

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA

RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE SAAD DAHLAB DE BLIDA

Faculté des sciences

Département de Mathématiques



MEMOIRE DE MASTER

Spécialité : Recherche Opérationnelle

# GRAPHES DOMINATION DOUBLE POINT STABLES.

Présenté Par:

- BOUKHALFA Hadjer
- ZAHRA Iteb

Devant le jury composé de

|             |                                 |              |
|-------------|---------------------------------|--------------|
| M. BLIDIA   | Professeur, U. de Blida         | Président    |
| M. CHELLALI | Professeur, U. de Blida         | Promoteur    |
| S. KHELIFI  | Maître Assistant A, U. de Médéa | Examineur    |
| N. MEDDAH   | Maître Assistant A, U. de Blida | Examinatrice |

MA-510-13-1

Promotion : 2011-2012

## Table des matières

|  |    |
|--|----|
| RESUME . . . . .   | 3  |
| ABSTRACT . . . . .   | 5  |
| REMERCIEMENTS . . . . .                                      | 6  |
| LISTE DES FIGURES . . . . .                                  | 7  |
| INTRODUCTION . . . . .                                       | 8  |
| <b>I GENERALITES SUR LES GRAPHS</b> . . . . .                | 10 |
| 1.1 Définitions et notations . . . . .                       | 10 |
| 1.2 Quelques graphes particuliers . . . . .                  | 13 |
| 1.3 Aperçu sur la domination dans les graphes . . . . .      | 15 |
| 1.4 Quelques paramètres de domination . . . . .              | 16 |
| <b>II ETUDE DES PARAMETRES DE DOMINATION DANS LES GRAPHS</b> |    |
| MODIFIES . . . . .   | 18 |
| 2.1 La domination dans les graphes modifiés . . . . .        | 18 |
| 2.1.1 La classe des graphes <i>CVR</i> . . . . .             | 20 |
| 2.1.2 La classe des graphes <i>CER</i> . . . . .             | 21 |
| 2.1.3 La classe des graphes <i>CEA</i> . . . . .             | 21 |
| 2.1.4 La classe des graphes <i>UVR</i> . . . . .             | 21 |

|            |   |           |
|------------|---|-----------|
| 2.1.5      | La classe des graphes $UER$ . . . . .                               | 22        |
| 2.1.6      | La classe des graphes $UEA$ . . . . .                               | 22        |
| 2.1.7      | Relations entre les différentes classes . . . . .                   | 23        |
| 2.1.8      | Les graphes $\gamma$ -point stables (critiques) . . . . .           | 24        |
| 2.2        | La double domination dans les graphes modifiés . . . . .            | 25        |
| 2.3        | La $k$ -indépendance dans les graphes modifiés . . . . .            | 27        |
| 2.4        | Autres paramètres de domination dans les graphes modifiés . . . . . | 29        |
| <b>III</b> | <b>CONTRIBUTION</b> . . . . .                                       | <b>30</b> |
| 3.1        | Quelques résultats préliminaires . . . . .                          | 30        |
| 3.2        | Les graphes $\gamma_{\times 2}$ -stables . . . . .                  | 32        |
| 3.3        | Les arbres $\gamma_{\times 2}$ -stables . . . . .                   | 33        |
| 3.4        | Les graphes $id\text{-}\gamma_{\times 2}$ -stables . . . . .        | 41        |
|            | <b>CONCLUSION</b> . . . . .   | <b>44</b> |
|            | <b>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES</b> . . . . .                        | <b>45</b> |

## RESUME

Un sous ensemble de sommets  $S$  d'un graphe simple  $G = (V, E)$  est dit double dominant de  $G$ , si tout sommet de  $V - S$  possède au moins deux voisins dans  $S$  et tout sommet de  $S$  possède au moins un voisin dans  $S$ . Le cardinal minimum d'un ensemble double dominant de  $G$  est appelé nombre de domination double de  $G$ , noté par  $\gamma_{\times 2}(G)$ .

On s'intéresse dans ce mémoire à l'étude de l'effet de l'identification de deux sommets quelconques dans  $G$ . Quelques propriétés sont établies, en particulier on donne une caractérisation constructive des arbres  $T$  tels que  $\gamma_{\times 2}(T_{uv}) = \gamma_{\times 2}(T)$  pour tout couple de sommets adjacents de  $T$ .



## ملخص

ليكن البيان البسيط  $G=(V, E)$ , المجموعة الجزئية  $S$  من  $V$  مضاعفة السيطرة إذا كان كل رأس من  $V-S$  يملك جارين على الأقل في  $S$ ، وكل رأس من  $S$  يملك جاراً على الأقل في  $S$ . يرمز للأصلي الأدنى لمجموعة السيطرة المضاعفة في  $G$  المسمى بعدد السيطرة المضاعفة للبيان  $G$  بـ  $\gamma_{\times 2}(G)$ .

في هذا البحث نتعرض لدراسة أثر إدماج أي رأسين في البيان  $G$ . أعطينا بعض الخصائص المتعلقة بالبيانات ذات السيطرة المضاعفة. خاصة قمنا بتمييز بناء للأشجار التي تحقق  $\gamma_{\times 2}(T_{uv}) = \gamma_{\times 2}(T)$  من أجل كل رأسين متجاورين  $u, v$ .

# ABSTRACT

A subset  $S$  of vertices is a double dominating of a graph  $G = (V, E)$ , if every vertex of  $V - S$  has at least two neighbors in  $S$  and every vertex of  $S$  has at least one neighbor in  $S$ . The double domination number  $\gamma_{\times 2}(G)$  is the minimum cardinality of a double dominating set of  $G$ .

In this thesis, we are interested in studying the effect of the identification of any two vertices of  $G$ . Where some properties are established, moreover, we give a constructive characterization of trees with  $\gamma_{\times 2}(T_{uv}) = \gamma_{\times 2}(T)$  for any two adjacent vertices  $u, v$  of  $T$ .

## REMERCIEMENTS

Nous tenons à exprimer nos sincères remerciements et notre reconnaissance à notre promoteur Monsieur **M.CHELLALI**, Professeur à l'université de Blida de nous avoir introduit dans ce sujet, d'avoir accepté de nous encadrer, aussi que pour sa patience et ses conseils.

Nous remercions les membres de jury pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant d'en faire partie.

Nous remercions Monsieur **M.Blidia**, Professeur à l'université de Blida, d'avoir accepté de présider le jury.

Nous remercions Monsieur **S.Khelifi**, Maître Assistant A à l'université de Médéa, d'avoir bien voulu accepter d'être notre examinateur.

Nous remercions Madame **N.MEDDAH**, Maître Assistant A à l'université de Blida, d'avoir bien voulu accepter d'être notre examinatrice.

Nous remercions tous les membres de nos familles ainsi que nos amis pour leurs soutiens et encouragements.

## LISTE DES FIGURES

|             |   |    |
|-------------|---|----|
| Figure 1.1  | Graphe simple $G$   | 11 |
| Figure 1.2  | Le sous graphe induit par $S$   | 11 |
| Figure 1.3  | (a) Une chaîne $P_4$ (b) un cycle $C_4$   | 12 |
| Figure 1.4  | Un graphe connexe   | 13 |
| Figure 1.5  | Un graphe 2-régulier  | 13 |
| Figure 1.6  | Un arbre  | 13 |
| Figure 1.7  | Un graphe complet $K_5$   | 14 |
| Figure 1.8  | Un graphe biparti complet $K_{3,3}$   | 14 |
| Figure 1.9  | (a) Une étoile $K_{1,3}$ (b) Une étoile subdivisée $K_{1,3}^*$                                | 15 |
| Figure 1.10 | Une double étoile $S_{2,3}$   | 15 |
| Figure 1.11 | Un graphe tel que $\gamma(G) = 1$   | 16 |
| Figure 1.12 | Un graphe tel que $\gamma_t(G) = 5$   | 17 |
| Figure 1.13 | Un graphe tel que $\gamma_{x_2}(G) = 4$   | 17 |
| Figure 1.14 | Un graphe tel que $\gamma_c(G) = 6$   | 17 |
| Figure 2.1  | Un graphe tel que $V = V^o \cup V^- \cup V^+$ et $E = E^o \cup E^+$                           | 19 |
| Figure 2.2  | Les relations entre les six classes de graphes  | 24 |
| Figure 3.1  | Un arbre tel que $\gamma_{x_2}(G_{uv}) = \gamma_{x_2}(G) - 2$                                 | 32 |
| Figure 3.2  | Un graphe tel que $\gamma_{x_2}(G_{uv}) = \gamma_{x_2}(G) + \min(d_G(u) - 1, d_G(v) - 1) - 1$ | 32 |
| Figure 3.3  | Les opérations $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$   | 35 |
| Figure 3.4  | Un graphe tel que $\gamma_{x_2}(G_{uv}) = \gamma_{x_2}(G) - 2$                                | 41 |

# INTRODUCTION

La théorie des graphes est une branche très vaste de la recherche opérationnelle. Elle constitue un moyen puissant pour étudier les différentes propriétés de certaines situations ou relations, qui peuvent exister entre des objets ou des éléments dans la vie quotidienne.

Parmi les domaines de la théorie des graphes, on s'intéresse à la domination qui est un domaine relativement récent et dont l'origine se trouve dans les jeux d'échecs. Elle a pris un aspect théorique grâce à Claude Berge en 1958.

Un sous ensemble  $S$  de sommets d'un graphe  $G = (V, E)$  est un dominant si tout sommet de  $G$  est soit dans  $S$  soit adjacent à un sommet de  $S$ . Actuellement, il existe plus de 120 types de domination qui sont introduits dans la littérature.

Parmi les types de domination qui existent, nous nous intéressons dans ce mémoire à la domination double. Un sous-ensemble  $S$  de sommets de  $G$  est dit ensemble dominant double si tout sommet de  $V - S$  est adjacent à au moins deux sommets de  $S$  et tout sommet de  $S$  est adjacent à au moins un sommet de  $S$ . Le nombre de domination double est le cardinal minimum d'un ensemble dominant double de  $G$ .

L'objectif principal de notre travail est d'étudier le nombre de domination double dans un graphe modifié par la contraction d'une arête quelconque ou l'identification de deux sommets non adjacents. Sumner et Burton [3] ont été les premiers à étudier la domination dans un graphe sous l'identification de deux sommets quelconques.

Ce mémoire comporte trois chapitres. Dans le premier, nous donnons les définitions de base de la théorie des graphes utilisées dans ce mémoire et un aperçu sur la domination et ses paramètres.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons les différents résultats qui existent dans la littérature concernant la domination dans les graphes modifiés.

Le troisième chapitre est divisé en deux parties. La première est consacrée à l'étude de l'effet de la contraction d'une arête sur le nombre de la domination double dans un graphe. Nous donnons quelques propositions dans ce sens. Dans la deuxième partie, nous nous intéressons aux graphes dont le nombre de domination double ne change pas par l'identification de deux sommets non adjacents quelconques.

Nous terminons par une conclusion générale et quelques perspectives.



# CHAPITRE I

## GENERALITES SUR LES GRAPHS

Dans ce chapitre nous présentons les définitions de base nécessaires à notre travail. Ensuite nous donnons un aperçu sur la domination dans les graphes. Pour plus de détails sur les notions de la théorie et de la domination dans les graphes, nous orientons le lecteur aux références [2],[15].

### *1.1 Définitions et notations*

Un graphe  $G = (V, E)$  est la donnée de deux ensembles, un ensemble fini  $V$  de points appelés sommets et un ensemble fini  $E$  de traits appelés arêtes. Une arête  $e$  est une paire de sommets  $(u, v)$  notée par  $e = uv$  ou bien  $e = vu$ , où  $u$  et  $v$  sont les extrémités de  $e$ . On dit que  $G$  est simple s'il ne contient ni boucle (arête reliant  $x$  avec lui-même) ni arêtes multiples. La Figure 1.1 montre un graphe simple  $G = (V, E)$  avec  $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$  et  $E(G) = \{ab, bc, ce, ae, ad, be, bd\}$ . Pour un sous-ensemble  $S \subseteq V$ , le sous-graphe induit par  $S$ , noté  $G[S]$ , est le graphe ayant  $S$  comme ensemble de sommets et ses arêtes sont celles de  $E$  ayant leurs deux extrémités dans  $S$ . Par exemple le graphe de la Figure 1.2 illustre un sous-graphe du graphe de la Figure 1.1 induit par l'ensemble des sommets  $S = \{a, b, e\}$ .

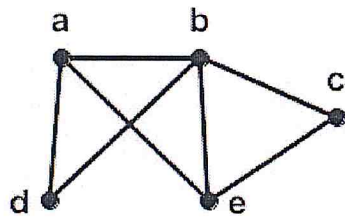


Figure 1.1: Graphe simple  $G$ .

