

UNIVERSITE DE BLIDA 1

Faculté de Technologie

Département de Mécanique

THESE DE DOCTORAT

Spécialité : Génie Mécanique

TRANSITION LAMINAIRE TURBULENT POUR LES ECOULEMENTS
OUVERTS DE FLUIDES NON-NEWTONIEN

Présenté Par

BENTRAD Hocine

Devant les Membres du jury composé de :

Y. Benkheda	Professeur,	U. de Blida 1	Président
B. Boumedene	Professeur,	U. de Blida1	Examineur
A. Mataoui	Professeur,	USTHB Alger	Examineur
A. Hadjsadok	Maître de Conférences (A),	U. de Blida 1	Examineur
N. Ait Messaoudene	Professeur,	U. de Hail (Arabie Saoudite)	Rapporteur
C. Nouar	Directeur de recherche CNRS, LEMTA. Nancy (France)		Co-Directeur

Blida, 2018

DEDICACE

C'est avec un énorme plaisir et une immense joie que je dédie ce travail :

A la mémoire de mon défunt père,

A ma chère mère, qui a toujours été à mes côtés pour me soutenir, m'encourager toute
au long de mes études.

A ma très chère femme Meriem et mes enfants Ezehar, Nour El-houda et Nesserine.

A ma Sœur, et ces enfants Abir, Afaf et Habib

A toute ma grande famille et surtout a Brahim mon cousin

A tous mes enseignants amis et confrères

A tous mes amis et collègues.

A toute personne qui m'a encouragé ou aidé de loin ou de près.

RESUME

La stabilité linéaire d'un écoulement de Poiseuille pour un fluide à seuil du type **Herschel-Bulkley** dans une conduite cylindrique est étudiée moyennant des approches modale et non-modale.

De manière classique, l'approche modale utilise une décomposition de la perturbation en modes normaux. Ceci conduit à un problème aux valeurs propres résolu numériquement par une méthode de collocation basée sur les polynômes de Chebyshev. Dans la gamme des paramètres rhéologiques considérée et pour des nombres de Reynolds allant jusqu'à $Re = 5 \cdot 10^4$, les perturbations sont atténuées exponentiellement. Il a donc été démontré que l'écoulement de Poiseuille d'un fluide à seuil est linéairement stable.

La seconde partie est consacrée à l'approche non modale, en d'autres termes à la réceptivité de l'écoulement vis-à-vis des perturbations extérieures. Pour cela, on a étudié l'effet du comportement rhéologique du fluide sur les pseudos spectre et la structure de la perturbation optimale, c'est-à-dire celle qui permet la plus grande amplification de l'énergie cinétique.

Pour une très faible valeur du nombre de **Herschel-Bulkley** ($Hb \ll 1$), la perturbation optimale se constitue pratiquement de tourbillons longitudinaux contrarotatifs, et l'amplification de l'énergie cinétique est assurée par le mécanisme **Lift-Up**. En revanche, pour des valeurs suffisamment grandes de **Hb**, la perturbation optimale est axisymétrique et l'accroissement de l'énergie cinétique est fourni par le mécanisme **Orr**. Pour les valeurs intermédiaires de **Hb**, la perturbation optimale est oblique. L'amplification d'une telle perturbation est due à une synergie entre les mécanismes **Orr** et **Lift Up**.

Dans la dernière partie de l'étude théorique, la valeur maximale du nombre de Reynolds critique, Re_{CE} , en dessous duquel l'énergie de perturbation diminue de façon monotone avec le temps, est calculée pour une large plage de **Hb**. Le comportement asymptotique du nombre de Reynolds critique Re_{CE} pour $Hb \ll 1$ et $Hb \gg 1$ sont établis. L'influence des termes issus de la perturbation de la viscosité est mise en évidence tout au long de cette étude.

Un travail expérimental est entrepris en continuité de ceux d'Esmael sur une conduite plus longue afin de notifier la présence de la dissymétrie et de son évolution le long de la conduite. Des mesures LDA et PIV ont été réalisées et confirme l'existence de la dissymétrie une déviation importante a été notifier a 263D cependant cette dissymétrie n'augmente pas indéfiniment. D'autre part, la PIV a révélé que la dissymétrie effectue des oscillations et tend de rester le plus de temps dans une zone prélevée cette même constatations est faite par Robert Poole récemment. A la fin, une analyse issu du traitement de signal de fluctuation de la pression a été faite et montre le comportement dans la région laminaire, non linéaire asymétrique et turbulente ainsi que la densité spectrale de la fréquence.

ABSTRACT

The linear stability of a Poiseuille flow for a threshold fluid of the Herschel-Bulkley type in a cylindrical pipe is studied using modal and non-modal approaches.

Conventionally, the modal approach uses a decomposition of the perturbation in normal modes. This leads to a numerically solved eigenvalue problem by a collocation method based on Chebyshev polynomials. In the range of rheological parameters considered and for Reynolds numbers up to $Re = 5 \cdot 10^4$ the perturbations are attenuated exponentially. It has therefore been conjectured that the Poiseuille flow of a threshold fluid is linearly stable.

The second part is devoted to the non-modal approach, in other words to the receptivity of the flow with respect to external perturbations. For this purpose, we studied the effect of the rheological behavior of the fluid on the pseudospectrum and the structure of the optimal perturbation that is to say that which allows the greatest amplification of the kinetic energy.

For a very small value of the Herschel-Bulkley number ($Hb \ll 1$), the optimal perturbation consists practically of contra-rotating longitudinal vortices, and the kinetic energy is amplified by the Lift-Up mechanism. On the other hand, for sufficiently large values of Hb , the optimum perturbation is axisymmetric and the increase in kinetic energy is provided by the Orr mechanism. For the intermediate values of Hb , the optimal perturbation is oblique. The amplification of such a perturbation is due to a synergy between the Orr and Lift Up mechanisms.

In the last part of the study, the maximum value of the critical Reynolds number, below which the perturbation energy monotonically decreases with time, is calculated for a wide range of Hb . The asymptotic behavior of the critical Reynolds number for $Hb \ll 1$ and $Hb \gg 1$ is established. The influence of the terms resulting from the perturbation of the viscosity is highlighted throughout this study.

An experimental work is undertaken in continuity with those of Esmael on a longer Pipe in order to notify the presence of dissymmetry and its evolution along the axial direction. LDA and PIV measurements have been made and confirm the existence of asymmetric flow. A significant deviation has been recorded at 263D position but this dissymmetry does not increase indefinitely.

On the other hand, the PIV revealed that the asymmetry performs an oscillations and lead to stay a long time in favorite zone same observations is reported by Robert Poole recently. At the end, an analysis of the pressure fluctuation signal processing was made and shows the behavior in the laminar, non-linear asymmetric and turbulent region as well as the spectral density of the frequency.

REMERCIEMENTS

Tout d'abord je remercie infiniment DIEU tout puissant pour l'aide qu'il m'a apportée pour la réalisation de ce modeste travail.

Je tiens à remercier mon co-directeur de thèse et ami monsieur **NOUAR Chérif**, directeur de recherche CNRS au **LEMTA** université de Lorraine Nancy (France), de m'avoir soutenu minutieusement avec patience durant l'accomplissement de ce travail. Je lui témoigne toute ma gratitude pour ces conseils, son raisonnement scientifique, sa générosité et ses qualités humaines.

J'exprimé aussi tous mes profonds remerciements à mon directeur de thèse et ami monsieur **Nouredine AIT-MESSAOUDENE**, Professeur à l'université **Hail** (Arabie Saoudite) de m'avoir orienté et soutenu pour l'encadrement scientifique de cette thèse.

Je tiens aussi à remercier mon professeur et frère monsieur **Mustapha TEMMAR** chef du département de génie mécanique université de Blida 1 pour son soutien morale, matériel et ces encouragements qui ont permis l'aboutissement et la finalisation de cette thèse.

Je remercie mes confrères chercheurs du laboratoire LEMTA pour leur accueil et facilités en particulier monsieur **René DEVIENNE**, Professeur émérite à l'université de Lorraine.

Ma profonde reconnaissance va à monsieur **Younes BENKHEDA**, Professeur au département de Mécanique de l'Université de Blida 1, qui m'a fait l'honneur d'accepter la présidence du jury.

Mes remerciements s'adressent aussi à Madame **Amina MATAOUI** professeur à l'USTHB pour sa confiance et pour avoir accepté d'examiner mon travail.

Mes sincères remerciements s'adressent aussi à Monsieur **Abdelkader Hadjsadouk** Maître de Conférences et au professeur **Boussad BOUMEDANE** de l'Université de Blida 1 pour avoir accepté de rapporter sur mon manuscrit de thèse.

