Initialement, si $T_1 = K_2$, alors $sta(v) = A$ pour tout sommet v de T_1 et si $T1 = K_{1,r}$ avec $r \geq 2$, alors $sta(v) = A$ pour le sommet central de T_1, $sta(v) = B$ pour tout sommet pendant de T_1 excepté pour un seul auquel le statut C est attribué. Une fois qu'un statut est attribué à un sommet, ce statut demeure inchangé au cours de la construction de l'arbre T sauf pour un sommet de statut C qui peut passer au statut A.

Opération $\mathcal{T}_1$. T_{i+1} est obtenu à partir de T_i en ajoutant la chaîne u, w', w, z et l'arête uy où $y \in V(T_i)$ et $sta(y) = A$. Poser $sta(u) = sta(w') = B$ et $sta(w) = sta(z) = A$.

Opération $\mathcal{T}_2$. T_{i+1} est obtenu à partir de T_i en ajoutant une étoile $S_{1,t}$ pour $t \geq 3$ de centre w telle que l'arête uw est subdivisée et en ajoutant aussi l'arête uy où $y \in V(T_i)$ avec $sta(y) = A$. Poser $sta(w) = A$, $sta(z) = C$ pour exactement un sommet pendant z adjacent à w et $sta(v) = B$ pour tout sommet v restant ayant été ajouté à T_i.

Opération $\mathcal{T}_3$. T_{i+1} est obtenu à partir de T_i en ajoutant la chaîne u, w, z et l'arête uy où $y \in V(T_i)$ et $sta(y) = B$: Poser $sta(u) = B$ et $sta(w) = sta(z) = A$. Si le sommet y' de statut A adjacent à y est adjacent à un sommet c de statut C et si y' n'est pas un support fort dans T, alors on change le statut du sommet c qui passe du statut C au statut A.

Opération $\mathcal{T}_4$. T_{i+1} est obtenu à partir de T_i en ajoutant une étoile $S_{1,t}$ pour $t \geq 3$ de centre w et l'arête uy où $y \in V(Ti)$ avec $sta(y) = B$ et u est un sommet adjacent à w. Poser $sta(w) = A$, $sta(z) = C$ pour exactement un sommet pendant $z(z \neq u)$ adjacent à w et $sta(v) = B$ pour tout sommet v restant ayant été ajouté à T_i. Si le sommet y' de statut A adjacent à y est adjacent à un sommet c de statut C, et si y' n'est pas un support fort dans T, alors on change le statut du sommet c qui passe du statut C au statut A.

Avant de présenter le résultat principal de ce paragraphe, nous donnons quelques remarques et résultats établis par HENNING dans [20].

Définition 2.24. *[20] Si $T \in \mathcal{T}$ et T est obtenu par la séquence $T_1, .., T_m$, on dit que T est de longueur m dans $\mathcal{T}$.*

Remarque 2.25. *[20] Si $T \in \mathcal{T}$, alors le nombre de sommets de statut A ou C est égal à deux fois la longueur de T.*

Remarque 2.26. *[20] Si T est un arbre non trivial et $v \in V(T)$, alors*
$\gamma_t^v(T, v) \leq \gamma_t(T) \leq \gamma_t^v(T, v) + 1$.

Théorème 2.27. *[20] Soient $T \in \mathcal{T}$ de longueur m dans $\mathcal{T}$, v un sommet de T et U l'ensemble des sommets de T ayant un statut A ou un statut C. Alors*

- *T est un graphe γ_t-excellent et $\gamma_t(T) = 2m$;*
- *Si $sta(v) = A$, alors $\gamma_t(T) = \gamma_t^v(T, v) + 1$;*
- *$\gamma_t(T, U) = \gamma_t(T)$;*
- *Si $sta(v) = B$ ou C, alors $\gamma_t(T) = \gamma_t^v(T, v)$;*
- *Si $sta(v) = A$, alors aucun sommet pendant n'est à distance 2 ou 3 de v.*

Au vu de tout ce qui a été developpé, nous énonçons le théorème établi par HENNING qui donne une caractérisation de la famille des arbres γ_t-excellents.

Théorème 2.28. *[20] Un arbre non trivial T est γ_t-excellent si et seulement si $T \in \mathcal{T}$.*

2.3.2 Une autre caractérisation des arbres γ_t-excellents

Nous présentons dans le paragraphe qui suit une caractérisation des arbres γ_t-excellents laquelle caractérisation est basée sur le fait qu'un arbre T est γ_t-excellent si et seulement si l'ensemble de ses sommets qui n'appartiennent à aucun γ_t-ensemble est un ensemble vide.

1-Les sommets appartenant à tout ou à aucun γ_t-ensemble d'un arbre

Nous commençons d'abord par les définitions et notations suivantes:

Définition 2.29. *[17] Dans un arbre T, on définit les ensembles $A_t(T)$ et $\mathcal{N}_t(T)$ par:*

$A_t(T) = \{v \in V \ / \ v$ *est un dans tout* $\gamma_t(T)-$*ensemble*$\}$;

$\mathcal{N}_t(T) = \{v \in V \ / \ v$ *n'est pas dans aucun* $\gamma_t(T)-$*ensemble*$\}$.

Définition 2.30. *[17] On définit dans un arbre enraciné T les ensembles suivants:*

- $L(v) = D(v) \cap L(T)$;
- $L^j(v) = \{u \in L(v) \mid d(u,v) \equiv j (\bmod 4)\} : j = 0, 1, 2, 3.$

Observation 2.31. *[21] Tout support doit etre dans tout γ_t-ensemble.*

Théorème 2.32. *Soit T un arbre enraciné en un sommet v avec $deg_T(u) \leq 2 \ \forall u \in V(T) - \{v\}$, alors:*

- *$v \in A_t(T)$ si et seulement si est un support ou bien $|L^1(v) \cup L^2(v)| \geq 2$;*
- *$v \in \mathcal{N}_t(T)$ si et seulement si $L^1(v) \cup L^2(v) = \emptyset$.*

Processus d'élagage d'un arbre par rapport à la domination totale [17] :

Décrivons maintenant le processus d'élagage d'un arbre T qui permet de caractériser les ensembles $A_t(T)$ et $\mathcal{N}_t(T)$ d'un arbre T. Etant donné un sommet $u \in T$, on dit qu'on attache une chaîne de longueur q à u si on joint u à un sommet pendant de la chaîne P_q.

Soit v un sommet de T qui n'est pas un support. L'élagage de T est effectué par rapport au sommet racine. Supposons alors que l'arbre T est enraciné en v ($T = T_v$). Si $\deg_T(u) \leq 2 \ \forall u \in V(T_v) - \{v\}$, alors $\overline{T}_v = T_v$. Sinon, soit w un sommet de $B(T)$ à distance maximum de v. Notons que $|C(w)| \geq 2$ et $\deg_T(x) \leq 2 \ \forall x \in D(w)$.

On applique le processus suivant:

- Si $|L^2(w)| > 1$, effacer $D(w)$ et attacher une chaîne de longueur 2 à w.
- Si $|L^1(w)| \geq 1, L^2(w) = \emptyset$ et $|L^3(w)| \geq 1$, effacer $D(w)$ et attacher une chaîne de longueur 2 à w.

- Si $|L^1(w)| \geq 1, L^2(w) = L^3(w) = \emptyset$, effacer $D(w)$ et attacher une chaîne de longueur 1 à w.

- Si $L^1(w) = L^2(w) = \emptyset$ et $|L^3(w)| \geq 1$, effacer $D(w)$ et attacher une chaîne de longueur 3 à w.

- Si $L^1(w) = L^2(w) = L^3(w) = \emptyset$, effacer $D(w)$ et attacher une chaîne de longueur 4 à w.

Cette étape du processus d'élagage où tous les descendants de w sont effacés et une chaîne de longueur $1, 2, 3$ ou 4 est attachée à w pour donner un arbre dans lequel $deg_T(w) = 2$ est applée un élagage de T en w. On répète ce processus jusqu'à ce qu'un arbre $\overline{T}_v$ est obtenu avec $deg_T(x) \leq 2 \ \forall x \in \overline{T}_v - \{v\}$. Pour simplifier les notations, nous écrirons $\overline{L}^j(v)$ au lieu de $L^j_{\overline{T}_v}(v)$.

Puisque l'arbre $\overline{T}_v$ vérifie les conditions du théorème, le résultat suivant devient évident:

Théorème 2.33. *[17] Soit v un sommet d'un arbre T, alors:*

- *$v \in A_t(T)$ si et seulement si v est un support ou bien $|\overline{L}^1(v) \cup \overline{L}^2(v)| \geq 2$;*

- *$v \in \mathcal{N}_t(T)$ si et seulement si $\overline{L}^1(v) \cup \overline{L}^2(v) = \emptyset$.*

2.4 Les graphes $\gamma_{\times 2}$-excellentes

La première proposition sur les graphes $\gamma_{\times 2}$-excellents est donne par KHELIFI dans [22].

Proposition 2.34. *[22] Tout graphe est un sous graphe induit d'un graphe $\gamma_{\times 2}$-excellent.*

Suit à cette proposition KHELIFI déduit le corollaire suivant.

Corollaire 2.35. *[22] Il n'existe pas de carctérisation des graphes $\gamma_{\times 2}$-excellents en terme de sous graphes induits intertdits.*

2.4.1 Caractérisation des chaînes et chenilles $\gamma_{\times 2}$-excellentes

Nous commencons tout d'abord par les remarque sur les chaînes

Remarque 2.36. *[4]Pour toute chaîne P_n avec $n \geq 2$, on a*

$$\gamma_{\times 2} \begin{cases} \frac{2n}{3} + 1 & si\ n \equiv 0 (\bmod 3) \\ 2\lceil \frac{n}{3} \rceil & si\ non \end{cases}$$

Remarque 2.37. *[4] La chaîne P_n avec $n \equiv 2(\bmod 3)$ possède un dominant minimum.*

Ces remarques sont la base pour carctériser les chaînes $\gamma_{\times 2}$-excellent.

Proposition 2.38. *[22] Une chaîne P_n est $\gamma_{\times 2}$-excellente si et seulement si $n = 2$ ou $n \equiv 0$ ou $1(\bmod 3)$.*

Maintenant nous donnons les définitions et les résultats qui sont utiles pour une caractérisation des chenilles $\gamma_{\times 2}$-excellentes.