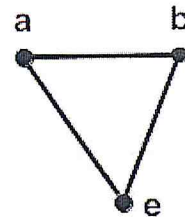


Figure 1.2: Le sous graphe induit par  $S$ .

Le graphe **complémentaire** de  $G$  noté  $\overline{G}$  est un graphe ayant le même ensemble de sommets que  $G$  et une arête est dans  $\overline{G}$  si elle n'est pas dans  $G$ .

L'**ordre** d'un graphe  $G$  est le nombre de ses sommets. Deux sommets  $u$  et  $v$  d'un graphe  $G = (V, E)$  sont dits **adjacents** (voisins) s'ils sont reliés par une arête. L'ensemble des sommets adjacents à un sommet  $v$  de  $G$ , qu'on note  $N_G(v)$ , est appelé l'ensemble des voisins de  $v$ , où **voisinage ouvert** de  $v$  dans  $G$ , et  $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$  est appelé le **voisinage fermé** de  $v$ . Pour un sous-ensemble  $S \subseteq V$ ,  $N_G(S) = \cup_{v \in S} N_G(v)$  est le voisinage ouvert, et  $N_G[S] = N_G(S) \cup S$  est le voisinage fermé.

Le voisinage privé d'un sommet  $v$  par rapport à un ensemble  $S$  noté  $pn[v, S]$  est l'ensemble des sommets du voisinage fermé de  $v$  qui n'ont pas d'autres voisins dans  $S$ , i-e:  $pn[v, S] = \{u : N[u] \cap S = \{v\}\}$ .

Le **degré** d'un sommet  $v \in V$ , noté  $d_G(v)$ , est égal au cardinal de son voisinage ouvert. Un sommet de degré nul est dit sommet **isolé** et un sommet de degré égal un est dit sommet **pendant**. On note par  $L(G)$  l'ensemble des sommets pendants de  $G$ . Un sommet adjacent à un sommet pendant est appelé sommet **support**. L'ensemble des sommets supports de  $G$  est noté par  $S(G)$ . On désigne par  $\delta(G)$  et  $\Delta(G)$  le **degré minimum** et **maximum** dans  $G$ , respectivement.

Une **chaîne**  $C$  dans un graphe  $G = (V, E)$  est une séquence finie de sommets  $v_1, v_2, \dots, v_k$ , telle que pour tout  $1 \leq i \leq k - 1$ ,  $e_i = v_i v_{i+1} \in E$ . L'entier  $k - 1$

représente la **longueur** de  $C$  (au sens des arêtes) et les sommets  $v_1$  et  $v_k$  sont appelés **extrémités** de la chaîne  $C$ . Une chaîne que n'utilise pas deux fois la même arête est dite **simple**. Une chaîne qui ne passe pas deux fois par le même sommet est dite **élémentaire**. Une chaîne minimale induite par  $n$  sommets et notée par  $P_n$ .

On appelle **cycle** dans un graphe  $G$  une chaîne simple dont les extrémités sont confondues. La Figure 1.3 représente une chaîne et un cycle d'ordre 4.



Figure 1.3: (a) Une chaîne  $P_4$ .

(b) Un cycle  $C_4$ .

On appelle **maille** d'un graphe  $G$ , notée par  $g(G)$ , la longueur du plus petit cycle dans  $G$ .

Soient  $u$  et  $v$  deux sommets d'un graphe  $G$ . On appelle **distance** entre  $u$  et  $v$ , notée  $d(u, v)$  la longueur de la plus courte chaîne joignant  $u$  et  $v$ . L'excentricité d'un sommet  $v$  dans un graphe  $G = (V, E)$  est  $exc(v) = \max \{d(v, w) : w \in V\}$  et le **diamètre** de  $G$ , noté  $Diam(G)$ , est égal à  $\max \{exc(v) : v \in V\}$ .

## 1.2 Quelques graphes particuliers

Un graphe  $G$  est dit **connexe** si pour toute paire de sommets du graphe, il existe une chaîne les reliant. Une **composante connexe** d'un graphe est un sous-graphe maximal ( au sens de l'inclusion ) connexe. (Voir Figure 1.4).

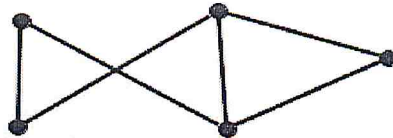


Figure 1.4: Un graphe connexe.

Un graphe dont tous les sommets ont le même degré  $k$  est appelé un graphe  $k$ -régulier. (Voir Figure 1.5).



Figure 1.5: Un graphe 2-régulier.

On appelle **arbre**, et on note par  $T$ , un graphe connexe et sans cycle. Un arbre comporte exactement  $(n - 1)$  arêtes. On appelle feuille d'un arbre, un sommet de degré 1. (Voir Figure 1.6). Une forêt est un graphe où chaque composante connexe est un arbre.

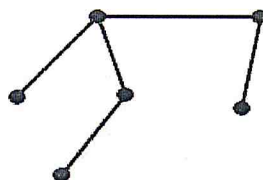


Figure 1.6: Un arbre  $T$ .

Un graphe **complet** d'ordre  $n$ , noté  $K_n$  est le graphe simple dans lequel tout sommets sont de degré  $n - 1$ . Ainsi deux sommets quelconques de  $K_n$  sont adjacents. (voir la Figure 1.7).

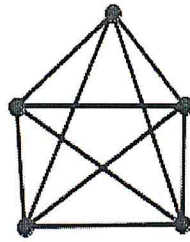


Figure 1.7: Un graphe complet  $K_5$ .

Un graphe  $G$  est dit **biparti** si l'ensemble de ses sommets peut être partitionné en deux classes  $V_1$  et  $V_2$  de sorte que deux sommets de la même classe ne soient jamais adjacents. Un graphe biparti est noté par  $G = (V_1 \cup V_2, E)$ .

Un graphe biparti  $G = (V_1 \cup V_2, E)$  est **complet** si tout sommet de  $V_1$  est de degré  $|V_2|$  et tout sommet de  $V_2$  est de degré  $|V_1|$ . On le note par  $K_{r,s}$  avec  $r = |V_1|$  et  $s = |V_2|$ . (voir la Figure 1.8).

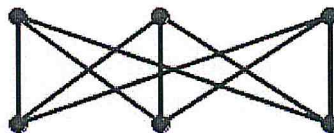


Figure 1.8: Un graphe biparti complet  $K_{3,3}$ .

Un cas particulier d'un graphe biparti complet dans lequel  $|V_1| = 1$  et  $|V_2| = s$  est appelé une **étoile**, notée  $K_{1,s}$ . Le sommet de  $V_1$  est appelé **centre** de l'étoile. Une **étoile subdivisée**  $K_{1,s}^*$  est un arbre obtenu à partir d'une étoile  $K_{1,s}$  en subdivisant chaque arête par exactement un sommet. La Figure 1.9 représente une étoile  $K_{1,3}$ , et une étoile subdivisée  $K_{1,3}^*$ .



Figure 1.9: (a) Une étoile  $K_{1,3}$

(b) Une étoile subdivisée  $K_{1,3}^*$ .

Une double étoile notée  $S_{r,s}$  est le graphe obtenu par les deux étoiles  $K_{1,r}$  et  $K_{1,s}$  en ajoutant une arête reliant les deux centres. (voir la Figure 1.10).



Figure 1.10: Une double étoile  $S_{2,3}$ .

### 1.3 Aperçu sur la domination dans les graphes

On commence par donner la définition d'un ensemble dominant dans un graphe.

**Définition 1** Soit  $G = (V, E)$  un graphe et  $D$  un sous ensemble de  $V$ .  $D$  est un dominant si tout sommet de  $(V - D)$  est adjacent à au moins un sommet de  $D$ . Le nombre de domination, noté par  $\gamma(G)$ , est le cardinal minimum d'un ensemble dominant de  $G$ .

Dans la littérature, il existe d'autres définitions équivalentes aux ensembles dominants dans les graphes. En voici des exemples:

- Un ensemble  $D \subseteq V$  est un dominant si pour tout  $v \in V$ ,  $|N[v] \cap D| \geq 1$ ,
- Un ensemble  $D \subseteq V$  est un dominant si pour tout  $v \in V - D$ ,  $N(v) \cap D \neq \emptyset$ ,
- Un ensemble  $D \subseteq V$  est un dominant si  $N[D] = V$ . (Voir Figure 1.11).



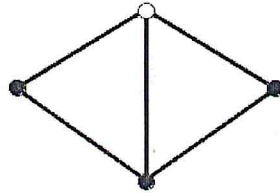


Figure 1.11: un graphe tel que  $\gamma(G) = 1$ .

Le concept de la domination est né au 16<sup>ème</sup> siècle avec les jeux d'échec où le principe consiste à placer un nombre minimum de reines sur l'échiquier, de telle manière que chaque case de l'échiquier soit ou bien occupée par une reine ou bien atteinte par un seul déplacement d'une reine.

La domination devient un domaine théorique dès 1958. En 1977, elle connut une véritable expansion grâce aux travaux de Cockayne et Hedetniemi.

Il existe une centaine de types de domination, on peut citer par exemple la domination double, couplée, stable, totale... plusieurs études ont été faites sur la domination et qui consistaient à déterminer les propriétés de différents types de dominants ainsi que des bornes supérieures ou inférieures concernant ces paramètres.

On note que la domination trouve un champ d'application très large surtout en informatique, on peut citer par exemple les réseaux de communication, les problèmes de localisations, les microprocessus...

#### 1.4 Quelques paramètres de domination

- Soit  $G = (V, E)$  un graphe sans sommets isolés et  $D \subseteq V$ . Alors  $D$  un dominant total de  $G$  si tout sommet de  $V$  est adjacent à un sommet de  $D$  (c'est-à-dire  $V = N(D)$ ). On note par  $\gamma_t(G)$  le cardinal minimum d'un dominant total de  $G$ . (Voir Figure 1.12).



Figure 1.12: un graphe tel que  $\gamma_t(G) = 5$ .

- $D$  est un dominant double de  $G$  si tout sommet de  $(V - D)$  est adjacent à au moins deux sommets de  $D$  et tout sommet de  $D$  doit avoir au moins un voisin dans  $D$ . Le nombre de domination double d'un graphe  $G$  est le cardinal minimum d'un dominant double noté  $\gamma_{x2}(G)$ . (Voir Figure 1.13).

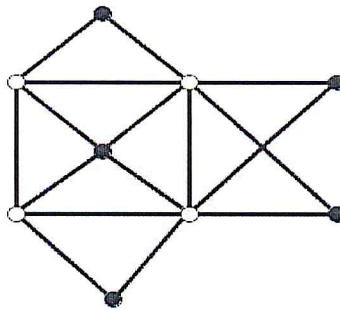


Figure 1.13: un graphe tel que  $\gamma_{x2}(G) = 4$ .

- Un sous ensemble  $S$  de  $V$  est dit dominant connexe de  $G$  si  $S$  est un dominant et le sous graphe induit par  $S$  est connexe. Le nombre de domination connexe noté par  $\gamma_c(G)$  est la taille minimum d'un ensemble dominant connexe de  $G$ . (Voir Figure 1.14).

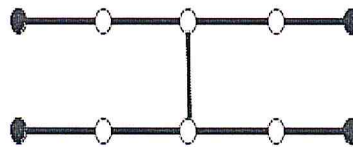


Figure 1.14: Un graphe tel que  $\gamma_c(G) = 6$ .

## CHAPITRE II

### ETUDE DES PARAMETRES DE DOMINATION DANS LES GRAPHES MODIFIES

Dans ce chapitre, on examine l'effet sur quelques paramètres de domination lorsque le graphe  $G$  est modifié en supprimant un sommet, une arête, ou en ajoutant une arête ou en contractant une arête ou par l'identification d'un couple de sommets non adjacents.

#### *2.1 La domination dans les graphes modifiés*

Dans [4] Carrington, Harary et Haynes présentent le problème sur le nombre de domination en classant les graphes  $G$  en six classes.

On note par  $G - v$  (respectivement  $G - e$ ) le graphe obtenu à partir de  $G$  en supprimant le sommet  $v$  (resp, l'arête  $e$ ). On utilise la terminologie suivante:

$C$  : changement du cardinal,     $U$  : non changement du cardinal.

$V$  : sommet,                             $E$  : arête.

$R$  : suppression,                         $A$  : ajout.

$CVR$  : La classe des graphes  $G$  tels que  $\gamma(G - v) \neq \gamma(G)$ , pour tout sommet  $v \in V(G)$ .

