REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE SAAD DAHLAB DE BLIDA

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

# Projet de Fin d'Etudes

**Pour l'obtention du diplôme :**

**Master En Mathématiques**

**Spécialité : Recherche opérationnelle**

Thème :

# Les sommets appartenant à tout ou a aucun $\gamma_2$-ensemble et Implémentation

**Présenté par :**

**Slimi Samia** & **Mechebek Atika**

**Devant les membres de jury :**

- **M^r Tami Omar** — **Président** — Chargé de cour, USD Blida
- **M^me Meddah Nacéra** — **Examinatrice** — Maître Assistante, USD Blida
- **M^r Bouchou Ahmed** — **Examinateur** — Maître Assistant, U. de Média
- **M^r Blidia Mostafa** — **Promoteur** — Professeur, USD Blida

PROMOTION : 2011-2012

# Résumé

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple d'ordre $n$ où $V$ est l'ensemble des sommets et $E$ est l'ensemble des arêtes.

Le problème de domination consiste à trouver un ensemble de sommets $\mathcal{D}$ tel que chaque sommet de V \ $\mathcal{D}$ admet au moins un voisin dans $\mathcal{D}$ qu'on appelle ensemble dominant, le cardinal minimum d'un ensemble dominant d'un graphe $G$ est noté $\gamma(G)$ dit nombre de domination. D'une manière plus générale, pour un entier k $\geq$ 1, un ensemble k-dominant $\mathcal{D}$ d'un graphe $G$ est un ensemble de sommets tel que tout sommet de V \ $\mathcal{D}$ admet au moins k voisins dans $\mathcal{D}$. Le nombre de k-domination $\gamma_k(G)$ est la cardinalité minimum d'un ensemble k-dominant de $G$.

Dans ce mémoire on a étudié le paramètre $\gamma_2(G)$ dans les graphes, on a élaboré et implémenté un algorithme qui permet de reconnaitre les sommets qui appartiennent à tout ou à aucun $\gamma_2$-ensemble dans un arbre. Suite à cette reconnaissance et dans le même logiciel qu'on a établi on peut spécifier la nature d'un arbre donné : arbre excellent, arbre recommandable, arbre indésirable, arbre juste, et même si l'arbre admet un $\gamma_2$-ensemble unique.

# ملخص

ليكن $G = (V, E)$ بيانا بسيطا برتبة $n$ بحيث $V$ تمثل مجموعة الرؤوس و $E$ مجموعة الأضلاع .

مشكلة الهيمنة تهدف إلى إيجاد مجموعة رؤوس $\mathcal{D}$ بحيث كل رأس من $V/\mathcal{D}$ تملك جارا على الأقل في $\mathcal{D}$ و تسمى المجموعة المسيطرة (المهيمنة)، يرمز إلى الأصلي الأدنى لمجموعة مسيطرة في بيان $G$ ب $\gamma(G)$ المسمى عدد السيطرة. بشكل عام، من اجل كل عدد طبيعي ك$\leq 1$، مجموعة ك-مهيمنة $\mathcal{D}$ لبيان $G$ هي مجموعة رؤوس بحيث كل قمة من $V/\mathcal{D}$ تملك ك جارا على الأقل في $\mathcal{D}$ . عدد ك-هيمنة $\gamma_k(G)$ هو الأصلي الأدنى لمجموعة مسيطرة للبيان G.

في هذه المذكرة قمنا بدراسة الوسيط $\gamma_2(G)$ في البيانات، أنجزنا و برمجنا خوارزمية تسمح بمعرفة انتماء الرؤوس إلى كل أو إلى أي $\gamma_2$–مجموعة في شجرة. إضافة إلى هذه المعرفة و في نفس البرنامج الذي أنجزناه نستطيع تمييز طبيعة شجرة معطاة : شجرة مجحفة، شجرة ممتازة، شجرة مستحبة و شجرة غير مرغوب فيها وأيضا إن كانت تقبل الشجرة $\gamma_2$– مجموعة وحيدة

# Abstract

Let $G = (V, E)$ be a simple graph of order $n$, with vertex set $V$ and edge set $E$.

The problem of domination in graphs is to find a set of vertices $D$ such that each vertex of $V \setminus D$ has at least one adjacent vertex in $D$, which is called dominating set, the minimum cardinality of a dominating set of a graph $G$ is denoted $\gamma(G)$ and it said the domination number. In a more general, for an integer $k \geq 1$, a k-dominating set $D$ of a graph G is a set of vertices such that every vertex of $V \setminus D$ has at least k-adjacent vertices in $D$. The k-domination number $\gamma_k(G)$ is the minimum cardinality of a k-dominating set of G.

In this thesis we have studied the parameter $\gamma_2(G)$ in graphs. We have developed and implemented an algorithm which can recognize the vertices belonging to all or no $\gamma_2 - set$ in a tree. Following this recognition and in the same software, we can specify the nature of a given tree: excellent tree, recommendable tree, tree undesirable, tree just, and even if the tree admits a unique $\gamma_2 - set$.

# Remerciements

Nous remercions ALLAH, le tout puissant de nous avoir donné tant de courage, de volonté et surtout de patience pour l'élaboration de ce modeste travail ...

Nous tenons à exprimer notre profonde gratitude et connaissance à notre promoteur Mr Blidia Mostafa pour le support qu'il nous a apporté et la confiance qu'il nous a témoigné, et pour ces orientations et ses conseils précieux ...

Nous remercions Monsieur Tami Omar. pour l'honneur qu'il nous fait en présidant le jury de ce mémoire.

Nous remercions également Monsieur Bouchou Ahmed. et Madame Maddah Nacéra, qui nous ons honoré en acceptant de faire partie du jury.

Un grand Merci pour tous ceux et celles qui ont participé, à la réalisation de ce travail de prés ou de loin ...

Un très grand Merci à Mr Safar, Mr El Moussaoui, Mr Zair, Mr Younsi, Mlle Samahe, Mlle Gougilli Soumia, à tous ceux qui nous connaissent.

Et un autre grand merci également à tous les enseignants du département mathématique, en particulier à ceux qui ont contribué à notre formation.

# DEDICACE

Avec Une énorme joie je dédie ce petit travail aux plus chères personnes de ma vie ...

- A ma très chère mère et mon cher père ...

- A mes chers frères ***Billel***, ***Rachid*** et son épouse ***Hanane*** et ses enfants ***Dhiaeddine***, ***Haithem*** et ***Moussabe***. A mes chères sœurs ***Farida*** et ***Dhaouia*** et son mari ***Farid*** et ses enfants ***Ikram*** , ***Aya*** et le petit ***Ayoube***...

- A toutes la famille ***SLIMI*** dans le monde.

- A toutes mes chères amies ***Khadidja, Farida, Asma, Salma, Hadjer, Souade, Meriem, Samiha, Zinouba, Soumia et***... Sans oublier ma très chère sœur ***Faiza*** et à tous un *grand* merci...

- A tous que je n'ai pas cités et à tous ceux qui me connaissent

- A ma collègue de binôme ***Atika*** que je remercie bien pour son amitié et sa compréhension durant toute l'année sans oublier sa famille ......

- A toutes mes amies, mes collègues pendant toutes les années et touts les étudiants du département de mathématiques, en particulier les étudiantes de ma promotion ...

- A tous ceux et celles qui m'ont aidé de prés ou de loin, un grand merci...

- A tout mes enseignants durant tout ma vie scolaire,

C'est grâce à vous ...

**Samia.**

# DEDICACE

Je tiens à remercier mon dieu ALLAH le tout puissant de m'avoir donné la foi et de m'avoir permis de présenter ce travail.

Je dédie ce petit travail aux plus chères personnes de ma vie. Ils ont le droit de recevoir mes chaleureux remerciements particulièrement pour tous les sacrifices qu'ils ont consentis pour me permettre de suivre mes études dans les meilleures conditions possibles et n'avoir jamais cessez de m'encourager tout au long de mes années d'étude. En leurs souhaitant une longue vie pleine de joie et de santé.

A la femme qui remplie ma vie d'affection et d'encouragements, à ma très **chère mère**.

A mon adoré **papa** l'homme à qui je dois ma réussite, mon succès et mon bonheur.

A mes **chers frères : Ahmed, Zobir** et surtout mon frère **Ali** qui ont toujours été là pour moi, Pour leurs soutien moral et leurs sacrifices et qui m'ont donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance. J'espère qu'ils trouveront dans ce travail toute ma reconnaissance et tout mon amour.

A ma **sœur Meriem**

A ma collègue de binôme **Samia** et sa famille

Je remercie infiniment le professeur **Blidia**, de son encadrement, sa compréhension et son gentillesse durant tout le long de mon mémoire, et tous **les enseignants** du **département mathématique**.

Enfin à toute ma famille, à tous mes proches amis : Fatma, Hayet, Meriem, Zineb, Soumia, Amira, Assia, Hanane, Hadjira, Iteb, Kahina, Mina, Hadjer, mes collègues pendant tous les années et tous les étudiants du département de mathématiques.

**Atika.**

# TABLES DES MATIERES

# INTRODUCTION

La recherche opérationnelle est une discipline dont le but est de fournir des méthodes pour répondre à un type précis de problème, c'est-à-dire à élaborer une démarche universelle pour un type de problème qui aboutit à la ou les solutions les plus efficaces. La particularité de la recherche opérationnelle est que les méthodes proposées sont des démarches rationnelles basées sur des concepts et outils mathématiques et/ou statistiques.

Généralement, ces méthodes sont employées sur des problèmes tels que leur utilisation "manuelle" devient impossible. C'est pourquoi, du fait qu'elles sont rationnelles, les démarches proposées par la recherche opérationnelle peuvent être traduites en programmes informatiques. La traduction d'une démarche en un programme informatique n'est pas en général facile et sans difficultés à mettre en œuvre.

L'histoire de la théorie des graphes débute peut être avec les travaux d'Euler au XVIII$^{ème}$ siècle et trouve son origine dans l'étude de certains problèmes, tels que celui des ponts de Königsberg, la marche du cavalier sur l'échiquier ou le problème de coloration des cartes.

La théorie des graphes s'est alors développée dans diverses disciplines telles que la chimie, la biologie, les sciences sociales...

Depuis le début du XX$^{ème}$ siècle, elle constitue une branche à part entière des mathématiques, grâce aux travaux de König, Menger, Cayley puis de Berge et d'Erdös.

De manière générale, un graphe permet de représenter la structure, les connexions d'un ensemble complexe en exprimant les relations entre ses éléments : réseau de communication, réseaux routiers, interaction de diverses espèces animales, circuits électriques, ...

Les graphes constituent donc une méthode de pensée qui permet de modéliser une grande variété de problèmes en se ramenant à l'étude des sommets et des arcs.

Les derniers travaux en théorie des graphes sont souvent effectués par des informaticiens, du fait de l'importance que revêt l'aspect algorithmique.

Dans la théorie des graphes beaucoup de problèmes sont apparus, ces problèmes ont de nombreuses applications, bien au delà des histoires de pompiers et de déchetteries. Pour la domination, on peut trouver de nombreuses applications dans le domaine des réseaux (par exemple, choisir des relais radio où placer des liaisons satellite) ou dans les problèmes d'affectation et d'emplois du temps (sur un graphe biparti reliant d'un côté des candidats à leurs compétences de l'autre côté, choisir un minimum d'employés qui couvrent toutes les compétences).

Le concept de la domination trouve son origine dans le jeu d'échec, le principe est de couvrir (dominer) l'ensemble des cases par certaines pièces du jeu. L'idée semble remonter au XVI$^{ème}$ siècle en Inde voir [1]. En 1862, D. JAENISH [2] posa le problème suivant: Déterminer le nombre de reines à placer sur l'échiquier de telle manière que chaque case soit occupée en un seul mouvement par l'une des reines. Au fait, ce problème est un problème de domination, on associe au jeu un graphe où les sommets sont les différentes cases de l'échiquier et on met une arête si le déplacement de la reine est possible sinon on ne met pas d'arête, le nombre de reines est égal à la cardinalité minimal d'un sous ensemble dominant dans le graphe associe (graphe des reines).

Le problème de domination (absorption) fait partie de la famille des problèmes combinatoires en théorie des graphes. Sa formulation simple, a incité beaucoup de chercheurs à investir dans le domaine algorithmique afin de permettre sa résolution qui est en général un problème très difficile (NP-complet). A cet effet, que se soit en économie, en industrie ou autres, il s'intéresse aux différentes situations relevant du domaine de la prise de décision.

Notre recherche a pour objet général, l'étude du problème de 2-domination qui généralise la notion de la domination dans les graphes.

Le contenu de cette thèse est réparti en quatre chapitres.

Nous introduisons dans le premier chapitre les définitions de base ainsi que les notations usuelles dans le domaine de la théorie des graphes utilisées dans ce mémoire. A la fin du chapitre nous parlerons de la complexité algorithmique.

Dans le deuxième chapitre nous présenterons, la notion de k-domination dans les graphes et donnerons quelques résultats connus.

Nous nous intéressons dans le troisième chapitre à étudier la 2-domination et quelques résultats des bornes précises pour les arbres, l'excellence des graphes et à caractériser l'ensemble des sommets appartenant à tout ou a aucun $\gamma_2$-ensemble. Nous donnons quelques théorèmes qui sont à la base du processus d'élagage dans les arbres par rapport à la 2-domination, nous élaborons à la fin du chapitre un algorithme et l'organigramme de reconnaissance des arbres $\gamma_2$-excellents, des arbres $\gamma_2$-recommandables, des arbres $\gamma_2$-indésirables et les arbres $\gamma_2$-justes, qui sera par la suite implémenté.

Dans le quatrième chapitre nous expliquerons toutes les étapes d'exécution de l'algorithme réalisé et le mode d'emploi de notre logiciel avec des exemples pris aléatoirement.

# CHAPITRE 1

## GENERALITES SUR LES GRAPHES

Dans cette première partie de ce chapitre on rappelle quelques définitions et notions fondamentales relatives aux graphes auxquels nous nous intéresserons dans la suite de ce mémoire. Nous avons également donné quelques graphes particuliers tell : les étoiles et les couronne, ensuite nous étudierons une généralisation de la domination dans les graphes. Enfin, nous donnerons un aperçu sur la complexité des problèmes.

### 1.1-Définitions et notations :

### 1.1.1-Graphe :

Un graphe $G = (V, E)$ non orienté est constitué d'un ensemble fini de sommets $V$ et d'un ensemble d'arêtes $E$. Le nombre de sommets de $G$ est appelé ordre de $G$ noté généralement $n$. Une arête entre les sommets $u$ et $v$ dans $V$ est une paire de sommets que l'on notera par $uv$. Si $uv$ est une arête, alors on dit que les sommets $u$ et $v$ sont adjacents et que l'arête $uv$ est incidente à ces deux sommets. Une arête de la forme $uu$ est appelée boucle.

Un graphe d'ordre 1 est dit trivial, sinon on dit non trivial. Un graphe $G$ est dit simple si $G$ est sans boucles, et si deux sommets quelconques de $G$ sont reliés par au plus une arête (sans arêtes multiples). Dans tout ce qui suit, les graphes considérés sont simples et non triviaux. Par exemple, la Figure 1.1 montre $G = (V, E)$ un graphe simple non trivial d'ordre 7 avec :

$V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ et $E(G) = \{ab, ad, bc, cd, be, ce, ef, eg\}$.