Mes remerciements vont enfin à toute personne ayant contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

TABLE DES MATIERES

RESUME	2
REMERCIEMENTS	4
TABLE DES MATIERES	5
Liste des illustrations, graphiques et tableaux	6
Introduction	14
1. Recherche Bibliographique et Etat de l'Art	16
1.1. Introduction	16
1.2. Expérience de Reynolds	16
1.3. Brève revue bibliographique sur la transition vers la turbulence En conduite cylindrique pour un fluide Newtonien.	17
1.4. Structure de l'écoulement lors de la transition vers la turbulence	18
1.5. La transition vers la turbulence Fluide Non-Newtonien	22
2. FORMULATION MATHEMATIQUE	28
2.1. Introduction	28
2.2. Equation Gouvernant le Problème.	22
2.3. Conditions Aux Limites	31
2.4. Ecoulement De Base	32
2.4.1. Mise en forme adimensionnelle	33
2.4.2. Analyse de l'écoulement de Base	36
2.5. Equations Aux Perturbations Linéarisées	39
2.5.1. Expressions des Contraintes	39
3. ANALYSE LINEAIRE DE STABILITE (Approche Modale)	42
3.1. Introduction	42
3.2. Equation aux perturbations linéarisées	42
3.2.1. Conditions aux limites	43
3.2.2. Formulation (u, v)	44
3.2.3. Formulation (u, w)	45
3.3. Comportement au temps long de la perturbation	47
3.4. Perturbation Unidimensionnelle	49
3.5. Cas de perturbations axisymétriques	51
3.6. Cas d'une perturbation homogène dans la direction axiale	58
3.7. Cas d'une perturbation tridimensionnelle (oblique)	59
3.8. Comparaison avec le cas de l'écoulement de Poiseuille annulaire avec déplacement axial du cylindre intérieur	61
3.9. Conclusion	62
4. CROISSANCE TRANSITOIRE ET PERTURBATION OPTIMALE	63
4.1. Introduction	63
	63

4.2.	Mise en évidence de la non normalité de l'opérateur linéaire	65
4.2.1.	Perturbation axisymétrique	66
4.2.2.	Perturbation homogène dans la direction axiale	67
4.2.3.	Perturbation oblique	68
4.2.4.	Norme de la Perturbation Minimale	69
4.3.	Croissance Transitoire et Perturbation Optimale	71
4.3.1.	Accroissement de l'énergie de Perturbation	73
4.3.2.	Caractéristique de la perturbation optimale et de la croissance transitoire.	83
4.3.3.	Interprétation physique	84
4.3.4.	Lois de comportement et facteur d'échelle Gopt et Topt	86
4.4.	Conditions de non augmentation de L'énergie de la perturbation	88
4.4.1.	Influence du rayon de la zone bouchon	90
4.3.2.	Stratification de la viscosité sans termes d'anisotropie	91
4.3.3.	Stratification de la viscosité avec des termes d'anisotropie	94
5.	DISPOSITIF EXPERIMENTAL ET MESURES	94
5.1.	Introduction	94
5.2.	Dispositif Expérimental	94
5.2.1.	Présentation et descriptive	96
5.2.2.	Longueur D'établissement	97
5.3.	Techniques de Mesures	97
5.3.1.	Mesure de Pertes de Charge	98
5.3.2.	Mesure de Débit	98
5.3.3.	Mesure de température	98
5.3.4.	Mesure des vitesses	102
5.3.5.	Vélocimétrie par Image de Particule PIV	104
5.4.	Fluide de travaille Utilisé	105
5.4.1.	Préparation de fluide	107
5.4.2.	Propriété Physicochimique	107
5.5.	Rhéologie du fluide	108
5.5.1.	Viscosité effective	111
5.5.2.	Analyse rhéologique	111
6.	INTERPRETATION DES RESULTATS EXPERIMENTEAUX	111
6.1.	Mesure du champ de Vitesse(LDA)	111
6.2.	Mesure de Pertes de charges	122
6.3.	Analyse des signaux	125
6.3.1.	Signal Débit et Pression	125
6.3.2.	Valeur Efficace « RMS »	131
6.3.3.	Mesure PIV	132
6.3.4.	Densité Spectrale de la fluctuation de pression	134
	CONCLUSION	137
	APPENDICES	139
	REFERENCES	151

LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX

Figure 1.1	Représentations des Rouleaux Tourbillonnaires	3
Figure 1.2	Mécanisme lift-up	4
Figure 1.3	Profil de vitesse axial mise en evidence de la déviation	5
Figure 1.4	Simulation Numérique écoulement Non newtonien transition laminaire turbulent	6
Figure 2.1	Représentation schématique de l'écoulement	10
Figure 2.2	Représentation de l'écoulement de Hagen_poiseuille dans une Conduite cylindrique	11
Figure 2.3	Profile de vitesse écoulement de base pour $r_0 = 0.01$ et différente valeurs de $n = 0.3$ ($Hb = 0.0157$), $n = 0.5$ ($Hb = 0.0175$) et $n = 1$ ($Hb = 0.0202$)	12
Figure 2.4	Profile de vitesse écoulement de base pour $r_0 = 0.1$ et différente valeurs de $n = 0.3$ ($Hb = 0.0157$), $n = 0.5$ ($Hb = 0.0175$) et $n = 1$ ($Hb = 0.0202$)	14
Figure 2.5	Profile de vitesse écoulement de base pour $r_0 = 0.5$ et différente valeurs de $n = 0.3$ ($Hb = 0.0157$), $n = 0.5$ ($Hb = 0.0175$) et $n = 1$ ($Hb = 0.0202$)	16
Figure 2.6	Profile de vitesse écoulement de base pour $r_0 = 0.8$ et différente valeurs de $n = 0.3$ ($Hb = 0.0157$), $n = 0.5$ ($Hb = 0.0175$) et $n = 1$ ($Hb = 0.0202$)	16
6Figure 2.7	Profile de viscosité effective pour différente valeurs de zone bouchon r_0 $n = 0.5$ ($Hb = 0.0157$) $R_e = 3000$	17
Figure 2.8	Profile de viscosité effective pour différente valeurs de $n = 0.5$ et de rayon $r_0 = 0.1$ avec $R_e = 3000$	18
Figure 3.1	Spectre des valeurs propre Ecoulement d'un fluide Herschel-Bulkley dans une conduite $\tilde{R}_e = 5000$, $n = 0.5$, $r_0 = 0.5$, $\tilde{\alpha} = 0$, $m = 0$	35
Figure 3.2	Taux d'accroissement maximal $ \tilde{C}_{imax} $ en fonction de \tilde{R}_e pour différentes valeurs d'indice (1) $n = 1$ et (2) $n = 0.3$	35
Figure 3.3	Spectre des valeurs propres différentes valeurs d'indice (1) $n = 1$ et (2) $n = 0.3$	36
Figure 3.4	Spectre des valeurs propres effet de la géométrie pour	36

	différentes valeurs d'indice (1) $n = 1$ et (2) $n = 0.3$	
Figure 3.5	Spectre des valeurs propre terme Hb annulé pour différentes valeurs d'indice (1) $n = 1$ et (2) $n = 0.3$	37
Figure 3.6	Spectre des valeurs propres effet de la rhéologie pour différentes valeurs d'indice (1) $n = 1$ et (2) $n = 0.3$	37
Figure.3.7	Taux d'accroissement maximal $ \tilde{C}_{imax} $ en fonction de \tilde{R}_e pour différentes valeurs d'indice (1) $n = 1$ et (2) $n = 0.3$	38
Figure 3.8	Représentation de C_i mode squire de \tilde{R}_e pour valeurs d'indice (1) $n = 1$ et (2) $n = 0.3$	38
Figure 3.9	Représentation de C_r mode squire de \tilde{R}_e pour valeurs d'indice (1) $n = 1$ et (2) $n = 0.3$	39
Figure 3.10	Spectre d'une perturbation tridimensionnelle	39
Figure 3.11	Représentation de la fonction propre Mode interface	40
Figure 3.12	Représentation de la fonction propre Mode paroi	41
Figure 3.13	Représentation de la fonction propre Mode central	42
Figure 4.1	Portrait spectral de l'opérateur modifié Orr-Sommerfeld à $Re = 5000$, $\alpha = 1$, pour un fluide Herschel-Bulkley : influence de la zone bouchon. Les lignes continues sont les limites de la ϵ -pseudospectre et la ligne pointillée est image numérique.	45
Figure 4.2	Portrait spectral de l'opérateur modifié Orr-Sommerfeld à $Re = 5000$, $\alpha = 1$, pour un fluide Herschel-Bulkley : influence de la zone bouchon. Les lignes continues sont les limites de la ϵ -pseudospectre et la ligne pointillée est l'image numérique.	46
Figure 4.3	Portrait spectral de l'opérateur modifié Orr-Sommerfeld à $Re = 5000$, $\alpha = 1$, pour un fluide Herschel-Bulkley : influence de la zone bouchon. Les lignes continues sont les limites de la ϵ -pseudospectre et la ligne pointillée est image numérique.	47
Figure 4.4	Portrait spectral de l'opérateur modifié Orr-Sommerfeld à $Re = 5000$, $\alpha = 1$, pour un fluide Herschel-Bulkley : influence de la zone bouchon. Les lignes continues sont les limites de la ϵ -pseudospectre et la ligne pointillée est la	47

plage numérique.

- | | | |
|-------------|---|----|
| | | 48 |
| Figure 4.5 | <p>image numérique (ligne pointillée) et pseudospectra (ligne continue) à $-q = 2,2 \times 10$, $Re = 5000$, $n = 0,5$, $\alpha = 1$ et $m = 1$. (1) $r = 0,01$, $Hb = 0,017$, (2) $r = 0,8$, $Hb = 6,93$.</p> <p>longitudinale N_L sur la conception de la tuyère 3D de forme carrée pour $T_0=2000 K$ et $N_T=28$</p> | |
| Figure 4.6 | <p>Norme de la perturbation déstabilisante minimale en fonction du nombre modifié de Reynolds pour deux valeurs de l'indice d'affinage ($n = 0,1$ et $0,3$ et deux valeurs de r: (a) $r = 0,01$</p> | 49 |
| Figure 4.7 | <p>Norme de la perturbation déstabilisante minimale en fonction du nombre modifié de Reynolds pour deux valeurs de l'indice d'affinage ($n = 0,1$ et $0,3$ et deux valeurs de r: (b) $r = 0,8$</p> | 49 |
| Figure 4.8 | <p>Amplification de l'énergie cinétique à $Re = 3000$, $n = 1$ et différentes valeurs du rayon de la prise r: $r = 0,01$ ($Hb = 0,02$), $r = 0,1$ ($Hb = 0,22$) et $r = 0,2$ ($Hb = 0,5$). (a) $\alpha = 0$, $m = 1$. La courbe newtonienne est donnée par Schmid et Henningson [21]</p> | 50 |
| Figure 4.9 | <p>Amplification de l'énergie cinétique à $Re = 3000$, $n = 1$ et différentes valeurs du rayon de la prise r: $r = 0,01$ ($Hb = 0,02$), $r = 0,1$ ($Hb = 0,22$) et $r = 0,2$ ($Hb = 0,5$). (b) $\alpha = 1$, $m = 1$. The Newtonian curve is given by Meseguer and Trefethen [24].</p> | 50 |
| Figure 4.10 | <p>L'amplification de l'énergie cinétique à $Re = 3000$, $n = 1$ et les différentes valeurs du rayon de prise $r = 0,01$ ($Hb = 0,02$), $r = 0,1$ ($Hb = 0,22$) et $r = 0,2$ ($Hb = 0,5$). (a) $\sim \alpha = 0$, $m = 1$. La courbe newtonienne est donnée par Schmid et Henningson [31].</p> | 51 |
| Figure 4.11 | <p>L'amplification de l'énergie cinétique à $Re = 3000$, $n = 1$ et les différentes valeurs du rayon de prise $r = 0,01$ ($Hb = 0,02$), $r = 0,1$ ($Hb = 0,22$) et $r = 0,2$ ($Hb = 0,5$). (B) $\sim \alpha = 1$, $m = 1$. La courbe newtonienne est donnée par Meseguer et Trefethen [33].</p> | 53 |