$CER$  : La classe des graphes  $G$  tels que  $\gamma(G - e) \neq \gamma(G)$ , pour toute arête  $e \in E(G)$ .

$CEA$  : La classe des graphes  $G$  tels que  $\gamma(G + e) \neq \gamma(G)$ , pour toute arête  $e \in E(\overline{G})$ .

$UVR$  : La classe des graphes  $G$  tels que  $\gamma(G - v) = \gamma(G)$ , pour tout sommet  $v \in V(G)$ .

$UER$  : La classe des graphes  $G$  tels que  $\gamma(G - e) = \gamma(G)$ , pour toute arête  $e \in E(G)$ .

$UEA$  : La classe des graphes  $G$  tels que  $\gamma(G + e) = \gamma(G)$ , pour toute arête  $e \in E(\overline{G})$ .

Aussi, il est utile de considérer une partition des sommets de  $G$  en trois classes disjointes, selon l'effet de la suppression d'un sommet  $v$  sur le nombre de domination  $\gamma(G)$ .

Soit  $V = V^0 \cup V^- \cup V^+$ , tels que  $V^0 = \{v \in V(G) : \gamma(G - v) = \gamma(G)\}$ .

$V^- = \{v \in V(G) : \gamma(G - v) < \gamma(G)\}$ ,  $V^+ = \{v \in V(G) : \gamma(G - v) > \gamma(G)\}$ .

Les ensembles  $E^0$  et  $E^+$  sont définis d'une manière similaire.

$E^0 = \{uv \in E : \gamma(G - e) = \gamma(G)\}$ , et  $E^+ = \{uv \in E : \gamma(G - e) > \gamma(G)\}$ .

**Exemple 2** : Soit  $G = (V, E)$  un graphe défini dans la Figure 2.1. Il admet  $V^0 = \{a, b, c, e\}$ ,  $V^- = \{f\}$ ,  $V^+ = \{d\}$ ,  $E^0 = \{de, ef\}$ ,  $E^+ = \{ad, bd, cd\}$ .

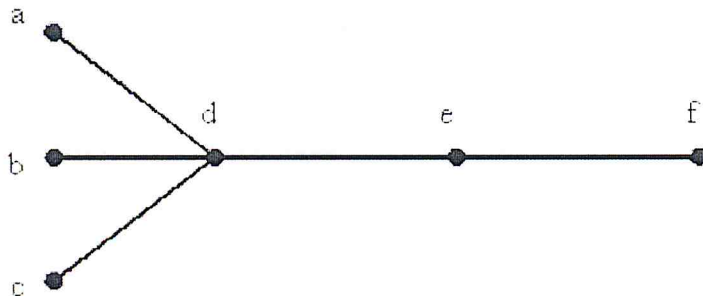


Figure 2.1:  $V = V^0 \cup V^- \cup V^+$  et  $E = E^0 \cup E^+$ .

### 2.1.1 La classe des graphes CVR

Commençons par donner les deux définitions suivantes:

**Définition 3** Soit  $G = (V, E)$  un graphe, un sommet  $v \in V^-$  est dit sommet critique.

**Définition 4** Si  $V = V^-$ , alors le graphe  $G = (V, E)$  est dit graphe sommet-critique.

Sampathkuman et Neeralagi [21] ont caractérisé les sommets de l'ensemble  $V^-$  comme suit:

**Théorème 5 ( Sampathkuman et Neeralagi [21] )** Un sommet  $v \in V^-$  si et seulement s'il existe un  $\gamma(G)$ -ensemble  $S$  contenant le sommet  $v$  tel que  $pn[v, S] = \{v\}$ .

Il est à signaler que la suppression d'un sommet peut faire augmenter  $\gamma(G)$  par au moins un. Par exemple, la suppression d'un sommet centre de l'étoile  $K_{1,n}$  avec ( $n \geq 2$ ) augmente le nombre de domination par  $n - 2$ . Mais elle peut faire diminuer  $\gamma(G)$  par au plus un. Par exemple la suppression d'un sommet pendant de la chaîne  $P_{3k+1}$ , ( $k \geq 1$ ).

Bauer et al [1] ont caractérisé les sommets appartenant à  $V^+$ .

**Théorème 6 (Bauer et al [1])** Un sommet  $v \in V^+$  si et seulement si :

- a)  $v$  n'est pas isolé et il est dans tout  $\gamma(G)$ -ensemble.
- b) Il n'existe aucun sous-ensemble  $S \subseteq V - N[v]$  de cardinalité  $\gamma(G)$  dominant le graphe  $G - v$ .

En outre, Carrington, Harary et Haynes [4] ont déterminé les propriétés des ensembles  $V^+$  et  $V^-$ .

### 2.1.2 La classe des graphes $CER$

Il est évident que la suppression d'une arête de  $G$  ne fait pas diminuer le nombre de domination  $\gamma(G)$ . Mais elle le fait augmenter par au plus un. Donc dans un graphe où le nombre de domination change lors de la suppression d'une arête satisfait la propriété suivante:  $\gamma(G - e) = \gamma(G) + 1$ .

Les graphes de la classe  $CER$  sont appelés graphes  $\gamma^+$ -critiques, qui sont caractérisés par Bauer et al [1] et par Walikar et Acharya [24]. Rappelons qu'une galaxie est une forêt où chaque composante connexe est une étoile.

**Théorème 7** ([1], [24]). *Un graphe  $G \in CER$  si et seulement si  $G$  est une galaxie.*

### 2.1.3 La classe des graphes $CEA$

Les graphes de la classe  $CEA$  ont été introduits par Sumner et Blich [23]. Ils ont caractérisé ces graphes uniquement pour  $\gamma(G) = 1$  ou  $2$ .

Un graphe  $G$  tel que  $\gamma(G) = 1$  est dans la classe  $CEA$  si et seulement si  $G$  est  $K_n$ .

Un graphe  $G$  tel que  $\gamma(G) = 2$  est dans la classe  $CEA$  si et seulement si  $\overline{G}$  est une galaxie.

En outre, Sumner [22] a caractérisé les graphes non connexe de la classe  $CEA$  ayant  $\gamma(G) = 3$ .

### 2.1.4 La classe des graphes $UVR$

Il est clair que si le nombre de domination ne change pas quand un sommet quelconque est supprimé, alors  $V = V^0$ . Par le théorème suivant, Carrington et al [4] donnent une caractérisation des graphes de la classe  $UVR$  :

**Théorème 8** (Carrington et al [4]) *Un graphe  $G \in UVR$  si et seulement si  $G$  n'admet pas de sommet isolé et pour chaque sommet  $v \in V$ , on a:*



a)- Il existe un  $\gamma(G)$ -ensemble  $S'$  tel que  $v \notin S'$  et pour chaque  $\gamma(G)$ -ensemble  $S$  contenant  $v$ , l'ensemble  $pn[v, S]$  contient au moins un sommet de  $V - S$ , ou bien

b)-  $v$  est dans tout  $\gamma(G)$ -ensemble et il existe un sous-ensemble de  $\gamma(G)$  sommets dans  $G - N[v]$  qui domine le graphe  $G - v$ .

**Exemple 9** Les graphes bipartis complets  $K_{r,s}$  avec  $(3 \leq r \leq s)$  sont dans la classe  $UVR$ .

### 2.1.5 La classe des graphes $UER$

Walikar et Acharya [24] ont donné le résultat suivant pour les graphes de la classe  $UER$ .

**Théorème 10 (Walikar et Acharya [24])** Un graphe  $G \in UER$  si et seulement si pour chaque arête  $e = uv \in E$ , il existe un  $\gamma(G)$ -ensemble  $S$  tel que l'une des conditions suivantes est vérifiée.

a)-  $u, v \in S$ .

b)-  $u, v \in V - S$ .

c)-  $u \in S$  et  $v \in V - S$  implique  $|N(v) \cap S| \geq 2$ .

**Exemple 11** Le graphe  $K_s \cup K_t$  avec  $2 \leq s \leq t$  en ajoutant une arête  $uv$  tel que  $u \in V(K_s)$  et  $v \in V(K_t)$  est dans la classe  $UER$ .

### 2.1.6 La classe des graphes $UEA$

La classe  $UEA$  est la classe des graphes dont le nombre de domination ne change pas par l'ajout d'une arête quelconque. Carrington et al [4] ont donné la caractérisation suivante:

**Théorème 12 (Carrington et al [4])** Un graphe  $G \in UEA$  si et seulement si  $V^- = \emptyset$ .

**Exemple 13** Les cycles  $C_n$  tel que  $n = 3k$  sont dans la classe  $UEA$ .

### 2.1.7 Relations entre les différentes classes

Dans [15] Haynes et al donnent les remarques suivantes concernant les six classes définies plus haut:

**Observation 14** a)-  $G \in UVR$  si et seulement si  $V = V^0$ .

b)- Si  $G \in UER$ , alors  $V = V^0 \cup V^- \cup V^+$ .

c)-  $G \in UEA$  si et seulement si  $V = V^0 \cup V^+$ .

d)-  $G \in CVR$  si et seulement si  $V = V^-$ .

e)- Si  $G \in CER$ , alors  $V = V^0 \cup V^- \cup V^+$  avec  $V^- = \{v : v \text{ est un sommet isolé}\}$ .

f)- Si  $G \in CEA$ , alors  $V = V^0 \cup V^-$ .

**Observation 15** a)- Si  $G \in UVR$ , alors  $G \in UEA$ .

b)- Un graphe  $G \in CER \cap UVR$  si et seulement si  $G$  est un  $mK_2$ ,  $m \geq 2$ .

c)-  $G \in (CER \cap UEA) - UVR$  si et seulement si  $G$  est une galaxie sans sommet isolé et au moins une étoile  $K_{1,k}$ , avec ( $k \geq 2$ ).

d)- Un graphe  $G \in CER - (UEA \cup CEA)$  si et seulement si  $G$  est une galaxie ayant au moins un sommet isolé et au moins deux arêtes.

e)- Si  $G \in CER \cap CEA$  si et seulement si  $G$  est d'ordre  $n \geq 3$  ayant une arête.

**Observation 16** Si  $G \in CVR$ , alors  $G \in UER$ .

Le diagramme de la Figure 2.2, illustre les relations entre les six classes de graphes.

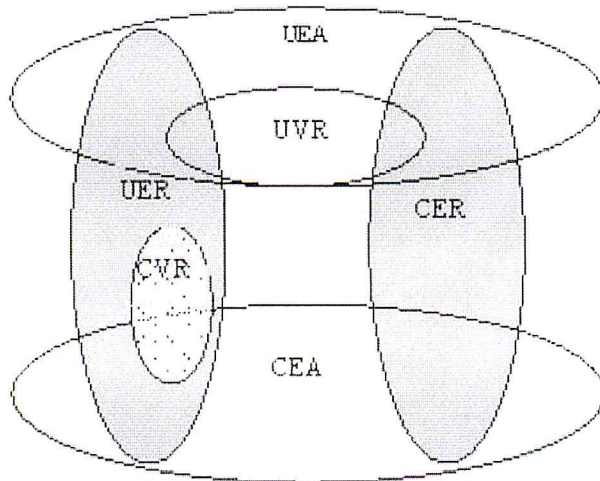


Figure 2.2

### 2.1.8 Les graphes $\gamma$ -point stables (critiques)

Dans [3] Burton et Sumner ont introduit une nouvelle notion des graphes critiques sur le nombre de domination.

Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple, pour un couple de sommets  $(u, v)$  de  $V^2$ , on note par  $G_{uv}$  le graphe obtenu à partir de  $G$  en identifiant les deux sommets  $u$  et  $v$ . Donc le graphe  $G_{uv}$  est obtenu à partir de  $G$  en supprimant les sommets  $u$  et  $v$  et en ajoutant le nouveau sommet  $\overline{uv}$  qui est adjacent à tous les sommets adjacents à  $u$  ou  $v$ .

**Définition 17** Un graphe  $G = (V, E)$  est  $\gamma$ -point stable (totalement  $\gamma$ -point stable) si  $\gamma(G_{uv}) = \gamma(G)$  pour toute arête  $uv \in E$  ( $uv \in \overline{E}$ ).

**Définition 18** Un graphe  $G = (V, E)$  est  $\gamma$ -point critique (totalement  $\gamma$ -point critique) si  $\gamma(G_{uv}) < \gamma(G)$  pour toute arête  $uv \in E$  ( $uv \in \overline{E}$ ).

Les auteurs de [3] ont donné quelques résultats concernant les graphes (totalement)  $\gamma$ -point critique.

**Proposition 19** Soient  $G = (V, E)$  un graphe simple et  $a, b \in V(G)$ . Alors  $\gamma(G_{ab}) < \gamma(G)$  si et seulement s'il existe un  $\gamma(G)$ -ensemble  $S$  tel que  $a, b \in S$  ou bien  $a$  ou  $b$  est critique.