- les sommets $a$ et $b$ sont adjacents.
- l'arête $ce$ est incidente à $c$ et $e$.

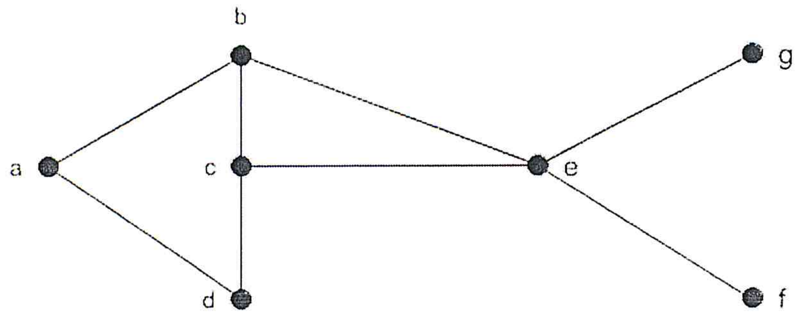
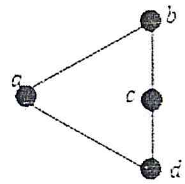



Figure 1.1 : Un graphe simple $G = (V, E)$

### 1.1.2-Sous-graphe :

Pour un sous-ensemble$S \subset V$, le sous-graphe induit par $S$ noté $G[S]$ est le graphe ayant $S$ comme ensemble de sommets et ses arêtes sont celles de $E$ ayant leurs extrémités dans $S$. Pour l'exemple précédent, voir le sous-graphe induit par $S = \{a, b, c, d\}$ dans la Figure 1.2




$G[S]$

Figure 1.2: $G[S]$ le graphe induit par $S$

### 1.1.3-Voisinages :

L'ensemble des sommets adjacents à un sommet $v$ de $G$, qu'on note $N_G(v)$, est appelé l'ensemble des voisins de $v$, où voisinage ouvert de $v$ dans $G$ et $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$ est appelé le voisinage fermé de $v$. Pour un sous-ensemble$S \subset V$, $N_G(S) = \bigcup_{v \in S} N_G(v)$ est le voisinage ouvert et $N_G[S] = N_G(S) \cup \{S\}$ est le voisinage fermé de S.

Le degré d'un sommet $v \in V$; noté $d_G(v)$, est égal au cardinal de son voisinage ouvert. (i.e.: $d_G(v) = |N_G(v)|$ )

Un sommet de degré nul est dit sommet isolé et un sommet de degré égal à un est dit sommet pendant et on note par $L(G)$ l'ensemble des sommets pendants de $G$.

Un sommet adjacent à un sommet pendant est appelé sommet support et l'ensemble des sommets supports de $G$ est noté par $S(G)$. On note par $\delta(G)$ et $\Delta(G)$ le degré minimum et maximum dans $G$, respectivement.

Le voisinage privé d'un sommet $v$ par rapport à un ensemble $S$ noté $pn[v,S]$, est l'ensemble des sommets du voisinage fermé de $v$ qui n'ont pas d'autres voisins dans $S$, i.e.:

$$pn[v,S] = \{u \in V : N[u] \cap S = \{v\}\}.$$

Dans la figure 1.1 on a :

$N_G(a) = \{b,d\}$, $N_G[a] = \{a,b,d\}$ , $L(G) = \{f,g\}$, $S(G) = \{e\}$

$d_G(d) = 2$ , $\delta(G) = 1$, $\Delta(G) = 4$ , si $S = \{a,c,e\} \Longrightarrow pn[e,S] = \{f,g\}$

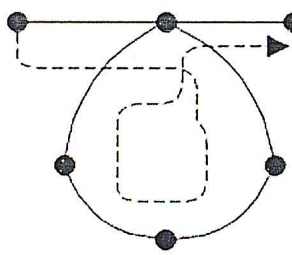
## 1.1.4-Chaînes et cycles :

Une chaîne $C$ dans un graphe $G = (V,E)$ est une séquence finie de sommets $v_1, v_2, \dots, v_k$ , et d'arête $e_i$ telle que pour tout $1 \leq i \leq k-1$ , $e_i = v_i v_{i+1} \in E$. L'entier $k-1$ représente la longueur de $C$ (au sens des arêtes) et les sommets $v_1$ et $v_k$ sont appelés extrémités de la chaîne $C$.

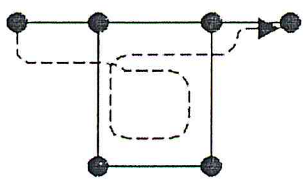
Une chaîne qui n'utilise pas deux fois la même arête est dite simple.

Une chaîne qui ne passe pas deux fois par le même sommet est dite élémentaire.

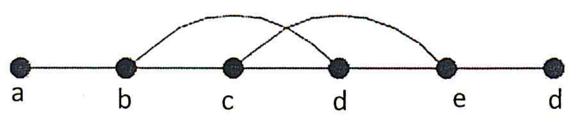
Une corde est une arête reliant deux sommets non consécutifs dans une chaine. En effet les graphes de la Figure 1.3



Une chaine non élémentaire



Une chaine non simple




Une chaine $P_6$ avec 2 cordes bd et ce

Figure 1.3 : différents types des chaînes.

Une chaîne minimale induite par $n$ sommets et notée par $P_n$ est une chaîne élémentaire sans corde.

Un cycle $C_k$ dans un graphe $G$ est une chaîne simple dont les extrémités $v_1$ et $v_k$ sont confondues. En effet les graphes de la Figure 1.4.

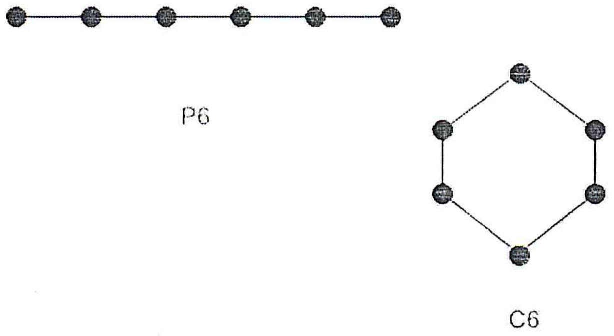



Figure 1.4 : Une chaine $P_6$ et un cycle $C_6$

### 1.1.5-Distance et diamètre :

Soient $u$ et $v$ deux sommets d'un graphe $G$. On appelle distance entre $u$ et $v$, notée $d(u,v)$, la longueur de la plus courte chaîne joignant $u$ et $v$. L'excentricité d'un sommet $v$ dans un graphe $G=(V,E)$ est : $exc(v) = max\{d(v;w) : w \in V\}$, et le diamètre de $G$, noté $Diam\ (G)$ est égal à $max\{exc(v) : v \in V\}$.

Un sommet de $G$ ayant une excentricité minimum est appelé centre.

## 1.2-<u>Quelques graphes particuliers</u> :

- Le graphe complémentaire de $G$ noté $\overline{G}$ est un graphe ayant le même ensemble de sommets que $G$ et une arête est dans $\overline{G}$ si elle n'est pas dans $G$.

Voir la Figure 1.5 qui illustre un graphe $G$ et son complémentaire $\overline{G}$.

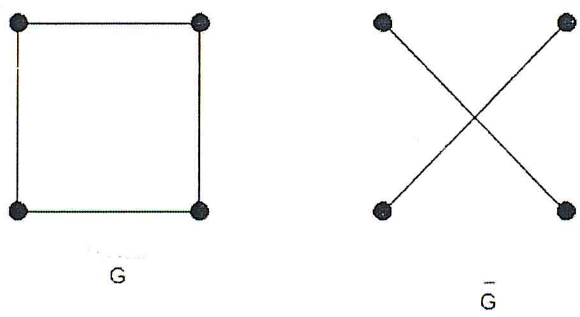



Figure 1.5 : Un graphe $G$ et son complémentaire $\overline{G}$

- Un graphe $G$ est dit connexe si pour toute paire de sommets du graphe, il existe une chaîne les reliant. Une composante connexe d'un graphe est un sous-graphe maximal (au sens de l'inclusion) connexe.
- Un sommet $v$ d'un graphe connexe $G$ est appelé sommet d'articulation de $G$ si le graphe $G - v$ n'est pas connexe, où $G - v$ désigne le graphe obtenu par la suppression de $v$ de $G$.
- Le graphe complet d'ordre $n$, noté $K_n$ est le graphe simple dans lequel tous les sommets sont de degré $n - 1$. Ainsi deux sommets quelconques de $K_n$ sont adjacents.
- Une clique est un sous-graphe complet d'un graphe $G$. Une clique de $p$ sommets est notée $K_p$.
- On appelle bloc un ensemble de sommets $A$ qui engendrent un sous graphe connexe, sans point d'articulation et maximal avec cette propriété. Un bloc $B$ est dit bloc terminal, si $B$ contient au plus un point d'articulation dans $G$.
- Un graphe $G = (V, E)$ est dit un graphe bloc, si tout bloc de $G$ est une clique.
- Un graphe $G = (V, E)$ est dit cactus, si chaque arête de $G$ appartient à au plus un cycle. Un cactus ayant un seule cycle est dit uni-cycle.
- Un arbre est un graphe cactus connexe sans cycles.
- La couronne d'un graphe $H$ noté par $HoK_1$, est obtenu à partir de $H$ en reliant chaque sommet $v \in V(H)$ par un sommet pendant. Par exemple, le graphe $C_4oK_1$ est illustré dans la Figure 1.6.

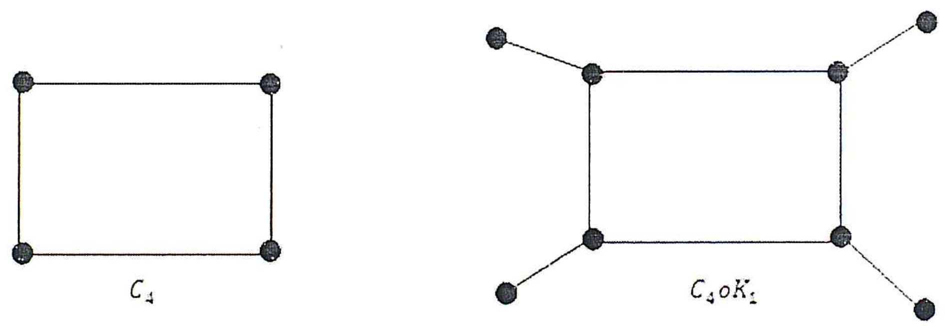



Figure1.6 : Un cycle $C_4$ et sa couronne $C_4oK_1$

- Etant donné un graphe $H$. Un graphe $G$ est dit sans $H$, si le graphe $G$ ne contient pas $H$ comme sous-graphe induit.

Par exemple si $H$ est un triangle alors on dit que $G$ est un graphe sans triangles.

- Un graphe $G = (V, E)$ est dit multiparti. S'il existe une partition de $V$ en $k$ sous-ensembles $V_1, V_2, \dots, V_k$ tels que chacun des $G[V_i]$ ne contient aucune arête. Si $k = 2$ le graphe $G$ est dit biparti.
- Un graphe est biparti si et seulement si il ne contient pas de cycle de longueur impaire.
- On appelle graphe biparti complet, un graphe biparti tel que pour tout sommet $u \in V_1$ et $v \in V_2, uv \in E$ . Si $|V_1| = \mathrm{p}$ et $|V_2| = q$, alors le graphe biparti complet est noté $K_{p,q}$.

Un exemple du graphe $K_{2,3}$ est illustré dans la Figure 1.7

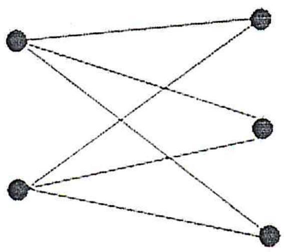


Figure1.7 : Un graphe biparti-complet $K_{2,3}$.

- Un cas particulier d'un graphe biparti complet dans lequel $|V_1| = 1$ et $|V_2| = s$ est appelé une étoile et notée $K_{1,s}$. Le sommet de $V_1$ est appelé centre de l'étoile. Un exemple d'une étoile est montré dans la figure 1.8.

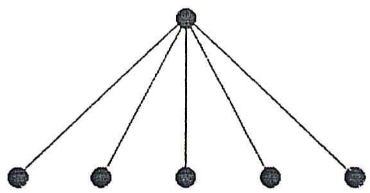


Figure 1.8 : L'étoile $K_{1,5}$

- Une étoile subdivisée $SS_k$ est une étoile dans laquelle toutes les arêtes sont subdivisées en deux. En effet le graphe de la Figure 1.9.

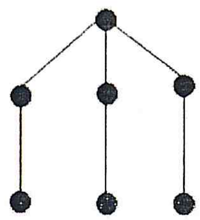


Figure 1.9 : Une étoile subdivisée $SS_3$.

- Une double étoile notée $S_{r,s}$ est le graphe obtenu par les deux étoiles $K_{1,r}$et $K_{1,s}$ en ajoutant une arête reliant les deux centres. Voir la Figure 1.10.

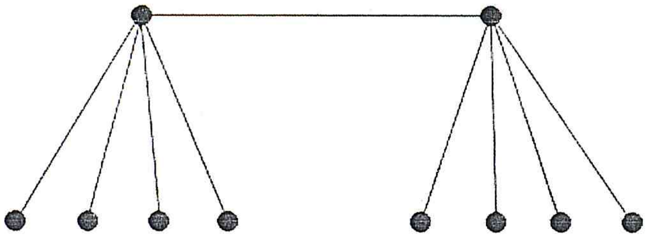


Figure.1.10 : Une double étoile $S_{4,4}$

- Une étoile double subdivisée $S^*_{r,k}$ est un graphe obtenu à partir d'une étoile double, en subdivisant l'arête reliant les deux sommets supports par un sommet. En effet le graphe de la Figure 1.11.

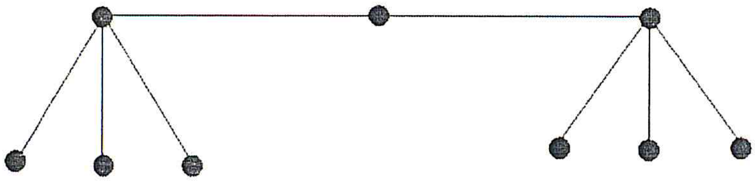


Figure 1.11 : Une étoile double subdivisée $S^*_{3,3}$.

- Un graphe acyclique est un graphe ne contenant pas de cycles, est appelée aussi forêt, une forêt connexe un arbre, en général un arbre est noté par $T$. Un sommet de degré un est une feuille ou un sommet pendant. Il est parfois commode de considérer un sommet spécial d'un arbre, un tel sommet est appelé la racine. Un arbre pendu $T$ avec une racine $r$ fixé est un arbre enraciné. Les Figures 1.8, 1.9, 1.10, 1.11 et 1.12, sont des arbres. Dans la Figure suivante, le sommet $r$ est la racine de l'arbre $T$ ayant 4 sommets pendants.

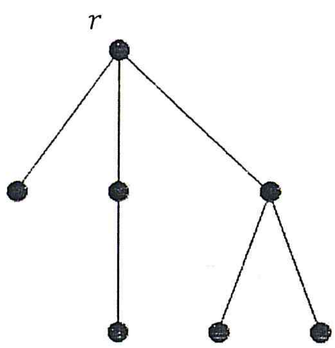



Figure 1.12 : Un arbre $T$ enraciné en $r$

## 1.3-La domination dans un graphe :

Le problème de la recherche du nombre de domination apparaît dans beaucoup de problèmes concrets de notre monde réel, pour éclairer mieux la définition relative à ce problème, on cite les exemples suivants.