Figure 4.12	Le nombre d'onde axial optimale en fonction du rayon de la zone de prise à $Re = 5000$ et pour trois valeurs optantes de l'indice d'éclaircie par cisaillement: (1) $n = 1$, (2) $n = 0,7$, (3) $n = 0,5$ et $n = 0,3$	54
Figure 4.13	Le nombre d'onde azimutal optimal t_m en fonction du rayon de la zone de prise à $Re = 5000$ et pour trois valeurs optantes de l'indice d'éclaircie par cisaillement: (1) $n = 1$, (2) $n = 0,7$, (3) $n = 0,5$ et $n = 0,3$.	55
Figure 4.14	Perturbation optimale et stries optimales à $Re = 5000$, $n = 0,5$, $r = 0,01 \sim 0$ ($H_b = 0,0175$): $\alpha = 0$ et $m = 2$. (a) Les vecteurs de vitesse $u_e + v_e$ de la perturbation	55
Figure 4.15	Perturbation optimale et stries optimales à $Re = 5000$, $n = 0,5$, $r = 0,01 \sim 0$ ($H_b = 0,0175$): $\alpha = 0$ et $m = 2$. (a) Les vecteurs de vitesse $u_e + v_e$	56
Figure 4.16	Perturbation optimale et stries optimales à $Re = 5000$, $n = 0,5$, $r = 0,01 \sim 0$ ($H_b = 0,0175$): $\alpha = 0$ et $m = 2$. (a) Les vecteurs de vitesse $u_e + v_e$	56
Figure 4.17	Perturbation optimale et stries optimales à $Re = 5000$, $n = 0,5$, $r = 0,01 \sim 0$ ($H_b = 0,0175$): $\alpha = 0$ et $m = 2$. (a) Les vecteurs de vitesse $u_e + v_e$	57
Figure 4.18	Perturbation optimale et stries optimales à $Re = 5000$, $n = 0,5$,	58
Figure 4.19	Représentation de la Perturbation optimale et stries optimales à $Re = 5000$, $n = 0,5$	59
Figure 4.20	Contribution des différents composants de stress de Reynolds à l'amplification efficace pour une perturbation oblique optimale à $Re = 5000$ (a) $n = 0.5$, $r = 0.5$, $\alpha = 0.28$, $m = 7$;	61
Figure 4.21	Contribution des différents composants de stress de Reynolds à l'amplification efficace pour une perturbation oblique optimale à $Re = 5000$ (a) $n = 0.5$, $r = 0.5$, $\alpha = 0.28$, $m = 7$;	61

Figure 4.22	Contribution des différents composants de stress de Reynolds à l'amplification efficace pour une perturbation oblique optimale à $Re = 5000$. (c) $n = 0.5$, $r = 0.9$, $\tilde{\alpha} = 1.715$,	62
Figure 4.23	Contribution des différents composants de stress de Reynolds à l'amplification efficace pour une perturbation oblique optimale à $Re = 5000$. (c) $n = 0.5$, $r = 0.9$, $\tilde{\alpha} = 1.715$,	62
Figure 4.24	Contribution des différents composants de stress de Reynolds à l'amplification efficace pour une perturbation oblique optimale à $Re = 5000$. (d) Case where $\frac{\partial}{\partial t} b^* - r z d d$ derivatives are canceled, $n = 0.5$, $r = 0.9$, $\tilde{\alpha} = 0.6$, $m = 44$.	64
Figure 4.25	Évolution temporelle \tilde{u} de la perturbation optimale. $N = 0,5$, $r = 0,96$ ($H_b = 41,47$), $Re = 5000$, avec $\tilde{\alpha} = 0,94$, $m t = 16,2$. (A) $t = 0$; (B) $t = t/2$; (C) $t = t/4$; (D) $t = (3/2)$	65
Figure 4.26	Évolution temporelle \tilde{u} de la perturbation optimale. $N = 0,5$, $r = 0,96$ ($H_b = 41,47$), $Re = 5000$, avec $\tilde{\alpha} = 0,94$, $m t = 16,2$. (A) $t = 0$; (B) $t = t/2$ (C) $t = t/4$; (D) $t = (3/2)$	65
Figure 4.27	Évolution temporelle \tilde{u} de la perturbation optimale. $N = 0,5$, $r = 0,96$ ($H_b = 41,47$), $Re = 5000$, avec $\tilde{\alpha} = 0,94$, $m t = 16,2$. (A) $t = 0$; (B) $t = \tilde{t} / 2$; (C) $t = \tilde{t}$; (D) $t = (3/2)$	66
Figure 4.28	Évolution temporelle \tilde{u} de la perturbation optimale. $N = 0,5$, $r = 0,96$ ($H_b = 41,47$), $Re = 5000$, avec $\tilde{\alpha} = 0,94$, $m t = 16,2$. (A) $t = 0$; (B) $t = \tilde{t} / 2$; (C) $t = \tilde{t}$; (D) $t = (3/2)$.	67
Figure 4.29	Evolution de G_{opt} en fonction de r_0	67
Figure 4.30	Evolution de T_{opt} en fonction de r_0	68
Figure 4.31	Influence du rayon de la zone bouchon	68
Figure 4.32	Influence du rayon de la zone bouchon H_b anulé	69
Figure 4.33	Influence du rayon de la zone bouchon	
Figure 4.34	Influence du rayon de la zone bouchon	70

Figure 4.35	stratification de la viscosité sans termes d'anisotropie	71
Figure 4.36	stratification de la viscosité sans termes d'anisotropie	71
Figure 4.37	stratification de la viscosité avec termes d'anisotropie	72
Figure 4.38	stratification de la viscosité avec termes d'anisotropie	73
Figure 4.39	Perturbation optimale	73
Figure 4.40	Perturbation axisymétrique	74
Figure 4.41	Stabilité conditionnelle	74
Figure 5.1	Montage expérimental	75
Figure 5.2	longueur d'établissement en fonction de Rep [ref]	76
Figure 5.3	Positions azimutales des différents diamètres suivant lesquels les profils de vitesse axiale ont été mesurés	78
Figure 5.4	Mesure de vitesse par vélocimétrie laser Doppler	81
Figure 5.5	Mesure Par Particule Image Vélocimétrie PIV	84
Figure 5.6	Eclairage du fluide par une source Laser et capture de clichés	85
Figure 5.7	Séquençement de doublets d'images au cours du temps	85
Figure 5.8	Forme développée de l'acide acrylique	86
Figure 5.9	Dispersion des micro-gels selon la concentration en masse de Carbopol 940	87
Figure 5.10	Géométrie du cône de mesure rhéomètre	88
Figure 5.11	Comportement rhéologique de la solution de Carbopol à 0.2% décrit par le modèle de Herschel-Bulkley avec les paramètres rhéologique ($\tau = 28 \text{ n . 1 Pa}$, $K = 6 . 37 \text{ Pa.s}$ et $n = 0 . 45$).	89
Figure 5.12	Comportement rhéologique de la solution de Carbopol à 0.2% décrit par le modèle de Herschel-Bulkley avec les paramètres rhéologique ($\tau = 28 \text{ n . 1 Pa}$, $K = 6 . 37 \text{ Pa.s}$ et $n = 0 . 45$).	90
Figure 5.13	Médication de la viscosité et du caractère rhéofluidifiant de la solution de Carbopol 940 pendant une campagne d'essais expérimentaux sur la transition vers la turbulence	91

Tableau 3.1	Valeur propre sur les 15 première valeurs pour différentes valeurs de points N avec $r_0 = 0.5, n = 0.5, \tilde{R}_e = 5000$ et $\tilde{H}b = 1.73$	33
Tableau 4.1	Facteurs d'échelle	65
Tableau 5.1	Caractéristiques optiques et géométriques du système de vélocimétrie laser Doppler utilisé.	88

INTRODUCTION

Dans les processus industriels en rapport avec le traitement des fluides il est important même nécessaire d'assurer une bonne maîtrise de la compréhension de la dynamique afin de pouvoir dimensionner les équipements industriels correctement.

Depuis les travaux effectués par Osborne Reynolds il a été montré qu'il existe fondamentalement deux régimes d'écoulements dominants, le régime laminaire et le régime turbulent. Le régime laminaire est un régime dont le nombre caractéristique de Reynolds est inférieur à la valeur critique ou l'écoulement est ordonné dans lequel les différentes couches glissent les unes sur les autres sans mélange apparent avec un champ de vitesse organisé. Alors que un régime turbulent est un régime caractérisé par un comportement chaotique fluctuant du champ de vitesse pour un Reynolds au de la de la valeur critique.

Dans la zone intermédiaire dite de transition, l'écoulement souvent présente un comportement ou des structures hydrodynamiques apparaissent et se désorganisent progressivement et même des fois brutalement lorsque le nombre de Reynolds augmente ou d'autres structures prennent place. Ces structures sont les résultats d'instabilité qui surgissent dans l'écoulement et sont fortement dépendantes de la dynamique et de la géométrie du système mais aussi des propriétés intrinsèques des fluides. Ces différentes instabilités caractérisent le mécanisme de la transition à la turbulence et constituent un phénomène complexe dépendant de plusieurs paramètres.