Définition 2.39. *[22] Une chaîne C, dans un graphe G, est dite séparatrice si elle relie deux sommets supports de G et $deg_G(v) = 2$ pour tout sommet v de C. Une chaîne séparatrice est dite séparatrice $\gamma_{\times 2}$-excellente (CSE) si elle est constituée de $n \equiv 0$ ou $2(mod3)$ sommets et séparatrice non $\gamma_{\times 2}$-excellente (CSNE) si elle est constituée de $n \equiv 1(mod3)$ sommets.*

Proposition 2.40. *[22] Si un graphe G est $\gamma_{\times 2}$-excellent alors G ne contient pas de CSNE.*

Définition 2.41. *[22] Une chenille est un arbre non trivial T_c dont l'élimination de tous les sommets pendants produit une chaîne $P_k = v_1, v_2, ..., v_k$ appelée le squelette de la chenille tel que chaque sommet de T_c est ou bien sur la chaîne ou bien adjacent à un sommet de la chaîne P_k. Le code d'une chenille T_c est $c(T_c) = (c_1, c_2, ..., c_k)$ où c_i est le nombre de sommets pendants adjacents à un sommet v_i. Il est à noter que $c1 \neq 0$ et $c_k \neq 0$. Aussi, par convention, $c_1 \geq c_k$.*

Théorème 2.42. *[22] Une chenille T_c est $\gamma_{\times 2}$-excellente si et seulement si toutes ses chaînes séparatrices sont des CSE.*

2.4.2 Caractérisation des arbres $\gamma_{\times 2}$-excellents

1-Les sommets appartenant à tout ou à aucun $\gamma_{\times 2}$-ensemble d'un arbre

Nous commençons tout d'abord par donner les définitions et résultats suivants:

Définition 2.43. *[4] Soit T un arbre enraciné en un sommet v, $P^j(w)$ est l'ensemble des sommets $u \in L(w)$ tels que $d(w,u) \equiv j(\bmod 3)$ et $\deg_T(x) = 2$ pour tout sommet intermédiaire x de la chaîne $w-u$ pour $j = 0, 1$ ou 2.*

Définition 2.44. *[4] Dans un arbre T, on définit les ensembles $A_{\times 2}(T)$ et $\mathcal{N}_{\times 2}(T)$ par:*

$A_{\times 2}(T) = \{v \in V \ / \ v$ *est un dans tout* $\gamma_{\times 2}(T)-$*ensemble*$\}$;

$\mathcal{N}_{\times 2}(T) = \{v \in V \ / \ v$ *n'est dans aucun* $\gamma_{\times 2}(T)-$*ensemble*$\}$.

Lemme 2.45. *[4] Soient T' un arbre et $v \in V(T')$. Soit T l'arbre obtenu à partir de T' en attachant une chaîne P_3 à un sommet pendant u de T' avec $v \notin N[u]$, alors*

- $\gamma_{\times 2}(T) = \gamma_{\times 2}(T') + 2$;
- $v \in A_{\times 2}(T')$ *si et seulement si* $v \in A_{\times 2}(T)$;
- $v \in \mathcal{N}_{\times 2}(T')$ *si et seulement si* $v \in \mathcal{N}_{\times 2}(T)$.

Définition 2.46. *[4] Soit T un arbre enraciné en v, on définit l'ensemble $W^*(T_v)$ par :*

$W^*(T_v) = \{w^* \in C(v) \mid L(w^*) = P^2(w^*),\ |P^2(w^*)| \geq 2$ *et* $P^0(w^*) \cup P^1(w^*) = \emptyset\}$.

Remarque 2.47. *[4] Soit T un arbre enraciné en v avec $|W^*(T_v)| \geq 2$ et $C(v) - W^*(T_v) \neq \emptyset$ et soit $w^* \in W^*(T_v)$. Alors*

- $v \in A_{\times 2}(T'_v)$ *si et seulement si* $v \in A_{\times 2}(T_v)$;
- $v \in \mathcal{N}_{\times 2}(T'_v)$ *si et seulement si* $v \in \mathcal{N}_{\times 2}(T_v)$.

Où $T'_v = T_v - \bigcup_{z \in W^*(T_v) - w^*} T_z$.

Remarque 2.48. *[4] Soit T un arbre enraciné en v. Soit $w^* \in W^*(T_v)$ avec $|P^2(w^*)| \geq 3$. Alors*

- $v \in \mathcal{A}_{\times 2}(T'_v)$ *si et seulement si* $v \in \mathcal{A}_{\times 2}(T_v)$;
- $v \in \mathcal{N}_{\times 2}(T'_v)$ *si et seulement si* $v \in \mathcal{N}_{\times 2}(T_v)$.

Où T'_v est arbre obtenu à partir de T_v en remplaçant $D[w^*]$ par une chaîne P_5 de centre w^*.

Pour la suite, nous admettrons que pour tout sommet $w^* \in W^*(T_v)$, $|C(w^*)| = 2$.

Théorème 2.49. *[4] Soit T un arbre enraciné en v tel que $deg_T(u) \leq 2 \; \forall u \notin W^*(T) \cup \{v\}$. On a:*

a) $v \in \mathcal{A}_{\times 2}(T'_v)$ *si et seulement si une au moins des conditions suivantes est verifiée:*

- *v est un sommet support;*
- *v est un sommet pendant;*
- $|P^1(v)| \geq 2$;
- $|P^0(v)| \geq 3$;
- $|P^1(v)| = 1 et\ |P^0(v)| \in \{1, 2\}$;
- $|P^1(v)| = 1, W^* \neq \emptyset$ *et* $P^2(v) \cup P^0(v) = \emptyset$;
- $|P^0(v)| = 2$ *et* $|P^2(v)| \geq 1$;

b) $v \in \mathcal{N}_{\times 2}(T'_v)$ *si et seulement si* $|P^2(v)| \geq 2$ *et* $P^1(v) \cup P^0(v) = \emptyset$.

2.5 Les graphes γ_{pr}-excellents

Avant d'énnoncer les résultats relatifs aux arbres γ_{pr}-excellents, nous donnons des résultats et définitions concernant les graphes γ_{pr}-excellents d'une manière générale.

Remarque 2.52. *[22] et [4] Dans un graphe G tout sommet support est dans tout $\gamma_{pr}(G)$-ensemble.*

Proposition 2.53. *[22] Tout graphe est un sous graphe induit d'un graphe γ_{pr}-excellent.*

Corollaire 2.54. *[22] Il n'existe pas de caractérisation des graphes γ_{pr}-excellents en terme de sous graphes induits interdits.*

Définition 2.55. *[22] Une chaine séparatrice est dite γ_{pr}-excellente (CSE) si elle est d'ordre $n \equiv 1$ ou $2 \pmod 4$ et séparatrice non γ_{pr}-excellente (CSNE) si elle d'ordre $n \equiv 0$ ou $3 \pmod 4$.*

Théorème 2.56. *[22] Si G est un graphe γ_{pr}-excellent, alors il ne contient pas de CSNE.*

2.5.1 Caractérisation des chaines et chenilles γ_{pr}-excellentes

Remarque 2.57. *[22] Pour toute chaine, $\gamma_{pr}(P_n) = 2\lceil \frac{n}{4} \rceil$ et de plus on a:*

- $\gamma_{pr}(P_n) = \frac{n}{2}$ *si* $n \equiv 0 \pmod 4$.
- $\gamma_{pr}(P_n) = \frac{n+3}{2}$ *si* $n \equiv 1 \pmod 4$.
- $\gamma_{pr}(P_n) = \frac{n+2}{2}$ *si* $n \equiv 2 \pmod 4$.
- $\gamma_{pr}(P_n) = \frac{n+1}{2}$ *si* $n \equiv 3 \pmod 4$.

Remarque 2.58. *[22] Une chaine P_n avec $n \equiv 0 \pmod 4$ possède un dominant couplé minimum unique qui ne contient aucun de ses sommets pendants.*

Remarque 2.59. *[22] Une chaine P_n avec $n \equiv 3 \pmod 4$ ne possède aucun dominant couplé minimum qui contient ses deux sommets pendants.*

L'élagage d'un arbre par rapport à la domination double [4]:

Supposons que l'arbre T est enraciné en v qui n'est pas un support ni un sommet pendant.

Si $\deg(x) \leq 2\ \forall x \in (V(T) - W^*(T_v)) - \{v\}$, alors $\overline{T}_v = T_v$.Sinon soit u un sommet de $B(T)$ à distance maximum de v. Notons que $|C(u)| \geq 2$ et $\deg(x) \leq 2\ \forall x \in D(u)$.

On applique le processus suivant:

- Si $|P^1(u)| \geq 1$, effacer $D(u)$ et attacher une chaîne P_1 (un sommet) à u.
- Si $|P^2(u)| \geq 1, |P^0(v)| \geq 1$ et $P^1(v) = \emptyset$, effacer $D(u)$ et attacher une chaîne P_1 à u.
- Si $|P^2(u)| \geq 2$ et $P^0(v) \cup P^1(v) = \emptyset$, alors
  - Si $u \in C(v)$, effacer $D(u)$ et attacher deux chaînes P_2 à u.
  - Si $d(v,u) = 2$ et $p(u) \notin B(T)$, effacer $D(u)$ et attacher une chaîne P_2 à u.
  - Si $u \notin C(v)$ et $d(v,u) \neq 2$ ou bien $p(u) \in B(T)$, effacer $D[u]$.
- Si $|P^0(u)| \geq 2$ et $P^1(u) \cup P^2(u) = \emptyset$, effacer $D(u)$ et attacher une chaîne P_3 à u.

Cette étape du processus d'élagage est appelée un élagage de T en u. On répète ce processus jusqu'à ce qu'un arbre $\overline{T}_v$ soit obtenu avec $deg(x) \leq 2\ \forall x \in (V(T) - W^*(T_v)) - \{v\}$. Comme exemple illustratif suivant.

Théorème 2.50. *[4] Soit v un sommet d'un arbre T, alors:*

- *$v \in \mathcal{A}_{\times 2}(T_v)$ si et seulement si $v \in \mathcal{A}_{\times 2}(\overline{T}_v)$;*
- *$v \in \mathcal{N}_{\times 2}(T_v)$ si et seulement si $v \in \mathcal{N}_{\times 2}(\overline{T}_v)$.*

Ayant caractérisé l'ensemble $N_{\times 2}(T)$ pour n'importe quel arbre T, La caractérisation des arbres $\gamma_{\times 2}$-excellients est équivalente à ce que cet ensemble soit vide.