**Exemple 1** [3]:

Considérons un réseau de communication constitué de stations fixes et entre deux stations quelconques, il peut exister une communication directe (selon les besoins).

Le problème posé est de sélectionner un ensemble minimum de stations pour installer des transmetteurs, tout en assurant pour les stations qui ne possèdent pas de transmetteurs d'avoir une liaison directe avec ceux qui possèdent un transmetteur.

**Exemple 2** :

Supposons qu'une région est divisée en plusieurs surfaces. Un poste militaire campant en une surface est capable de contrôler non seulement la surface qu'il occupe, mais aussi les surfaces avoisinantes (c.-à-d. : les surfaces qui ont une frontière (un côté) en commun avec la surface occupée).

Il est demandé de choisir le nombre minimum de surfaces occupées par des postes militaires pour que toute la région soit contrôlée.

### 1.3.1-Concept de domination :

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Un sous ensemble $D$ de $V$ est dit dominant (ou absorbant) de $G$ si tout sommet $x$ de $V - D$ est adjacent à au moins un sommet de $D$, le cardinal minimum d'un ensemble dominant de $G$ est appelé nombre de domination et est noté par $\gamma(G)$ et le cardinal maximum d'un ensemble dominant minimal (au sens de l'inclusion) de $G$ appelé nombre de domination supérieur et est noté par $\Gamma(G)$ .

Dans la littérature, il existe d'autres définitions équivalentes aux ensembles dominants dans les graphes. En voici quelques unes.

- Un ensemble $S \subseteq V$ est un dominant si pour tout sommet $v \in V$; $|N[v] \cap S| \geq 1$ .
- Un ensemble $S \subseteq V$ est un dominant si pour tout sommet $v \in V, N[v] \cap S \neq \emptyset$.
- Un ensemble $S \subseteq V$ est un dominant si $N[S] = V$ .

Le problème de l'exemple 1 se ramène donc à la recherche d'un ensemble dominant de cardinalité minimum dans le graphe correspondant au réseau suivant : tout sommet du graphe représentera une station et deux sommets sont adjacents dans le graphe s'il existe une communication directe entre les deux stations qui correspondent aux sommets.

Pour le problème de l'exemple 2, revient à chercher un ensemble dominant de cardinalité minimum dans le graphe suivant : les sommets représentent les surfaces qui partagent la région et deux sommets sont reliés si les surfaces correspondantes sont voisines, c'est-à-dire ont une frontière en commun.

D'après les règles du jeu d'échecs, une reine peut se déplacer vers n'importe quelle case horizontalement, verticalement ou diagonalement, en un coup. Ainsi, la reine dans la Figure 1.13. Peut se déplacer à n'importe quelle case marquée par "X".

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| X | | X | | X | |
| | X | X | X | | |
| X | X | R | X | X | X |
| | X | X | X | | |
| X | | X | | X | |
| | | X | | | X |

Figure 1.13 : Les cases dominer par une reine.

Donc, pour un damier $3 \times 3$ le nombre minimum est 1, pour un damier $5 \times 5$ le nombre minimum est 3 et pour un échiquier $8 \times 8$ le nombre minimum est 5 voir Figure 1.14. Le nombre minimum dans un damier $n \times n$, $n \geq 20$ reste indéterminé jusqu'à présent.

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | R | |
| | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | R |
| | | | R | |
| | | | | |
| | R | | | |
| | | | | |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| R | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | R | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | R | | | |
| | | | | | R | | |
| | | | | | | R | |
| | | | | | | | |

Figure 1.14 : Les reines dans un échiquier

### 1.3.2-Quelques types de domination :

On peut définir des types différents de domination en combinant la domination avec une propriété ou une condition supplémentaire dans les graphes.

Ainsi d'autres paramètres peuvent être définis en imposant une ou plusieurs conditions à l'ensemble dominant, par exemple imposer la condition que le sous graphe induit par l'ensemble dominant $(D)$:

1. $< D >$ soit connexe, produit la domination connexe.
2. $< D >$ soit sans sommets isolés, produit la domination totale.
3. $< D >$ soit une clique produit la domination clique.
4. $< D >$ soit sans arêtes produit la domination stable.
5. $< D >$ soit cycle produit la domination cycle.
6. $< D >$ soit couplage parfait produit la domination couplé.

On peut de même imposer des conditions extérieures, sur la façon de dominer, par exemple dominer au moins $k$ fois chaque sommet extérieur, produit la $k$-domination. Comme on peut imposer simultanément des conditions des deux types, par exemple un dominant double est un dominant sans sommet isolé qui domine au moins deux fois tout sommet extérieur.

**Remarque**: $\gamma(G) \leq \gamma\ (G\ :\ P)$ pour toute propriété P définie précédemment.

A titre d'exemple, considérons quelques types de domination.

- **La domination stable :**

  Un sous ensemble $S$ de $V$ est dit ensemble stable (ou indépendant) de $G$ si le sous graphe $G[S]$ ne contient pas d'arêtes. Le nombre de domination stable, noté par i(G), désigne la cardinalité minimale d'un ensemble stable maximal de $G$. La cardinalité maximale d'un ensemble stable maximal de $G$, notée $\beta(G)$ désigne le nombre de stabilité de $G$.

- **La domination totale :**

  La domination totale a été introduite par Cockayne, Daves et Hedetniemi dans [4], un sous ensemble $S$ de $V$ est dit ensemble dominant total de $G$ si tout sommet de $V$ possède au moins un voisin dans $S$, autrement dit si le sous graphe induit par $S$, ($G[S]$ ou bien $< S >$) ne contient pas de sommets isolés. Le nombre de domination totale, noté $\gamma_t(G)$ désigne la cardinalité minimale d'un ensemble dominant total de $G$.

Considérons un groupe d'individus. On veut sélectionner parmi ce groupe un comité restreint tel que, toute personne du groupe ait des affinités avec au moins un membre de ce comité. Si nous modélisons ce problème par un graphe $G$ dont l'ensemble des sommets représente le groupe d'individus et, deux sommets sont adjacents s'il y a affinités entre les personnes représentées. Alors le comité restreint sélectionné est un dominant total du graphe $G$.

- **La domination couplée :**

La domination couplée a été introduite par Haynes et Slater dans [5] un sous ensemble $S$ de $V$ est dit ensemble dominant couplé de G si S est un dominant de $G$ et si le sous graphe induit par $S$, $< S >$ admet un couplage parfait. Le nombre de domination couplée, noté $\gamma_{pr}(G)$, désigne la cardinalité minimale d'un ensemble dominant couplé.

Considérons un village au sein duquel on veut placer un groupe de vigiles qui assure la protection de ses voisins tout en s'assurant lui même une protection mutuelle avec un collègue. Le plus petit groupe de vigiles représente un ensemble dominant couplé minimum du graphe représentatif des habitants du village.

- **La domination double :**

On notera que le concept de la domination double a été introduite par Harary et Haynes dans [6], un sous ensemble $S$ de $V$ est dit ensemble dominant double de $G$ si tout sommet de $V$ est dominé par au moins deux sommets de $S$ , autrement dit si $v$ est un sommet qui n'est pas dans $S$ alors $v$ admet au moins deux voisins dans $S$ et si $v$ est un sommet de $S$ alors $v$ admet au moins un voisin dans $S$. Le nombre de domination double, noté $\gamma_{\times 2}(G)$, désigne la cardinalité minimale d'un ensemble dominant double de $G$.

Si nous reprenons l'exemple précédent, en spécifiant que tout villageois soit protégé par au moins deux vigiles et que chaque vigile soit lui même protégé par un de ses collègues, alors le plus petit groupe constitué est un ensemble dominant double minimum du graphe représentatif des habitants du village.

- **La domination localisatrice :**

La notion d'ensemble dominant localisateur a été introduite par P. J. Slater dans [7], un sous ensemble $S$ de $V$ est dit dominant localisateur de $G$ si $S$ est un ensemble dominant de $G$ et , si de plus , pour toute paire de sommets $u$ ,$v$ de $V - S$ ,

$N(v) \cap S \neq N(u) \cap S$.

Le nombre de domination localisateur, noté $\gamma_L(G)$, désigne la cardinalité minimale d'un ensemble dominant localisateur de $G$.

## 1.4-Complexité algorithmique :

Un algorithme de résolution d'un problème $(P)$ donnée est une procédure décomposable en opérations élémentaires telles la comparaison, l'affectation, les quatre opérations usuelles,… etc., transformant une chaîne de caractères représentant les données de n'importe quel exemple ou instance du problème $(P)$ en une chaîne de caractères représentant les résultats de $(P)$.

La performance d'un algorithme est généralement mesurée selon la relation existante entre la taille de l'exemple traité (exprimée en termes du nombre n de caractères nécessaires pour le codage des données) et le temps d'exécution (exprimé en termes du nombre $f(n)$ d'opération élémentaires). Le codage des données est tel que l'encombrement mémoire nécessaire pour stocker un nombre positif N, est égal au plus petit entier supérieur ou égal à $log_2\ (N+1)$ . (i.e. égale à $\lceil log_2\ (N+1) \rceil$)

Un algorithme est dit efficace, ou encore polynomial, si le nombre total d'opérations $f(n)$, nécessaires pour la résolution d'un exemple de taille $n$, est borné par un polynôme en la taille du problème. autrement dit, s'il existe deux constantes $C$ et $k$ telles que $f(n) = Cn^k$. Un tel algorithme est de complexité $O(n^k)$.

Un problème est dit polynomial ou appartenant à la classe P (problème déterministes polynomiaux) s'il existe un algorithme polynomial (ou efficace) pour le résoudre. Les problèmes de la classe P sont dits " faciles ".

Un problème d'optimisation combinatoire consiste à chercher une meilleure solution parmi un ensemble fini de solutions réalisables.

Un problème de décision ou de reconnaissance est un problème dont la réponse attendue ne peut être que oui ou non. A chaque problème d'optimisation combinatoire, on peut associer un problème de reconnaissance.

Un problème de décision est dit dans NP (problèmes non déterministes polynomiaux) (resp. CO-NP) si dans le cas où la réponse est affirmative (resp. négative), on peut produire un certificat qui permet de vérifier en temps polynomial la réponse donnée.

Etant donné que les algorithmes efficaces sont des algorithmes non déterministes, il est clair que P $\subseteq$ NP. Mais la classe NP contient des problèmes pour lesquels on ne connaît pas d'algorithme polynomial de résolution. La conjecture P $\neq$ NP demeure cependant ouverte.

On dit qu'un problème ($P_1$) se réduit en temps polynomial à un problème ($P_2$), s'il existe un algorithme pour ($P_1$) qui fait appel à un algorithme de résolution de ($P_2$) et si cet algorithme de résolution de ($P_1$) est polynomial lorsque la résolution de ($P_2$) est comptabilisée comme une opération élémentaire.

Un problème de décision dans NP est dit NP-complet si tout problème de la classe NP peut lui être réduit en un temps polynomial. Ainsi, s'il existe un algorithme polynomial permettant de résoudre un problème NP-complet, il existerait un algorithme polynomial pour tous les problèmes de la classe NP. Les problèmes NP complets sont dits " difficiles ".

Les problèmes NP-durs sont des problèmes au moins aussi difficiles que les problèmes NP-complet et tout problème d'optimisation combinatoire dont le problème de reconnaissance est NP-complet est NP-dur.

# CHAPITRE 2

## LA k-DOMINATION DANS LES GRAPHES

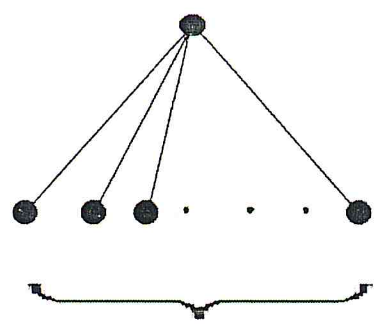
La domination est un concept fondamental dans la théorie des graphes qui a été étudié largement. Le problème original consiste à trouver un ensemble dominant de cardinalité minimum d'un graphe. Le concept de k-domination a été introduit par Fink et Jacobson en 1984, lors d'une conférence à Kalamazoo.

### 2.1-Aperçu sur la k-domination :

### Définition :

Soit $G = (V, E)$ un graphe, étant donné l'entier $k \geq 1$, un sous ensemble $D \subseteq V(G)$ est un k-dominant de G si tout sommet de $V(G) \setminus D$ a au moins k voisins dans D.

A titre d'exemple, dans une étoile $S_{1,k}$ l'ensemble des sommets pendants est un k-dominant minimum, donc $\gamma_k(G) = k$.



k sommets

Figure 2.1 : L'étoile $S_{1,k}$

Pour son application, on considère le problème de la localisation des radars pour contrôler une région donnée. Un certain nombre de points stratégiques 1, 2, 3,... (Les cellules) sont surveillés par des unités militaires pourvues de radars. On exige que chaque cellule soit surveillée par au moins k radars. Le problème consiste à déterminer le nombre minimum de radars à installer ainsi que leur emplacement de telle sorte qu'on contrôle toutes les cellules en respectant la contrainte de la k-domination.

Dans l'exemple du graphe suivant, il faut au moins 9 radars qu'on peut placer par exemple pour que chaque cellule (voir la figure 2.2) soit contrôlé par au moins trois radars, cet ensemble $\{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ représente un ensemble 3-dominant de taille minimum.

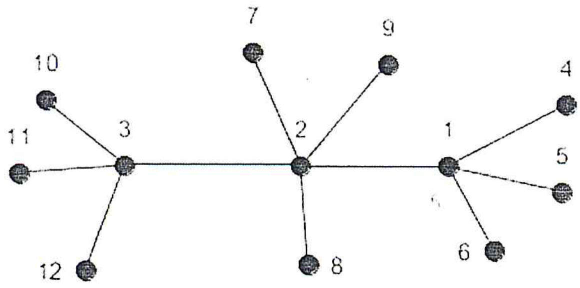



Figure 2.2 : Un graphe de localisation des radars $\gamma_3(G) = 9$

Dans cette thèse nous reconsidérons que l'aspect théorique de ces problèmes. Comme les paramètres de domination sont difficiles à déterminer (problème d'optimisation combinatoire NP-difficiles), nous recherchons des inégalités entre certains d'entre eux ainsi que des conditions permettant d'obtenir l'égalité. Une autre approche classique dans les problèmes d'optimisation combinatoire, est d'essayer de trouver une bonne approximation sous forme d'une fonction en $n, \Delta(G), \delta(G)$ ou $d$ (une liaison entre les paramètres de domination).

## Définition :

Soit $G = (V, E)$ un graphe, et étant donné l'entier $k \geq 1$. Un k-dominant de G est minimal si pour tout sommet x dans $D$, $D\backslash\{x\}$ n'est pas un k-dominant.

Les ordres minimum et maximum d'un k-dominant minimal de graphe $G$ sont notés $\gamma_k(G)$ et $\Gamma_k(G)$. Le nombre de k-domination est $\gamma_k$.