La transition à la turbulence des fluides complexes est une préoccupation majeure pour l'industrie. En effet, ces fluides sont de nature Non-Newtonien d'une grande variété de comportement en écoulement en fonction des sollicitations ou contraintes subies. En général, un grand nombre de fluides dans l'industrie pharmaceutique, l'agroalimentaire, cosmétique et pétroliers sont des mélanges à propriétés rhéologiques complexes ou les écoulements turbulents sont favorisés pour un maximum d'échange de chaleur ou bien laminaire afin de garantir une bonne qualité produit.

Pour un fluide non newtonien la viscosité est une fonction non linéaire du taux de cisaillement. La majorité des fluides non newtoniens sous des conditions de sollicitations ou de contraintes ont deux propriétés communes, la viscoélasticité et la réohfluidification. Les fluides viscoélastiques sont des fluides, qui en plus du comportement visqueux présentent un aspect élastique généralement caractéristique d'un matériau solide.

Les fluides non newtoniens purement visqueux regroupent les fluides réohfluidifiants ou leur viscosité diminue avec le taux de cisaillement. D'autres, par contre leur viscosité augmente il s'agit de fluides épaississants tandis que certains fluides newtoniens exigent une contrainte seuil avant de poursuivre un comportement réohfluidifiant.

De nombreux travaux ont été dédiés à l'écoulement newtonien dans la conduite cylindrique où le profil de vitesse est parabolique axisymétrique au de la de la zone d'entrée $Re \geq 2300$. Très peu d'informations sont présentées dans la littérature sur ce type de fluide.

Dans les études existantes sur la transition d'un écoulement non newtonien dans une conduite cylindrique à révéler un effet inhabituel dans le cas newtonien mais aussi sans explication. Il s'agit, de l'existence d'une distribution de champ de vitesse ou le profil dans la direction axiale présente une dissymétrie durant la phase de transition.

Ce phénomène a été notifié en premier par une équipe de chercheur en Angleterre, puis en France, en Australie et au Canada. Il a été présent et observé perpétuellement. Plusieurs hypothèses sont stipulées l'effet Coriolis, la température, ect mais en réalité nous pensons qu'il est due à un mécanisme inconnue qui met en contribution la nature du fluide (l'effet de la viscosité) et le défaut géométrique de la conduite.

La dissymétrie enregistré par les labos français et leurs travaux sur le fluide réhofluidifiant a contrainte seuil. Nous motive à reprendre l'expérience et de réexaminer ce phénomène de près et essayer d'étudier son comportement sur une conduite plus longue et d'interpoler avec une approche énergétique et de l'étude de stabilité de l'écoulement en phase de transition.

Dans ce contexte la nous avons procéder a des mesures de vitesse par LDA et observé l'écoulement par PIV (2D). Cette dernière nous a révélé que le profil de vitesse dans la direction axial se présente non seulement dévier par rapport a son axe mais il oscille au cour du temps et passe plus de temps dans une zone bien d'déterminer dans la direction azimutale.

La structure du document est la suivante. Les équations régissantes et les détails de l'écoulement de base sont présentés dans le chapitre 1. Le problème de stabilité linéaire est formulé dans le chapitre 2. Les résultats de l'approche modale et le comportement du mode le moins stable sont abordés dans le chapitre 3. La non-normalité des opérateurs linéaires se caractérise par la ε -pseudospectre et l'image numérique en chapitre 4. Les résultats de la croissance de l'énergie, les structures de la perturbation optimale et la mise à l'échelle de la croissance de l'énergie sont également fournis dans la même chapitre ainsi que l'analyse de la stabilité énergétique. Le chapitre 5 englobera la partie expérimentale de mesure LDA et PIV. En fin des résumés des points essentiels sont présenté en conclusion.

Chapitre I

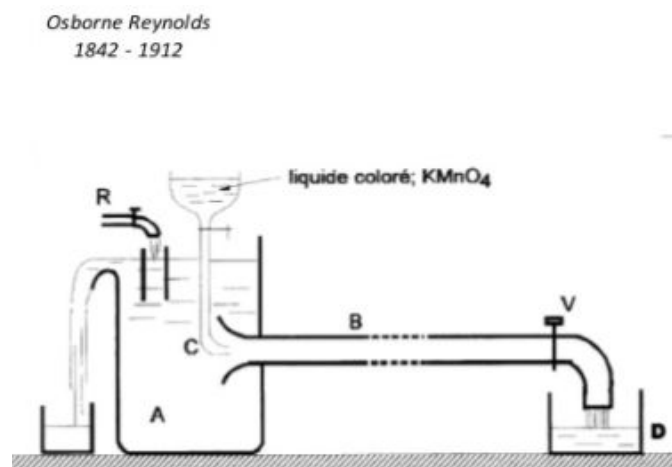
Transition vers la Turbulence en Canalisation Cylindrique : Revue Bibliographique

1/ Introduction

Le présent chapitre est consacré à une étude bibliographique sur la transition vers la turbulence en conduite cylindrique. Il est structuré en deux parties. La première est relative au cas Newtonien. On rappelle les résultats expérimentaux et théoriques qui nous semblent les plus fondamentaux. La deuxième partie concerne le cas non-Newtonien et plus spécifiquement les fluides réhofluidifiant purement visqueux. Les résultats expérimentaux obtenus au laboratoire qui sont décrits dans cette partie, nous conduisent à définir la problématique scientifique de l'étude que nous avons développée dans ce mémoire.

2/ Expérience de Reynolds

La transition vers la turbulence dans une conduite cylindrique reste un défi scientifique important malgré les nombreux travaux effectués depuis Reynolds en 1883. Reynolds a visualisé l'écoulement d'un fluide Newtonien dans une conduite cylindrique en injectant un colorant à l'entrée du tube.



Figure(1-1) : Schéma du dispositif expérimental utilisé par Reynolds pour étudier l'écoulement d'un fluide dans une canalisation cylindrique.

En augmentant progressivement le débit du fluide, il a observé une transition spontanée entre un état où la ligne de courant coloré dans le fluide reste rectiligne caractérisant ainsi l'écoulement laminaire et un état où les lignes de fluide coloré se mettent à osciller et diffuse dans toute la section de la conduite c'est le début de la transition où les régimes laminaire et turbulent coexistent.

Les expériences ont été répétées pour différents diamètres de la conduite et différentes viscosités du fluide. Pour quantifier les résultats issus des observations expérimentales, Reynolds a introduit un paramètre adimensionnel, qui porte son nom, le nombre de Reynolds, défini par $Re = \frac{\rho W D}{\mu}$ où W est la vitesse débitante, D le diamètre de la conduite et μ la viscosité dynamique du fluide.

Les différents essais expérimentaux ont conduit Reynolds à introduire une borne supérieure de Re à partir de laquelle, l'écoulement laminaire ne peut pas être maintenu et une borne inférieure en dessous de laquelle, la turbulence ne peut pas être observée.

En conduisant les expériences soigneusement, Reynolds a pu pousser la limite supérieure de Re et maintenir le régime laminaire jusqu'à une valeur $Re = 13000$. Cette limite a été repoussée jusqu'à $Re = 10^5$ par [Pfenninger 1961] [66]. Ces résultats indiquent d'une part que l'amplitude de la perturbation doit dépasser un seuil pour que la transition puisse avoir lieu, et d'autre part que ce seuil décroît lorsque le nombre de Reynolds augmente.

De la même façon, une borne inférieure de la valeur du nombre de Reynolds en dessous de laquelle, l'écoulement turbulent ne peut pas se maintenir a été définie. Récemment [Peixinho & Mullin 2006] [68] trouvent expérimentalement une valeur limite $Re = 1750$.

3/ Brève revue bibliographique sur la transition vers la turbulence En conduite cylindrique pour un fluide Newtonien.

Des études numériques ont montré que l'écoulement de Hagen-Poiseuille d'un fluide Newtonien est linéairement stable. Récemment [Meseguer & Trefethen 2001a] [67] ont vérifié numériquement cette stabilité linéaire jusqu'à $Re = 10^7$.

[Darbyshire & Mullin 1995] [69] ont déterminé expérimentalement l'amplitude critique de la perturbation pour déclencher la transition en fonction du nombre de Reynolds. L'écoulement du fluide se fait à débit constant à l'aide d'un piston. Les perturbations sont créées en injectant du fluide à 70 diamètres de la section d'entrée. Les auteurs ont fait varier, le débit massique des jets, le nombre d'injecteurs (six maximum) et la fréquence d'injection. Cette étude expérimentale a permis de déterminer l'amplitude nécessaire de la perturbation pour provoquer la transition. Les

auteurs montrent que cette amplitude décroît lorsque le nombre de Reynolds augmente.

En utilisant un dispositif expérimental similaire, [Hof et al. 2003] [70] montrent que l'amplitude nécessaire pour la transition varie en Re^{-1} sur une large gamme de Re . Récemment, [Peixinho & Mullin 2007] [71] ont revisité cette expérience, en utilisant des perturbations sous forme de paires de jets entrants et sortants, de façon à ce que le débit injecté soit nul.

Selon l'orientation des jets par rapport à l'écoulement dans la conduite, l'exposant du nombre de Reynolds varie entre $[-1 \text{ et } -3/2]$. Lorsque les jets sont orientés suivant la direction azimutale, l'amplitude varie en Re^{-1} . Si les jets sont orientés dans le sens de l'écoulement on crée alors des stries haute et basse vitesse un comportement en $Re^{-1.3}$ est observé. Enfin, si les jets font un angle de 45° par rapport à l'écoulement, une variation en $Re^{-1.5}$ est obtenue.

Ces résultats signifient que la transition vers la turbulence peut être plus facilement amorcée en utilisant des paires de jets obliques que des jets orientés dans le sens azimutal. Ceci est peut être une conséquence de la croissance transitoire de l'énergie de la perturbation.

[Mellibovsky & Meseguer 2008] [72] ont reproduit numériquement les expériences de [Hof et al. 2003] [70] et trouvent un comportement en Re^{-1} . Ce type de comportement a été aussi retrouvé mais dans un autre contexte par [Gavarini et al. 1984] [73]. Il s'agit cette fois-ci de l'amplitude de la perturbation de l'écoulement de Hagen-Poiseuille (défaut minimum) qui le rendrait linéairement instable. Dans d'autres systèmes d'écoulements ouverts, [Chapman 2002] [74] montre, moyennant une analyse asymptotique, que l'amplitude critique de la perturbation varie en $Re^{-5/4}$ en Poiseuille plan et en Re^{-1} en Couette plan.