Corollaire 2.51. *[22] Un arbre T est $\gamma_{\times 2}$-excellent si et seulement si pour tout $v \in T$, $|P^2(v)| \leq 1$ ou $P^1(v) \cup P^0(v) \neq \emptyset$ dans l'arbre $\overline{T}_v$.*

Proposition 2.60. *[22] Une chaine P_n est γ_{pr}-excellente si et seulement si $n = 3$ ou $n \equiv 1$ ou $2 (\bmod 4)$.*

Proposition 2.61. *[22] Une chenille T_c est γ_{pr}-excellente si et seulement si toutes ses chaines séparatrices sont des CSE.*

2.5.2 Caractérisation des arbres γ_{pr}-excellents

1-Les sommets appartenant à tout ou à aucun γ_{pr}-ensemble d'un arbre

Nous commençons tout d'abord par donner les définitions et résultats suivants:

Définition 2.62. *[22]Dans un arbre T, On définit les ensembles $A_{pr}(T)$ et $\mathcal{N}_{pr}(T)$ par:*

$A_{pr}(T) = \{v \in V \ / \ v$ *est un dans tout* $\gamma_{pr}(T)-$*ensemble*$\}$;

$\mathcal{N}_{pr}(T) = \{v \in V \ / \ v$ *n'est pas dans aucun* $\gamma_{pr}(T)-$*ensemble*$\}$.

Définition 2.63. *[22] Soit T un arbre enraciné. Pour tout sommet v de T, on définit l'ensemble:*

$L^j(v) = \{u \in L(v) \mid d(u, v) \equiv j (\bmod 4)\}$ *et ce pour* $j = 0, 1, 2$ *ou* 3.

Nous donnons maintenant un résultat qui nous permettra de négliger des chaînes P_4 et qui sera utilisé pour caractériser les ensembles $A_{pr}(T)$ et $\mathcal{N}_{pr}(T)$.

Lemme 2.64. *[22] Soient T' un arbre et $v \in V(T)$. Soit u' un sommet de T' tel que $\mathcal{N}(u') - \{v\} \neq \emptyset$. Soit T l'arbre obtenu de T' en attachant une chaîne P_4 à u'. Alors :*

- $v \in A_{pr}(T')$ *si et seulement si* $v \in A_{pr}(T)$;
- $v \in \mathcal{N}_{pr}(T')$ *si et seulement si* $v \in \mathcal{N}_{pr}(T)$.

Théorème 2.65. *[22] Soit un arbre T enraciné en un sommet v tel que $\deg_T(u) \leq 2$ $\forall u \in V(T) - \{v\}$, alors:*

- $v \in A_{pr}(T')$ *si et seulement si ou bien v est un support ou bien* $|L^1(v)| \geq 2$ *ou bien* $|L^1(v)| = 1$ *et* $|L^2(v)| \geq 1$;

- $v \in \mathcal{N}_{pr}(T')$ *si et seulement si* $|L^3(v)| \geq 1$ *et* $L^1(v) \cup L^2(v) = \emptyset$.

L'élagage d'un arbre par rapport à la domination couplée :

Supposons que l'arbre T est enraciné en v ($T = T_v$) (v n'est pas un support). Si $\deg_T(u) \leq 2$ pour tout sommet $u \in V(T) - \{v\}$, alors $\overline{T}_v = T_v$. Si non, soit w un sommet de $B(T)$ à distance maximum de v.Notons que $|C(w)| \geq 2$ et $\deg_T(x) \leq 2$ $\forall x \in D(w)$.

On applique le processus suivant:

- Si $|L^2(w)| \geq 1$, effacer $D(w)$ et attacher une chaîne P_2 à w.
- Si $|L^1(w)| \geq 1$, et $L^2(w) = \emptyset$ effacer $D(w)$ et attacher une chaîne P_1 à w.
- Si $|L^3(w)| \geq 1$, et $L^1(w) \cup L^2(w) = \emptyset$ effacer $D(w)$ et attacher une chaîne P_3 à w.
- Si $L^2(w) \cup L^2(w) \cup L^3(w) = \emptyset$, effacer $D(w)$ et attacher une chaîne P_4 à w.

Cette étape du processus d'élagage où tous les descendants de w sont effacés et une chaîne P_1, P_2, P_3 ou P_4 est attachée à w pour donner un arbre dans lequel $deg(w) = 2$ est appelée un élagage de T en w. On répète ce processus jusqu'à ce qu'un arbre $\overline{T}_v$ est obtenu avec $\deg_T(x) \leq 2$ $\forall x \in \overline{T}_v - \{v\}$.

Théorème 2.66. *[22] Soit v un sommet d'un arbre T, alors:*

- $v \in A_{pr}(T_v)$ *si et seulement si* $v \in A_{pr}(\overline{T}_v)$;
- $v \in \mathcal{N}_{pr}(T_v)$ *si et seulement si* $v \in \mathcal{N}_{pr}(\overline{T}_v)$.

Corollaire 2.67. *[22] T est un arbre $\gamma_{pr}(T)$-excellent si et seulement si il n'existe aucun sommet v de T vérifiant $|L^3(v)| = 0$ ou $L^1(v) \cup L^2(v) \neq \emptyset$, dans l'arbre $\overline{T}v$ obtenu par l'élagage de l'arbre T enraciné en v.*

2.6 Les arbres γ_L-excellents

2.6.1 Caractérisation des chaines et chenilles γ_L-excellentes

Avant de présenter les résultats qui concerne les chaines γ_L-excellentes, nous donnons des resultat qui concerne γ_L pour les chaines.

Théorème 2.68. *[23] Soit P_n une chaine d'ordre n avec $n = 5k + r$, alors on a:*

- $\gamma_L(P_n) = 2k$ *si* $r = 0$.
- $\gamma_L(P_n) = 2k + 1$ *si* $r = 1$ *ou* 2.
- $\gamma_L(P_n) = 2k + 2$ *si* $r = 3$ *ou* 4.

Remarque 2.69. *[24] La chaine P_n avec $n \equiv 0 (\bmod 5)$ possède un γ_L-ensemble unique, et il ne contient aucun de ses sommets pandants.*

Remarque 2.70. *[24] Soit la chaine obtenue en attachant une chaine P_5 à l'un des sommets pendants d'une chaine C', alors on a $\gamma_L(C) = \gamma_L(C') + 2$.*

Maintenant nous donne la propositions qui donne une caractérisation des chaines γ_L-excellentes.

Proposition 2.71. *[24] La chaîne P_n est γ_L-excellente si et seulement si $n = 4$, ou $n \equiv 1$ ou $3 (mod 5)$.*

Définition 2.72. *[24] Une chaine C dans un graphe G est dite chaine séparatrice, si elle sépare deux sommets support de G et $deg_G(v) = 2$ pour tout sommet v de C. Une chaine séparatrice C dans est dite chaine séparatrice γ_L-excellente (CSE) si elle est d'ordre $n \equiv 2$ ou $4 (\bmod 5)$ et séparatrice non γ_L-excellente (CSNE) si elle est d'ordre $n \equiv 0, 1$ ou $3 (\bmod 5)$.*

Théorème 2.73. *[24] Si G est un graphe γ_L-excellent, alors G ne contient pas de CSNE.*

Théorème 2.74. *[24] Une chenille T_c est γ_L-excellente si et seulement si elle ne contient pas de CSNE.*

1-Les sommets appartenant à tout ou à aucun γ_L-ensemble d'un arbre

Nous commençons tout d'abord par donner les définitions et résultats suivants:

Définition 2.75. *[25] et Dans un arbre T, On définit les ensembles $A_L(T)$ et $N_L(T)$ par:*

$\mathcal{A}_L(T) = \{v \in V \ / \ v$ *est un dans tout* $\gamma_L(T)-$*ensemble*$\}$;

$\mathcal{N}_L(T) = \{v \in V \ / \ v$ *n'est pas dans aucun* $\gamma_L(T)-$*ensemble*$\}$.

Définition 2.76. *[25] Soit T un arbre enraciné. Pour tout sommet v de T, on définit l'ensemble:*

$L^j(v) = \{u \in L(v) \mid d(u,v) \equiv j (\bmod 5)\}$ *et ce pour* $j = 0, 1, 2, 3$ *ou* 4.

Avant d'énoncer un lemme qui nous sera utile par la suite, nous faisons les observations suivantes.

Observation 2.77. *[25] Si T est un arbre de diamètre au moins 2 et y un sommet de $L(T)$, alors il existe un γ_L-ensemble qui ne contient pas le sommet y.*

Observation 2.78. *[25] Pour toute chaîne non triviale P_n, $L(P_n) \subseteq \mathcal{N}_L(P_n)$ si et seulement si $n \equiv 0 (\bmod 5)$.*

Lemme 2.79. *[25] Soient T' un arbre et v un sommet de $V(T')$. Soit u un sommet de T tel que $u \neq v$, et soit T l'arbre obtenu à partir de T' en ajoutant une chaîne $P_5 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ et l'arête ux_1. Alors:*

- $\gamma_L(T) = \gamma_L(T') + 2$;
- $v \in \mathcal{A}_L(T')$ *si et seulement si* $v \in \mathcal{A}_L(T)$;
- $v \in \mathcal{N}_L(T')$ *si et seulement si* $v \in \mathcal{N}_L(T)$.

Théorème 2.80. *[25] Soit un arbre T enraciné en un sommet v tel que $\deg_T(u) \leq 2$ $\forall u \in V(T) - \{v\}$, alors:*

- $v \in \mathcal{A}_L(T)$ *si et seulement si* $(|L^3(w)| \geq 2$ *ou* $|L^3(w)| = 1)$ *et* $|L^1(w)| \geq 1$.
- $v \in \mathcal{N}_L(T)$ *si et seulement si* $(L^1(w) \cup L^3(w) = \emptyset$ *et* $|L^2(w) \cup L^4(w)| \geq 2)$ *ou* $(L^1(w) \cup L^2(w) \cup L^3(w) \cup L^4(w) = \emptyset$ *et* $|L^4(w)| = 1)$.

L'élagage d'un arbre par rapport à la domination localisatrice:

Supposons que l'arbre T est enraciné en v ($T = T_v$) (v n'est pas un support). Si $\deg_T(u) \leq 2$ pour tout sommet $u \in V(T) - \{v\}$, alors $\overline{T}_v = T_v$, sinon, soit w un sommet de $B(T)$ à distance maximum de v. Notons que $|C(w)| \geq 2$ et $\deg_T(u) \leq 2$ $\forall x \in D(w)$.