## 2.2-Propriétés de la k-domination :

1. Tout super ensemble d'un ensemble k-dominant est k-dominant.
2. Tout ensemble k-dominant contient au moins k sommets, d'où $\gamma_k(G) \geq k$ pour tout graphe G.
3. Tout ensemble k-dominant contient tout les sommets de degré plus petit que k.
4. Tout ensemble (k+1)-dominant de G est k-dominant et donc $\gamma_k(G) \leq \gamma_{k+1}(G)$ pour tout graphe G et tout entier k$\geq$ 1. De plus V est le seul ensemble $(\Delta + 1)$-dominant mais n'est pas un $\Delta$-dominant minimal. On en déduit que pour tout graphe G, $\Gamma_\Delta(\mathrm{G}) < n$ et $\gamma(G) = \gamma_1(G) \leq \gamma_2(G) \leq \cdots \leq \gamma_\Delta(G) \leq \gamma_{\Delta+1}(G) = n$ .

## 2.3-Bornes sur $\gamma_k$ :

Rappelons tout d'abord que $\gamma_k \geq k$ pour tout graphe G et tout entier $K \leq \Delta$. Fink et Jacobson ont donné d'autre minorants pour $\gamma_k$.

### Observation [8]:

Soit $G$ un graphe de degré minimum $\delta \geq k$ et pour tout $k \geq 4$ un nombre entier on a :

i. Si $2k \leq \frac{\delta+1}{\ln(\delta+1)}$, alors $\gamma_k(G) \leq \frac{n}{\delta+1}(k\ln(\delta+1) + 1 - \frac{k-1}{\delta})$

ii. Si $\frac{\delta+1+2\ln(2)}{\ln(\delta+1)} \geq 2k$, alors $\gamma_k(G) \leq \frac{n}{\delta+1}(k\ln(\delta+1) - \ln(2) + 2 - 2^{\frac{k-1}{\delta}})$

### Observation [9]:

Si G est un graphe d'ordre $n$, de degré maximum $\Delta$ et $\delta(G) \geq 3$, alors
$\gamma_k - \gamma(G) \geq \frac{5k-3\Delta}{8(\Delta+k)} n$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

### Remarque [9]:

Si G est un graphe d'ordre $n$ avec $\delta(G) \geq 3$, et $5k > 3\Delta(G)$, alors on a par l'observation antérieure

$$\gamma_k \geq \gamma(G) + \frac{5k - 3\Delta}{8(\Delta + k)} n$$

Ceci montre que si $\mathrm{C} \geq \mathrm{k} - 2$ sont des constantes arbitraires, alors il existe seulement un nombre fini de graphe G tel que $\delta(\mathrm{G}) \geq 3$, $5\mathrm{k} > 3\Delta(G)$ et $\gamma_\mathrm{k}(\mathrm{G}) \leq \gamma(\mathrm{G}) + \mathrm{C}$.

## Corollaire 1:

Si G est un graphe avec $\Delta(G) \geq 3$ et $k \geq 3$, alors $\gamma_k(G) > \gamma(G)$, ce corollaire découle également de la borne inférieure suivante de $\gamma_k(G)$.

**Théorème** [10]:

Si G est un graphe avec $\Delta(G) \geq k \geq 2$, alors $\gamma_k(G) \geq \gamma(G) + k - 2$.

**Théorème** [10]:

Pour tout graphe G, $\gamma_k(G) \geq \frac{kn}{(\Delta(G)+k)}$

Notons que pour k=1, on trouve la borne du paramètre de domination $\gamma(G)$:

$$\gamma(G) \geq \frac{n}{(\Delta(G) + 1)}$$

**Théorème** [11]:

Si G est un graphe avec $k \leq \delta(G)$, alors on a : $\gamma_k(G) \leq \frac{kn}{(k+1)}$.

Remarquez que pour $k = 1$, on a $\gamma(G) \leq \frac{n}{2}$, cas particulier de ce théorème si G sans sommet isolé (où nous devons supposer que le graphe G n'admet aucun sommet isolé). Cette borne supérieure a été améliorée par Stracke et Volkmann.

**Théorème** [12]:

Pour tout graphe G ,

a) $\gamma_k(G) \leq \frac{n(2k-\delta(G))}{(2k-\delta(G)+1)}$, si $k \leq \delta(G) \leq 2k - 1$.

b) $\gamma_k(G) \leq \frac{n}{2}$, si $\delta(G) \geq 2k - 1$.

Fink et Jacobson ont obtenu une autre borne inférieure pour $\gamma_k(G)$ qui fait intervenir seulement le nombre de sommets $n$ et le nombre des arcs $m$.

**Théorème** [10]:

Pour tout graphe G, $\gamma_k(G) \geq n - \left(\frac{m}{k}\right)$.

**Théorème** [13]:

Tout graphe G de degré minimum $\delta \geq 1$ vérifie

$$\gamma_k(G) \leq \begin{cases} \frac{kn}{k+1} & si \quad k = \delta \\ \frac{(2k-\delta-1)n}{2k-\delta} & si \quad \frac{\delta+3}{2} \leq k \leq \delta - 1 \\ \frac{2n}{3} & si \quad k = \frac{\delta+2}{2} \\ \frac{n}{2} & si \quad 1 \leq k \leq \frac{\delta+1}{2} \end{cases}$$

**Théorème** [11]:

Si G est un graphe avec $\delta(G) \geq 2$, alors $\gamma_2(G) < \gamma_5(G)$.

**Corollaire** [14]:

Si G est un graphe d'ordre n et de degré minimum δ. Si k est un nombre entier, alors $\gamma_k \leq \frac{\delta}{2\delta+1-k} n$

**Théorème** [14]:

Tout graphe G d'ordre *n* et de degré minimum δ satisfait

$\gamma_k + \frac{\grave{k}-k+1}{2\grave{k}-k} \gamma_{\grave{k}}(G) \leq n$ , pour tout k et $\grave{k}$ entiers avec $1 \leq k \leq \grave{k} \leq \delta$.

**Théorème** [8]:

Soit G un graphe de n sommet avec de degré minimum $\delta \geq K$, ou $k \in \mathbb{N}$, si $\frac{\delta+1+2\ln(2)}{\ln(\delta+1)} \geq 2k$ alors $\gamma_k \leq \frac{n}{\gamma+1}\left(k\ln(\delta+1) - \ln(2) + 2\sum_{i=0}^{k-1} \frac{\delta^i}{i!(\delta+1)^{k-1}}\right)$.

**Rappel :**

Un graphe biparti est dit k-semi régulier si son ensemble du sommet peut être partitionné en deux ensembles. la bipartition vérifie la propriété suivante : chaque sommet d'un des ensembles de la bipartition est de degré k.

**Théorème** [15]:

Soit un entier $k \geq 1$ . Si T est un arbre d'ordre $n$, alors $\gamma_k(G) \geq \frac{(k-1)n+1}{k}$ .

Et $\gamma_k(T) = \frac{((k-1)n+1)}{k}$ si et seulement si T est un k-semi régulier ou $n = 1$

En 2007, Volkmann a donné la caractérisation des graphes qui vérifient le Théorème, pour les arbres T avec $\gamma_k(T) = \left\lceil \frac{(k-1)n+1}{k} \right\rceil$ .

**Théorème** [16]:

Si T est un arbre d'ordre $n$, alors $\gamma_k(G) = \left\lceil \frac{(k-1)n+1}{k} \right\rceil$ si et seulement si :

(i) $n = kt + 1$ pour un entier $t \geq 0$ et T est un arbre k-semi régulier ou $n = 1$, ou

(ii) $n = kt + r$ pour les nombres entiers $t \geq 0$ et $2 \leq r \leq k$ et T consiste en r arbres $T_1, T_2, T_3. . ., T_r$ tels que la condition (i) est satisfaite et r - 1 arêtes supplémentaires tels que les arbres $T_1, T_2, T_3. . , T_r$ *a*vec ces r-1 arêtes donne un arbre.

En général, le problème de détermination du nombre de k-domination dans les graphes est un problème NP-complet, pour cela on a étudié dans le prochain chapitre la 2-domination sur les arbres et nous donnons des bornes précises pour les arbres.

# CHAPITRE 2

## LA k-DOMINATION DANS LES GRAPHES

La domination est un concept fondamental dans la théorie des graphes qui a été étudié largement. Le problème original consiste à trouver un ensemble dominant de cardinalité minimum d'un graphe. Le concept de k-domination a été introduit par Fink et Jacobson en 1984, lors d'une conférence à Kalamazoo.

### 2.1-Aperçu sur la k-domination :

### Définition :

Soit $G = (V, E)$ un graphe, étant donné l'entier $k \geq 1$, un sous ensemble $D \subseteq V(G)$ est un k-dominant de G si tout sommet de $V(G)\backslash D$ a au moins k voisins dans D.

A titre d'exemple, dans une étoile $S_{1,k}$ l'ensemble des sommets pendants est un k-dominant minimum, donc $\gamma_k(G) = k$.

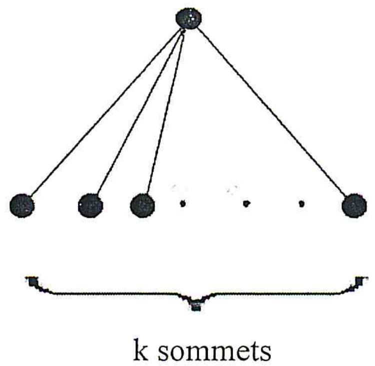



Figure 2.1 : L'étoile $S_{1,k}$

Pour son application, on considère le problème de la localisation des radars pour contrôler une région donnée. Un certain nombre de points stratégiques 1, 2, 3,... (Les cellules) sont surveillés par des unités militaires pourvues de radars. On exige que chaque cellule soit surveillée par au moins k radars. Le problème consiste à déterminer le nombre minimum de radars à installer ainsi que leur emplacement de telle sorte qu'on contrôle toutes les cellules en respectant la contrainte de la k-domination.

Dans l'exemple du graphe suivant, il faut au moins 9 radars qu'on peut placer par exemple pour que chaque cellule (voir la figure 2.2) soit contrôlé par au moins trois radars, cet ensemble $\{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ représente un ensemble 3-dominant de taille minimum.

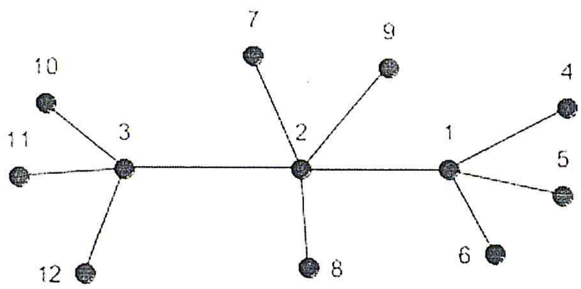



Figure 2.2 : Un graphe de localisation des radars $\gamma_3(G) = 9$

Dans cette thèse nous reconsidérons que l'aspect théorique de ces problèmes. Comme les paramètres de domination sont difficiles à déterminer (problème d'optimisation combinatoire NP-difficiles), nous recherchons des inégalités entre certains d'entre eux ainsi que des conditions permettant d'obtenir l'égalité. Une autre approche classique dans les problèmes d'optimisation combinatoire, est d'essayer de trouver une bonne approximation sous forme d'une fonction en $n, \Delta(G), \delta(G)$ ou $d$ (une liaison entre les paramètres de domination).

## Définition :

Soit $G = (V, E)$ un graphe, et étant donné l'entier $k \geq 1$. Un k-dominant de G est minimal si pour tout sommet x dans $D$, $D \backslash \{x\}$ n'est pas un k-dominant.

Les ordres minimum et maximum d'un k-dominant minimal de graphe $G$ sont notés $\gamma_k(G)$ et $\Gamma_k(G)$. Le nombre de k-domination est $\gamma_k$.

## 2.2-Propriétés de la k-domination :

1. Tout super ensemble d'un ensemble k-dominant est k-dominant.
2. Tout ensemble k-dominant contient au moins k sommets, d'où $\gamma_k(G) \geq k$ pour tout graphe G.
3. Tout ensemble k-dominant contient tout les sommets de degré plus petit que k.
4. Tout ensemble (k+1)-dominant de G est k-dominant et donc $\gamma_k(G) \leq \gamma_{k+1}(G)$ pour tout graphe G et tout entier k$\geq$ 1. De plus V est le seul ensemble $(\Delta + 1)$-dominant mais n'est pas un $\Delta$-dominant minimal. On en déduit que pour tout graphe G, $\Gamma_\Delta$(G) $< n$ et $\gamma(G) = \gamma_1(G) \leq \gamma_2(G) \leq \cdots \leq \gamma_\Delta(G) \leq \gamma_{\Delta+1}(G) = n$ .

## 2.3-Bornes sur $\gamma_k$ :

Rappelons tout d'abord que $\gamma_k \geq k$ pour tout graphe G et tout entier $K \leq \Delta$. Fink et Jacobson ont donné d'autre minorants pour $\gamma_k$.

### Observation [8]:

Soit $G$ un graphe de degré minimum $\delta \geq k$ et pour tout $k \geq 4$ un nombre entier on a :

i. Si $2k \leq \frac{\delta+1}{\ln(\delta+1)}$, alors $\gamma_k(G) \leq \frac{n}{\delta+1}(k\ln(\delta+1) + 1 - \frac{k-1}{\delta})$

ii. Si $\frac{\delta+1+2\ln(2)}{\ln(\delta+1)} \geq 2k$, alors $\gamma_k(G) \leq \frac{n}{\delta+1}(k\ln(\delta+1) - \ln(2) + 2 - 2^{\frac{k-1}{\delta}})$

### Observation [9]:

Si G est un graphe d'ordre $n$, de degré maximum $\Delta$ et $\delta(G) \geq 3$, alors

$\gamma_k - \gamma(G) \geq \frac{5k-3\Delta}{8(\Delta+k)}n$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

### Remarque [9]:

Si G est un graphe d'ordre $n$ avec $\delta(G) \geq 3$, et $5k > 3\Delta(G)$, alors on a par l'observation antérieure

$$\gamma_k \geq \gamma(G) + \frac{5k - 3\Delta}{8(\Delta + k)}n$$

Ceci montre que si $C \geq k - 2$ sont des constantes arbitraires, alors il existe seulement un nombre fini de graphe G tel que $\delta(G) \geq 3$, $5k > 3\Delta(G)$ et $\gamma_k(G) \leq \gamma(G) + C$.

## Corollaire 1:

Si G est un graphe avec $\Delta(G) \geq 3$ et $k \geq 3$, alors $\gamma_k(G) > \gamma(G)$, ce corollaire découle également de la borne inférieure suivante de $\gamma_k(G)$.

**Théorème** [10]:

Si G est un graphe avec $\Delta(G) \geq k \geq 2$, alors $\gamma_k(G) \geq \gamma(G) + k - 2$.

**Théorème** [10]:

Pour tout graphe G, $\gamma_k(G) \geq \frac{kn}{(\Delta(G)+k)}$

Notons que pour k=1, on trouve la borne du paramètre de domination $\gamma(G)$:

$$\gamma(G) \geq \frac{n}{(\Delta(G)+1)}$$

**Théorème** [11]:

Si G est un graphe avec $k \leq \delta(G)$, alors on a : $\gamma_k(G) \leq \frac{kn}{(k+1)}$.

Remarquez que pour $k = 1$, on a $\gamma(G) \leq \frac{n}{2}$, cas particulier de ce théorème si G sans sommet isolé (où nous devons supposer que le graphe G n'admet aucun sommet isolé). Cette borne supérieure a été améliorée par Stracke et Volkmann.