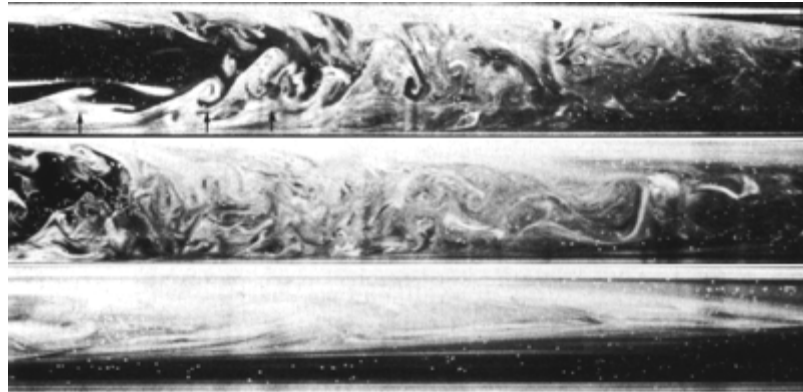
3.1/ Structure de l'écoulement lors de la transition vers la turbulence

La structure de l'écoulement lors de la transition vers la turbulence a été étudiée expérimentalement par [Wynanski & Champagne 1973] [75] à partir de l'analyse du signal de vitesse axiale. En effet deux types de structure ont été identifiés lors de la transition naturelle vers la turbulence en conduite cylindrique : Il s'agit des puffs et des slugs.

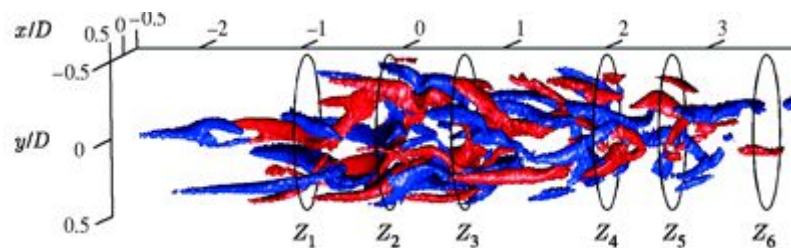
Les puffs ou bouffées turbulentes sont observées pour des nombres de Reynolds compris dans l'intervalle $2000 \leq Re \leq 2700$. Elles sont générées par de fortes perturbations à l'entrée de la conduite. Il s'agit donc de structures localisées de longueur ≈ 20 diamètres et qui se déplacent à une vitesse approximativement égale à $0.9W$, ou W représente la vitesse débitante.

Ces structures présentent un front en pointe et une sortie aplatie. La figure (1-2) montre la visualisation d'un puff comparée au contour d'iso-vorticité axiale obtenu par simulation numérique.

(a)



(b)



Figure(1-2) : (a) Visualisation expérimentale d'un puff. (b) Contour d'iso-vorticité axiale dans un puff calculé numériquement. [[Bandyopadhyay \(1986\)](#).] [77], [[Robinson \(1991\)](#)] [78].

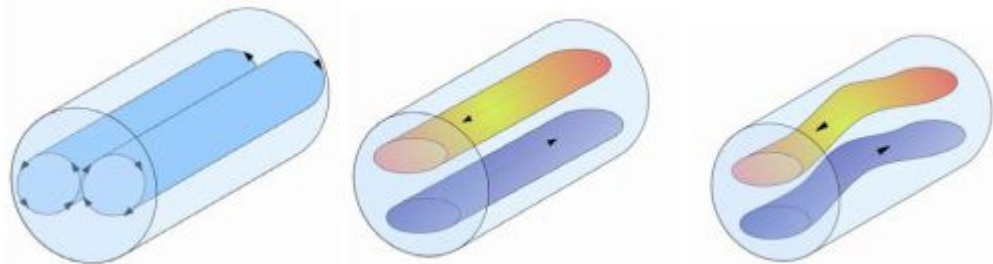
Les slugs ou bouchons turbulents sont observés pour $Re > 2700$. Ils sont générés par l'instabilité de la couche limite à l'entrée de la conduite. Contrairement aux puff, les slugs ont une interface laminaire-turbulent nette en amont et en aval de la structure. En plus les bouchons turbulents s'étendent en longueur tout en étant transporté par l'écoulement moyen.

Ces deux types de structure ont été par la suite confirmés expérimentalement par [Wynanski et al. 1975] [76] et [Darbyshire & Mullin 1995] [69], où cette fois la perturbation est introduite loin de l'entrée, dans la zone où l'écoulement est développé.

Les études théoriques basées sur l'analyse linéaire de stabilité ont été orientées en particulier vers la croissance transitoire et la détermination de la perturbation optimale, i.e. la perturbation pour laquelle l'amplification de l'énergie est maximale. La croissance transitoire est une conséquence directe de la non normalité de l'opérateur différentiel associé aux équations de mouvements linéarisés.

Les travaux de [Shmidt & Henningson] [9] ont montré que la perturbation optimale est constituée de deux rouleaux longitudinaux contrarotatifs permettant ainsi de générer des stries de haute et basse vitesse par le mécanisme de lift-up.

L'écoulement résultant présente une instabilité inflexionnelle vis-à-vis d'une perturbation onde 3D. Cette instabilité est étudiée par une simulation numérique non linéaire en conduite cylindrique et qui consiste à déterminer l'amplitude minimale des rouleaux longitudinaux pour induire une instabilité inflexionnelle [Zikovsky 1996] [80] et [Meseguer 2003] [79]. Les résultats obtenus montrent un comportement en Re^{-1} .



Figure(1-3) Eléments de base du principe d'auto-entretien de la turbulence (SPP)

En fait, les interactions non linéaires entre l'onde 3D, et les rouleaux-jets fournissent de l'énergie aux rouleaux d'où le principe du Self-Sustaining-Process (SSP) introduit par Waleffe à la fin des années 90. La figure (1-3) fournit les principaux éléments du mécanisme SSP.

Récemment, une nouvelle approche dans l'étude de la transition vers la turbulence en conduite cylindrique a été proposée par Faisst & Eckhardt 2003 [81], et Wedin & Kerswell 2004 [82]. Elle s'inspire du modèle SSP et consiste à chercher une solution sous forme d'ondes non linéaires.

Globalement, cette approche repose sur un forçage virtuel de l'équation de quantité de mouvement (par des rouleaux longitudinaux) permettant de déclencher une bifurcation, qui lorsqu'elle est suffisamment sous critique peut conduire à des solutions physiques ondes non linéaires.

Ces ondes seraient des précurseurs et des supports des bouffées turbulentes. Ainsi leur seuil d'apparition en Reynolds, par des bifurcations nœud-col, serait une estimation par valeur inférieure du nombre de Reynolds d'apparition des bouffées turbulentes. Par exemple pour un forçage par trois paires de rouleaux longitudinaux, le seuil d'apparitions d'ondes non linéaires est de $Re = 1250$.

Ces résultats ont été confirmés par l'équipe de [Hof et al] [70] de l'université d'Elf ou ils ont observé des signatures claires de modes instables d'onde progressive dans la conduite Figure (1-4).

Celles-ci comprenaient des anomalies locales appelées «stries» produites par des vortex qui transfèrent le fluide rapidement du centre de la conduite vers les parois, et vice versa. De plus, ils ont constaté que l'écoulement turbulent ne semblait être dominé relativement que par les modes instables à faible nombre d'onde.

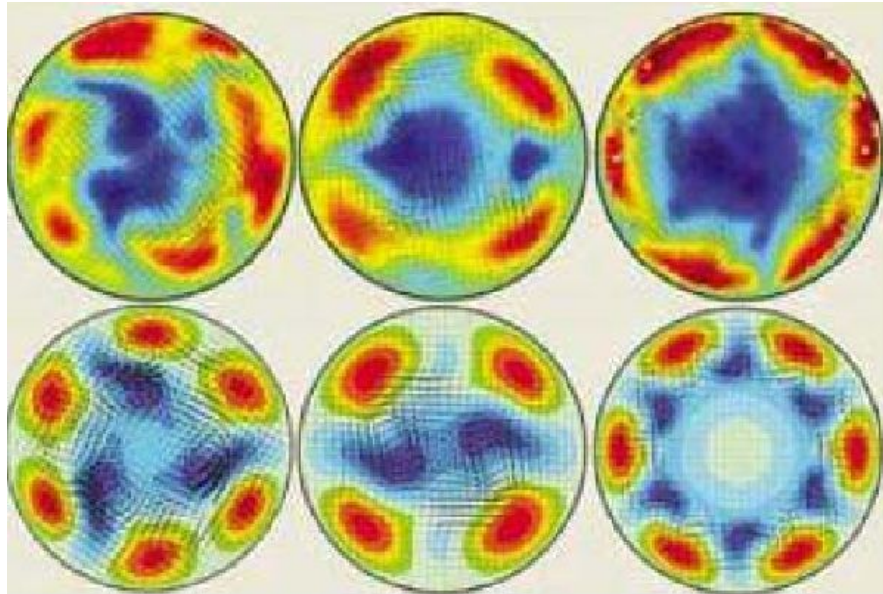


Figure (1-4) : Visualisation expérimentale des stries obtenue par PIV Hof et AL [70]

. La première étape dans l'étude de la transition vers la turbulence consiste à considérer les équations linéarisées, le point de départ est l'approche modale standard pour la détermination des modes propres. L'existence des modes instables signifie qu'il y a une croissance exponentielle de la perturbation infinitésimale et que la fonction propre représente la forme qui apparaît au début de la transition.

Les prédictions de l'analyse modale se rapprochent aux expériences laboratoires pour certains écoulements, sans doute l'écoulement de **Taylor Couette** et la convection de **Rayleigh-B'ernard**. Cependant, pour les écoulements parallèles ouverts avec cisaillement, l'approche modale s'éloigne de l'expérience.