On applique le processus suivant:

- Si $|L^1(w)| \geq 1$, effacer $D(w)$ et attacher une chaîne P_1 à w.
- Si $|L^3(w)| \geq 1$, et $L^1(w) = \emptyset$ effacer $D(w)$ et attacher une chaîne P_3 à w.
- Si $|L^4(w)| \geq 1$, et $L^1(w) \cup L^3(w) = \emptyset$ effacer $D(w)$ et attacher une chaîne P_4 à w.
- Si $L^1(w) \cup L^3(w) \cup L^4(w) = \emptyset$et $|L^2(w)| \geq 2$, effacer $D(w)$ et attacher une chaîne P_4 à w.
- Si $L^1(w) \cup L^3(w) \cup L^4(w) = \emptyset$et $|L^2(w)| = 1$, effacer $D(w)$ et attacher une chaîne P_5 à w.
- Si $L^1(w) \cup L^2(w) \cup L^3(w) \cup L^4(w) = \emptyset$et $|L^0(w)| \geq 2$, effacer $D(w)$ et attacher une chaîne P_4 à w.

Cette étape du processus d'élagage où tous les descendants de w sont effacés et une chaîne P_1, P_2, P_3, P_4 ou P_5 est attachée à w pour donner un arbre dans lequel $deg(w) = 2$ est appelée un élagage de T en w. On répète ce processus jusqu'à ce qu'un arbre $\overline{T}_v$ est obtenu avec $\deg_T(x) \leq 2$ $\forall x \in \overline{T}_v - \{v\}$.

Pour la compréhension de cette technique, nous donnons l'exemple illustratif suivant.

Soit T l'arbre de la Figure 2.1. Les sommets x, y, z et w sont des sommets branches vérifiant. $|L^1(x)| \geq 1$, $|L^3(y)| \geq 1$, et $L^1(y) = \emptyset$, $L^1(z) \cup L^2(z) \cup L^3(z) \cup L^4(z) = \emptyset$et

$|L^0(z)| \geq 2$, $|L^4(w)| \geq 1$, et $L^1(w) \cup L^3(w) = \emptyset$. D'aprés le processus on efface $D(x, y, z, w)$ et on attache une chaîne P_1 à x, une chaîne P_3 à y, une chaîne P_5 à z et une chaîne P_4 à w. On obtient l'arbre de la Figure 2.2.a. Dans la l'arbre de la Figure 2.2.a. les sommets u et r sont des sommets branches vérifiant $L^1(u) \cup L^3(u) \cup L^4(u) = \emptyset$ et $|L^2(u)| \geq 2$ et $L^1(r) \cup L^3(r) \cup L^4(r) = \emptyset$et $|L^2(r)| = 1$, et alors on efface $D(u, r)$ et on attache une chaîne P_4 à u et une chaîne P_5 à r qui nous donne l'arbre de la Figure 2.2.b.

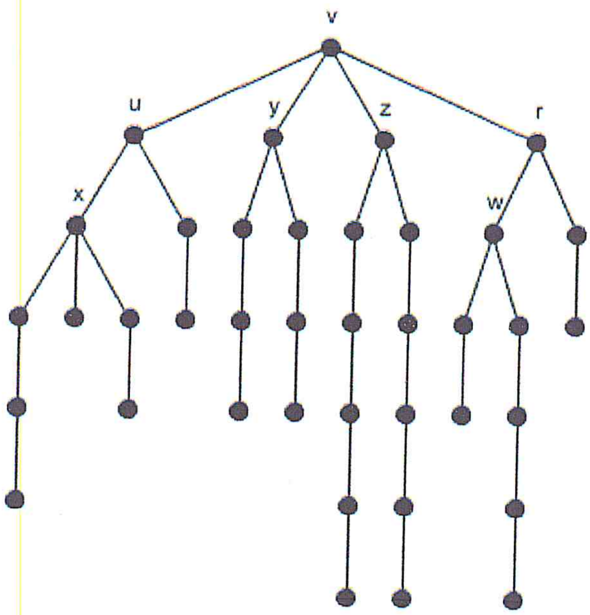

Figure 2.1. Un arbre T.

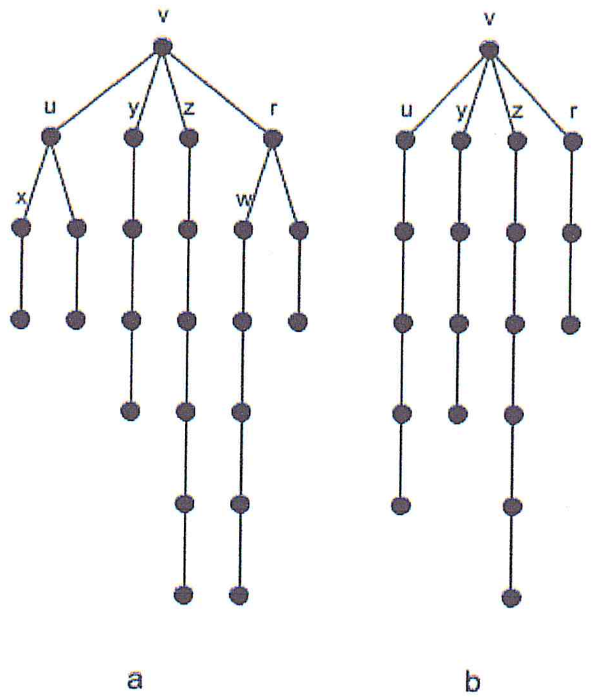

Figure 2.2. Les étapes de l'élagage a et b.

Dans la Figure 2.2.b. on a $|L^1(w)| \geq 1$, donc et d'après le théorème 2.80 $v \in \mathcal{A}_L(T_v)$.

Théorème 2.81. *[25] Soit v un sommet d'un arbre T, alors:*

- $v \in \mathcal{A}_L(T_v)$ *si et seulement si* $v \in \mathcal{A}_L(\overline{T}_v)$;
- $v \in \mathcal{N}_L(T_v)$ *si et seulement si* $v \in \mathcal{N}_L(\overline{T}_v)$.

Corollaire 2.82. *[25] Un arbre T est γ_L-excellent si et seulement si $N_L(\overline{T}_v) = \emptyset$ pout tout sommet v de l'arbre T (c-à-d : Dans l'arbre élagué T_v on a :* $|L^3(v) \cup L^1(v)| \neq 0$ *ou* $|L^2(v) \cup L^4(v)| \leq 1$ *et* $|L^3(v) \cup L^2(v) \cup L^1(v)| \neq 0$ *et* $|L^4(v)| \neq 1$.

2.7 Problèmes ouverts

Nous finissons ce chapitre par donner quelques problèmes ouverts concernant les graphes μ-excellents d'une manière générale.

1. Caractériser les graphes pour lesquels on a égalité entre deux paramètres de domination.

2. Trouver pour certaines classes des graphes tels que les graphes bipartis et les arbres, les algorithmes polynomiaux pour la détermination de la valeur excate d'un paramètre de domination.

CHAPITRE 3

LES GRAPHES γ_2-EXCELLENTS

Boucoups de travaux ont été réalisés sur l'excellence dans les graphes. Nous citons les travaux de HAMMER (voir [2]), de COCKAYNE, HENNING, MYNHARDT et DAUTERMAN (voir [17, 19]), de BLIDIA, CHELLALI et KHELIFI (voir [4]) et BLIDIA, R. LOUNES (voir [25]). Ces résultats sont importants, mais ne sont pas suffisant pour répondre à l'ensemble des problèmes ouverts posés dans ce domaine. On exposera dans ce chapitre quelques nouveaux résultats obtenus en collaboration avec N. MEDDAH et M. BLIDIA, relatifs au comportement des sommets du graphe vis àvis de la 2-domination quand on applique certaines opérations dans les graphes.

Afin d'éclaircir les spécificités du comportement des sommets par rapport à la 2-domination, nous commençons par une brève présentation de quelques résultats et observations relatifs à celle-ci.

3.1 Apercu sur la k-domination

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un sous ensemble D de V est dit dominant multiple ou k-dominant de G si tout sommet de $V - D$ possède au moins k voisins dans D. Le **nombre de domination multiple (ou nombre de k-domination)**, noté par $\gamma_k(G)$, est la taille minimum d'un ensemble dominant multiple de G. Ce concept a été introduit par FINK et JACOBSON en 1984, lors d'une conférence à Kalamazoo. Les papiers [13],[27] parus dans les actes de la conférence contiennent cette dernière définition. A titre d'exemple, dans une étoile $K_{1,k}$, l'ensemble des sommets pendants est un k-dominant minimum, donc $\gamma_k(G) = k$.

Dans l'exemple du graphe suivant, l'ensemble $\{A, C, E\}$ représente un ensemble 2-dominant de taille minimum.

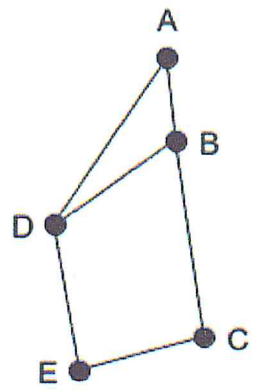

Figure 3.1 Un graphe G.

Dans tout ce qui suit on s'intéresse à l'étude de la 2-domination. Ainsi on donne quelques observations qui seront utiles pour la suite.

Observation 3.1. *Dans un graphe G, tout ensemble 2-dominant contient tous les sommets pendants.*

Observation 3.2 (Chellali et al.[26]). *Pour toute chaîne P_n avec $n \geq 2$, on a $\gamma_2(P_n) = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$.*

Observation 3.3. *Soient T' un arbre. Soit u un sommet pendant de T'. Soit T l'arbre obtenu de T' en attachant une chaîne P_2 à u. Alors*

$$\gamma_2(T) = \gamma_2(T') + 1.$$

Preuve. Supposons que l'arbre T est obtenu à partir de T' en ajoutant la chaîne x, y et l'arête ux.

Tout $\gamma_2(T')$-ensemble peut être étendu à un ensemble 2-dominant de T en ajoutant le sommet y, d'où $\gamma_2(T) \leq \gamma_2(T') + 1$. D'autre part, soient D un $\gamma_2(T)$-ensemble et $D' = D \cap V(T')$. Si $x \notin D$, alors $u \in D$, et ainsi D' est un ensemble 2-dominant de T'. Et si $x \in D$, alors $u \notin D$, et donc l'ensemble $\{u\} \cup (D - \{x, y\})$ est un ensemble

$\gamma_2(T')$-ensemble ne contenant pas x. Donc, dans tous les cas $\gamma_2(T') \leq \gamma_2(T) - 1$, et ceci implique l'égalité $\gamma_2(T) = \gamma_2(T') + 1$. □

3.2 Quelques classes des graphes γ_2-excellents

Un graphe γ_2-excellent est un graphe dans lequel tout sommet est dans au moins un γ_2-ensemble. Avant de présenter les différents résultats établis dans la classe des graphes γ_2-excellents, nous illustrons ce concept en donnant quelques exemples graphiques. On peut voir facilement que la chaîne P_4 de la Figure 3.2 est γ_2-excellente puisque, d'après l'Observation 3.1, les sommets pendants sont dans tout γ_2-ensemble, et pour que les autres sommets soient 2-dominés, il suffit d'ajouter un des sommets supports. Par contre l'étoile $K_{1,3}$ de la Figure 3.2 n'est pas un γ_2-excellent, car le centre de l'étoile n'est dans aucun γ_2-ensemble.