**Théorème** [12]:

Pour tout graphe G ,

a) $\gamma_k(G) \leq \frac{n(2k-\delta(G))}{(2k-\delta(G)+1)}$, si $k \leq \delta(G) \leq 2k-1$.

b) $\gamma_k(G) \leq \frac{n}{2}$, si $\delta(G) \geq 2k-1$.

Fink et Jacobson ont obtenu une autre borne inférieure pour $\gamma_k(G)$ qui fait intervenir seulement le nombre de sommets $n$ et le nombre des arcs $m$.

**Théorème** [10]:

Pour tout graphe G, $\gamma_k(G) \geq n - \binom{m}{k}$.

**Théorème** [13]:

Tout graphe G de degré minimum $\delta \geq 1$ vérifie

$$\gamma_k(G) \leq \begin{cases} \dfrac{kn}{k+1} & si \quad k = \delta \\ \dfrac{(2k-\delta-1)n}{2k-\delta} & si \quad \dfrac{\delta+3}{2} \leq k \leq \delta - 1 \\ \dfrac{2n}{3} & si \quad k = \dfrac{\delta+2}{2} \\ \dfrac{n}{2} & si \quad 1 \leq k \leq \dfrac{\delta+1}{2} \end{cases}$$

**Théorème** [11]:

Si G est un graphe avec $\delta(G) \geq 2$, alors $\gamma_2(G) < \gamma_5(G)$.

**Corollaire** [14]:

Si G est un graphe d'ordre n et de degré minimum δ. Si k est un nombre entier, alors $\gamma_k \leq \frac{\delta}{2\delta+1-k} n$

**Théorème** [14]:

Tout graphe G d'ordre *n* et de degré minimum δ satisfait

$\gamma_k + \frac{\grave{k}-k+1}{2\grave{k}-k}\gamma_{\grave{k}}(G) \leq n$ , pour tout k et $\grave{k}$ entiers avec $1 \leq k \leq \grave{k} \leq \delta$.

**Théorème** [8]:

Soit G un graphe de n sommet avec de degré minimum $\delta \geq K$, ou $k \in \mathbb{N}$, si $\frac{\delta+1+2\ln(2)}{\ln(\delta+1)} \geq 2k$ alors $\gamma_k \leq \frac{n}{\gamma+1}(k\ln(\delta+1) - \ln(2) + 2\sum_{i=0}^{k-1}\frac{\delta^i}{i!(\delta+1)^{k-1}})$.

**Rappel :**

Un graphe biparti est dit k-semi régulier si son ensemble du sommet peut être partitionné en deux ensembles. la bipartition vérifie la propriété suivante : chaque sommet d'un des ensembles de la bipartition est de degré k.

**Théorème** [15]:

Soit un entier $k \geq 1$ . Si T est un arbre d'ordre $n$, alors $\gamma_k(G) \geq \frac{(k-1)n+1}{k}$ .

Et $\gamma_k(T) = \frac{((k-1)n+1)}{k}$ si et seulement si T est un k-semi régulier ou $n = 1$

En 2007, Volkmann a donné la caractérisation des graphes qui vérifient le Théorème, pour les arbres T avec $\gamma_k(T) = \left\lceil\frac{(k-1)n+1}{k}\right\rceil$ .

**Théorème** [16]:

Si T est un arbre d'ordre $n$, alors $\gamma_k(G) = \left\lceil\frac{(k-1)n+1}{k}\right\rceil$ si et seulement si :

(i) $n = kt + 1$ pour un entier $t \geq 0$ et T est un arbre k-semi régulier ou $n = 1$, ou

(ii) $n = kt + r$ pour les nombres entiers $t \geq 0$ et $2 \leq r \leq k$ et T consiste en r arbres $T_1, T_2, T_3. . ., T_r$ tels que la condition (i) est satisfaite et r - 1 arêtes supplémentaires tels que les arbres $T_1, T_2, T_3. . , T_r$ *avec* ces r-1 arêtes donne un arbre.

En général, le problème de détermination du nombre de k-domination dans les graphes est un problème NP-complet, pour cela on a étudié dans le prochain chapitre la 2-domination sur les arbres et nous donnons des bornes précises pour les arbres.

# CHAPITRE 3

## LA 2 –DOMINATION ET DETERMINATION DES SOMMETS CONTENUS DANS TOUT OU DANS AUCUN $\gamma_2$ –ENSEMBLE.

La 2-domination est un cas particulier de la k-domination évidemment pour $k = 2$ .
Dans ce chapitre on exposera quelques nouveaux résultats obtenus par F. Meddah (voir [26]) en collaboration avec N. Meddah, M. Blidia, relatifs au comportement des sommets du graphe vis à vis de la 2-domination quand on applique certaines opérations dans les graphes.

Afin d'éclaircir les spécificités du comportement des sommets par rapport à la 2-domination, nous commencerons par une brève présentation de quelques résultats et observations relatifs à celle-ci. Dans l'exemple du graphe suivant, l'ensemble {A, C, E} représente un ensemble 2-dominant de taille minimum.

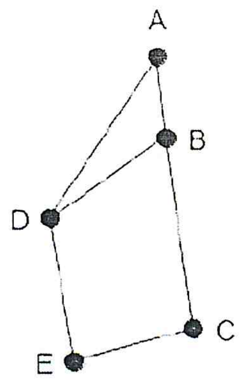



Figure 3.1 {A, C, E} est un $\gamma_2$- ensemble

Dans le chapitre précédent, on a noté que $\gamma_k(G) \geq k$ pour tout graphe $G$ et tout entier $k \leq \Delta$ , et en particulier pour $k = 2$. Donc les résultats obtenus pour tout entier $k$ sont vrais pour $k = 2$.

Dans tout ce qui suit on s'intéresse à l'étude de la 2-domination. Ainsi on donne quelques observations qui seront utiles pour la suite.

**Définition :**

Nous utiliserons souvent des arbres enracinés, on définit un arbre enraciné en un sommet $r$ comme un arbre pendu en $r$, c'est à dire une arborescence de racine $r$ (arbre orienté) où l'orientation est implicite, c'est à dire que les sommets sont classés par niveaux suivant leur distance par rapport au sommet racine $r$.

On définit le sommet parent $p(v)$ de $v$ comme étant le sommet de niveau plus haut que $v$ et adjacent à $v$. Le sommet $u$ est un sommet fils de $v$ si $p(u) = v$, un sommet fils n'a qu'un seul parent mais un parent peut avoir plusieurs fils. Un sommet $u$ est un descendant de $v$ s'il est situé sur un niveau inférieur à celui de $v$ et il existe une chaîne (allant d'un niveau à un niveau plus bas) reliant $v$ et $u$. On note pour un sommet $w$ d'un arbre enraciné T:

$C(w) = \{u \in V \,/\, u\ est\ un\ sommet\ fils\ de\ w\}$

$D(w) = \{u \in V \,/\, u\ est\ un\ sommet\ descendant\ de\ w\}$

$D[w] = D(w) \cup [w]$, et

$T_w = D[w] \cap T$.

Un sommet de degré au moins trois est dit sommet branches et on note par $B(T)$ l'ensemble des sommets branches de $T$.

**Observation 1 :**

Dans un arbre T, tout ensemble 2-dominant contient tous les sommets pendants.

**Observation 2** [17]**:**

Pour toute chaîne $P_n$ avec $n \geq 2$, on a $\gamma_2(P_n) = \left\lceil \frac{(n+1)}{2} \right\rceil$.

**Observation 3 :**

Soient $\acute{T}$ un arbre. Soit $u$ un sommet pendant de $\acute{T}$. Soit $T$ l'arbre obtenu de $\acute{T}$ en attachant une chaîne $P_2$ à $u$. Alors on a $\gamma_2(T) = \gamma_2(\acute{T}) + 1$.

**Théorème** [18]**:**

Si $G$ est un graphe connexe non trivial avec $\gamma_2(G) = \gamma(G)$, alors on a $\delta(G) \geq 2$.

**Corollaire** [19]**:**

Soit T un arbre de $n$ sommets et $\ell$ sommets pendants. Alors on a $\gamma_2(T) \leq \frac{(n+\ell)}{2}$.

Pour $k = 2$, le théorème [15] de chapitre 2 implique les prochains corollaires.

**Corollaire** [15]**:**

Si T un arbre, alors $\gamma_2(T) \geq \frac{(n+1)}{2}$. Et $\gamma_2(T) = \frac{(n+1)}{2}$ si et seulement si T est une subdivision d'un autre arbre.

**Corollaire** [16]:

Si $T$ est un arbre d'ordre $n$, alors $\gamma_2(T) = \left\lceil \frac{(n+1)}{2} \right\rceil$ si et seulement si

i. $n$ est quelconque et $T$ est un arbre subdivision d'un autre arbre ou

ii. $T$ consiste en deux arbres de la subdivision $S(T_1)$ et $S(T_2)$ et une arête supplémentaire, connectant $S(T_1)$ avec $S(T_2)$ .

## 3.1-Les graphes μ-excellents :

Nous présentrons dans ce chapitre quelques résultats obtenus dans la classe des graphes μ-excellents relativement à la domination. Vu que l'étude de la classe des graphes μ-excellents s'avère difficile, ces résultats intéressent des graphes dont la structure est simple, tels que les arbres.

Nous définissons d'abord la notion de graphe μ-excellent.

### Définition :

Etant donnés un graphe $G = (V, E)$ et un paramètre $\mu(G)$ on dit qu'un sommet $v$ de $V$ est μ-bon s'il est contenu dans au moins un μ(G)-ensemble, et qu'il est μ-mauvais sinon. Si μg (resp. μb) désigne le nombre de sommets de $V$ qui sont μ-bons (resp.μ-mauvais), alors le graphe $G$ est dit :

- $\mu$-excellent si tout sommet de $V$ est μ-bon, en d'autres termes si $\mu b = 0$
- μ-recommandable (ou μ-acceptable) si $\mu g > \mu b \geq 1$
- μ-juste ou (μ-équitable) si $\mu g = \mu b$
- μ-pauvre ou (μ-indésirable) si $0 < \mu g < \mu b$

Ce concept a été introduit par Fricke et al. dans [20], où ils ont posé le problème de la caractérisation des graphes μ-excellents pour un paramètre μ(G) tel que $\mu(G) = i(G), \gamma(G)$ ou $\beta(G)$.

A titre d'exemple, il est aisé de voir que les graphes bipartis complets, les cycles ainsi que les couronnes $GoK_1$ sont des graphes $\gamma$-excellents. Les étoiles subdivisées $SS_p$ sont des graphes $\gamma$-recommandables. Les étoiles $S_{1,p}$ et les doubles étoiles $S_{p,q}$ sont des graphes $\gamma$-indesirables. La Figure 3.2 montre un graphe $\gamma$-juste.

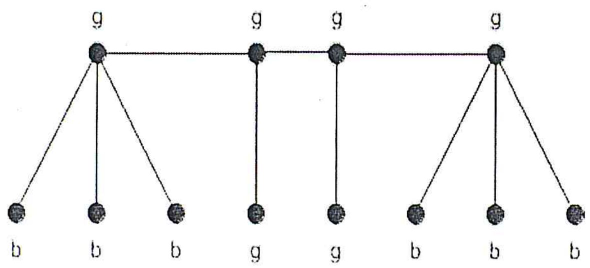



Figure 3.2.Un graphe $\gamma$-juste

## 3.2-Les graphes $\gamma_2$-excellents :

Beaucoup de travaux ont été réalisés sur l'excellence dans les graphes. Nous citons les travaux de Hammer (voir [21]), de Cockayne, Henning, Mynhardt et Dauterman (voir [22, 23]), de Blidia, Chellali et Khelifi (voir [24]), Blidia, R.Lounes (voir [25]) et Meddah N. and Blidia M.(voir [27]). Ces résultats sont importants, mais ne sont pas suffisant pour répondre à l'ensemble des problèmes ouverts posés dans ce domaine.

### 3.2.1-Quelques classes de graphes $\gamma_2$-excellents :

Un graphe $\gamma_2$-excellent est un graphe dans lequel tout sommet est dans au moins un $\gamma_2$-ensemble. Avant de présenter les différents résultats établis dans la classe des graphes $\gamma_2$-excellents, nous illustrons ce concept en donnant quelques exemples graphiques. On peut voir facilement que la chaîne $P_4$ de la Figure 3.3 est $\gamma_2$-excellent puisque, d'après l'Observation 1, les sommets pendants sont dans tout $\gamma_2$-ensemble, et pour que les autres sommets soient 2-dominés, il suffit d'ajouter un des sommets supports. Par contre l'étoile $K_{1,3}$ de la Figure 3.3 n'est pas un $\gamma_2$-excellent, car le centre de l'étoile n'est dans aucun $\gamma_2$ensemble.

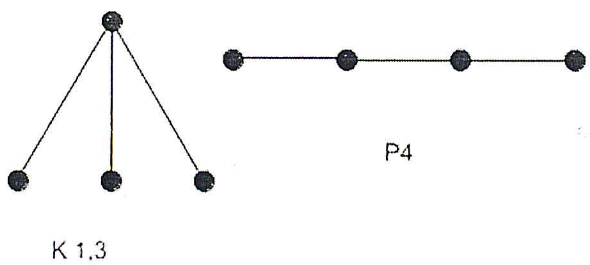



Figure 3.3. L'étoile $K_{1,3}$ et la chaîne$P_4$.

## a-Caractérisation des chaînes $\gamma_2$-excellentes :

**Proposition** [26]:

La chaîne $P_n$ est $\gamma_2$-excellente si et seulement si $n = 1$ ou $n \equiv 0(\text{mod}2)$

**Corollaire 1** [26]:

La chaîne $P_n$ avec $n \neq 1$ et $n \equiv 1(\text{mod } 2)$ n'est pas $\gamma_2$-excellente.

## b-Caractérisation des arbres $\gamma_2$-excellents :

On commence cette partie par la caractérisation des sommets appartenant à tout ou à aucun $\gamma_2(\text{T})$-ensemble d'un arbre T, et comme conséquence de ce résultat découle une caractérisation des arbres $\gamma_2(\text{T})$-excellents ce qui est équivalent à ce que l'ensemble des sommets appartenant à aucun ensemble $\gamma_2$-dominant minimum soit vide.

## 3.3-Caractérisation des sommets appartenant à tout ou à aucun $\gamma_2$-ensemble

On commence cette section par l'ensemble des définitions et les résultats suivants:

**Définition :**

Dans un arbre T, on définit les ensembles $\text{A}_2(\text{T})$ et $\text{N}_2(\text{T})$ par:

$A_2(T) = \{v \in V/v \text{ est dans tout } \gamma_2 - \text{ensemble}\}$

$N_2(T) = \{v \in V/v \text{ est dans aucun } \gamma_2 - \text{ensemble}\}$

On donne maintenant un résultat qui nous permettra de négliger les chaînes $\text{P}_2$ et qui sera utiliser pour d'autres résultats.

**Lemme 1** [26]:

Soient $\acute{\text{T}}$ un arbre et $v \in V(\acute{T})$. Soit $u$ un sommet pendant de $\acute{T}$ tel que $u \neq v$. Soit $T$ l'arbre obtenu de $\acute{\text{T}}$ en attachant une chaîne $P_2$ à $u$. Alors

- $\gamma_2(\text{T}) = \gamma_2(\acute{\text{T}}) + 1;$
- $v \in A_2(\acute{T})$ si et seulement si $v \in A_2(T)$.
- $v \in N_2(\acute{T})$ si et seulement si $\in N_2(T)$ .