L'échec de l'analyse de stabilité linéaire du mode normal pour décrire le stade précoce de la transition est attribué en partie à la nature non normale des équations linéarisées. La nature non normale se manifeste par une croissance transitoire de la perturbation et une grande réceptivité aux perturbations ambiantes.

L'amplification de l'énergie cinétique de la perturbation peut atteindre une amplitude significative qui peut déclencher des mécanismes non linéaires avant sa dégénérescence au temps long en raison des effets visqueux. Le mécanisme physique derrière la croissance transitoire est lié au mécanisme du basculement des vortex non visqueux en présence du cisaillement de l'écoulement de base.

Le Mécanisme Orr et Lift_Upp sont les seuls phénomènes d'amplification de la perturbation identifiée pour un écoulement à cisaillement. Le mécanisme lift_up peut également être considéré comme une inclinaison de la vorticité de l'écoulement de base dans la direction normale à la paroi, ce qui donne lieu à l'augmentation de la vorticité normale à la paroi [7].

  la limite non-visqueuse, l'amplification de l'énergie cinétique de perturbation par le mécanisme lift_up est illimitée à condition qu'il y ait une vitesse normale de la paroi, alors que pour le mécanisme Orr, l'amplification est transitoire.

Dans le cas général 3D, les mécanismes Orr et les mécanismes lift_up fonctionnent, mais de manière hiérarchique. Le mécanisme Orr génère une vitesse de transitoire normale à la paroi qui, à son tour crée par des stries en continu qui se dégradent lentement par effet de la viscosité [7].

La contribution relative des mécanismes Orr et lift_up dépendent de l'orientation de la perturbation oblique, c'est-à-dire $\varphi = \arctan(\alpha / \beta)$, où, α et β , sont respectivement les nombres d'ondes axial et azimutal, allant du Mécanisme lift_up lorsque $\varphi = 0$ au mécanisme Orr lorsque $\varphi = \pi / 2$.

L'importance des mécanismes linéaires en transition vers la turbulence a été soulignée par Henningson [8]. De l'équation de Reynolds-Orr, Henningson a montré que l'énergie de perturbation produite par un mécanisme linéaire est la seule énergie de perturbation disponible.

Ceci est une conséquence de la nature conservatrice des termes non linéaires dans l'équation de Navier-Stokes. Le taux de croissance instantané d'une perturbation d'amplitude finie est donné par des mécanismes présents dans les équations linéarisées.

La perturbation optimale, c'est-à-dire. La perturbation initiale qui subit la plus grande amplification de l'énergie cinétique est un concept fondamental de la théorie de la statique linéaire [9].

Dans les écoulements à simple cisaillement, tel que l'écoulement de Taylor-Couette, Poiseuille ou Hagen-Poiseuille, la perturbation optimale prend la forme de tourbillons dans la direction de l'écoulement ou presque qui évoluent dans des stries périodiques (régions de vitesse positive et négative) allongées le long de la direction de l'écoulement principal.

Dans le cas des écoulements fermées, tel que Taylor-Couette avec des tourbillons rotatifs, Hristova [10] et Meseguer [11] a démontré que le mécanisme de lift_up est responsable de la croissance à court terme des perturbations axisymétrique initiale et de la formation des stries azimutal.

4/ Revue Bibliographique sur La transition vers la turbulence en conduite cylindrique pour un Fluid Non-Newtonien

4.1/ Fluide Non-Newtonien

On rappelle que pour un fluide Newtonien, la viscosité ne dépend que de la température et de la pression. Pour un fluide non Newtonien, la viscosité dépend en plus des conditions d'écoulement, du taux de cisaillement et parfois de l'histoire de la particule fluide. Le comportement non-newtonien résulte de l'interaction non linéaire entre les contraintes hydrodynamiques et l'organisation de la structure interne du fluide à l'échelle microscopique. Globalement, on a deux grandes classes de comportement non-newtonien :

4.1.1/ Fluide Purement Visqueux Non-Newtonien

Il s'agit de fluides dont le comportement rhéologique est considéré comme indépendant du temps. Pour ces fluides le temps caractéristique de réorganisation de la structure interne est beaucoup plus faible que le temps caractéristique de l'écoulement. Dans ce cas, la viscosité est une fonction uniquement du deuxième invariant du tenseur des taux de déformation.

- Le **comportement rhéofluidifiant** est le comportement rhéologique le plus courant, c'est une décroissance non linéaire de la viscosité avec le cisaillement moins visqueux. Dans le cas d'une solution de polymères, les réductions de la viscosité peut être attribuée à l'orientation des chaines de polymères dans le sens de l'écoulement. Dans le cas d'une suspension de particules, la réduction de la viscosité peut être attribuée à une réduction de la taille des agrégats.
- Le **comportement rhéoépaississant** (à l'opposé du précédent) est plus rarement observé. La viscosité augmente a mesure que le taux de cisaillement. Ce phénomène se rencontre dans suspension concentrées de particules avec des tailles inferieurs a 100 μm . parmi les mécanisme proposés pour expliquer le comportement rhéoépaississant, on cite la formation des structure particulaires sans cisaillement (clusters hydrodynamiques)
- **Fluide à seuil de contrainte**. Il s'agit de fluides qui ne s'écoulent que lorsque la contrainte appliquée dépasse une valeur seuil. Dans le cas d'un Gel, le dépassement de la contrainte seuil se traduit par un effondrement de la viscosité

La figure ci-dessous illustre l'évolution des lois de comportement rhéologique d'un ensemble de fluide ou la contrainte et représenté en fonction du taux de cisaillement

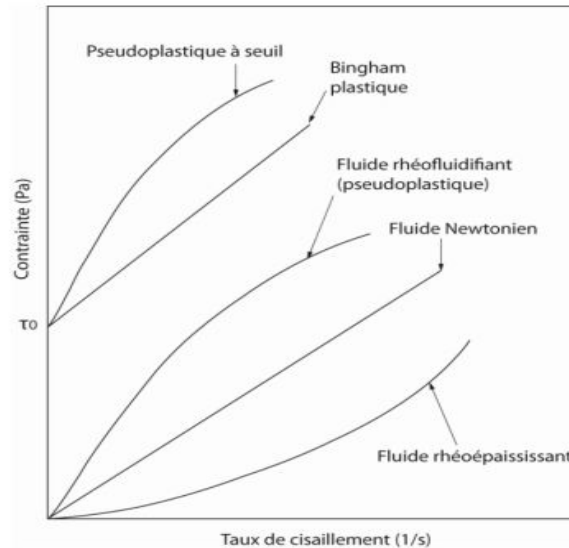


Figure (1-5) Lois de Comportement Rhéologique

4.1.2/ modèles Mathématique Fluides Non-Newtonien

Le comportement rhéologique, peut être décrit par des modèles mathématiques qui peuvent être parfois très complexe. Parmi ces model en cite :

- **Model loi puissance** : appelée aussi fluide **ostwald** de **waele** dont le comportement est décrit par une loi puissance $\tau = K\dot{\gamma}^{n-1}$ ou $\dot{\gamma}$ le deuxième invariant du tenseur de du taux de déformation. K et n sont l'indice de consistance et 'écoulement respectivement. Pour une valeur de $n < 1$ le fluide est réhofluidifiant, $n > 1$ rhéoépaississant et newtonien si $n = 1$.
- **Model de Cross** : il tient compte des viscosités a cisaillement nul et infini il s'écrit sous la forme suivante $\frac{\eta - \eta_{\infty}}{\eta_0 - \eta_{\infty}} = \frac{1}{1 + \lambda \dot{\gamma}^n}$ ou λ est le temps caractéristique de relaxa
- **Model de Fluide a contrainte Seuil** : certaine type de fluide possèdent une structure suffisamment rigide leur permettant de résister à des valeurs élevé de la contrainte et se comporte comme des solide indéformable. On distingue dans ce cas de types très utilises :

$$\text{- Model de Bingham : } \begin{cases} \tau = \left(\frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + K\right) \dot{\gamma} & \text{Si } \tau > \tau_0 \\ \dot{\gamma} = 0 & \text{Si } \tau \leq \tau_0 \end{cases}$$

$$\text{- Model de Hershel-bulkley : } \begin{cases} \tau = \left(\frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + K\dot{\gamma}^{n-1}\right) \dot{\gamma} & \text{Si } \tau > \tau_0 \\ \dot{\gamma} = 0 & \text{Si } \tau \leq \tau_0 \end{cases}$$

Ou K, la consistance du fluide, n l'indice d'écoulement et τ_0 la contrainte seuil

4.1.3/ Fluides Dépanadant Du temps

Ces des fluides ou les comportements rhéologiques et dépendants du temps

- **Fluide thixotrope** : il s'agit de fluide dont la viscosité dynamique diminue au cours du temps, même sous une contrainte constante appliquée. Ceci est lié à une destruction progressive de la structure interne du fluide. Le temps caractéristique associé et au moins du même ordre de grandeur que le temps caractéristique d'observation. Après suppression de la contrainte, le fluide retrouve sa structure initiale après une période de repos.
- **Fluide Rhéopesces** : ils sont plus rare et corresponde à une progression progressive de la viscosité par application d'une contrainte constante dans le temps.

4.1.4/ Fluides Viscoélastiques

Les fluides viscoélastiques se comportent comme un solide élastique aux temps courts et comme un fluide purement visqueux aux temps longs. Dans une solution de polymère, lorsqu'on applique une contrainte au temps courts, les chaînes de polymères non pas le temps de glisser les unes par rapport aux autres. Une déformation élangotionelle de ces chaînes se développe. Aux temps longs on retrouve un écoulement visqueux.