**Proposition 20** Si  $G$  est un graphe ayant  $\gamma(G) = k \geq 2$ , alors  $G$  est  $\gamma$ -point critique (resp. totalement  $\gamma$ -point critique) si et seulement si tout couple de sommets adjacent non critique appartient au même  $\gamma(G)$ -ensemble.

Dans [20] Rickett et Haynes ont étudié les graphes issus par la contraction d'une arête quelconque par rapport à la domination totale. Les auteurs ont obtenus en particulier les résultats suivants.

**Théorème 21** Un graphe  $G$  est  $\gamma_t$ -point stable si et seulement si le sous graphe induit par  $G$  est un graphe 1-régulier.

**Observation 22** Si  $G$  un graphe connexe avec  $\gamma_t(G) \geq 4$ , alors  $G$  a un  $\gamma_t(G)$ -ensemble ne contenant pas les sommets supports.

**Théorème 23** Si  $G$  est  $\gamma_t$ -point stable d'ordre  $n$  et  $\gamma_t(G) \geq 4$ , alors  $\gamma_t(G) \leq \frac{2(n-1)}{3}$ .

Dans le même contexte, Chellali et Jafari Rad [8] ont étudié le cas de l'identification des sommets non adjacents. Aussi Chellali, Maffray et Tablennehas [11] ont considéré ce problème par rapport à la domination connexe.

## 2.2 La double domination dans les graphes modifiés

Avant de présenter quelques résultats, donnons les définitions suivantes:

**Définition 24** Un graphe  $G$  est  $\gamma_{\times 2}$ -arête critique si et seulement si  $\gamma_{\times 2}(G - e) > \gamma_{\times 2}(G)$ ,  $\forall e \in E(G)$ .

**Définition 25** Un graphe  $G$  est  $\gamma_{x_2}$ -arête stable si et seulement si  $\gamma_{x_2}(G - e) = \gamma_{x_2}(G)$ ,  $\forall e \in E(G)$ .

**Définition 26** Un graphe  $G$  est  $\gamma_{x_2}$ -sommet critique si et seulement si  $\gamma_{x_2}(G - v) < \gamma_{x_2}(G)$ ,  $\forall v \in V(G)$ .

**Définition 27** Un graphe  $G$  est  $\gamma_{x_2}$ -sommet stable si et seulement si  $\gamma_{x_2}(G - v) = \gamma_{x_2}(G)$ ,  $\forall v \in V(G)$ .

Dans un travail récent, Khelifi et al [19] se sont intéressés aux graphes  $\gamma_{x_2}$ -arête critiques. Ils ont donné une condition nécessaire et suffisante pour de tels graphes. Ils ont aussi caractérisé quelques classes des graphes à savoir: les arbres, les graphes sans  $P_4$  et sans  $P_5$ .

**Théorème 28** Un graphe  $G$  est  $\gamma_{x_2}$ -arête critique si et seulement si pour tout  $\gamma_{x_2}(G)$ -ensemble  $S$ , une des conditions est vérifiée

- 1)- chaque composante de  $G[S]$  est une étoile.
- 2)-  $V - S$  est un ensemble indépendant.
- 3)- chaque sommet de  $V - S$  est de degré deux.

D'un autre coté, dans [6] Chellali et Haynes ont travaillé sur les graphes  $\gamma_{x_2}$ -arête stables. Les auteurs ont donné une caractérisation constructive des arbres ayant cette propriété, ainsi que d'autres classes particulières comme les chaînes, les cycles et les graphes bipartis complets.

**Proposition 29** Un cycle  $C_n$  est  $\gamma_{x_2}$ -arête stable si et seulement si  $n \equiv 2 [3]$ .

**Proposition 30** Une chaîne  $P_n$  est  $\gamma_{x_2}$ -arête semi stable si et seulement si  $n \in \{2, 3, 4\}$ .

Par ailleurs, Khelifi et Chellali [18] ont étudié les graphes  $\gamma_{x_2}$ -sommet stables (critiques). Voici quelques resultats:



**Proposition 31** *Si  $G$  est un graphe  $\gamma_{\times 2}$ -sommets critique et  $v \in V(G) - (S(G) \cup L(G))$ , alors tout  $\gamma_{\times 2}(G - v)$ -ensemble contient au plus un voisin de  $v$ .*

En conséquence de la Proposition 31, nous avons:

**Corollaire 32** *Si  $G$  est une chaîne  $P_n$  ( $n \geq 5$ ) ou un cycle  $C_n$  ou bien un graphe complet  $K_n$  ( $n \geq 3$ ), alors  $G$  n'est pas  $\gamma_{\times 2}$ -sommets critique.*

**Théorème 33** *Un arbre  $T$  est  $\gamma_{\times 2}$ -sommets stable si et seulement si  $T \in \mathcal{H}$  ( $\mathcal{H}$  est une famille d'arbres construite à partir d'un arbre initial par 2 opérations).*

### 2.3 La $k$ -indépendance dans les graphes modifiés

La  $k$ -indépendance dans les graphes modifiés (suppression ou ajout d'une arête quelconque, suppression d'un sommet quelconque) a été entreprise par Chellali, en collaboration avec Haynes, Volkmann dans [7] et Jafari Rad dans [9].

Avant de présenter leurs travaux, on va donner les définitions suivantes.

**Définition 34** *Soit  $G = (V, E)$  un graphe, et  $k$  un entier positif. Un sous-ensemble  $S$  de  $V$  est dit  $k$ -indépendant de  $G$ , si le sous graphe induit par les sommets de  $S$  est de degré maximum au plus  $k - 1$ . Le cardinal maximum d'un ensemble  $k$ -indépendant de  $G$ , appelé le nombre  $k$ -indépendance de  $G$  et noté par  $\beta_k(G)$ .*

*Un sommet  $u$  d'un ensemble  $k$ -indépendant est dit plein si  $u$  possède  $k - 1$  voisins dans  $S$ .*

La  $k$ -indépendance a été introduite par Fink et Jacobson [13] en 1985. La  $k$ -indépendance est une généralisation de la stabilité classique.

**Définition 35** *Soit  $k \geq 1$  un entier positif. Un graphe  $G$  est:*

- $\beta_k$ -sommets critique si pour tout sommet  $v \in V(G)$ ,  $\beta_k(G - v) < \beta_k(G)$ .
- $\beta_k^-$ -arête stable si pour toute arête  $e \in E(G)$ ,  $\beta_k(G - e) = \beta_k(G)$ .



- $\beta_k^-$ -arête critique si pour toute arête  $e \in E(G)$ ,  $\beta_k(G - e) > \beta_k(G)$ .

- $\beta_k^+$ -arête critique si pour toute arête  $e \in E(\overline{G})$ ,  $\beta_k(G + e) < \beta_k(G)$ .

Les auteurs de [7] ont étudié les graphes  $\beta_k^-$ -arête stables. Voici quelques resultats:

**Théorème 36** *Un graphe  $G$  est  $\beta_k^-$ -arête stable si et seulement si pour tous  $\beta_k(G)$ -ensemble  $S$ , chaque sommet  $x \in V - S$  est  $(k + 1)$ -dominé par  $S$  ou bien il y a au moins deux sommets pleins appartenant à  $N(x) \cap S$ .*

**Théorème 37** *Soit  $T$  un arbre et  $k$  un entier positif. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

a)-  $T$  est un arbre  $\beta_k^-$ -arête stable.

b)-  $T$  admet un unique  $\beta_k(T)$ -ensemble.

c)- pour chaque  $\beta_k(T)$ -ensemble  $S$ , tout sommet  $x \in V - S$  est  $(k + 1)$ -dominée par  $S$  ou bien il y a au moins deux sommets pleins dans  $N(x) \cap S$ .

d)-  $\Delta(T) \leq k - 1$  ou bien  $T \in \mathcal{F}_k$  ( $\mathcal{F}_k$  est une famille d'arbres construites à partir d'un arbre initial par l'une des 4 opérations).

D'un autre coté, les auteurs de [9], ont étudié les propriétés des graphes  $\beta_k$ -critiques à chaque fois qu'une arête ou un sommet est enlevé ou une arête est ajoutée.

**Théorème 38** *Un graphe  $G$  est  $\beta_k$ -sommet critique si et seulement si  $\beta_k(G) = |V(G)|$ .*

**Théorème 39** *Un graphe  $G$  est  $\beta_k^-$ -arête critique si et seulement si pour tout arête  $uv \in E(G)$  au moins un de ce qui suit est vrai:*

1)- Il existe un  $\beta_k(G)$ -ensemble  $S$ , où  $u \in S$  et  $v \notin S$  et  $v$  a exactement  $k$  voisins dans  $S$  et aucun sommet de  $N(u) \cap (V - S)$  est plein.

2)- Il existe un  $\beta_k(G)$ -ensemble  $S$  contenant  $u$  et  $v$  où  $u$  est un sommet plein,  $\deg(u) \geq k$  et il existe un sommet  $x \in N(u) \cap (V - S)$  tel que  $x$  n'est pas  $k$ -dominé par  $S$  et  $u$  est l'unique sommet plein dans  $S$  adjacent à  $x$ .

**Théorème 40** Soit  $k$  un entier positif, alors l'arbre  $T$  est  $\beta_k^-$ -arête critique si et seulement si  $T = K_{1,k}$ .

**Théorème 41** Un graphe  $G$  est  $\beta_k^+$ -arête critique si et seulement si toute paire de sommets non adjacents  $u$  et  $v$  appartient à tout  $\beta_k(G)$ -ensemble  $S$  et au moins l'un des sommets  $u$  et  $v$  est un sommet plein dans  $S$ .

## 2.4 Autres paramètres de domination dans les graphes modifiés

Dans [5], Chellali s'est investi dans l'étude de la  $k$ -domination par rapport à la suppression d'une arête quelconque. Nous commençons par donner la définition suivante:

**Définition 42** Soit  $k$  un entier positif, un sous-ensemble  $S$  de  $V(G)$  est un ensemble  $k$ -dominant si tous sommet de  $V(G) - S$  est adjacent à au moins  $k$  sommets de  $S$ . Le cardinal minimum d'un ensemble  $k$ -dominant de  $G$  est appelé le nombre  $k$ -dominant de  $G$ , noté par  $\gamma_k(G)$ . La  $k$ -domination dans les graphes a été introduite par Fink et Jacobson en 1985 [12].

**Théorème 43** Soit  $k$  un entier positif,  $G$  un graphe  $\gamma_k$ -arête stable si et seulement si pour tout pair de sommets adjacents  $u, v \in V(G)$ , il existe un  $\gamma_k(G)$ -ensemble disons  $D$ , de telle sorte que l'une de ces conditions est vérifiée:

- 1)-  $u, v \in D$  ou bien  $u, v \in V(G) - D$ .
- 2)- Si  $u \in D$  et  $v \notin D$ , alors  $v$  est  $(k + 1)$ -dominée par  $D$ .

En outre, il a donné une caractérisation constructive des arbres  $\gamma_k$ -arête stables.

Nous cloturons cette partie en mentionnant que d'autres travaux sont considérés par rapport aux fonctions de domination, Chellali et Jafari Rad [10], Hansberg [14], et Jafari Rad et Volkmann [17] pour la domination roman. Et Jafari Rad [16] pour la domination 2-rainbow.

## CHAPITRE III

### CONTRIBUTION

La contraction d'une arête ou l'identification de deux sommets non adjacents est une opération qui consiste à remplacer ces deux sommets par un nouveau sommet dont le voisinage ouvert est l'union des voisinages ouverts des deux sommets remplacés sans ces deux sommets en question. D'une façon formelle, la contraction de deux sommets adjacents ou bien l'identification de deux sommets non adjacents  $u$  et  $v$  forme un nouveau sommet, désigné par  $\overline{uv}$ , dont le voisinage ouvert est  $(N(u) \cup N(v)) - \{u, v\}$ . Le graphe obtenu sera désigné par  $G_{uv}$ .

Dans ce chapitre, on considère l'effet de la contraction d'une arête ou bien l'identification de deux sommets non adjacents sur le nombre de domination double  $\gamma_{\times 2}(G)$ .

#### CONTRACTION DE DEUX SOMMETS ADJACENTS

Puisque l'existence des ensembles double dominants dans  $G$  nécessite à ce que  $G$  soit sans sommets isolés, alors on considère la contraction des arêtes dans les graphes connexes d'ordre  $n \geq 3$ .