**Définition :**

Soit $T$ un arbre enraciné en $v$. Pour tout sommet branche $u$ de $T$ et pour tout sommet $w \in D(u)$ tel que $deg_T(w) \leq 2$, on définit les ensembles suivants:

$K^i(u) = \{z \in L(u) \ / \ d(u,z) \equiv i(mod\ 2)\}$ Pour $i = 0,1$.

**Théorème 1** [26]:

Soit $T$ un arbre enraciné en $v$ différent d'un sommet pendant, tel que $deg_T(u) \leq 2$, pour tout $u \in V(T) - \{v\}$, Alors

- $v \in A_2(T)$ si et seulement si $\begin{cases} v \text{ est un sommet pendant.} \\ ou \\ |K^0(v)| \geq 2. \end{cases}$
- $v \in N_2(T)$ si et seulement si $K^0(v) = \emptyset$.

**Théorème 2** [26]:

Soit $T$ un arbre enraciné en $v$ différent d'un sommet pendant tel que $deg_T(u) \leq 2$, pour tout $u \in V(T) - \{v\}$. Alors $v \notin A_2(T) \cup N_2(T)$ si et seulement si $|K^0(v)| = 1$. et $|K^1(v)| \geq 1$.

## 3.4-L'élagage d'un arbre par rapport à la 2-domination

La procédure d'Elagage est une technique utilisée pour la première fois par C.M. Mynhardt [25] qui consiste à supprimer des branches successivement jusqu'à arriver à un arbre de type décrit dans le Théorème 1[26].

Soit $T$ un arbre enraciné en un sommet non pendant $v$.

Si $deg_T(x) \leq 2$ pour tout sommet $x \in V(T) - \{v\}$, Alors $\bar{T} = T$.

Sinon, soit $u$ un sommet branche à distance maximum de $v$ et $w = p(u)$ (sommet père de u).

Vu que $|K^0(u)| + |K^1(u)| \geq 2$, on a à considérer les deux cas suivants:

A : Si $|K^0(u)| \geq 1$, alors effacer $D(u)$.

B : Si $K^0(v) = \emptyset$, alors:

- si $w \notin B(T)$, alors effacer $D(u)$ et attacher une chaîne $P_1$ (un sommet) à $u$.
- si $w \in B(T)$, alors effacer $D[u]$.

Ce processus propre à la 2-domination, où itérativement pour chaque sommet branche $u$ à distance maximum, ou bien on supprime $D(u)$ et on attache une chaîne $P_1$ au sommet $u$ ou bien on supprime $D[u]$, fournit à la fin un arbre $\bar{T}_v$ dans lequel $deg_{\bar{T}_v}(x) \leq 2$ pour tout sommet $x \in V(\bar{T}_v) - \{v\}$ et il est appelée un élagage de $T_v$.

Pour faciliter la compréhension de cette technique, nous donnons l'exemple illustratif suivant:

Considérons l'arbre $T$ de la Figure suivante dont les sommets. $v, u, x, y, z, w$ et $s$ sont des sommets branches de $T$, $u$ est celui à distance maximum 4 de $v$.

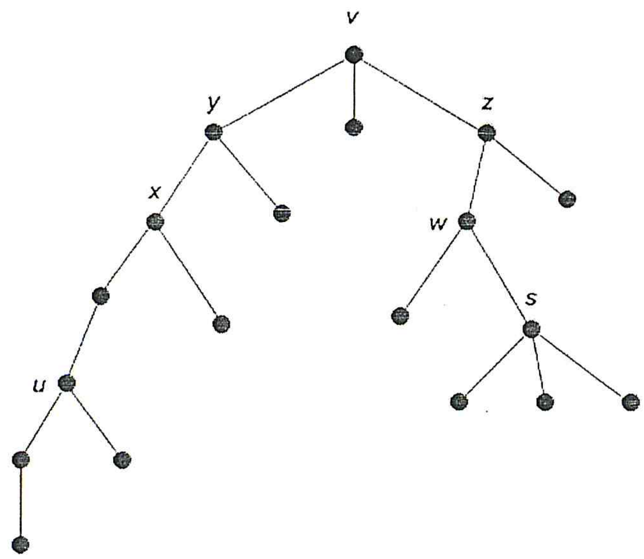



Figure 3.4. Un arbre $T = T_v$.

Puisque $|K^0(u)| = 1$, on efface $D(u)$. (Voir la Figure 3.5).

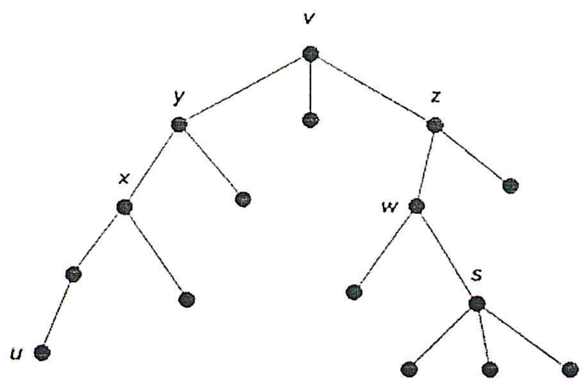



Figure 3.5. L'arbre $T$ après une étape de l'élagage.

Maintenant le sommet $s$ devient le sommet branche à distance maximum 3 de $v$ et puisque $|K^0(s)| = 0$ et le sommet $w$ parent de $s$ est un sommet branche, alors on efface $D[s]$. (Voir la Figure 3.6).

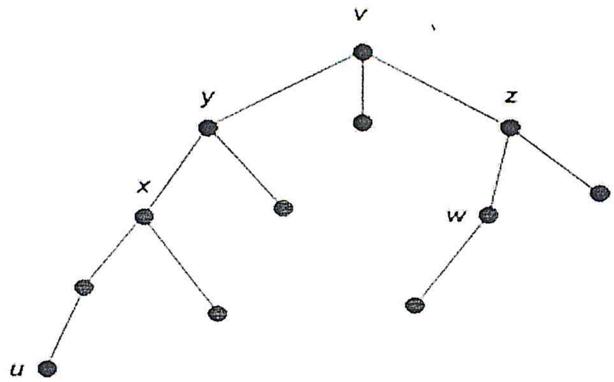



Figure 3.6. L'arbre $T$ après deux étapes de l'élagage.

Ainsi le sommet $x$ deviennent le sommet branche à distance maximum 2 de $v$, et comme $|K^0(x)| = 1$, alors on efface $D(x)$. (Voir la Figure 3.7).

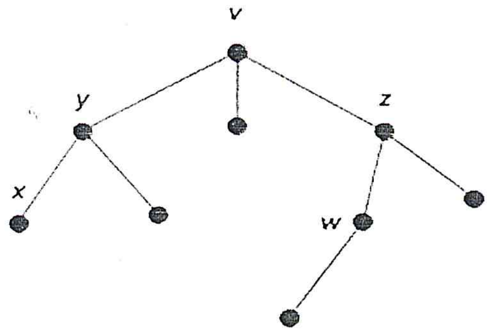



Figure 3.7. L'arbre $T$ après trois étapes de l'élagage.

A présent, il nous reste que les sommets $z$ et $y$ comme sommets branches à distance maximum 1 de $v$ et puisque $|K^0(z)| = 1$, alors on efface $D(z)$. (Voir la Figure 3.8).

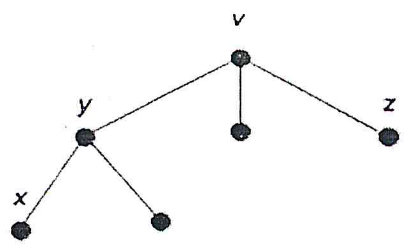



Figure 3.8. L'arbre $T$ après quatre étapes de l'élagage.

De même, puisque $|K^0(y)| = 0$ et le sommet $v$ parent de $y$ est un sommet branche, alors on efface $D[y]$. (Voir la Figure 3.9).

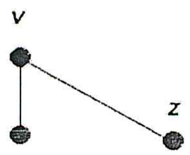



Figure 3.9. L'arbre $T$ après cinq étapes de l'élagage.

A la fin il en résulte l'étoile $K_{1,2}$ de centre $v$ avec $z$ un de ses sommets pendants. Donc d'après le Théorème 1, il s'ensuit que $v \in N_2(T)$.

Afin de valider cette méthode, nous allons montrer que les opérations du processus d'élagage présenté précédemment préservent les propriétés d'appartenance du sommet $v$ à tout ou à aucun $\gamma_2$-ensemble.

Dans ce que suit on suppose que pour un sommet branche $u$, $k_i := |K_i(u)|$.

**Lemme 2** [26]:

Soit T un arbre enraciné en $v$. Soit $u$ un sommet branche à distance maximum de $v$.

1. Si $k_0 \geq 1$, alors poser $\acute{T}$ l'arbre obtenu à partir de $T$ en effaçant $D(u)$.
2. Si $k_0 = 0$, alors on distingue les deux cas suivants:
   - Si $w \notin B(T)$; alors poser $\acute{T}$ l'arbre obtenu à partir de $T$ en effaçant $D(u)$ et en attachant une chaîne $P_1$ à $u$.
   - Si $w \in B(T)$, alors poser $\acute{T}$ l'arbre obtenu à partir de $T$ en effaçant $D[u]$.

Et pour chaque cas, on a :

a. $v \in A_2(\acute{T})$ si et seulement si $v \in A_2(T)$.

b. $v \in N_2(\acute{T})$ si et seulement si $v \in N_2(T)$ .

**Théorème 3** [26]:

Soit $v$ un sommet d'un arbre T. Alors

a. $v \in A_2(T)$ si et seulement si $v \in A_2(\overline{T}_v)$.

b. $v \in N_2(T)$ si et seulement si $\in N_2(\overline{T}_v)$ .

**Corollaire 2:**

Un arbre $T$ est $\gamma_2$(T)-excellent si et seulement si pour tout $v \in T$ , $|K^1(v)| \leq 1$ ou $|K^0(v)| \neq \emptyset$ dans $\overline{T}_v$.

Si on suppose que $|N_2| = \gamma_2 b$ est le nombre de sommets mauvais appartiennent à aucun $\gamma_2$-ensemble, $|V| - |N_2| = \gamma_2 g$ est le nombre de sommets bons appartiennent à au moins un $\gamma_2$-ensemble. On peut caractériser les arbre $\gamma_2$- recommandables, les arbres $\gamma_2$-justes et les arbres $\gamma_2$-indésirables définis comme suit:

**Définition :**

Un arbre T est dit $\gamma_2$ (T)-recommandable si $\gamma_2 g(T) > \gamma_2 b(T) \geq 1$.

Un arbre T est dit $\gamma_2$ (T)-indésirable si $1 \leq \gamma_2 g(T) < \gamma_2 b(T)$.

Un arbre T est dit $\gamma_2$ (T)-juste si $\gamma_2 g(T) = \gamma_2 b(T)$.

Un arbre T est dit $\gamma_2$ (T)-excellent si $\gamma_2 b(T) = 0$ et $\gamma_2 g(T) = |V|$.

A titre d'exemple, les étoiles $K_{1,m}$, $m \geq 2$ sont $\gamma_2$-recommandables, car $\gamma_2 g(K_{1,m}) = m$, $\gamma_2 b(K_{1,m}) = 1$. Et les chaînes $P_n$ pour $n = 2k$ sont $\gamma_2$-excellents, car $\gamma_2 g(P_n) = n$, $\gamma_2 b(P_n) = 0$.

Si en plus on détermine l'ensemble $A_2$, on peut dire si l'arbre admet un $\gamma_2$-ensemble unique.

**Définition :**

Un graphe admet un $\gamma_2$-ensemble unique si et seulement si $|A_2| + |N_2| = |V|$.

## 3.5-Algorithme de reconnaissance des sommets qui sont dans tout ou dans aucun $\gamma_2$(T)-ensemble

Soit T un arbre. Les sommets sont numérotés de 1 à $V(T)$.

<u>Etape 1</u>: Poser $r = 1, A_2(T) = \emptyset, N_2(T) = \emptyset$.

<u>Etape 2</u>:

Si $r = |V(T)| + 1$, et aller à l'Etape 7.

Sinon, Poser $T = T_r = T_v$.

<u>Etape 3</u>: Utiliser la méthode de recherche en largeur pour explorer tous les sommets de T.

Si v est un sommet pendant, poser $r = r + 1, A_2(T) = A_2(T) \cup \{v\}$ et aller à l'Etape 2.

Sinon générer et ordonner les sommets branches appartenant à $D(v)$ : $(u_1, u_2, \dots, u_m)$ de manière à ce qu'on ait $d(v, u_1) \leq d(v, u_2) \leq \dots \leq d(v, u_m)$.

Poser $(T) = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}, k = m$.

<u>Etape 4</u>: Si $k = 0$ aller à l'Etape 6:

Sinon aller à l'Etape 5.

<u>Etape 5</u>: Poser $u = u_k$.

Pour i = 0, 1, poser $K^i(u) = \{\acute{x} \in L(u) \ / \ d(u, \acute{x}) \equiv i(mod\ 2)\}$, et $w$ le père de $u$.

- Si $|K^0(u)| \geq 1$, alors poser $T = T - D(u)$, $k = k - 1$ et aller à l'Etape 4.
- Si $K^0(u) = \emptyset$. Soit $x_1 \in C(u)$. Alors:
  - Si $w \notin B(T)$, alors poser $T = T - (D(u) - x_1)$, $k = k - 1$ et aller à l'Etape 4.
  - Si $w \in B(T)$, alors poser $T = T - D[u]$, $k = k - 1$ et aller à l'Etape 4.

Etape 6: Si $K^0(v) = \emptyset$, $r = r + 1$, $N_2(T) = N_2(T) \cup \{v\}$ et aller à l'Etape 2.

Si $K^0(v) \geq 2$, $r = r + 1$, $A_2(T) = A_2(T) \cup \{v\}$ et aller à l'Etape 2.

Sinon poser $r = r + 1$ et aller à l'Etape 2.

Etape 7:

Si $|V - N_2(T)| > |N_2(T)| \geq 1$, alors T est dit $\gamma_2$ (T) –recommandable,

Si $|V - N_2(T)| < |N_2(T)|$ alors T est dit $\gamma_2$ (T) –indésirable,

Si $|V - N_2(T)| = |N_2(T)|$ , alors T est dit $\gamma_2$ (T) –juste,

Si $|N_2(T)| = 0$; alors T est dit $\gamma_2$ (T) –excellent.