1.5/ transition vers la turbulence Fluide Non-Newtonien

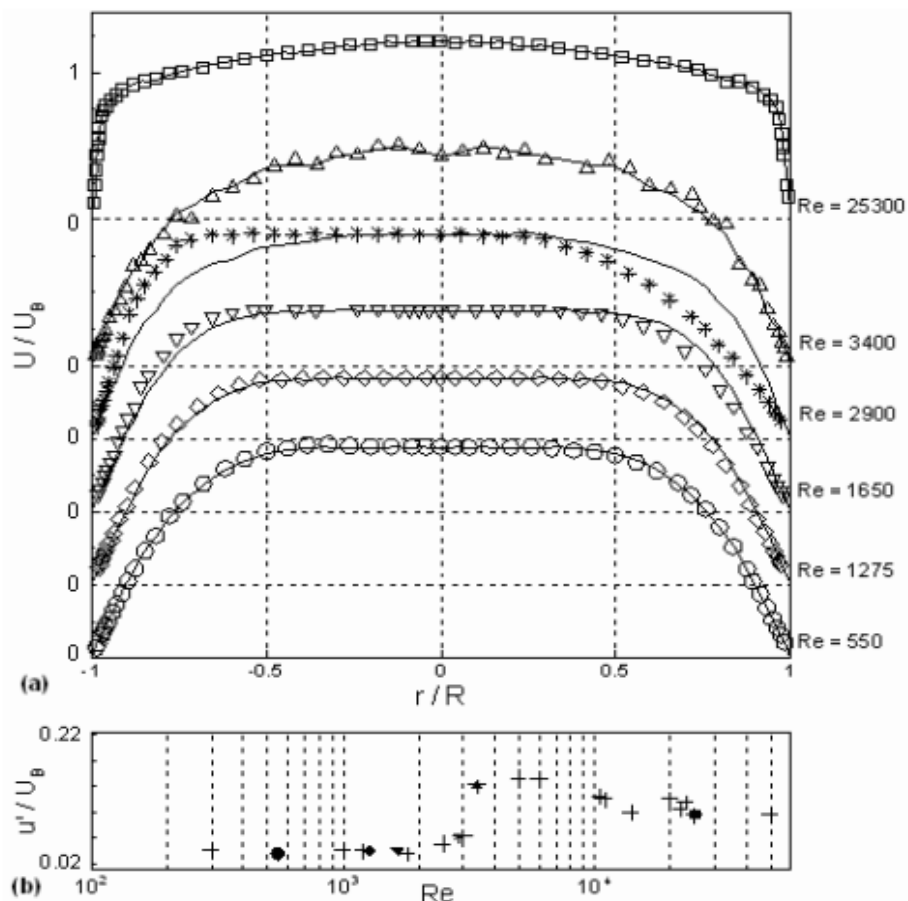
Dans l'industrie ont fait intervenir dans de nombreux processus des écoulements de fluides non Newtonien particulièrement en conduite cylindrique. Dans la majorité des cas il s'agit de solutions de polymères ou de sus- pensions de particules solides.

Dans le domaine pétrolier pour réduire les pertes de charges dans les pipelines. TOMS [83] , a montré que l'ajout d'une faible quantité de polymères réduit fortement les frottements en régime turbulent et la puissance dissipée ce qui se traduit par un grand impact dans l'industrie. Depuis de nombreux travaux ont été consacrés à ce phénomène afin d'éclaircir les mécanismes physiques à l'origine de cette réduction de la puissance dissipée.

Il n'existe pas encore de modèle universellement accepté pour expliquer le mécanisme de réduction de frottement. La turbulence celons Reynolds est décrite par la prédominance des non linéarités associées aux effets inertiels peut être complètement modifiées lorsqu'on rajoute des polymères. On peut en effet obtenir des écoulements d'apparence chaotique sans effet inertiels prédominants. Ce sont les non linéarités élastiques qui font tout le travail de déstabilisation.

Parmi les fluides non newtoniens nous nous intéressons au fluides réhofluidifiant. C'est un fluide dont la viscosité diminue lorsque le cisaillement augmente. Dans les solutions de polymères, on interprète cette diminution de viscosité par la séparation, puis l'alignement progressif de macromolécules enchevêtrées pendant l'écoulement. Dans le cas d'une suspension, la diminution de viscosité provient de la déstructuration des agrégats de particules solides qui se sont formés.

Escudier et Presti ont publié en 1995 un article expérimental sur la transition vers la turbulence dans une conduite cylindrique de 13.35 m de long et de 100 mm de diamètre pour un fluide thixotrope. Il s'agit d'une suspension de particules d'argile synthétique. Ils ont constaté que les profils de vitesse axiale mesurés (moyenné dans le temps) présentait une dissymétrie pour un nombre de Reynolds (défini avec la viscosité à la paroi) compris entre $1300 \leq Re_p \leq 3000$. Alors qu'En régime laminaire et turbulent les profils sont parfaitement symétriques. D'après les auteurs, cela pourrait s'expliquer par un défaut dans le dispositif expérimental qui serait amplifié par la rhéologie du fluide.



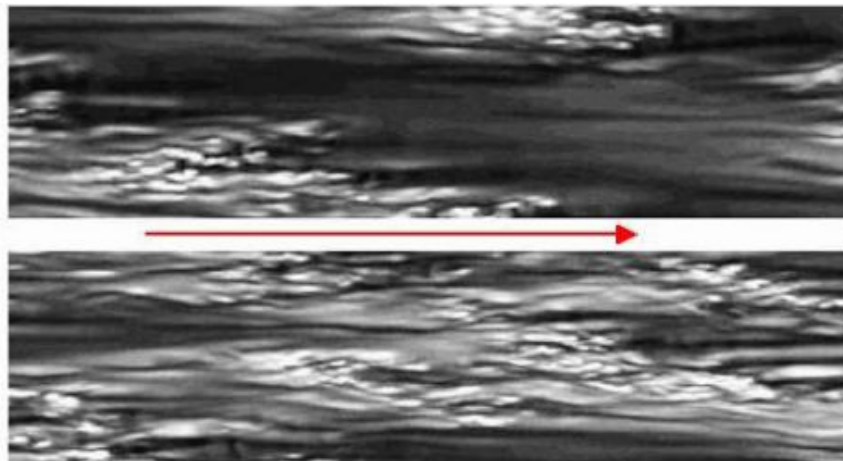
Figure(1-5) a) Profils de la vitesse axiale à différents nombres de Reynolds défini avec la viscosité pariétale. Résultats obtenus par Escudier et Presti pour une suspension de Laponite avec $\tau_0 = 4.4 Pa, K = 0.42 Pa s^n$ et $n = 0.53$ **b)** rms rapporté à la vitesse débitante à $r_0 = 0.8$

[Peixinho et al. 2005] [84] observent aussi une asymétrie croissante avec Re lors de la transition vers la turbulence pour une solution de Carbopol à 0.2 % en masse en écoulement dans une conduite cylindrique de longueur 5m et diamètre intérieur 30mm. Dans les deux cas, il s'agissait de fluides rhéofluidifiant avec une contrainte seuil.

En 2005 les équipes du LEMTA et de l'université de Liverpool publient conjointement un article qui confirme cette dissymétrie LEMTA, Escudier et al. (2005) [85]. En analysant l'ensemble des résultats expérimentaux obtenus par différentes équipes, les auteurs ont conclu que cette dissymétrie est lié au caractère rhéofluidifiant.

Dans cet article, des résultats ont été reportés pour onze fluides différents dont un Newtonien pris comme référence. D'autre parts on tien a souligné ensuite que cette asymétrie n'est pas la conséquence de la force de Coriolis due à la rotation de la terre Draad k et Nieuwstadt (1998) [86] avait notifié cette dissymétrie sur une conduite de 30 m de long.

Une simulation numérique directe par la méthode des éléments spectraux d'un écoulement faiblement turbulent dans une conduite cylindrique d'un fluide en loi puissance et d'un fluide de Herschel-Bulkley a été entreprise récemment par Rudman et al. (2004) [87] qui montre une asymétrie dans la répartition des stries observée lorsque le fluide est suffisamment rhéofluidifiant. Le résultat est encore plus marquant pour un fluide à seuil.



Figure(1-6) Contours instantanés de la vitesse axiale au voisinage de la paroi pour un fluide d'Herschel-Bulkley $Re = 5800$ (*Haut*) et $Re = 8130$ (*Bas*).

En analysant l'ensemble des résultats expérimentaux obtenus par différentes équipes, les auteurs ont conclu que cette dissymétrie est lié au caractère rhéofluidifiant. Les mécanismes physiques n'ont pas été identifiés.

Esmael (2008, 2010) [49] a repris les travaux de Peixinho sur une conduite de 5.75m et un diamètre de 30mm pour une solution de Carbopol 940 à 0.2% en masse. Des mesures de vitesse par LDA à différentes position axiale et azimutale ont été réalisé et ont permis de donné une description tridimensionnelle de l'asymétrie des profils de vitesse. Il met en évidence l'existence de stries (jets) lent et rapide. D'après Esmael (2010), ces stries sont générées par le mécanisme de Lift-Up [2] via des tourbillons longitudinaux contra-rotatifs.

La figure ci-dessous illustre un des résultat pertinent des travaux de Esmail effectué à une position axial de 122 Diamètre pour deux valeur du nombre de Reynolds pari

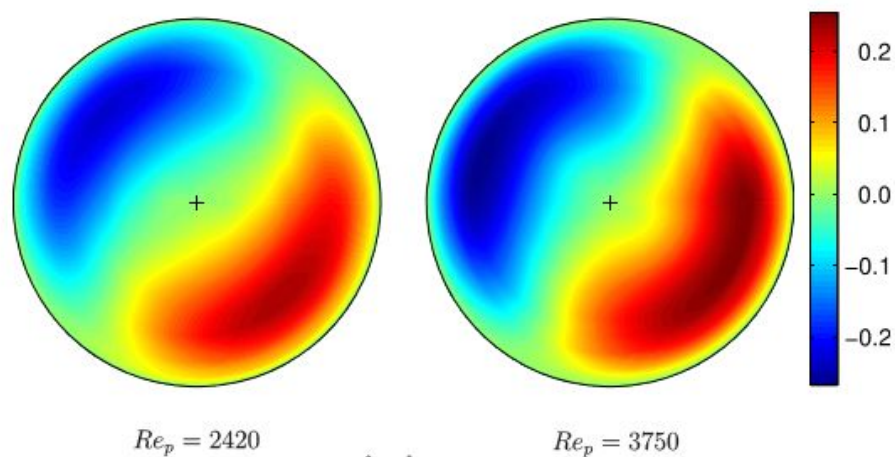


Figure (1-7) Contours d'iso-valeurs de vitesse axiale à $r/R = 0.1$, $Re_p = 3750$ et $n = 0.5$ pour une position axiale $122\hat{D}$

En 2012, au LEMTA, Lopez Carranza [54] s'est proposé d'étendre le mécanisme d'auto-entretien de la turbulence au cas non-Newtonien, dans l'espoir que le caractère non linéaire de la viscosité permette de régénérer les tourbillons contra-rotatifs. Les études numériques ont conclu, comme dans le cas Newtonien, les tourbillons ne [6] peuvent pas être maintenus.