#### *3.1 Quelques résultats préliminaires*

**Observation 44** *Tout dominant double d'un graphe  $G$  contient tous les sommets supports et les feuilles.*

**Proposition 45** *Soit  $G$  un graphe connexe d'ordre  $n \geq 3$  et  $u, v$  deux sommets adjacents de  $G$ . Alors*

$$\gamma_{\times 2}(G) - 2 \leq \gamma_{\times 2}(G_{uv}) \leq \gamma_{\times 2}(G) + \min(d_G(u) - 1, d_G(v) - 1) - 1.$$

**Preuve.** a) Soit  $D$  un  $\gamma_{\times 2}(G)$ -ensemble, et  $u, v$  deux sommets adjacents quelconques de  $G$ . Examinons les cas suivants:

- Si  $u$  et  $v \notin D$ , alors  $D$  reste un double dominant de  $G_{uv}$  et donc  $\gamma_{\times 2}(G_{uv}) \leq |D| = \gamma_{\times 2}(G)$ .

- Si  $u \in D$  et  $v \notin D$ , alors  $(D - \{u\}) \cup \{\overline{uv}\}$  est un double dominant de  $G_{uv}$ . D'où  $\gamma_{\times 2}(G_{uv}) \leq \gamma_{\times 2}(G)$ .

- Supposons maintenant que  $u, v \in D$ . Soit  $A$  l'ensemble des sommets de  $V - D$  tels que  $N(x) \cap D = \{u, v\} (\forall x \in A)$ . Il est clair que  $|A| \leq \min(d(u) - 1, d(v) - 1)$ . Maintenant si  $u$  ou  $v$  a au moins un voisin dans  $D$ , alors  $(D - \{u, v\}) \cup \{\overline{uv}\} \cup A$  est un EDD de  $G_{uv}$ . D'où  $\gamma_{\times 2}(G_{uv}) \leq (\gamma_{\times 2}(G) - 2) + 1 + |A| = \gamma_{\times 2}(G) + |A| - 1$ . Donc on peut supposer que ni  $u$ , ni  $v$  n'a un voisin dans  $D$ . Nous distinguons deux sous cas:

- Si  $A = \emptyset$ , alors soit  $u'$  ou  $v'$  le voisin de  $u$  ou  $v$  dans  $V - D$  respectivement. Alors  $D \cup \{\overline{uv}, u'\} - \{u, v\}$  est un EDD de  $G_{uv}$ , d'où  $\gamma_{\times 2}(G_{uv}) \leq |D| - 2 + 2 = \gamma_{\times 2}(G)$ .

- Si  $A \neq \emptyset$ , alors  $(D - \{u, v\}) \cup \{\overline{uv}\} \cup A$  est un EDD de  $G_{uv}$ . D'où  $\gamma_{\times 2}(G_{uv}) \leq (\gamma_{\times 2}(G) - 2) + 1 + |A| = \gamma_{\times 2}(G) + |A| - 1$ . Ainsi on a la borne supérieure.

b) Soit  $D$  un  $\gamma_{\times 2}(G_{uv})$ -ensemble.

- Si  $\overline{uv} \in D$ , alors  $(D - \{\overline{uv}\}) \cup \{u, v\}$  est un EDD de  $G$ . D'où  $\gamma_{\times 2}(G) \leq (|D| - 1) + 2 = \gamma_{\times 2}(G_{uv}) + 1$ . Donc  $\gamma_{\times 2}(G) - 2 \leq \gamma_{\times 2}(G_{uv})$ .

- Si  $\overline{uv} \notin D$ , alors  $D \cup \{u, v\}$  est un EDD de  $G$ . D'où  $\gamma_{\times 2}(G) \leq |D| + 2 = \gamma_{\times 2}(G_{uv}) + 2$ . Donc  $\gamma_{\times 2}(G) - 2 \leq \gamma_{\times 2}(G_{uv})$ . ■

Il est à noter que la borne inférieure et la borne supérieure de la Proposition 45 sont atteintes pour l'exemple de la Figure 3.1 et de la Figure 3.2 respectivement.

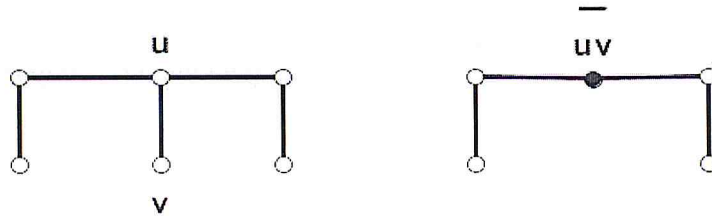




Figure 3.1: Un arbre tel que  $\gamma_{\times 2}(G_{uv}) = \gamma_{\times 2}(G) - 2$ .

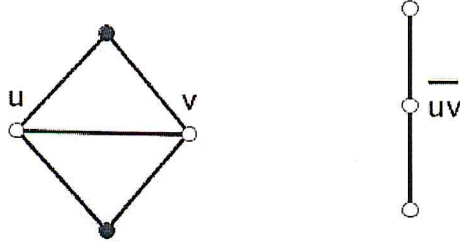


Figure 3.2: Un graphe tel que  $\gamma_{\times 2}(G_{uv}) = \gamma_{\times 2}(G) + \min(d_G(u) - 1, d_G(v) - 1) - 1$ .

Il est à signaler que si on considère uniquement les graphes de maille  $\geq 4$ , alors l'ensemble  $A$  tel qu'il est défini dans la Preuve de la Proposition 45, sera vide. D'où on a le résultat suivant:

**Corollaire 46** *Soit  $G$  un graphe connexe de maille  $\geq 4$ . Alors*

$$\gamma_{\times 2}(G) - 2 \leq \gamma_{\times 2}(G_{uv}) \leq \gamma_{\times 2}(G).$$

La borne supérieure du Corollaire 46 est atteinte pour la chaîne  $P_5$ , en contractant une arête quelconque.

### 3.2 Les graphes $\gamma_{\times 2}$ -stables

Avant de présenter les résultats, nous commençons par donner la définition suivante:

**Définition 47** *Un graphe  $G$  est dit domination double point stable ou bien  $\gamma_{\times 2}$ -stable, si pour tout couple de sommets adjacents  $u, v$  de  $G$  on a  $\gamma_{\times 2}(G_{uv}) = \gamma_{\times 2}(G)$ .*

**Proposition 48** *Si  $G$  est un graphe  $\gamma_{\times 2}(G_{uv})$ -stable, alors  $G$  ne contient pas de supports adjacents.*

**Preuve.** Soit  $G$  un graphe  $\gamma_{\times 2}$ -stable, et soit  $D$  un  $\gamma_{\times 2}(G)$ -ensemble. Supposons que  $G$  contient deux sommets supports adjacents  $u, v$ . Soit  $u'$  un sommet pendant

adjacent à  $u$ . D'après l'Observation 44,  $\{u, v, u'\} \subset D$ . D'où  $(D - \{u, u'\}) \cup \{\overline{uu'}\}$  est un EDD du graphe  $G_{uu'}$ . Donc  $\gamma_{\times 2}(G_{uu'}) \leq |D| - 2 + 1 < \gamma_{\times 2}(G)$ , contradiction avec le fait que  $G$  est  $\gamma_{\times 2}$ -stable. ■

**Proposition 49** *Si  $G$  est un graphe  $\gamma_{\times 2}$ -stable, alors tout support de  $G$  est adjacent à exactement une seule feuille.*

**Preuve.** Soit  $G$  un graphe  $\gamma_{\times 2}$ -stable, et  $D$  un  $\gamma_{\times 2}(G)$ -ensemble. Supposons qu'un sommet support  $u$  de  $G$  est adjacent à au moins deux sommets pendants  $v$  et  $v'$ . Alors  $(D - \{u, v\}) \cup \{\overline{uv}\}$  est un EDD de  $G_{uv}$ . D'où  $\gamma_{\times 2}(G_{uv}) \leq |D| - 2 + 1 < \gamma_{\times 2}(G)$ , contradiction. ■

**Proposition 50** *Soit  $G$  un graphe  $\gamma_{\times 2}$ -stable connexe de maille  $g(G) \geq 4$ . Alors le sous graphe induit par tout  $\gamma_{\times 2}(G)$ -ensemble est un graphe 1-régulier.*

**Preuve.** Soit  $G$  un graphe  $\gamma_{\times 2}$ -stable connexe de maille  $g(G) \geq 4$ , et  $D$  un  $\gamma_{\times 2}(G)$ -ensemble. Supposons que  $G[D]$  n'est pas un 1-régulier. Donc  $G[D]$  contient un sommet  $x$  ayant au moins deux voisins dans  $D$ , disons  $y, z$ . Il est clair que  $yz \notin E(G)$  car  $g(G) \geq 4$ . Considérons maintenant le graphe  $G_{xy}$  et soit  $D' = (D - \{x, y\}) \cup \{\overline{xy}\}$ . Alors  $D'$  n'est pas un EDD de  $G_{xy}$  car  $|D'| = |D| - 1 < |D|$ . Par conséquent, il existe un sommet  $w \in V - D'$  ayant un seul voisin dans  $D'$ . Puisque  $w$  est double dominé par  $D$  dans  $G$ , alors forcément  $N[w] \cap D = \{x, y\}$  ce qui implique que  $x, y, w$  forment un cycle  $C_3$ , contradiction avec le fait que  $g(G) \geq 4$ . ■

### 3.3 Les arbres $\gamma_{\times 2}$ -stables

Dans cette partie on donne une caractérisation constructive des arbres  $\gamma_{\times 2}$ -stables. Commençons par donner quelques observations utiles pour la suite.

**Proposition 51** *Si  $T$  est un arbre  $\gamma_{\times 2}$ -stable, alors pour tout sommet  $x$  de  $T$  différent d'un support on a,  $\gamma_{\times 2}(T - x) \geq \gamma_{\times 2}(T)$ .*



**Preuve.** Soit  $S$  un  $\gamma_{\times 2}(T - x)$ -ensemble, et  $y$  un voisin quelconque de  $x$  dans  $T$ . Supposons que  $|S| < \gamma_{\times 2}(T)$ . Alors  $S$  est un double dominant de  $T_{xy}$ . D'où  $\gamma_{\times 2}(T_{xy}) \leq |S| < \gamma_{\times 2}(T)$ , contradiction car  $T$  est  $\gamma_{\times 2}$ -stable. ■

**Observation 52** Soit  $T$  l'arbre obtenu d'un arbre non trivial  $T'$ , en attachant une étoile subdivisée  $K_{1,k}^*$ , avec  $k \geq 2$  de centre  $a$  par une arête à un sommet  $b$  quelconque de  $T'$ . Alors  $\gamma_{\times 2}(T) = \gamma_{\times 2}(T') + 2k$ .

**Preuve.** Il est clair que tout double dominant de  $T'$  peut être étendu en un EDD de  $T$  en ajoutant tous les sommets de  $K_{1,k}^*$  sauf le sommet  $a$ , d'où  $\gamma_{\times 2}(T) \leq \gamma_{\times 2}(T') + 2k$ .

D'un autre côté, soit  $D$  un  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble. D'après l'Observation 44, tous les sommets supports et feuilles sont dans tout  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble  $D$ . Maintenant si  $a \in D$ , alors on peut le remplacer par  $b$  dans  $D$ . Donc on peut supposer que  $a \notin D$ , d'où  $D \cap V(T')$  est un EDD de  $T'$  et par suite  $\gamma_{\times 2}(T') \leq \gamma_{\times 2}(T) - 2k$ . D'où  $\gamma_{\times 2}(T) = \gamma_{\times 2}(T') + 2k$ . ■

**Observation 53** Soit  $T$  l'arbre obtenu d'un arbre non trivial  $T'$ , en attachant une chaîne  $P_3 = x'-x-y$  par une arête de  $y$  à un sommet  $w$  de  $T'$  qui appartient à un  $\gamma_{\times 2}(T')$ -ensemble. Alors  $\gamma_{\times 2}(T) = \gamma_{\times 2}(T') + 2$ .

**Preuve.** Soit  $D$  un  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble. D'après l'Observation 44,  $x', x \in D$  aussi  $y \notin D$  (sinon on le remplacer par  $w$  ou son voisin). Donc  $D \cap V(T')$  est un EDD de  $T'$ . D'où  $\gamma_{\times 2}(T') \leq \gamma_{\times 2}(T) - 2$ . L'égalité vient du fait que tout  $\gamma_{\times 2}(T')$ -ensemble contenant  $w$  peut être étendu en un EDD de  $T$  en lui ajoutant  $\{x, x'\}$ . ■

Avant de donner une caractérisation des arbres, nous donnons la définition suivante. Un arbre  $T$  *enraciné* est une arboréscence admettant un sommet  $r$  à partir duquel il existe un chemin à tout autre sommet de  $T$ . Le sommet  $r$  est unique et est appelé *racine*. Pour un sommet  $v$  d'un arbre enraciné, le *parent*  $p(v)$  de  $v$  est l'unique

sommet tel que il existe une arête de  $p(v)$  à  $v$ , le *fil*s de  $v$  est un sommet  $u$  tel que  $p(u) = v$ .