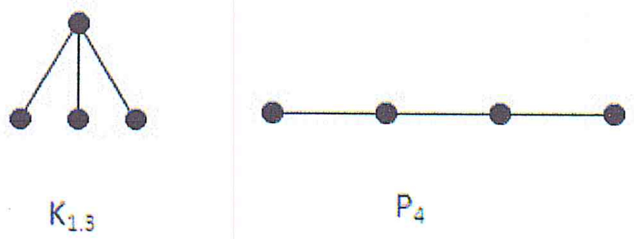

Figure 3.2. L'étoile $K_{1,3}$ et la chaîne P_4.

3.2.1 Caractérisation des chaînes γ_2-excellentes

Proposition 3.4. *La chaîne P_n est γ_2-excellente si et seulement si $n = 1$ ou $n \equiv 0(mod2)$.*

Preuve. Il est clair que la chaîne P_1 est γ_2-excellente. Montrons que la chaîne P_n avec $n \equiv 0(mod\ 2)$ est γ_2-excellente. On procède par induction sur le nombre de sommets de la chaîne. On peut voir facilement que les chaînes P_2 et P_4 sont γ_2-excellentes. Supposons que la chaîne $C' = x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n$ avec $n = 2k$ est γ_2-excellente et montrons que la chaîne $C = x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}$ avec $n = 2(k+1)$ est γ_2-excellente.D'après l'Observation 3.3, tout $\gamma_2(C')$-ensemble peut être étendu à un ensemble 2-dominant de

C en ajoutant le sommet x_{n+2}. Puisque C' est γ_2-excellente, il reste à montrer que le sommet x_{n+1} est dans un $\gamma_2(C)$-ensemble. Soit D' un $\gamma_2(C'')$-ensemble contenant x_{n-1}, alors $(D' - \{x_n\}) \cup \{x_{n+1}, x_{n+2}\}$ est un un $\gamma_2(C)$-ensemble contenant x_{n+1}. Par conséquent, la chaîne C est γ_2-excellente.

Réciproquement, montrons qu'une chaîne P_n avec $n \neq 1$ et $n \equiv 1(mod\ 2)$ n'est pas γ_2-excellente. Pour $n = 3$, il est clair que la chaîne P_3 n'est pas γ_2-excellente. Supposons maintenant que $n \geq 5$. On montre que les supports n'appartiennent à aucun $\gamma_2(P_n)$-ensemble. Soient x_1 et x_2 les supports de la chaîne P_n. Supposons qu'il existe un $\gamma_2(P_n)$-ensemble D qui contient x_1. Soient x, z le sommet pendant et non pendant respectivement voisins du sommet x_1. Donc le sommet $z \notin D$ (sinon on peut supprimer x_1), d'où le voisin de z dans la chaîne autre que x_1 appartient à D. Soit $P' = P_n - \{x, x_1, z\}$, alors $D' = D \cap P'$ est un $\gamma_2(P')$-ensemble Il est clair que $|D| = |D'| + 2$. D'autre part comme n est impair et $n - 3$ est pair, d'après l'observation 3.1, $\gamma_2(P_n) = |D| = \dfrac{n+1}{2}$ et $\gamma_2(P') = |D'| = \dfrac{n-3+1+1}{2} = \dfrac{n-1}{2}$. Mais $|D'| + 2 = \dfrac{n+3}{2}$, contradiction. Et donc au moins les deux supports n'appartiennent à aucun $\gamma_2(P_n)$-ensemble. Il en résulte donc que la chaîne P_n avec $n \neq 1$ et $n \equiv 1(mod\ 2)$ n'est pas γ_2-excellente. □

Corollaire 3.5. *La chaîne P_n avec $n \neq 1$ et $n \equiv 1(mod\ 2)$ n'est pas γ_2-excellente.*

3.2.2 Caractérisation des arbres γ_2-excellents

On commence cette partie par la caractérisation des sommets appartenant à tout ou à aucun $\gamma_2(T)$-ensemble d'un arbre T, et comme conséquence de ce résultat découle une caractérisation des arbres $\gamma_2(T)$-excellents ce qui est équivalent à ce que l'ensemble des sommets n'appartenant à aucun ensemble 2-dominant minimum soit vide.

1- Caractérisation des sommets appartenant à tout ou à aucun γ_2-ensemble

On commence cette section par l'ensemble des définitions et les résultats suivants:

Définition 3.6. *Dans un arbre T, on définit les ensembles $A_2(T)$ et $\mathcal{N}_2(T)$ par:*

$\mathcal{A}_2(T) = \{v \in V \ / \ v$ *est dans tout* $\gamma_2(T)$*-ensemble*$\}$.

$\mathcal{N}_2(T) = \{v \in V \ / \ v$ *n'est dans aucun* $\gamma_2(T)$*-ensemble*$\}$.

On donne maintenant un résultat qui nous permettra de négliger les chaînes P_2 et qui sera utiliser pour les autres résultats

Lemme 3.7. *Soient T' un arbre et $v \in V(T')$. Soit u un sommet pendant de T' telque $u \neq v$. Soit T l'arbre obtenu de T' en attachant une chaîne P_2 à u. Alors*

(a) $\gamma_2(T) = \gamma_2(T') + 1$;

(b) $v \in \mathcal{A}_2(T')$ *si et seulement si* $v \in \mathcal{A}_2(T)$;

(c) $v \in \mathcal{N}_2(T')$ *si et seulement si* $v \in \mathcal{N}_2(T)$.

Preuve. Supposons que l'arbre T est obtenu à partir de T' en ajoutant la chaîne x, y et l'arête ux. D'aprés l'Observation 3.1, u (resp. y) est dans $\mathcal{A}_2(T')$ (resp. dans $\mathcal{A}_2(T)$).

(a) Voir la peuve d'Observation 3.3.

(b) La necessité : Supposons que $v \in \mathcal{A}_2(T')$ et soit D un $\gamma_2(T)$-ensemble quelconque. Il est clair d'après ce qui précède que $D' = D \cap T' = D - \{y\}$ de cardinal $\gamma_2(T) - 1$, est un $\gamma_2(T')$-ensemble et puisque $v \notin D(x), v \in D' \subset D$. Par conséquent $v \in \mathcal{A}_2(T)$. Inversement, supposons que $v \in \mathcal{A}_2(T)$, et soit D' un $\gamma_2(T')$-ensemble quelconque. D'après ce qui précède, on a $D = D' \cup \{y\}$ de cardinal $\gamma_2(T') + 1$, est un $\gamma_2(T)$-ensemble et puisque $v \in D - D[x]$, alors $v \in D'$. Par conséquent $v \in \mathcal{A}_2(T')$.

(c) La necessité: Supposons que $v \in \mathcal{N}_2(T')$ et soit D un $\gamma_2(T)$-ensemble quelconque. Il est clair d'après le cas (a) que $D' = D \cap T' = D - \{y\}$ de cardinal $\gamma_k(T) - 1$, est un $\gamma_2(T')$-ensemble et $v \notin D' \subset D$. Par conséquent $v \in \mathcal{N}_2(T)$. Inversement, supposons que $v \in \mathcal{N}_2(T)$, et soit D' un $\gamma_2(T')$-ensemble quelconque. D'après le cas (a), $D = D' \cup \{y\}$ de cardinal $\gamma_k(T') + 1$, est un $\gamma_2(T)$-ensemble. Et puisque $v \notin D - D[x]$, il en résulte que $v \notin D'$. Par conséquent $v \in \mathcal{N}_2(T')$.

□

Définition 3.8. *Soit T un arbre enraciné en v. Pour tout sommet branche u de T et pour tout sommet $w \in D(u)$ tel que $deg_T(w) \leq 2$, on définit les ensembles suivants:*

$K^j(u) = \{z \in L(u) \ / \ d(u,z) \equiv j (\text{mod}\, 2)\}$ *: pour* $j = \overline{0,1}$.

Théorème 3.9. *Soit T un arbre enraciné en v différent d'un sommet pendant, tel que* $\deg(u) \leq 2$ *pour tout* $u \in V(T) - \{v\}$. *Alors*

(a) $v \in \mathcal{A}_2(T)$ *si et seulement si* $\begin{cases} v \textit{ est un sommet pendant; ou} \\ |K^0(v)| \geq 2. \end{cases}$

(b) $v \in \mathcal{N}_2(T)$ *si et seulement si* $K^0(v) = \emptyset$.

Preuve. D'après l'Observation 3.1, si v est un sommet pendant, alors $v \in \mathcal{A}_2(T)$. Maintenant on suppose que v est différent d'un sommet pendant, alors d'après le Lemme 3.7, l'arbre T peut être transformé en un arbre T^* en remplaçant chaque chaîne $v - b$ de T où b est un sommet pendant par une chaîne $v - b$ de longueur $j = 1, 2$, si $b \in K^i(v)$ pour $i = 0, 1$ respectivement. Par conséquent, on aura $v \in \mathcal{A}_2(T)$ (resp. $v \in \mathcal{N}_2(T)$) si et seulement si $v \in \mathcal{A}_2(T^*)$ (resp. $v \in \mathcal{N}_2(T^*)$). Dans ce qui suit, tous les sommets descendants de v, sont à distance 1 ou 2 de v. Puisque v est différent d'un sommet pendant, $|K^0(v)| + |K^1(v)| \geq 2$.

Cas 1: $|K^0(v)| \geq 2$.

Soient D un $\gamma_2(T^*)$-ensemble quelconque, $P_x = v, x_1, x$ et $P_y = v, y_1, y$ sont deux chaînes de T^* d'ordre deux D'après l'Observation 3.1, $\{x, y\} \subset D$. Si $v \notin D$, alors $\{x_1, y_1\} \subset D$. Mais $\{v\} \cup D - \{x_1, y_1\}$ est un ensemble 2-dominant de cardinal inférieur à celui de D, contradiction. Par conséquent, $v \in \mathcal{A}_2(T^*)$

Cas 2: $K^0(v) = \emptyset$.

Il est clair que T^* est une étoile $K_{1,s}$ avec $s = |K^1(v)|$ et v le sommet centre de cette étoile,d'où il est évident que $v \in \mathcal{N}_2(T^*)$.

Et pour montrer la condition nécéssaire, on procède par contraposée. La négation de $(|K^0(v)| \geq 2$ et $K^0(v) = \emptyset)$ donne le cas suivant :

Cas 3: $|K^0(v)| = 1$ et $|K^1(v)| \geq 1$.