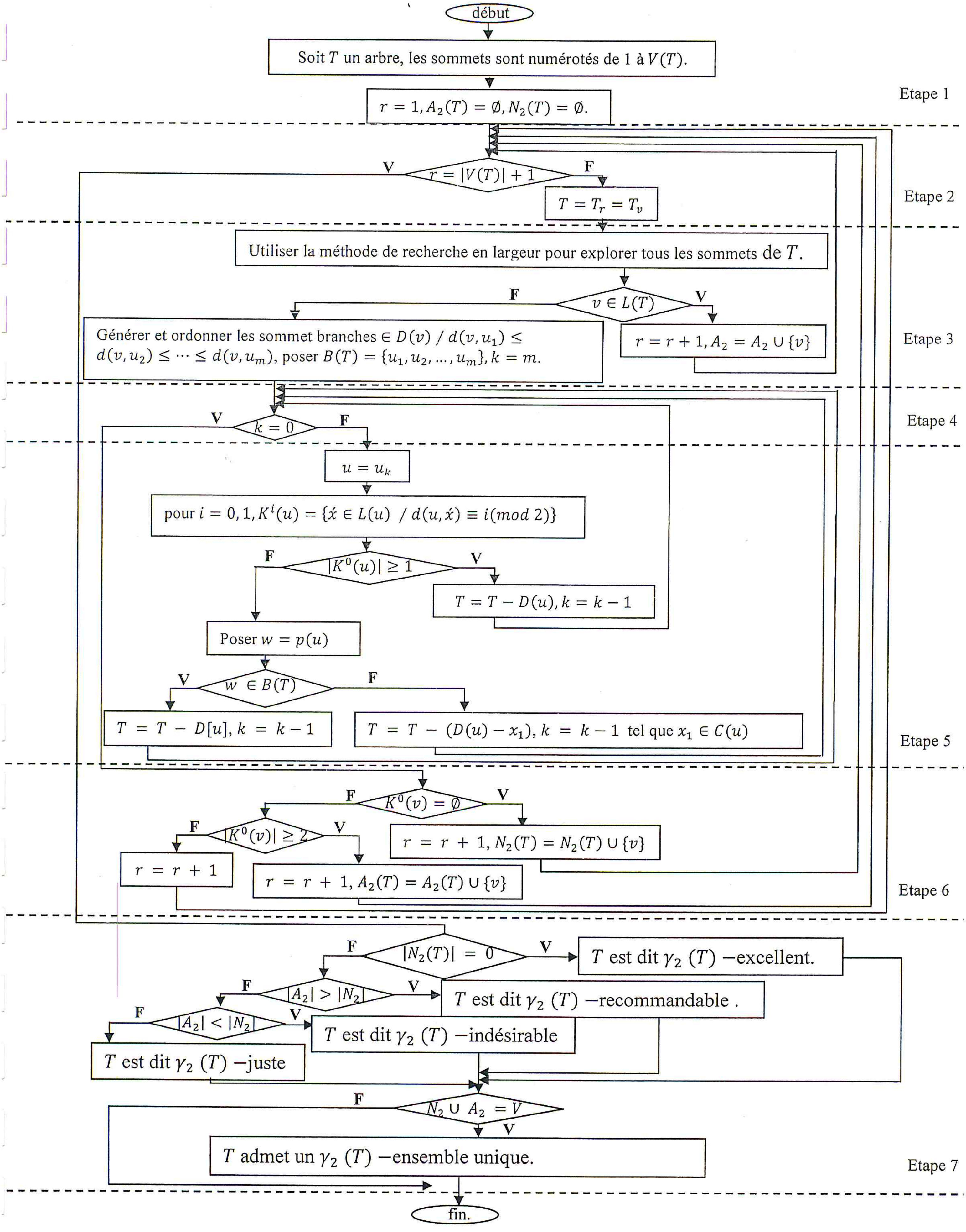
Si $N_2(T) \cup A_2(T) = V$, alors T admet un $\gamma_2$ (T) –ensemble unique

Il est clair que tous ces types d'arbres peuvent être caractérisés en temps polynomial.

La complexité algorithmique de cet algorithme est estimé à $O(n^4)$ avec $n = |V(T)|$.

En explorant tous les sommets, on peut déduire à partir de l'algorithme précédent un algorithme qui détermine l'ensemble $N_2$ et l'ensemble $A_2$.

## 3.6-Organigramme de reconnaissance des sommets :



# CHAPITRE 4 :

## IMPLEMENTATION DE L'ALGORITHME

Après avoir présenté dans les chapitres précédents la notion de la k-domination, Nous nous intéresserons dans ce chapitre à la présentation de l'application réalisée sur la 2-domination (les sommets appartiennent à tout ou à aucun $\gamma_2$-ensemble.).

### 4.1-Choix de langage de programmation :

Notre choix de langage de programmation s'est porté sur le langage java (qui est un langage de programmation orientée objet) et cela pour divers avantages :

-La connaissance de la programmation orientée objet n'est nullement nécessaire, pas plus que celle de la programmation d'interfaces graphiques ou d'applications Web.

-Grand nombre d'API (Application Programming Interface).

-l'existence des quelques classes et méthodes dans leur bibliothèque.

-.....

### 4.2-Les bases pour l'utilisation d'Eclipse:

Eclipse est un environnement de développement intégré (Integrated Development Environment) dont le but est de fournir une plate–forme modulaire pour permettre de réaliser des développements informatiques.

L'installation de l'Eclipse nécessite :

- L'installation de JDK (Java Development Kit)
- Le logicielle Java(Eclipse)

## 4.3-Explication de démarche :

Nous expliquons la démarche de notre programme comme suit :

➤ L'ouverture de la page exécutable :

Il suffit de double clique sur la page exécutable "2-dominant".

➤ L'entrer d'un graphe :

Un graphe quelconque est composé de deux ensembles :

L'ensemble des sommets et l'ensemble des arrêtes

❖ Pour ajouter un sommet vous devez cliquez sur :

- le bouton " Sommet "
- puis dans la fenêtre d'exécution, et rentrez le non du sommet , puis sur " Ok "   (voir la Figure 4.1)

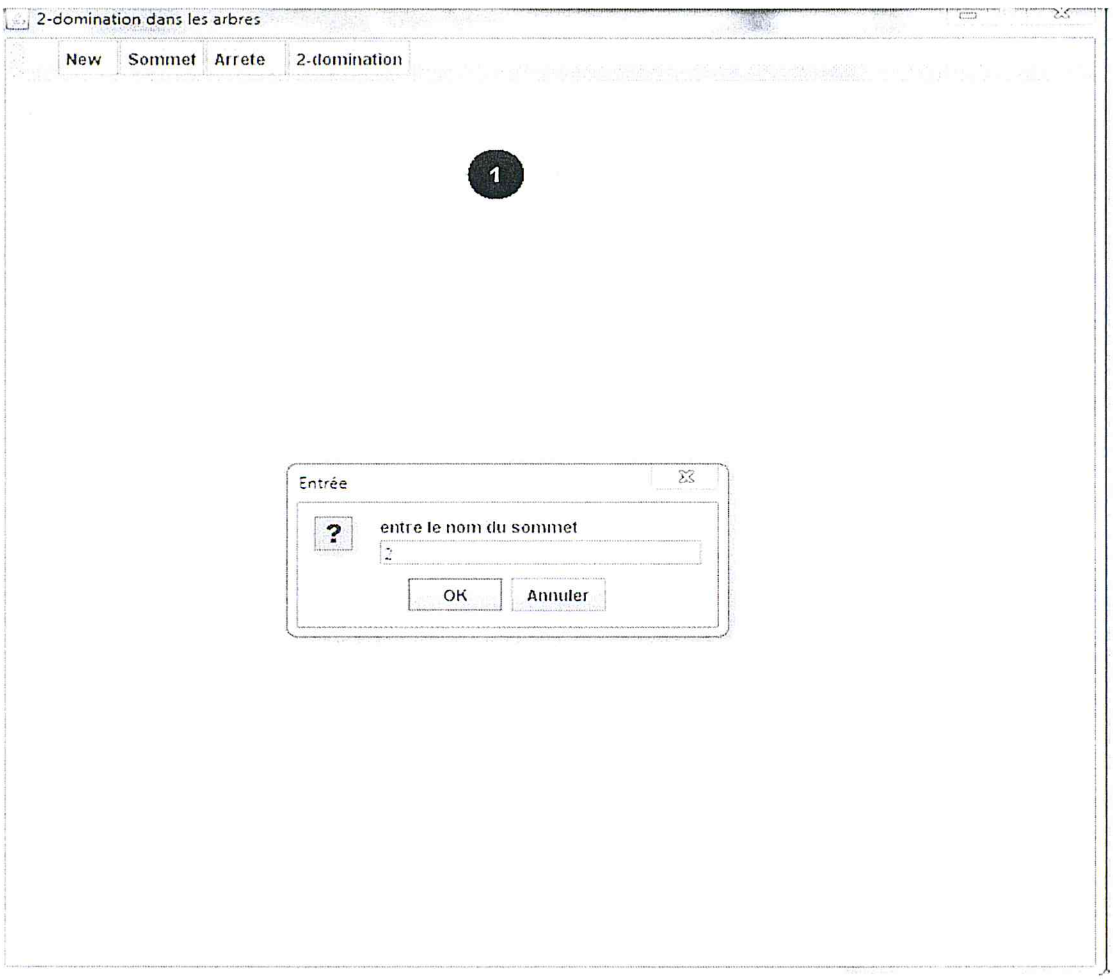



Figure 4.1 : Ajout d'un sommet

❖ Pour relier les sommets vous devez cliquez sur :

- Le bouton “Arrête “, puis
- Faites glisser le curseur depuis le sommet de départ jusqu'à atteindre le sommet d'arrivée.

  (voir la Figure 4.2)

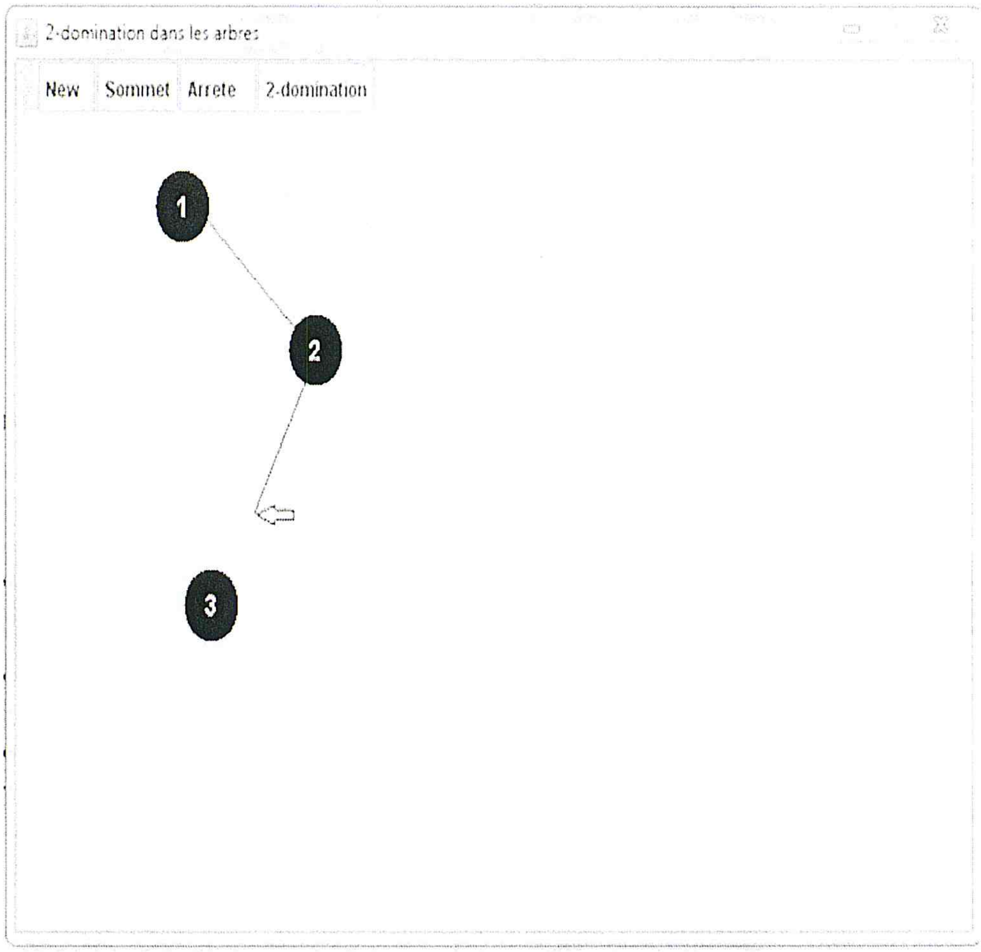



Figure 4.2 : Ajout d'un arc

Lors de l'existence d'un cycle un message apparait: " il y a un cycle".

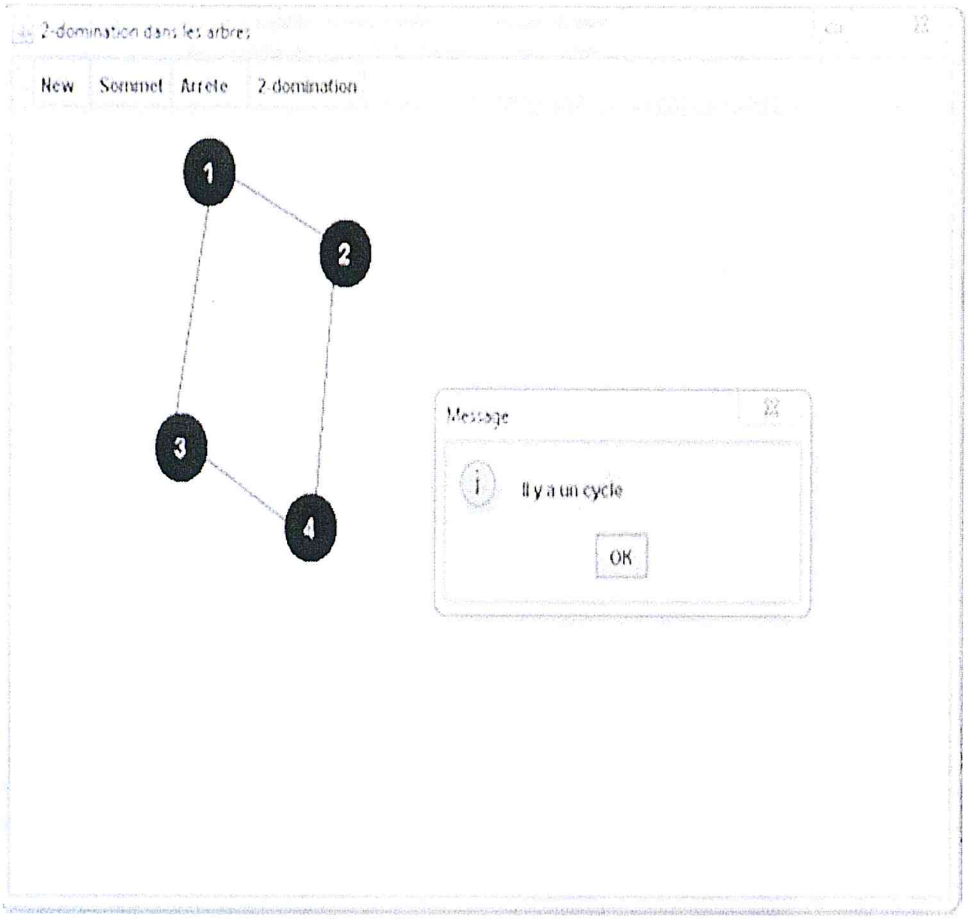



Figure 4.3 : Existence d'un cycle

Si on clique sur " Ok " la dernière arrête ajoutée sera supprimée.