Pour caractériser des arbres  $\gamma_{\times 2}(T)$ -stables, nous définissons la famille  $\mathcal{H}$  de tous les arbres  $T$  qui peuvent être obtenus par une séquence d'arbres  $T_1, T_2, \dots, T_j$  avec  $j \geq 1$ , tel que  $T_1 = K_{1,k}^*$ , avec  $k \geq 2$  de centre  $a$ ,  $T = T_j$  et si  $j \geq 2$ ,  $T_{j+1}$  est obtenu à partir de  $T_j$  par une des opérations suivantes :

- Opération  $\mathcal{O}_1$  : attacher une étoile subdivisée  $K_{1,k}^*$ , avec  $k \geq 2$ , de centre  $a$  par une arête de  $a$ , à un sommet  $b$  quelconque de  $T'_j$ .
- Opération  $\mathcal{O}_2$  : attacher une chaîne  $P_3 = x'-x-y$  par une arête de  $y$  à un sommet  $w$  de  $T'_j$  qui appartient à un  $\gamma_{\times 2}(T'_j)$ -ensemble.

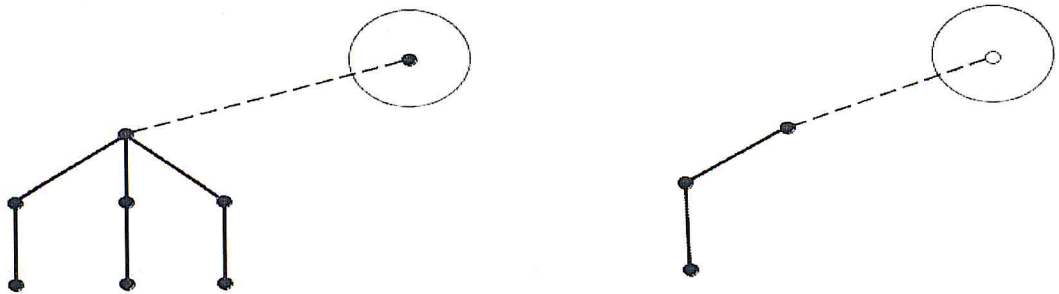


Figure 3.3: Les opérations  $\mathcal{O}_1$  et  $\mathcal{O}_2$ .

**Lemme 54** Si  $T \in \mathcal{H}$ , alors  $T$  est un arbre  $\gamma_{\times 2}$ -stable.

**Preuve.** Soit  $T \in \mathcal{H}$ . Alors  $T$  peut être obtenu par une séquence d'arbres  $T_1, T_2, \dots, T_j$  avec  $j \geq 1$ , telle que  $T_1$  est une étoile subdivisée  $K_{1,k}^*$  avec  $k \geq 2$ ,  $T = T_j$ , et si  $j \geq 2$ , alors  $T_{j+1}$  est obtenu de  $T_j$  par l'une des deux opérations  $\mathcal{O}_1$  et  $\mathcal{O}_2$ . Utilisons une induction sur  $j$ . Si  $j = 1$ , alors  $T$  est une étoile subdivisée  $K_{1,k}^*$  ( $k \geq 2$ ) et donc  $T$  est  $\gamma_{\times 2}$ -stable.

Supposons que  $j \geq 2$ , et que le résultat est vrai pour tous les arbres  $T$  qui peuvent être construits par une séquence de longueur au plus  $j - 1$ . Soit  $T$  un arbre de  $\mathcal{H}$  construit à partir de  $T' = T_{j-1}$ , en utilisant  $\mathcal{O}_1$  ou  $\mathcal{O}_2$ . Par hypothèse,  $T'$  est  $\gamma_{\times 2}$ -stable. Considérons alors les deux cas suivants:

**Cas 1.**  $T$  est obtenu de  $T'$  par l'Opération  $\mathcal{O}_1$ . Par l'Observation 52, on a  $\gamma_{\times 2}(T) = \gamma_{\times 2}(T') + 2k$ . Pour montrer que  $T$  est  $\gamma_{\times 2}$ -stable, considérons une arête  $uv$  quelconque de  $T$ . Examinons les sous cas suivants:

**cas 1.1.**  $uv \in E(T')$ . L'arbre  $T_{uv}$  peut être considéré comme étant obtenu par l'arbre  $T'_{uv}$  en appliquant l'Opération  $\mathcal{O}_1$ . Par conséquent d'après l'Observation 52,  $\gamma_{\times 2}(T_{uv}) = \gamma_{\times 2}(T'_{uv}) + 2k$ . Sachant que  $T'$  est  $\gamma_{\times 2}$ -stable, on obtient  $\gamma_{\times 2}(T_{uv}) = \gamma_{\times 2}(T'_{uv}) + 2k = \gamma_{\times 2}(T') + 2k = \gamma_{\times 2}(T)$ .

**Cas 1.2.**  $uv = ab$ . Posons  $X = V(K_{1,k}^*) - \{a\}$ . Soit  $D'$  un  $\gamma_{\times 2}(T')$ -ensemble. Posons  $D'' = D'$  si  $b \notin D'$  et  $D'' = (D' - \{b\}) \cup \{\overline{ab}\}$  si  $b \in D'$ . Remarquer que  $|D'| = |D''|$ . Maintenant il est clair que  $D'' \cup X$  est un EDD de  $T_{ab}$ , d'où  $\gamma_{\times 2}(T_{ab}) \leq |D''| + |X| = \gamma_{\times 2}(T') + 2k$ . Supposons que l'égalité est stricte i.e:  $\gamma_{\times 2}(T_{ab}) < \gamma_{\times 2}(T') + 2k$ . Soit  $S$  un  $\gamma_{\times 2}(T_{ab})$ -ensemble. D'après l'Observation 44,  $X \subset S$ . Maintenant si  $\overline{ab} \in S$ . Il est clair que  $S' = (S - (X \cup \{\overline{ab}\})) \cup \{b\}$  double domine  $T' - b$  mais pas  $T'$  (sinon  $|S'| < \gamma_{\times 2}(T')$ ). Donc  $b$  est isolé dans  $S'$ . Soit alors  $b'$  un voisin quelconque de  $b$  dans  $T'$ . Alors  $S'' = S' \cup \{b'\}$  est EDD de  $T'$ , et donc  $\gamma_{\times 2}(T') \leq |S''| = |S'| + 1 = \gamma_{\times 2}(T_{ab}) - |X| - 1 + 2 < \gamma_{\times 2}(T') + 1$ . D'où  $S''$  est un  $\gamma_{\times 2}(T')$ -ensemble où le sommet  $b'$  possède deux voisins dans  $S''$ , ce qui contredit la Proposition 50. D'où  $\overline{ab} \notin S$ . Maintenant si  $\overline{ab}$  a au moins deux voisins dans  $S$  appartenant à  $T' - b$ , alors dans ce cas  $(S - X)$  est un EDD de  $T'$ . D'où  $\gamma_{\times 2}(T') \leq |S| - |X| = \gamma_{\times 2}(T_{ab}) - |X| < \gamma_{\times 2}(T') + 2k - 2k = \gamma_{\times 2}(T')$ , ce qui est aussi impossible. Donc  $\overline{ab}$  a au plus 1 voisin dans  $S$  appartenant à  $T' - b$ . Dans ce cas  $S - X$  est un EDD de  $T' - b$ . D'où  $\gamma_{\times 2}(T' - b) \leq |S| - |X| < \gamma_{\times 2}(T') + 2k - 2k = \gamma_{\times 2}(T')$ , contradiction avec la Proposition 51. Par conséquent  $\gamma_{\times 2}(T_{ab}) = \gamma_{\times 2}(T') + 2k = \gamma_{\times 2}(T)$ .

**Cas 1.3.**  $uv \in E(K_{1,k}^*)$ . Posons  $X$  : l'ensemble des sommets de  $K_{1,k}^*$  en contractant l'arête  $uv$ . A noter que  $|X| = 2k$ . Il est claire que tout  $\gamma_{\times 2}(T')$ -ensemble peut être étendu à un EDD de  $T_{uv}$  en ajoutant  $X$ . D'où  $\gamma_{\times 2}(T_{uv}) \leq \gamma_{\times 2}(T') + 2k = \gamma_{\times 2}(T)$ . Pour montrer l'égalité, supposons que  $\gamma_{\times 2}(T_{uv}) < \gamma_{\times 2}(T)$ , et soit  $S$  un  $\gamma_{\times 2}(T_{uv})$ -ensemble. Si  $b \notin S$ , alors  $S - X$  est un EDD de  $(T' - b)$ , et donc  $\gamma_{\times 2}(T' - b) \leq |S| - 2k < \gamma_{\times 2}(T) - 2k = \gamma_{\times 2}(T')$ , ce qui contredit la Proposition 51. D'où  $b \in S$ . Si  $S - X$  double domine  $T'$ , alors  $\gamma_{\times 2}(T') \leq |S| - |X| = \gamma_{\times 2}(T_{uv}) - 2k < \gamma_{\times 2}(T) - 2k = \gamma_{\times 2}(T')$ , ce qui est impossible. D'où  $S - X$  ne double domine pas  $T'$ . Donc  $b$  n'a pas de voisin dans  $S \cap V(T')$ . Aussi, il est claire que tout sommet de  $T'$  autre que  $b$  est double dominé. Soit  $b'$  un voisin de  $b$  dans  $T'$ . Rappelons que  $b' \notin S$ . Dans ce cas  $(S - X) \cup \{b'\}$  est un EDD de  $T'$ , d'où  $\gamma_{\times 2}(T') \leq |S| - |X| + 1 = \gamma_{\times 2}(T_{uv}) - 2k + 1 < \gamma_{\times 2}(T) - 2k + 1 = \gamma_{\times 2}(T') + 1$ . Par conséquent,  $(S - X) \cup \{b'\}$  est un  $\gamma_{\times 2}(T')$ -ensemble induisant une chaîne  $P_3$ . Puisque  $T'$  est  $\gamma_{\times 2}$ -stable, ceci contredit la Proposition 50. On conclut que  $\gamma_{\times 2}(T_{uv}) = \gamma_{\times 2}(T)$ .

**Cas 2.**  $T$  est obtenu de  $T'$  par l'Opération  $\mathcal{O}_2$  :

Soit  $x'-x-y$  la chaîne  $P_3$  attachée par  $y$  à un sommet  $w$  de  $T'$  qui appartient  $\gamma_{\times 2}(T')$ -ensemble. D'après l'Observation 53,  $\gamma_{\times 2}(T) = \gamma_{\times 2}(T') + 2$ . Nous montrerons dans ce qui suit que  $T$  est  $\gamma_{\times 2}$ -stable. Soit  $uv$  une arête quelconque de  $T$ .

**Cas 2.1.**  $uv \in E(T')$ . L'arbre  $T_{uv}$  peut être comme étant obtenu par  $T'_{uv}$  en attachant la chaîne  $x'-x-y$  par  $y$  vers un sommet  $w^*$  de  $T'_{uv}$ , ou  $w^* = w$  si  $w \notin \{u, v\}$ , ou bien  $w^* = \overline{wv}$ . Il est claire que si  $w^*$  appartient à un  $\gamma_{\times 2}(T'_{uv})$ -ensemble alors par l'Observation 53, on a

$$\gamma_{\times 2}(T_{uv}) = \gamma_{\times 2}(T'_{uv}) + 2 \quad (1)$$

Pour voir ceci, soit  $D'$  un  $\gamma_{\times 2}(T')$ -ensemble contenant  $w$  (un tel ensemble  $D'$  existe). En utilisant le fait que  $T'$  est  $\gamma_{\times 2}$ -stable, on peut voir :

- Si  $u, v \notin D'$  alors  $D'$  est un  $\gamma_{\times 2}(T'_{uv})$ -ensemble avec  $w \in D'$ .



- Si  $u \in D'$  et  $v \notin D'$  alors  $(D' - \{u\}) \cup \{\overline{uv}\}$  est un  $\gamma_{\times 2}(T'_{uv})$ -ensemble avec  $w \in D'$  (si  $u \neq w$ ) ou bien  $w^* \in D'$  (si  $u = w$ ).

- Si  $u, v \in D'$ , alors  $(D' - \{u, v\}) \cup \{\overline{uv}, z\}$  est un  $\gamma_{\times 2}(T'_{uv})$ -ensemble contenant  $w^*$  ou  $z$  est un voisin quelconque de  $u$  ou  $v$ . Donc (1) est vérifiée.