Soient D un $\gamma_2(T^*)$-ensemble quelconque, $P_x = v, x_1, x$ et $P_y = v, y_i$; $i \geq 1$ des chaînes de T^* à distance 2 et 1 de v, respectivement. D'après l'Observation 3.1, $\{x\} \cup \{y_i; i \geq 1\} \subset D$. Si $v \notin D$, alors $x_1 \in D$. Et si $v \in D$, alors $x_1 \notin D$. Dans les deux cas le cardinal de D ne change pas, donc $v \notin \mathcal{A}_2(T^*) \cup \mathcal{N}_2(T^*)$. □

Théorème 3.10. *Soit T un arbre enraciné en v différent d'un sommet pendant tel que $\deg_T(u) \leq 2$ pour tout $u \in V(T) - \{v\}$. Alors $v \notin \mathcal{A}_2(T) \cup \mathcal{N}_2(T)$ si et seulement si $|K^0(v)| = 1$ et $|K^1(v)| \geq 1$.*

Preuve. Montrons tout d'abord la condition suffisante. Vu le le Cas 3 de Théorème 3.9, il en résulte que $v \notin \mathcal{A}_2(T) \cup \mathcal{N}_2(T)$.

Et pour montrer la condition nécéssaire, on procède par contraposée. La négation de ($|K^0(v)| = 1$ et $|K^1(v)| \geq 1$) donne les deux cas suivants :

Cas 1: $|K^0(v)| = 0$ et $|K^1(v)| \geq 2$.

D'après le Cas 2 de Théorème 3.9, il en résulte que $v \in \mathcal{N}_2(T)$.

Cas 2: $|K^0(v)| \geq 2$ et $|K^1(v)| = 0$.

D'après le Cas 1 de Théorème 3.9, il en résulte que $v \in \mathcal{A}_2(T)$. □

2- L'élagage d'un arbre par rapport à la 2-domination

La procédure d'Elagage est une technique utilisée pour la première fois par C.M. Mynhardt [3] qui consiste à supprimer des branches successivement jusqu'à arriver à un arbre de type décrit dans le Théorème 3.9 précédent.

Soit T un arbre enraciné en un sommet non pendant v. Si $\deg(x) \leq 2$ pour tout sommet $x \in V(T) - \{v\}$, alors $\overline{T} = T$. Sinon, soit u un sommet branche à distance maximum de v et $w = p(u)$. Vu que $|K^0(u)| + |K^1(u)| \geq 2$, on a à considérer les deux étapes suivantes:

A : Si $|K^0(u)| \geq 1$, alors effacer $D(u)$.

B : Si $K^0(u) = \emptyset$, alors:

- Si $w \notin B(T)$, alors effacer $D(u)$ et attacher une chaîne P_1 (un sommet) à u.

- Si $w \in B(T)$, alors effacer $D[u]$.

Ce processus propre à la 2-domination, où itérativement pour chaque sommet branche u à distance maximum, ou bien on supprime $D(u)$ ou bien on supprime $D(u)$ et on attache une chaîne P_1 au sommet u ou bien on supprime $D[u]$, fournit à la fin un arbre $\overline{T_v}$ dans lequel $d(u) \leq 2$ pour tout sommet $u \in V(\overline{T_v}) - \{v\}$ et il est appelée un élagage de T_v.

Pour faciliter la compréhension de cette technique, nous donnons l'exemple illustratif suivant: Considérons l'arbre T de la Figure suivante dont les sommets: v, u, x, y, z, w et s sont des sommets branches de T, u est celui à distance maximum 4 de v.

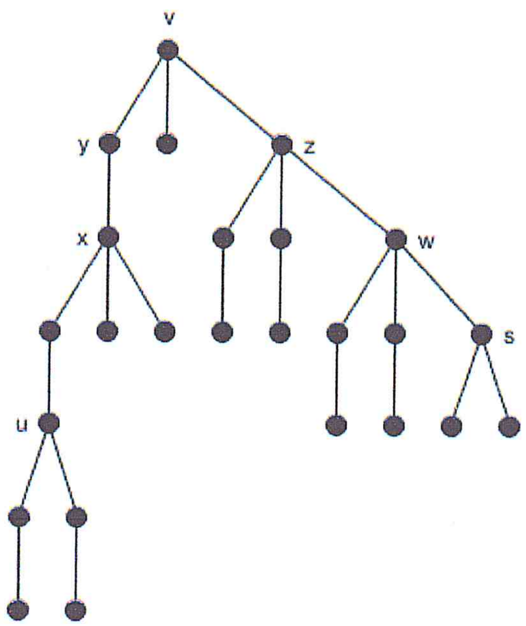

Figure 3.3 Un arbre T.

Puisque $|K^0(u)| \geq 2$, on efface $D(u)$. (voir la Figure 3.4)

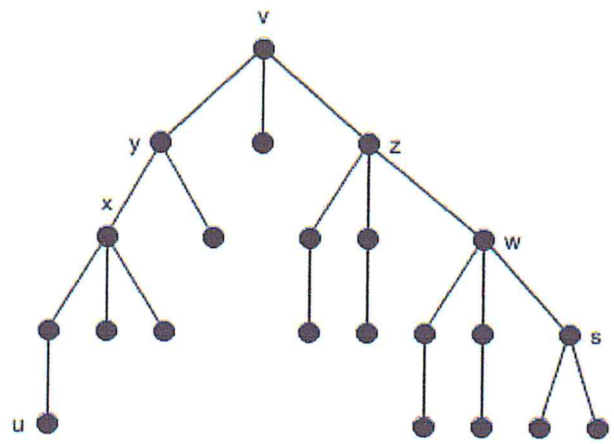

Figure 3.4 L'arbre T après une étape de l'élagage.

Maintenant le sommet s devient le sommet branche à distance maximum 3 de v et puisque $|K^1(s)| \geq 2$, et $|K^0(s)| = 0$ et le sommet w parent de s est un sommet branche, alors on efface $D[s]$. (Voir la Figure 3.5).

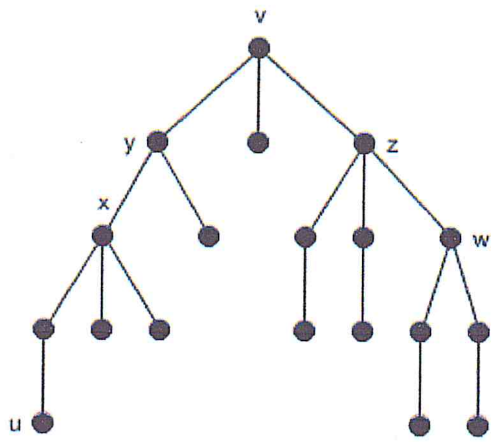

Figure 3.5. L'arbre T après deux étapes de l'élagage.

Ainsi les sommets w et x deviennent les sommets branches à distance maximum 2 de v, et comme $|K^0(w)| = 2$ et $|K^0(x)| = 1$, alors on efface $D(w)$ et $D(x)$. (Voir la Figure 3.6).

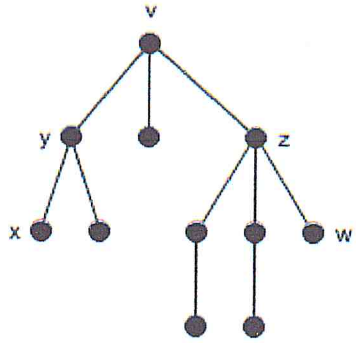

Figure 3.6 L'arbre T aprés trois étapes de l'élagage.

A présent, il nous reste que les sommets z et y comme sommets branches à distance maximum 1 de v et puisque $|K^0(z) = 2 \geq 1$, alors on efface $D(z)$. (Voir la Figure 3.7). De même, et puisque $|K^0(y)| = 0$ et $|K^1(y)| = 2$ et le sommet v parent de y est un sommet branche, alors on efface $D[y]$. (Voir la Figure 3.8).

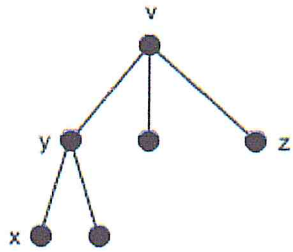

Figure 3.7. L'arbre T aprés quatres étapes de l'élagage.

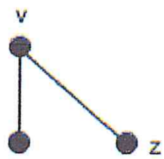

Figure 3.8 L'arbre T aprés cinq étapes de l'élalgage.

A la fin il en résulte l'étoile $K_{1,2}$ de centre v avec z un de ses sommets pendants. Donc d'après le Théorème 3.9, il s'ensuit que $v \in \mathcal{N}_2(T)$.

Afin de valider cette méthode, nous allons montrer que les opérations du processus d'élagage présenté précédemment préserve les propriétés d'appartenance du sommet v à tout ou à aucun γ_2-ensemble.

Dans ce qui suit on suppose que pour un sommet branche u, $k_i = |K^i(u)|$.

Lemme 3.11. *Soit T un arbre enraciné en v. Soit u un sommet branche à distance maximum de v.*

1. *Si $k_0 \geq 1$, alors poser T' l'arbre obtenu à partir de T en effaçant $D(u)$.*

2. *Si $k_0 = 0$, alors on distingue les deux cas suivants:*

   2.1) *Si $w \notin B(T)$, alors poser T' l'arbre obtenu à partir de T en effaçant $D(u)$ et en attachant une chaîne P_1 (un sommet) à u.*

   2.2) *Si $w \in B(T)$, alors poser T' l'arbre obtenu à partir de T en effaçant $D[u]$.*

Et pour chaque cas, on a

(a) *$v \in \mathcal{A}_2(T')$ si et seulement si $v \in \mathcal{A}_2(T)$;*

(b) *$v \in \mathcal{N}_2(T')$ si et seulement si $v \in \mathcal{N}_2(T)$.*

Preuve. En utilisant l'Observation 3.3 et sans perte de généralité, on peut dire que les chaînes attachées à u sont d'ordre 1 ou 2. Soient $[a_i]$ et $[x_j, y_j]$ des chaînes d'ordre 1 et 2, respectivement attachées à u où $a_i, y_j \in L(T) \cap D(u)$, pour $1 \leq i \leq k_1$ et $1 \leq j \leq k_0$. Notons par w le père de u dans l'arbre enraciné en v.

Cas 1: $k_0 \geq 1$. Soit $T' = T - D(u)$.