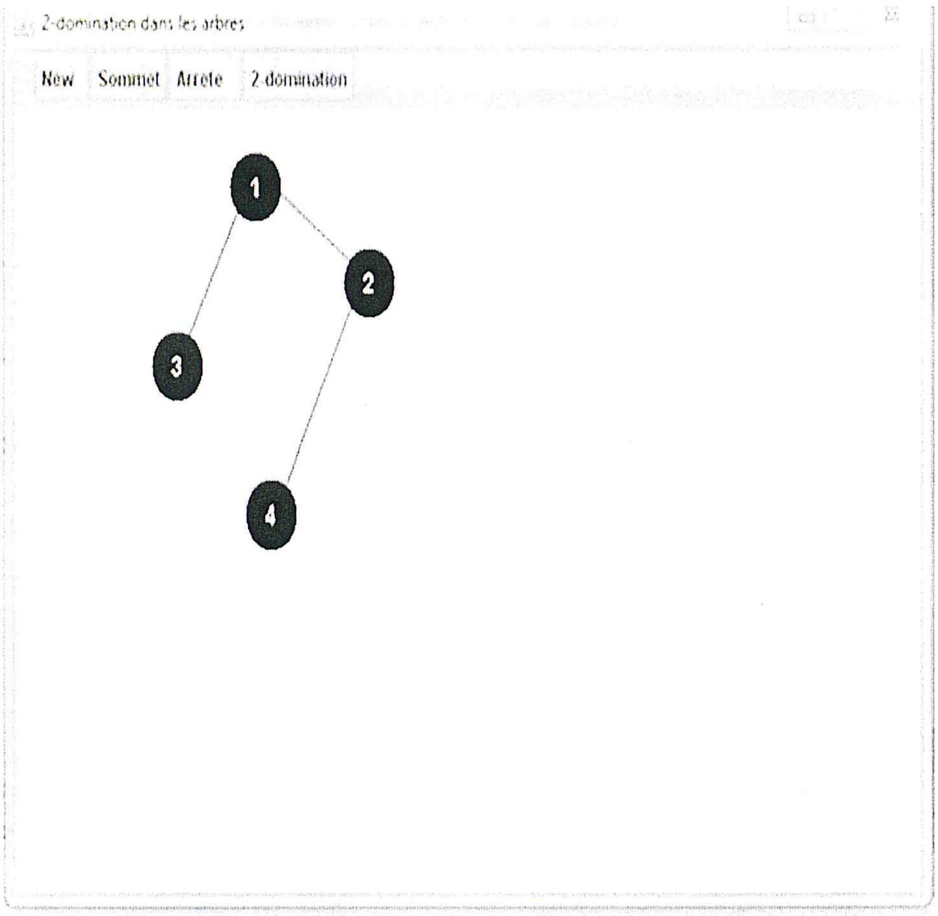



Figure 4.4 : Suppression de l'arc qui crée le cycle

- Le bouton " 2-domination " permet d'appliquer l'algorithme de recherche de l'ensemble des sommets appartenant à tout ou à aucun $\gamma_2$-ensemble.

Si le graphe dessiné est non connexe, un message apparait : " le graphe n'est pas connexe, Ajoutez des arrêtes". voir Figure 4.5

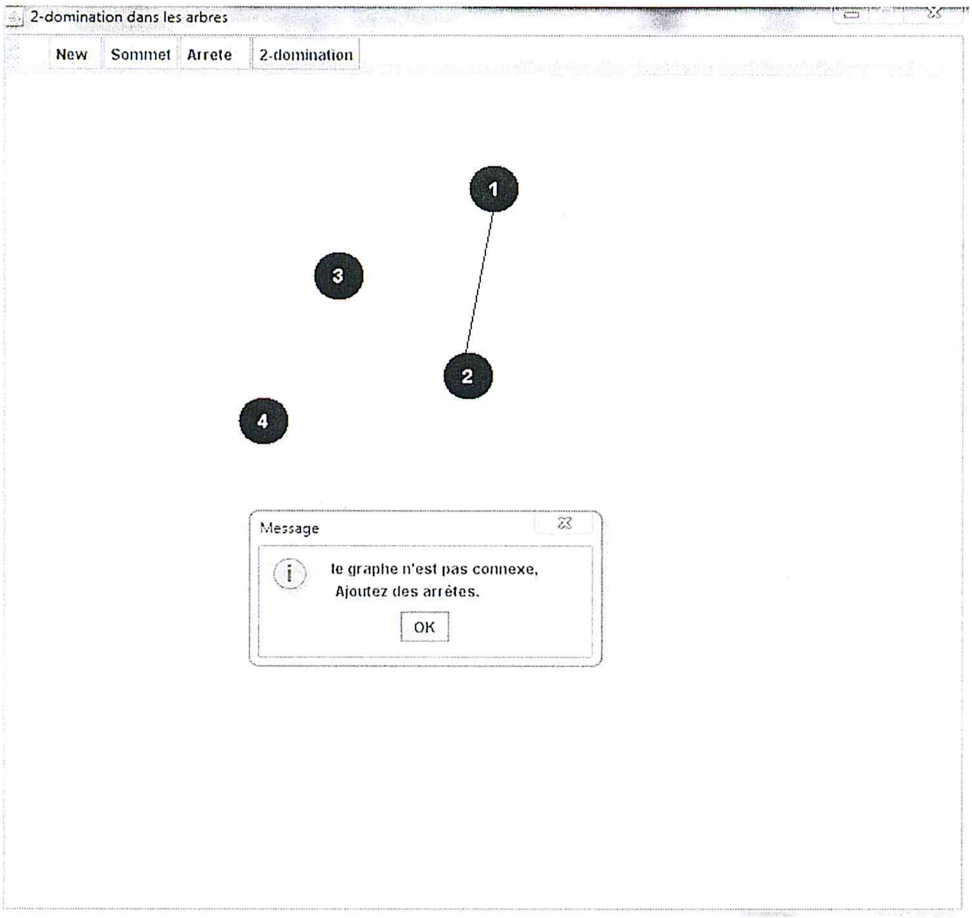



Figure 4.5 : La connexité d'un graphe

Si le graphe dessiné est un arbre (connexe et sans cycle), les résultats de ce graphe sont affiché comme suit :(Figure 4.6)

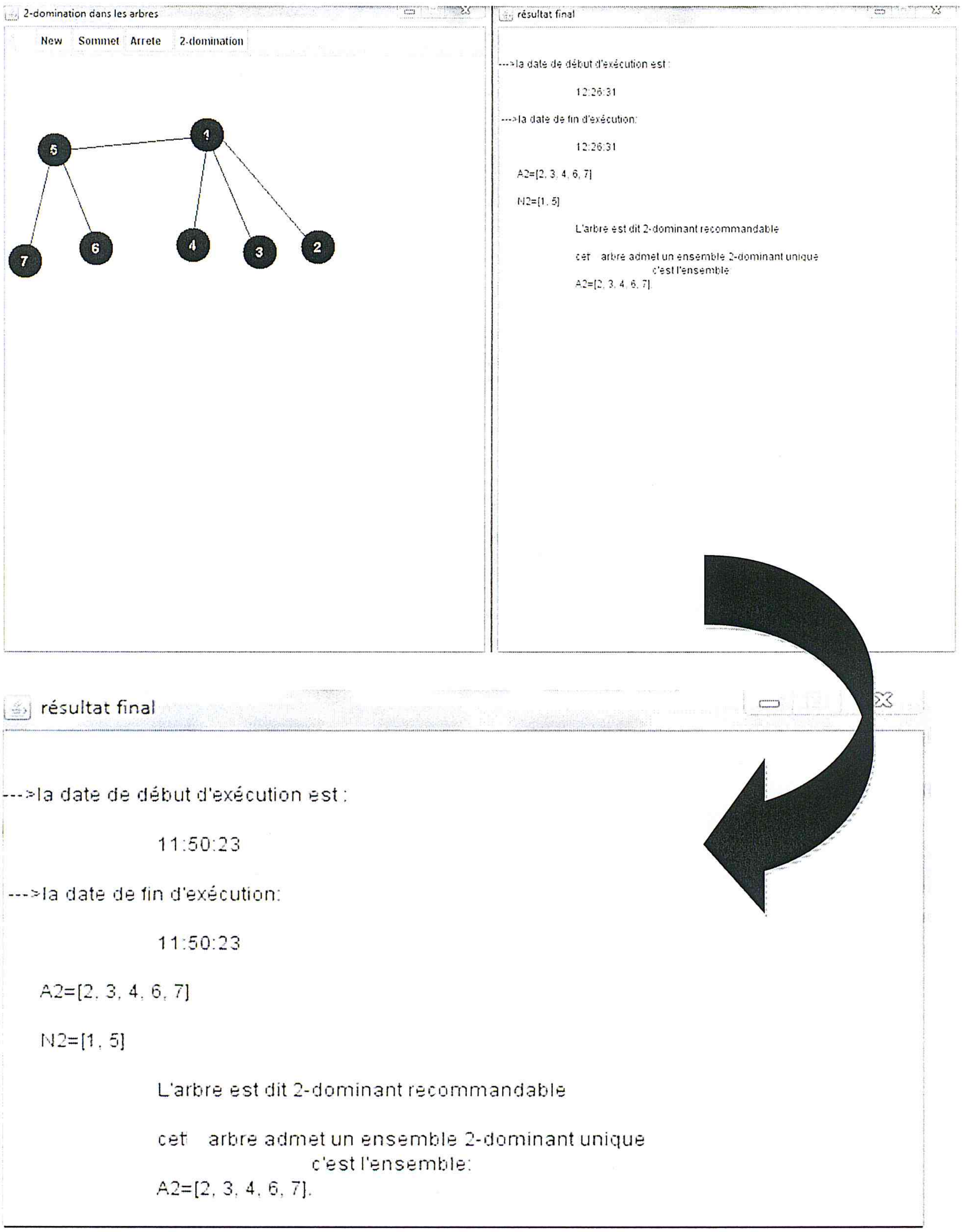



Figure 4.6 : Résultat final

## 4.4-La complexité de programme:

Analyser un algorithme revient à prévoir les ressources (i.e. la quantité de mémoire) nécessaires à cet algorithme et à mesurer son temps d'exécution.

L'analyse d'un algorithme, même simple, peut s'avérée difficile. Il est donc nécessaire de se donner des outils mathématiques pour parvenir à nos fins.

Le temps d'exécution d'un algorithme sur une entrée particulière est le nombre d'opérations élémentaires exécutées.

Le temps d'exécution de cet algorithme est polynomial.

# CONCLUSION

Nous nous sommes concentrés a traiter dans notre travail un type de problème de la domination qui est la 2-domination dans les graphes et la recherche de l'ensemble des sommets qui sont dans tout ou dans aucun $\gamma_2$-ensemble.

Les graphes simples considérés dans ce mémoire sont les arbres d'ordre $n$ quelconque. On a élaboré un programme de reconnaissance des arbres excellents, des arbres recommandables, des arbres indésirables et des arbres justes par rapport à la 2-domination et aussi si un arbre donné admet un $\gamma_2$-ensemble unique. Le programme informatique (logiciel) est polynomial (efficace) et intéressant, mais n'est pas suffisant pour répondre à l'ensemble des problèmes posées par exemple dans le cas de la 2-domination dans les graphes quelconques et pour le cas de la k-domination dans les arbres quand $k \geq 3$.

Il reste beaucoup de problèmes ouvert dans ce domaine qu'on peut étudier ultérieurement.

# REFERENCES

[1] S.T. Hedetniemi et R.C. Laskar, Bibliography on domination in graphs and some basic definitions of domination parameters, Discrete mathématics 86 (1990) 257–277.

[2] C. F. de Jaenisch. « Applications de l'Analyse Mathématique au Jeu des Echecs ». Petrograd.

[3] J.F. Fink, M.S. Jacobson, L.F. Kinch and J. Roberts « The bondage number of graphs». Discrete Mathematics (86) (1990) pp 47–57.

[4] E.J Cockayne, R.M. daves, S.T. Hedetniemi, «Total domination in graphs », Networks vol 10 (1980) 211–219.

[5] T.W. Haynes and P.J. Slater, «Paired-domination in graphs»,, Networks 32 (1998) 199–206.

[6] Haray F. et Haynes T.W., Double domination in graphs , Ars Combin 55 (2000) 201–213.

[7] Slater P J. Domination and location in acyclic graphs [J]. Networks, 1987, 17: 55–64.

[8] Hansberg, Volkmann Upper bounds on the k-domination number and the k-Roman domination number, Discrete Appl. Math. 157 (2009), no. 7, 1634–1639.

[9] M Chellali, O.Favaron, A. Hansberg, , L.Volkmann, On the *p*-domination, the total domination and the connected domination numbers of graphs. J. Combin. Math. Combin. Comput. **73**, 65–75 (2010)

[10] J.F.Fink and M. S. Jacobson. n-domination in graphs. In Y.Alavi and A.J.Schwenk, editors, Graphs Theory with Applications to Algorithms and Computer Science,page 283-300, (Kalamazoo, MI 1984 ),1985,wiley.

[11] E.J.Cockayne, B . Garnable, and B . Shepherd . An upper bond for the k-domination number of a graphe.J.Graph Theory 9 : 533-534,1985.

[12] C.Stracke and L.Volkmann. A new domination conception.J. Graph Theory 17 : 315-323 ,1993

[13] B. Chen and S. Zhou. Upper bounds for f – domination number of graphs. Discrete Math. 185 (1998) 239-243.

[14] Odile Favaron, Adriana Hansberg, and Lutz Volkmann, On k- domination and minimum degree in graphs, J. Graph Theory 57 (2008), no. 1, 33–40.

[15] Fink, J.F., Jacobson, M.S.: On n-domination, n-dependence and forbidden subgraphs, Graph theory with Applications to Algorithms and Computer Science, pp. 301–311. Wiley, New York, 1985.

[16] L.Volkmann,Some remarks on lower bounds on the p-domination number in trees, J. Combin. Math. Combin. Comput. 61, 159–167 (2007).

[17] M. Blidia, M. Chellali, O. Favaron Independence and 2-domination in trees. Australasian Journal of Combinatorics, 33 (2005) 318.

[18] Hansberg, Volkmann, on graphs with equal domination and 2-domination numbers, Discrete Math. 308 (2008), no. 11, 2277–2281.

[19] M.Blidia, M.Chellali, and L.volkmann. On the p-domination number of cactus graphs. Discussiones mathematicae. Graph Theory 25 (2005) 355–361.

[20] Fricke G.H.,Haynes T.W.,Hedetniemi S.M., Hedetniemi S.T et Laskar R.C.,"excellents trees",Bull.Inst.C.ombin Appl.34,(2002),27-28.

[21] E.J. Cockayne, M.A. Henning, C.M. Mynhardt, Vertices contained in all or in no minimum total dominating set of a tree, Discrete Math. 260 (2003), 37–44.

[22] Dauterman R. E., vertices in total dominating sets"., In Partial Fullement of the Requirements for the Degree Master of Science.

[23] M. Blidia, M. Chellali, S. Khelifi, "Veritices belonging to all or to no minimum double dominating sets in trees", AKCE J. Graphs. Combin. 2 (2005) 1, 19.

[24] M. Blidia, R. Lounes, Vertices belonging to all or to no locating sets in trees, AKCE J. Graphs. Combin. 2 (2005) 1, 1 9.

[25] C.M. Mynhardt, "Vertices contained in every minimum dominating set of a tree", J. Graph Theory 31(3) (1999), 163–177.

[26] Meddah F, Contribution à l'étude de la 2-domination dans les arbres, $\gamma_2$ −excellence et autres, Mémoire de Master, USDBlida, 2011.

[27] Meddah N. and Blidia M. , Vertices contained in all or in no minimum k-dominating sets of a trees, submitted.