**Cas 2.2.**  $uv = yw$ . D'après le Corolaire 46,  $\gamma_{\times 2}(T_{yw}) \leq \gamma_{\times 2}(T)$ . Supposons que l'égalité est stricte i.e:  $\gamma_{\times 2}(T_{yw}) < \gamma_{\times 2}(T)$ . Soit  $S$  un  $\gamma_{\times 2}(T_{yw})$ -ensemble, d'après l'Observation 44,  $x', x \in S$ . Si  $\overline{yw} \in S$ , alors  $S' = (S - \{x, x', \overline{yw}\}) \cup \{w\}$  double domine  $T' - w$  mais pas  $T'$ . Ce qui implique que  $w$  n'est pas un support dans  $T'$ . Par conséquent  $\gamma_{\times 2}(T' - w) \leq |S'| = |S| - 2 = \gamma_{\times 2}(T_{yw}) - 2 < \gamma_{\times 2}(T) - 2 = \gamma_{\times 2}(T') + 2 - 2$ , ce qui contredit la Proposition 51. Donc  $\overline{yw} \notin S$ . De la même manière  $S' = S - \{x, x'\}$  double domine  $T' - w$  mais pas  $T'$ . Ce qui implique que  $w$  n'est pas un support dans  $T'$ . Alors  $\gamma_{\times 2}(T' - w) \leq |S'| = |S| - 2 = \gamma_{\times 2}(T_{yw}) - 2 < \gamma_{\times 2}(T) - 2 = \gamma_{\times 2}(T')$ . Ce qui contredit encore une fois la Proposition 51. D'où  $\gamma_{\times 2}(T_{yw}) = \gamma_{\times 2}(T)$ .

**Cas 2.3.**  $uv = xy$  ou  $xx'$ .  $\overline{uv}$  est ou bien une feuille ou bien un support dans  $T_{uv}$ . Soit  $S$  un  $\gamma_{\times 2}(T_{uv})$ -ensemble. D'après le corollaire 46,  $\gamma_{\times 2}(T_{uv}) \leq \gamma_{\times 2}(T)$ . Supposons que  $\gamma_{\times 2}(T_{uv}) < \gamma_{\times 2}(T)$ . Il est claire que  $S$  contient deux sommet de  $\{x', x, y\}$  une fois l'arête  $uv$  contractée.

Si  $w \notin S$  alors  $S \cap T'$  double domine  $T' - w$  et donc  $\gamma_{\times 2}(T' - w) \leq |S| - 2 = \gamma_{\times 2}(T_{uv}) - 2$ . Par la Proposition 51, et le fait que  $\gamma_{\times 2}(T_{uv}) < \gamma_{\times 2}(T)$ . On obtient  $\gamma_{\times 2}(T') \leq \gamma_{\times 2}(T' - w) \leq \gamma_{\times 2}(T_{uv}) - 2 < \gamma_{\times 2}(T) - 2 = \gamma_{\times 2}(T')$ . Ce qui impossible. Donc  $w \in S$ . Si  $S \cap T'$  double domine  $T'$ , alors  $\gamma_{\times 2}(T') \leq |S| - 2 = \gamma_{\times 2}(T_{uv}) - 2 < \gamma_{\times 2}(T) - 2 = \gamma_{\times 2}(T')$ . Ce qui aussi impossible. Donc  $S \cap T'$  ne double domine pas  $T'$ . Soit  $w'$  un voisins quelconque de  $w$  dans  $T'$ . A noter que  $w'$  est double dominé par  $w$  et disons  $w''$ . Aussi,  $(S \cap T') \cup \{w'\}$  est un EDD de  $T'$ , d'où  $\gamma_{\times 2}(T') \leq |S| - 2 + 1 = \gamma_{\times 2}(T_{uv}) - 1 < \gamma_{\times 2}(T) - 1 = \gamma_{\times 2}(T') + 1$ . Par conséquent  $(S \cap T') \cup \{w'\}$  est un  $\gamma_{\times 2}(T')$ -ensemble. On conclut que  $T'$  est  $\gamma_{\times 2}$ -stable, ceci contredit La Proposition

50, car  $w, w', w''$  induisent une chaîne  $P_3$ . On conclut que  $\gamma_{\times 2}(T) = \gamma_{\times 2}(T_{uv})$  pour toute arête  $uv$  de  $T$ . Donc  $T$  est  $\gamma_{\times 2}$ -stable. ■

**Théorème 55** *Un arbre  $T$  est  $\gamma_{\times 2}$ -stable si et seulement si  $T \in \mathcal{H}$ .*

**Preuve.** Si  $T \in \mathcal{H}$  alors par Lemme 54,  $T$  est un  $\gamma_{\times 2}$ -stable.

Pour montrer la nécessité, soit  $T$  un arbre  $\gamma_{\times 2}$ -stable. Nous utilisons une induction sur l'ordre de  $T$ . Puisque les étoiles et doubles étoiles ne sont pas  $\gamma_{\times 2}$ -stables (Par Propositions 48 et 49), donc  $T$  a un diamètre au moins 4. Il est clair que le plus petit arbre de diamètre 4 est la chaîne  $P_5$  qui appartient à la famille  $\mathcal{H}$ . Soit  $n \geq 6$ , et supposons que tout arbre  $\gamma_{\times 2}$ -stable  $T'$  d'ordre  $n' < n$  est dans la famille  $\mathcal{H}$ , soit  $T$  un arbre  $\gamma_{\times 2}$ -stable d'ordre  $n$ . Nous enracinons maintenant  $T$  à une feuille  $r$  d'une plus longue chaîne dans  $T$ . Soit  $x$  un sommet à distance  $\text{diam}(T) - 1$  de  $r$  sur la plus longue chaîne qui commence par  $r$ , et soit  $x'$  le sommet fils de  $x$  sur cette chaîne. Soit aussi  $y, z$  les parents de  $x$  et  $y$  respectivement dans l'arbre enraciné. Il est clair que  $x'$  est un sommet pendant et  $x$  est un sommet support. D'après la Proposition 48,  $y$  n'est pas un sommet support et  $x$  est de degré 2. Donc considérons les cas suivants:

**Cas 1.**  $d_T(y) \geq 3$ .  $T_y$  est une  $K_{1,k}^*$  ou  $k = d_T(y) - 1$ . Posons  $T' = T - T_y$ , si  $T'$  est d'ordre 2, alors  $T = K_{1,k+1}^*$  qui appartient à  $\mathcal{H}$ . Donc on suppose que  $T'$  est d'ordre  $n' \geq 3$ . D'après l'Observation 52, on a  $\gamma_{\times 2}(T) = \gamma_{\times 2}(T') + 2k$ . Maintenant on veut montrer que  $T'$  est  $\gamma_{\times 2}(T')$ -stable. Supposons le contraire, donc il existe une arête  $ab \in E(T')$  telle que  $\gamma_{\times 2}(T'_{ab}) < \gamma_{\times 2}(T')$ . Puisque tout  $\gamma_{\times 2}(T'_{ab})$ -ensemble peut être étendu en un EDD de  $T_{ab}$ , en ajoutant  $V(T_y) - \{y\}$ , on obtient  $\gamma_{\times 2}(T_{ab}) \leq \gamma_{\times 2}(T'_{ab}) + 2k < \gamma_{\times 2}(T') + 2k = \gamma_{\times 2}(T)$ , contradiction avec le fait que  $T$  est  $\gamma_{\times 2}(T)$ -stable. D'où  $T'$  est  $\gamma_{\times 2}$ -stable, et donc par induction sur  $T'$ ,  $T' \in \mathcal{H}$ . Par conséquent  $T \in \mathcal{H}$  car il est obtenu par  $T'$  en utilisant l'Opération  $\mathcal{O}_1$ .

**Cas 2.**  $d_T(y) = 2$ . Posons  $T' = T - \{x', x, y\}$ . A noter que  $T'$  a un ordre  $n' \geq 3$  car  $n \geq 6$ . D'autre part, tout  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble contient  $x, x'$  et ne contient



pas  $y$  car sinon ça contredit la Proposition 50. D'où  $z$  appartient à tout  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble, et donc  $\gamma_{\times 2}(T') \leq \gamma_{\times 2}(T) - 2$ . Pour obtenir l'égalité supposons que  $\gamma_{\times 2}(T') < \gamma_{\times 2}(T) - 2$ , et soit  $S'$  un  $\gamma_{\times 2}(T')$ -ensemble. Alors  $z \notin S'$  (sinon  $S' \cup \{x', x\}$  est un EDD de  $T$ , donc  $\gamma_{\times 2}(T) \leq |S'| + 2 < \gamma_{\times 2}(T) - 2 + 2$ , ce qui est impossible). Donc  $z \notin S'$ . D'où  $S' \cup \{x', x, y\}$  est un EDD de  $T$ , et donc  $\gamma_{\times 2}(T) \leq |S'| + 3 < \gamma_{\times 2}(T) - 2 + 3 < \gamma_{\times 2}(T) + 1$ . Il s'ensuit que  $S' \cup \{x', x, y\}$  est un  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble, contredisant la Proposition 50. Par conséquent  $\gamma_{\times 2}(T') = \gamma_{\times 2}(T) - 2$ . Maintenant on veut montrer que  $T'$  est  $\gamma_{\times 2}(T')$ -stable. Supposons le contraire et soit  $ab$  une arête de  $T'$  tel que  $\gamma_{\times 2}(T'_{ab}) < \gamma_{\times 2}(T')$ . Si  $S'$  un  $\gamma_{\times 2}(T'_{ab})$ -ensemble, Alors  $S' \cup \{x', x, y\}$  est un EDD de  $T_{ab}$ . D'où  $\gamma_{\times 2}(T_{ab}) \leq |S'| + 3 = \gamma_{\times 2}(T'_{ab}) + 3 < \gamma_{\times 2}(T') + 3$ . Et comme  $T$  est  $\gamma_{\times 2}(T)$ -stable. Alors  $\gamma_{\times 2}(T) = \gamma_{\times 2}(T_{ab}) \leq \gamma_{\times 2}(T') + 2 = \gamma_{\times 2}(T)$ . Ce qui implique que  $S' \cup \{x', x, y\}$  est un  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble mais qui contredit la Proposition 50. D'où  $T'$  est un  $\gamma_{\times 2}(T')$ -stable, et donc par induction sur  $T'$ ,  $T' \in \mathcal{H}$ . Par conséquent  $T \in \mathcal{H}$  car il est obtenu par  $T'$  en utilisant l'Opération  $\mathcal{O}_2$ . ■

Dans la partie suivante, on va étudier l'effet de l'identification de deux sommets non adjacents sur le nombre de double domination.

### IDENTIFICATION DE DEUX SOMMETS NON ADJACENTS

En utilisant une preuve similaire à celle utilisée pour la Proposition 45, on a le résultat suivant (Annexe n°1):

**Proposition 56** *Soit  $G$  un graphe connexe et  $u, v$  deux sommets non adjacents de  $G$ . Alors*

$$\gamma_{\times 2}(G) - 2 \leq \gamma_{\times 2}(G_{uv}) \leq \gamma_{\times 2}(G) + \min(d_G(u) - 1, d_G(v) - 1) - 1.$$

La borne supérieure de la Proposition 56 est atteinte pour le cycle  $C_4$ , en identifiant deux sommets non adjacents quelconques. Et la borne inférieure est atteinte pour l'exemple de la Figure 3.4.

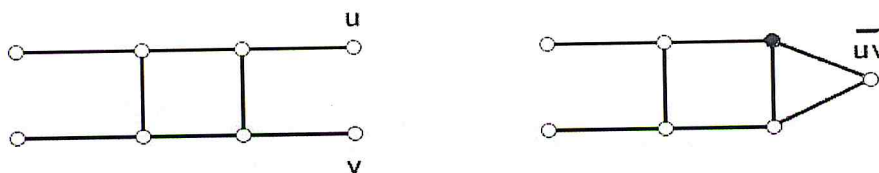


Figure 3.4: Un graphe tel que  $\gamma_{\times 2}(G_{uv}) = \gamma_{\times 2}(G) - 2$ .