Montrons que $\gamma_2(T') = \gamma_2(T) - k_1 - k_0$. Tout $\gamma_2(T')$-ensemble peut être étendu à un ensemble 2-dominant de T en ajoutant l'ensemble des sommets pendants de T_u, $\cup_{i=1}^{k_1}\{a_i\} \cup \{\cup_{j=1}^{k_0}\{y_j\}\}$, d'où on a $\gamma_2(T) \leq \gamma_2(T') + k_1 + k_0$. Maintenant soit D un $\gamma_2(T)$-ensemble et $D' = D \cap T'$. Si $u \notin D$, alors $\{x_1, x_2, ..., x_{k_0}\} \subset D$. Dans ce cas l'ensemble $D'' = D - \{x_1, x_2, ..., x_{k_0}\} \cup \{u\}$ est un 2-dominant minimal de cardinal inférieur à celui de D, contradiction. Alors u est dans tout $\gamma_2(T)$-ensemble. D'apres de ce qui précède l'ensemble $D - \{\cup_{i=1}^{k_1}\{a_i\}\} - \{\cup_{j=1}^{k_0}\{y_j\}\}$ est un 2-dominant de T', ce qui implique que $\gamma_2(T') \leq \gamma_2(T) - k_1 - k_0$. D'où l'égalité $\gamma_2(T') = \gamma_2(T) - k_1 - k_0$.

(a) La necessité: Supposons que $v \in \mathcal{A}_2(T')$ et soit D un $\gamma_2(T)$-ensemble quelconque. Il est clair d'après ce qui précède que $D' = D \cap T' = D - \{\cup_{i=1}^{k_1}\{a_i\}\} \cup \{\cup_{j=1}^{k_0}\{y_j\}\}$ de cardinal $\gamma_2(T) - k_1 - k_0$, est un $\gamma_2(T')$-ensemble et puisque $v \notin D(u)$, $v \in D' \subset D$. Par conséquent $v \in \mathcal{A}_2(T)$. Inversement, supposons que $v \in \mathcal{A}_2(T)$, et soit D' un $\gamma_2(T')$-ensemble quelconque. D'après ce qui précède, on a $D = D' \cup \{\cup_{i=1}^{k_1}\{a_i\}\} \cup \{\cup_{j=1}^{k_0}\{y_j\}\}$ de cardinal $\gamma_2(T') + k_1 + k_0$, est un $\gamma_2(T)$-ensemble et puisque $v \in D - D[u]$, alors $v \in D'$. Par conséquent $v \in \mathcal{A}_2(T')$.

(b) La necessité: Supposons que $v \in \mathcal{N}_2(T')$ et soit D un $\gamma_2(T)$-ensemble quelconque. Il est clair d'après ce qui précède que $D' = D \cap T' = D - \{\cup_{i=1}^{k_1}\{a_i\}\} \cup \{\cup_{j=1}^{k_0}\{y_j\}\}$ de cardinal $\gamma_2(T) - k_1 - k_0$, est un $\gamma_2(T')$-ensemble et $v \notin D' \subset D$. Par conséquent $v \in \mathcal{N}_2(T)$. Inversement, supposons que $v \in \mathcal{N}_2(T)$, et soit D' un $\gamma_2(T')$-ensemble quelconque. D'après ce qui précède on a vu que $D = D' \cup \{\cup_{i=1}^{k_1}\{a_i\}\} \cup \{\cup_{j=1}^{k_0}\{y_j\}\}$ de cardinal $\gamma_2(T') + k_1 + k_0$, est un $\gamma_2(T)$-ensemble. Et puisque $v \notin D - D[u]$, il en résulte que $v \notin D'$. Par conséquent $v \in \mathcal{N}_2(T')$.

Cas 2: $k_0 = 0$. On considère les deux sous cas suivants :

Sous cas 2.1. $w \notin B(T)$. Soit $T' = T - (D(u) - \{a_1\})$.

Montrons que $\gamma_2(T') = \gamma_2(T) - k_1 + 1$. Tout $\gamma_2(T')$-ensemble peut être étendu à un ensemble 2-dominant de T en ajoutant l'ensemble $\cup_{i=2}^{k_1}\{a_i\}$ et donc $\gamma_2(T) \leq \gamma_2(T') + k_1 - 1$. D'autre part, soit D un $\gamma_2(T)$-ensemble et $D' = D \cap T' = D - \{\cup_{i=2}^{k_1}\{a_i\}\}$. Si $w \in D$, alors u est deux dominé dans T', et ainsi D' est un ensemble 2-dominant de T'. Si $w \notin D$, alors $u \in D$ car w n'est pas un sommet branche et D' est un ensemble 2-dominant de T'. Donc $\gamma_2(T') \leq \gamma_2(T) - k_1 + 1$, d'où l'égalité $\gamma_2(T') = \gamma_2(T) - k_1 + 1$.

(a) La necessité: Supposons que $v \in \mathcal{A}_2(T')$ et soit D un $\gamma_2(T)$-ensemble quelconque. Il est clair d'après ce qui précède que l'ensemble $D' = D - \{\cup_{i=2}^{k_1}\{a_i\}\}$ de cardinal $\gamma_2(T) - k_1 + 1$, est un $\gamma_2(T')$-ensemble. Puisque $v \notin D[u]$ et $v \in D' \subset D$, il s'ensuit que $v \in \mathcal{A}_2(T)$. Réciproquement, supposons que $v \in \mathcal{A}_2(T)$ et que D' soit un $\gamma_2(T')$-ensemble quelconque. D'après ce qui précède, on a vu que $D = \{\cup_{i=2}^{k_1}\{a_i\}\} \cup D'$ de cardinal $\gamma_2(T')+k_1-1$, est un $\gamma_2(T)$-ensemble. Puisque $v \in D - D[u]$, alors $v \in D'$. Par conséquent $v \in \mathcal{A}_2(T')$.

(b) La necessité: Supposons que $v \in \mathcal{N}_2(T')$ et soit D un $\gamma_2(T)$-ensemble quelconque. Il est clair que $D' = D - \{\cup_{i=2}^{k_1}\{a_i\}\}$ de cardinal $\gamma_2(T) - k_1 + 1$, est un $\gamma_2(T')$-ensemble et que $v \notin D' \subset D$. Par conséquent $v \in \mathcal{N}_2(T)$. Inversement, supposons que $v \in \mathcal{N}_2(T)$ et que D' est un $\gamma_2(T')$-ensemble quelconque. On a vu que l'ensemble $D = \{\cup_{i=2}^{k_1}\{a_i\}\} \cup D'$ de cardinal $\gamma_2(T')+k_1-1$, est un $\gamma_2(T)$-ensemble. Et puisque $v \notin D - D[u]$, alors $v \notin D'$, et par conséquent $v \in \mathcal{N}_2(T')$.

Sous cas 2.2. $w \in B(T)$. Soit $T' = T - D[u]$.

Montrons que $\gamma_2(T') = \gamma_2(T) - k_1$. Tout $\gamma_2(T')$-ensemble peut être étendu à un ensemble 2-dominant de T en ajoutant l'ensemble $\{\cup_{i=1}^{k_1}\{a_i\}\}$ et donc $\gamma_2(T) \leq \gamma_2(T') + k_1$. Réciproquement, soit D un $\gamma_2(T)$-ensemble et $D' = D \cap T'$. Si $w \in D$, alors D' est un ensemble 2-dominant, et si $w \notin D$, alors on distingue deux cas: Si $u \notin D$, alors D' est un ensemble 2-dominant de T', ainsi $\gamma_2(T') \leq \gamma_2(T)-k_1$. Et si $u \in D$, alors $D_1 = \{w\} \cup D - \{u\}$ est un $\gamma_2(T)-$ensemble et donc $D' = D_1 \cap T'$ est un ensemble 2-dominant de T', et ainsi $\gamma_2(T') \leq \gamma_2(T) - k_1$. D'où l'égalité $\gamma_2(T') = \gamma_2(T) - k_1$.

(a) La necessité: Supposons que $v \in \mathcal{A}_2(T')$ et soit D un $\gamma_2(T)$-ensemble quelconque. Il est clair d'après ce qui précède que $u \notin D$ et que $D' = D \cap T' = D - \{\cup_{i=1}^{k_1}\{a_i\}\}$ de cardinal $\gamma_2(T) - k_1$, est un $\gamma_2(T')$-ensemble. Puisque $v \notin D(w)$, et $v \in D' \subset D$, et par conséquent $v \in \mathcal{A}_2(T)$. Inversement, supposons que $v \in \mathcal{A}_2(T)$ et soit D' un $\gamma_2(T')$-ensemble quelconque. On a vu que $D = D' \cup \{\cup_{i=1}^{k_1}\{a_i\}\}$ de cardinal $\gamma_2(T') + k_1$, est un $\gamma_2(T)$-ensemble. Puisque $v \in D - D(u)$, alors $v \in D'$, et par conséquent $v \in \mathcal{A}_2(T')$.

(b) La necessité: Supposons que $v \in \mathcal{N}_2(T')$ et soit D un $\gamma_2(T)$-ensemble quelconque. Il est clair d'après ce qui précède que $D' = D \cap T' = D - \{\cup_{i=1}^{k_1}\{a_i\}\}$ de cardinal $\gamma_2(T)-k_1$, est un $\gamma_2(T')$-ensemble, et que $v \notin D' \subset D$. Et par conséquent $v \in \mathcal{N}_2(T)$. Inversement, supposons que $v \in \mathcal{N}_2(T)$ et soit D' un $\gamma_2(T')$-ensemble quelconque.

D'après ce qui précède, on a vu que $D = D' \cup \{\cup_{i=1}^{k_1}\{a_i\}\}$ de cardinal $\gamma_2(T') + k_1$, est un $\gamma_2(T)$-ensemble. Puisque $v \notin D - D(w)$, alors $v \notin D'$ et par conséquent $v \in \mathcal{N}_2(T')$.

$\square$

Théorème 3.12. *Soit v un sommet d'un arbre T. Alors*

(a) $v \in \mathcal{A}_2(T)$ *si et seulement si* $v \in \mathcal{A}_2(\overline{T_v})$;

(b) $v \in \mathcal{N}_2(T)$ *si et seulement si* $v \in \mathcal{N}_2(\overline{T_v})$.

Preuve. Elle découle du Lemme 3.7, Théorème 3.9 et du Lemme 3.11.

$\square$

Ayant caractériser l'ensemble $\mathcal{N}_2(T)$ pour n'importe quel arbre T, la caractérisation des arbres $\gamma_2(T)$-excellents est équivalente à ce que cet ensemble soit vide.