### 3.4 Les graphes $id-\gamma_{\times 2}$ -stables

**Définition 57** *Un graphe  $G$  est dit  $id-\gamma_{\times 2}$ -point stable, si pour tout couple de sommets non adjacents  $u, v$  de  $G$  on a  $\gamma_{\times 2}(G_{uv}) = \gamma_{\times 2}(G)$ .*

**Remarque 58** *Trivialement, les graphes complets sont  $id-\gamma_{\times 2}$ -stables.*

**Proposition 59** *Un arbre  $T$  est  $id-\gamma_{\times 2}$ -stable si et seulement si  $T = P_2$ .*

**Preuve.** Soit  $T$  un arbre  $\text{id-}\gamma_{\times 2}$ -stable, et  $D$  un  $\gamma_{\times 2}(T)$ -ensemble.

Supposons que  $u, v$  sont deux feuilles de  $T$  à distance au moins 3, et  $u', v'$  leur supports, respectivement. Dans ce cas  $u, v, u', v'$  dans  $D$  (d'après l'Observation 44), et donc  $(D - \{u, v\}) \cup \{\overline{uv}\}$  est un EDD de  $T_{uv}$  de cardinal inférieur à  $|D|$ , contradiction avec le fait que  $T$  est  $\text{id-}\gamma_{\times 2}$ -stable. Donc toutes les feuilles de  $T$  sont à distance au plus 2. C'est à dire  $T$  est une étoile, par conséquent  $T = P_2$ .

La réciproque est immédiate. ■

L'observation suivante sera utile pour la suite.

**Observation 60** ([18]) 1) Pour toute chaîne  $P_n$  avec  $n \geq 2$ , on a:

$$\gamma_{\times 2}(P_n) = 2 \lceil n/3 \rceil + 1 \text{ si } n \equiv 0 \pmod{3} \text{ et}$$

$$\gamma_{\times 2}(P_n) = 2 \lceil n/3 \rceil \text{ sinon}$$

$$2) \text{ Pour toute cycle } C_n, \text{ avec } n \geq 3, \text{ on a: } \gamma_{\times 2}(C_n) = 2 \lceil \frac{n}{3} \rceil.$$

**Proposition 61** Un cycle  $C_n$  est  $\text{id-}\gamma_{\times 2}$ -stable si et seulement si  $C_n = C_3$  ou  $C_4$ .

**Preuve.** Soit  $C_n$  un cycle et notons ses sommets par  $v_1, \dots, v_n$ . Supposons que  $n \geq 5$ . Si  $n = 5$  ou 6, alors l'identification de  $v_2$  et  $v_5$  diminue d'une unité  $\gamma_{\times 2}(C_n)$ . Donc on suppose que  $n \geq 7$ .

Considérons le graphe après l'identification de  $v_2$  et  $v_n$ . Le sommet  $\overline{v_2 v_n}$  devient support pour  $v_1$ , et le graphe résultant  $(G_{v_2 v_n})$  est un unicycle ayant un cycle d'ordre  $n - 2$  contenant  $\overline{v_2 v_n}$  où  $\overline{v_2 v_n}$  est un support pour la feuille  $v_1$ .

Soit  $D$  le dominant double minimum de la chaîne  $v_4, \dots, v_{n-2}$ , il est facile de voir que  $\gamma_{\times 2}(G_{v_2 v_n}) = |D| + |\{\overline{v_2 v_n}, v_1\}|$ . En utilisant l'Observation 60, on peut constater que  $\gamma_{\times 2}(G_{v_2 v_n}) \neq \gamma_{\times 2}(C_n)$ . D'où  $n = 3$  ou 4. ■

**Proposition 62** Un unicycle  $G$  est  $\text{id-}\gamma_{\times 2}$ -stable si et seulement si  $G = C_3$  ou  $C_4$ .

**Preuve.** Soit  $G$  un graphe unicycle de cycle  $C$ . Si  $G = C_n$ , alors d'après la proposition 61,  $G = C_3$  ou  $C_4$ . Donc supposons que  $G \neq C_n$ , c'est à dire, il existe

un sommet de  $C$ , disons  $x$ , tel que  $\deg(x) \geq 3$ . Si  $G$  contient deux feuilles  $u, v$  à distance supérieure ou égale 2, alors  $\gamma_{x_2}(G_{uv}) < \gamma_{x_2}(G)$ . Donc  $G$  contient une seule feuille  $z$  reliée à  $x$  par une chaîne unique, dont tous les sommets intermédiaires (s'ils existent) sont de degré 2. Il est clair que la feuille  $z$  et son support sont dans tout  $\gamma_{x_2}(G)$ -ensemble  $D$ . Aussi  $D$  contient au moins deux sommets adjacents  $u, v$  du cycle  $C$  (avec la possibilité que  $u = x$ ) et dans ce cas  $\gamma_{x_2}(G_{vz}) < \gamma_{x_2}(G)$ . D'où le résultat. ■

## CONCLUSION

Nous nous sommes intéressés dans ce mémoire à l'étude de l'effet de la contraction d'une arête ou l'identification d'un couple de sommets non adjacents sur le nombre de domination double.

En premier lieu, nous avons tenté de faire le point sur ce qui a été fait dans ce domaine. Puis nous nous sommes orientés vers l'étude des graphes où le nombre de la domination double ne change pas lorsqu'on identifie une paire de sommets quelconques.

Nous avons établi des conditions nécessaires pour les graphes  $\gamma_{x_2}$ -stables dans le cas général. Ainsi qu'une caractérisation des arbres  $\gamma_{x_2}$ -stables.

Aussi nous avons étudié les graphes id- $\gamma_{x_2}$ - stables pour quelques classes particulières, exemple les arbres, les cycles et les graphes unicycles.

Comme perspectives, on peut citer les problèmes suivants:

- L'étude des graphes dont l'identification d'un couple de sommets diminue le nombre de la domination double.
- L'étude de la relation entre ces différentes classes analogiquement aux travaux de Haynes et Henning [15].
- Caractérisation des graphes extrimaux atteignant les bornes de la Proposition 45.

Annexe n°1 (Preuve de la proposition 56)

**Preuve.** a) Soit  $D$  un  $\gamma_{\times 2}(G)$ -ensemble, et  $u, v$  deux sommets non adjacents quelconque de  $G$ . Examinons les cas suivants:

- Si  $u$  et  $v \notin D$ , alors  $D$  reste un double dominant de  $G_{uv}$  et donc  $\gamma_{\times 2}(G_{uv}) \leq |D| = \gamma_{\times 2}(G)$ .

- Si  $u \in D$  et  $v \notin D$ , alors  $(D - \{u\}) \cup \{\overline{uv}\}$  est un double dominant de  $G_{uv}$ . D'où  $\gamma_{\times 2}(G_{uv}) \leq \gamma_{\times 2}(G)$ .

- Supposons maintenant que  $u, v \in D$ . Soit  $A$  l'ensemble des sommets de  $V - D$  tels que  $N(x) \cap D = \{u, v\}$ . Il est clair que  $|A| \leq \min(d(u) - 1, d(v) - 1)$ . Aussi  $(D - \{u, v\}) \cup \{\overline{uv}\} \cup A$  est un EDD de  $G_{uv}$ . D'où  $\gamma_{\times 2}(G_{uv}) \leq (\gamma_{\times 2}(G) - 2) + 1 + |A| = \gamma_{\times 2}(G) + |A| - 1$ .

b) Soit  $D$  un  $\gamma_{\times 2}(G_{uv})$ -ensemble. Examinons les cas suivants:

- $\overline{uv} \in D$ , puisque  $\overline{uv}$  a au moins un voisin dans  $D$ , il est évident que au moins l'un de  $u$  ou  $v$ , disons  $u$ , a au moins un voisin dans  $D$ . Si  $v$  ne possède pas de voisin dans  $D$ , alors soit  $v'$  un voisin de  $v$  dans  $V - D$ . Dans ce cas,  $(D - \{\overline{uv}\}) \cup \{u, v, v'\}$  est un EDD de  $G$ , d'où  $\gamma_{\times 2}(G) \leq (|D| - 1) + 3 = \gamma_{\times 2}(G_{uv}) + 2$ . Donc  $\gamma_{\times 2}(G) - 2 \leq \gamma_{\times 2}(G_{uv})$ .

- $\overline{uv} \notin D$ , l'un de  $u$  ou  $v$  a au moins un voisin dans  $D$ , disons  $u$ . Nous distinguons deux cas:

- Si  $|N(u) \cap D| = 1$  alors  $|N(v) \cap D| \geq 1$  dans ce cas  $D \cup \{u, v\}$  est un EDD de  $G$ . Donc  $\gamma_{\times 2}(G) \leq |D| + 2 = \gamma_{\times 2}(G_{uv}) + 2$ , d'où  $\gamma_{\times 2}(G) - 2 \leq \gamma_{\times 2}(G_{uv})$ .

- Si  $|N(u) \cap D| \geq 2$ , alors  $D \cup \{v\}$  ou  $D \cup \{v, v'\}$  est un EDD de  $G$ , où  $v'$  est un voisin quelconque de  $v$  dans  $V - D$ . Par conséquent  $\gamma_{\times 2}(G) \leq |D| + 2 = \gamma_{\times 2}(G_{uv}) + 2$ . D'où  $\gamma_{\times 2}(G) - 2 \leq \gamma_{\times 2}(G_{uv})$ .

■



## REFERENCES

- [1] D. Bauer, F. Harary, J. Nieminen et C.L. Suffel, Domination alteration sets in graphs. *Discrete Math.* 47 (1983) 153-161.
- [2] C. Berge, Graphs and Hypergraphs. (*North Holland, Amsterdam, 1973*).
- [3] T. Burton et D.P. Sumner, Domination dot-critical graphs. *Discrete Mathematics* 306 (2006) 11-18.
- [4] J.R. Carrington, F. Harary et T.W. Haynes, Changing and unchanging the domination number of graph. *J. Combin. Math. Combin Comput.* 9 (1991) 57-63.
- [5] M. Chellali,  $k$ -Domination stable graphs upon edge removal. *Ars Combinatoria*, accepté.
- [6] M. Chellali et T.W. Haynes, Double domination stable graphs upon edge removal. *Australasian Journal of Combinatorics* 47 (2010) 157-164.
- [7] M. Chellali, T.W. Haynes et L. Volkmann,  $k$ -Independence stable graphs upon edge removal. *Discussiones Mathematicae Graph Theory* 30 (2010) 265-274.
- [8] M. Chellali et N. Jafari Rad, On (fully) total domination dot-stable graphs. *The Bulletin of the ICA*, à paraître.
- [9] M. Chellali et N. Jafari Rad, On  $k$ -Independence critical graphs. *Australasian Journal of Combinatorics* 53 (2012) 289-298.
- [10] M. Chellali et N. Jafari Rad, Roman domination stable graphs upon edge-addition. *Utilitas Mathematicae*, accepté.

- [11] M. Chellali, F. Maffray et K. Tablennehas, Connected domination dot-critical graphs. *Contributions to Discrete Mathematics* 5 (2010) 11-25.
- [12] J.F. Fink et M.S. Jacobson,  $n$ -domination in graphs. *Graph Theory with Applications to Algorithms and Computers*. John Wiley and sons, New york (1985) 283-300.
- [13] J.F. Fink et M.S. Jacobson, On  $n$ -domination,  $n$ -dependence and forbidden subgraphs, *Graph Theory Applic. Algorithms and Comp. Sci.* (Kalamazoo, Mich.,1984), 301–311, Wiley-Intersci. Publ., Wiley, New York, 1985.
- [14] A. Hansberg, N. Jafari Rad, et L. Volkmann, Vertex and edge critical Roman domination in graphs. *Utilitas Math.*, à paraître.
- [15] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi et P.J. Slater, *Fundamentals of Domination in graphs*, Marcel Dekker, New York, 1998.
- [16] N. Jafari Rad, Critical concept for 2-rainbow domination in graphs. *Australasian Journal of Combinatorics* 51 (2011) 49–60.
- [17] N. Jafari Rad et L. Volkmann, Changing and unchanging the Roman domination number of a graph. *Utilitas Math.*, à paraître.
- [18] S. Khelifi et M. Chellali, Double domination critical and stable graphs upon vertex removal. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, à paraître.
- [19] S. Khelifi, M. Chellali, M. Blidia et F. Maffray, Double domination edge removal critical graphs. *Australasian Journal of Combinatorics* 48 (2010) 285–299.
- [20] S. Rickett et T.W. Haynes, Total domination dot stable graphs. *Discrete Applied Mathematics* 159 (2010) 1053-1057.
- [21] E. Sampathkumar et P.S. Neeralagi, Domination and neighbourhood critical, fixed, free and totally free points. *Sankhya (Special Volume)*, 54(1992) 403-407.

- [22] D.P. Sumner, Critical concepts in domination. *Discrete Math.* 86 (1990) 33-46.
- [23] D.P. Sumner et P. Blich, Domination critical graphs. *J. Combin. Theory Ser. B* 34 (1983) 65-76.
- [24] H.B. Walikar et B.D. Acharya, Domination critical graphs. *Nat. Acad. Lett.* 2 (1979) 70-72.