Corollaire 3.13. *Un arbre T est $\gamma_2(T)$-excellent si et seulement si pour tout $v \in T$, $(|K^1(v)| \leq 1$ ou $K^0(v) \neq \emptyset)$ dans $\overline{T_v}$.*

Si on pose que $|\mathcal{N}_2| = \gamma_2 b$ est le nombre de sommets mauvais qui n'appartiennent à aucun γ_2-ensemble, $|V| - |\mathcal{N}_2| = \gamma_2 g$ le nombre de sommets bons ceux qui appartiennent à au moins un γ_2-ensemble. On peut caractériser les arbres γ_2- recommandables, les arbres γ_2-justes et les arbres γ_2-indésirables définis comme suit:

Définition 3.14. *Un arbre T est dit $\gamma_2(T)$-recommandable si $\gamma_2 g(T) > \gamma_2 b(T) \geq 1$.*

Un arbre T est dit $\gamma_2(T)$-indésirable si $1 \leq \gamma_2 g(T) < \gamma_2 b(T)$.

Un arbre T est dit $\gamma_2(T)$-juste si $\gamma_2 g(T) = \gamma_2 b(T)$.

Un arbre T est dit $\gamma_2(T)$-excellent si $\gamma_2 b(T) = 0$ et $\gamma_2 g(T) = |V|$.

A titre d'exemple, les étoiles $K_{1,m} : m \geq 2$ sont γ_2-recommandables, car $\gamma_2 g(K_{1,m}) = m, \gamma_2 b(K_{1,m}) = 1$. Et les chaînes P_n pour $n = 2k$ sont γ_2-excellents, car $\gamma_2 g(P_n) = n, \gamma_2 b(P_n) = 0$.

Si en plus on détermine l'ensemble $\mathcal{A}_2$, on peut dire si l'arbre admet un unique γ_2-ensemble.

Définition 3.15. *Un graphe admet un γ_2-ensemble unique si et seulement si $\mathcal{A}_2 \cup \mathcal{N}_2 = |V|$.*

Il est clair que tous ces types d'arbres peuvent être caractériser en temps polynomial.

3- Algorithme de reconnaissance des sommets qui sont dans tout ou dans aucun $\gamma_2(T)$-ensemble

Soit T un arbre. Les sommets sont numérotés de 1 à $V(T)$.

Etape 1: Poser $r = 1, A_2(T) = \emptyset, N_2(T) = \emptyset$.

Etape 2: - Si $r = |V(T)| + 1$, et aller à l'Etape 7.

- Sinon, Poser $T = T_r = T_v$.

Etape 3: Utiliser la méthode de recherche en largeur pour explorer tous les sommets de T. Si v est un sommet pendant, poser $r = r + 1, A_2(T) = A_2(T) \cup \{v\}$ et aller à l'Etape 2. Sinon générer et ordonner les sommets branches appartenant à $D(v)$: $(u_1, u_2, ..., u_m)$ de manière à ce qu'on ait $d(v, u_1) \leq d(v, u_2) \leq ... \leq d(v, u_m)$. Poser $B(T) = \{u_1, u_2, ..., u_m\}, k = m$.

Etape 4: - Si $k = 0$ aller à l'Etape 6.

- Sinon aller à l'Etape 5.

Etape 5: Poser $u = u_k$.

Pour $i = 0, 1$, poser $K^i(u) = \{x' \in L(u) \ / \ d(u, x') \equiv i(\bmod 2)\}$, et w le père de u.

- Si $|K^0(u)| \geq 1$, alors poser $T = T - D(u)$, $k = k - 1$ et aller à l'Etape 4.
- Si $K^0(u) = \emptyset$. Soit $x_1 \in C(u)$ tel que $x_1 \in T'_x$ et $x_1 \in K^1(u)$. Alors:

  - Si $w \notin B(T)$, alors poser $T = T - (D(u) - \{x_1\})$, $k = k - 1$ et aller à l'Etape 4..
  - Si $w \in B(T)$, alors poser $T = T - D[u]$, $k = k - 1$ et aller à l'Etape 4.

Etape 6: Si $K^0(v) = \emptyset, r = r + 1, N_2(T) = N_2(T) \cup \{v\}$ et aller à l'Etape 2.

Si $K^0(v) \geq 2, r = r + 1, A_2(T) = A_2(T) \cup \{v\}$ et aller à l'Etape 2.

Sinon poser $r = r + 1$ et aller à l'Etape 2.

Etape 7: Si $|V \setminus N_2(T)| > N_2(T) \geq 1$, alors T est dit $\gamma_2(T)$-recommandable,

Si $|V \setminus N_2(T)| < N_2(T)$, alors T est dit $\gamma_2(T)$-indésirable,

Si $|V \setminus N_2(T)| = N_2(T)$, alors T est dit $\gamma_2(T)$-juste,

Si $|N_2(T)| = 0$, alors T est dit $\gamma_2(T)$-excellent.

Si $N_2(T) \cup A_2(T) = V$, alors T admet un $\gamma_2(T)$-ensemble unique

La complexité algorithmique de cet algorithme est estimé à $O(n^4)$ avec $n = |V(T)|$.

En explorant tous les sommets, on peut déduire à partir de l'algorithme précédent un algorithme qui détermine l'ensemble $\mathcal{N}_2$.

CONCLUSION

Parmi les recherches principales dans la théorie des graphes nous avons choisi celle concernant l'excellence des graphes. Pour cela et au cours de ce mémoire, nous avons présenté les résultats déjà fait sur l'excellence des graphes pour quelques types de domination, puis nous avons étendu ces résultats pour le paramètre de la domination multiple pour la multiplicité est égale 2 (la 2-domination).

Les résultats que nous avons obtenus sont intéressants du fait qu'en plus de la caractérisation des chaînes et des arbres excellents par rapport à la 2-domination, nous avons pu caractériser les sommets qui sont dans tout et les sommets qui ne sont dans aucun ensemble 2-dominant minimum d'un arbre. Ce résultat s'avère très important puisqu'il peut être utilisé pour caractériser les arbres qui ont un ensemble 2-dominant minimum unique et ceci permet la comparaison avec d'autres paramètres de domination (l'égalité et la forte égalité). Aussi nous avons proposé un algorithme polynomial de reconnaissance des arbres excellents, les arbres recommandables, les arbres indésirables et les arbres justes par rapport à la 2-domination.

Les résultats obtenus sur l'excellence jusqu'à présent sont intéressants, mais ne sont pas suffisants pour répondre à l'ensemble des questions posées dans le concept de l'excellence dans les graphes. Ce concept constitue un domaine prometteur qui ouvre beaucoup de perspectives de recherche comme

- L'étude de l'excellence par rapport à d'autres paramètres de domination
- La caractérisation de classes plus générales autres que la classe des arbres pour les paramètres déjà étudiés.

Références

[1] Haynes. T.W., S.T. Hedetniemi, P.J. Slater, "Fundamentals of Domination in Graphs". Marcel Dekker, New York, 1998.

[2] P.L. Hammer, P. Hansen, B. Simeone, "Vertices belonging to all or to no maximum stable sets of a graph", SIAM J. Algebraic Discrete Math., 3(2) (1982), 511–522.

[3] C.M. Mynhardt, "Vertices contained in every minimum dominating set of a tree", J. Graph Theory 31(3) (1999), 163–177.

[4] M. Blidia, M. Chellali, S. Khelifi, "Veritices belonging to all or to no minimum double dominating sets in trees", AKCE J. Graphs. Combin. 2 (2005) 1, 1 9.

[5] Claude Berge, "Graphes et hypergraphes", Dunod, 2e édition, 1973.

[6] C. F. de Jaenisch. "Applications de l'Analyse Mathematique au Jeu des Echecs. Petrograd", 1862.

[7] Berge. C. "The Theory of Graphs and Its Applications". New York: Wiley, 1962.

[8] O. Ore, "Theory of Graphs", Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 38 (1962).

[9] E.J. Cockayne and S.T. Hedetniemi, "Towards a theory of domination in graphs", Networks 7 (1977) 247-261.

[10] Stephen T. Hedetniemi, Renu C. Laskar: Bibliography on domination in graphs and some basic definitions of domination parameters. Discrete Mathematics 86(1-3): 257-277 (1990).

[11] E. J. Cockayne, R. M. Dawes, and S. T. Hedetniemi, "Total domination in graphs". Networks 10 (1980) 211-219.

[12] SLATER P J. Domination and location in acyclic graphs [J]. Networks, 1987, 17: 55–64.

[13] Fink J. F and Jacobson M. S., "n- domination in graphs in: Graph Theory with applications to Algorithms and Computer", (Kalamazoo, Mich. 1984) eds. Alavi, Chartrand, Lesniak, Lick and wall, Wiley, New-York (1985) 283 - 300.

[14] F. Harary and T. W. Haynes, Double domination in graphs. Ars Combin., 55 (2000), 201-213.

[15] T.W. Haynes and P.J. Slater, Paired-domination in graphs, Networks 32 (1998) 199-206.

[16] Fricke G.H.,Haynes T.W.,Hedetnieni S.M.,Hedetnieni S. T et Laskar R. C.,"excellents trees",Bull.Inst.Combin Appl.34,(2002),27-28.

[17] E.J. Cockayne, M.A. Henning, C.M. Mynhardt, Vertices contained in all or in no minimum total dominating set of a tree, Discrete Math. 260 (2003), 37-44.

[18] Haynes .T. W, Henning M.A,"Acharacterisation of i-excellent trees",Discrete Mathematics 248,(2002),69 -77.

[19] Dauterman R. E.,"vertices in total dominating sets".,In Partial Fulfillement of the Requirements for the Degree Master of Science.

[20] Henning M.A.,"Total domination excellent trees",Discrete Mathematics 263,(2003),93-104.

[21] Dautermann R.E. "Vertices in total dominating sets", In Partial Fulfillment of the quirements for the degree Master of Science. 70.

[22] Khelifi S. Thèse de magistère, "Contribution à l'étude des graphes μ-excellents", 2004.

[23] Slater P.J.,"Dominating and reference sets in graph" J.Mathematical and Physical Sciences22,(1988),445-455.

[24] Lounes R. Thèse de magistère, "Contribution à l'étude de l'excellence et de l'unicité des arbres", 2008.

[25] M. Blidia, R. Lounes, "Veritices belonging to all or to no locating sets in trees, Opuscula Mathematica Vol. 29 No. 1 2009.

[26] M. Blidia, M. Chellali, O. Favaron Independence and 2-domination in trees. Australasian Journal of Combinatorics, 33 (2005) 318.

[27] Fink J. F and Jacobson M.S, " n-domination, n-dependance and forbidden subgraphs", in: Graph Theory with applications to Algorithms and Computer, (Kalamazoo, Mich. 1984) eds .Alavi, Chartrand, Lesniak, Lick and wall, Wiley, New - York (1985) 301- 311.