En 2017 Wen, Poole et Dennis [65] ont publié un article sur une étude expérimentale de la transition vers la turbulence en conduite cylindrique pour une solution de Xanthan (fluide rhéofluidifiant). Des mesures PIV 3D sont présentées. Les auteurs insistent sur le fait que la dissymétrie des profils de vitesse n'est pas permanente. Elle évolue dans le temps, mais se maintient plus longtemps à une position azimutale qu'à une autre.

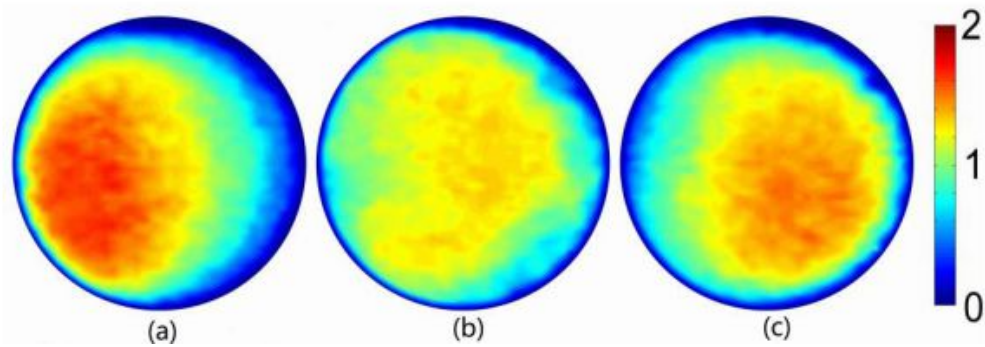


Figure (1-8) PIV Contours d'iso-valeurs instantané de vitesse axiale à $Re = 8000$. (a) écoulement asymétrique avec une orientation dominante (b) temporairement asymétrique (c) un asymétrie courte avec une orientation alternative

L'analyse des fluctuations de la vitesse a amené les auteurs à conclure que ce phénomène doit être dissocié de la transition vers la turbulence. Il s'agirait d'une instabilité sur critique. Or il est bien connu que l'écoulement de Poiseuille d'un fluide purement visqueux réhofluidifiant est linéairement [2] stable. Les auteurs reviennent à l'hypothèse émise par Escudier, à savoir, un défaut dans la conduite qui serait amplifié par la rhéologie et qui entraînerait ces dissymétrie.

Comparativement au cas newtonien, très peu d'études ont été consacrées à la croissance transitoire des fluides de d'écoulement non newtoniens. Cela n'est peut-être pas surprenant, compte tenu des complexités inhérentes impliquées. Les fluides non newtoniens peuvent être divisés en trois grands groupes:

- (i) des fluides indépendants du temps, pour lesquels la viscosité dépend uniquement du deuxième invariant instantané du tenseur de déformation;
- (ii) les fluides viscoélastiques, pour lesquels les contraintes dépendent de l'histoire du flux et
- (iii) des fluides dépendants du temps, pour lesquels le taux de déformation est fonction de la grandeur et de la durée du stress appliqué.

L'analyse non linéaire de la croissance transitoire des écoulements de Couette Poiseuille des modèles Oldroyd-B a été étudiée par Jovanovic et Kumar [12], [13]. Il a été démontré que la présence d'élasticité peut produire une amplification significative de l'énergie. Les perturbations les plus amplifiées ont tendance à être allongées dans la direction de l'écoulement.

Le mécanisme responsable de l'amplification de l'énergie est lié à l'étirement des molécules du polymère par le cisaillement de fond qui entraîne un lift_up des perturbations. Dans le cas d'un écoulement de fluide dans un canal dominé par l'inertie d'un fluide viscoélastiques modélisés par les formules de Oldroyd-B et FENE-P, Zhang

et al. [14] a montré que le rapport entre le temps de relaxation du polymère et le temps caractéristique de l'instabilité joue un rôle clé dans l'amplification de l'énergie.

Des études sur la croissance transitoire non modale pour les écoulements a stratification visqueuse ont été récemment examinées par Govindarajan et Sahu [15].

Dans la présente étude, on se concentre sur les fluides purement visqueux réhofluidifiant. Les caractéristiques moyennes de ces fluides sont:

- (i) une augmentation du taux de cisaillement a la paroi avec l'augmentation des effets réhofluidifiant.
- (ii) une variation continue de la viscosité
- (iii) une anisotropie du tenseur de contrainte de cisaillement de la perturbation qui provient de la Perturbation de viscosité.

Chikkadi et al. [16] a considéré le cas de l'écoulement Poiseuille plan d'un fluide de Carreau, sans tenir compte de la nature anisotrope du tenseur de perturbation de la contrainte de cisaillement. Au contraire, de façon inattendue, les auteurs ont constaté que la croissance transitoire était relativement peu affectée par le gradient de viscosité. Ce problème a été revisité par Nouar et al. [17], et a obtenu une augmentation substantielle de la croissance transitoire lorsque la perturbation de la viscosité est prise en compte.

La perturbation optimale est analogue à celle des fluides newtoniens, c'est-à-dire des vortex longitudinaux en continu qui se transforment en stries par le mécanisme lift_up. Des résultats similaires sont également obtenus dans le cas d'un écoulement dans une conduite d'un fluide réhofluidifiant [18]. Dans le cas d'un écoulement de Couette plan, les effets de la réhofluidification réduisent uniquement l'anisotropie de la perturbation du tenseur de contrainte de cisaillement. Une augmentation significative de la croissance transitoire est observée [19]. Cependant, la perturbation optimale reste similaire à celle d'un fluide newtonien.

Les études portant sur la croissance transitoire des fluides réhofluidifiant a contrainte seuil sont très limitées. La stabilité non-modale d'un écoulement de poiseuille plan d'un fluide a contrainte seuil a été étudiée par Nouar et al. [20]. Le comportement rhéologique du fluide est décrit par le modèle Bingham. Par rapport aux fluides réhofluidifiant pur, un paramètre supplémentaire fondamental intervient dans le problème: le Bingham ou le nombre Bingham généralisé, B , qui est le rapport de la contrainte seuil à la contrainte visqueuse.

Ce paramètre supplémentaire modifiera la stratification de la viscosité, le taux de cisaillement a la paroi, l'anisotropie du tenseur de contrainte de perturbation et la géométrie de la zone cisailé, où se produit l'échange entre l'écoulement de base et la perturbation. Nouar et al. [20] ont constaté qu'une grande amplification de l'énergie cinétique de la perturbation peut être obtenue pour de tels écoulements de fluides. Aux

petites valeurs de B , la perturbation optimale est sous la forme de tourbillons uniformes longitudinaux, alors que pour des grand B , la croissance transitoire optimale se produit pour une onde oblique.

Des résultats similaires ont également été obtenus par Liu & Liu [21] dans le cas d'un écoulement de Hagen-Poiseuille d'un fluide de Bingham. Cependant, dans ces études, les mécanismes physiques associés à l'obliquité de la perturbation optimale ne sont pas fournis. L'influence de la stratification de la viscosité et celle de l'anisotropie du tenseur de contrainte de perturbation ne sont pas clarifiés.

L'objectif du présent travail est de fournir une description complète De l'analyse de la stabilité linéaire temporelle de l'écoulement de Hagen-Poiseuille d'un fluide de contrainte seuil réhofluidifiant. Le comportement rhéologique du fluide est décrit par le model de Herschel-Bulkley qui est utilisé en général dans l'analyse rhéologique des fluides a contraintes seuil. Le but est donc de clarifier l'influence de la stratification de la viscosité et celle de l'anisotropie du tenseur de contrainte de la perturbation.

Chapitre 2

Formulation Mathématique

1/ Introduction

Dans ce chapitre nous présentons la formulation mathématique du problème de stabilité de l'écoulement de **Hagen-Poiseuille** d'un fluide à seuil. Il est organisé comme suit : Le paragraphe 2 est consacré aux équations gouvernant le problème et en particulier celles relatives à l'écoulement de base.

Elles sont d'abord écrites sous forme dimensionnelle. Elles sont ensuite mises sous forme adimensionnelle, dans la section 3, après avoir introduit les différentes échelles caractéristiques. Une description détaillée de l'écoulement de base y est donnée. Enfin dans le quatrième paragraphe, on présente les équations aux perturbations.

2/Equations Gouvernant le Problème

L'écoulement de **Hagen-Poiseuille** d'un fluide à seuil incompressible dans une conduite cylindrique de rayon \hat{R} est décrit par les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, qui s'expriment sous la forme suivante :

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{U}} = 0 \quad (2-1)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \hat{\mathbf{U}}}{\partial t} + (\hat{\mathbf{U}} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{U}} \right] = -\nabla \hat{p} + \nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}} \quad (2-2)$$

Le vecteur \mathbf{U} définit le vecteur champ de vitesses qui s'écrit sous la forme suivante $\hat{\mathbf{U}} = \hat{u}\mathbf{e}_r + \hat{v}\mathbf{e}_\theta + \hat{w}\mathbf{e}_z$ où $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$ sont les composantes de la vitesse respectivement dans les directions radiale, azimutale et axiale définies par les vecteurs unitaires $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$.

Aux précédentes équations de conservation, il faut rajouter les équations constitutives. Dans notre étude, le comportement rhéologique du fluide utilisé est décrit

par le modèle de **Herschel-Bulkley**. En se basant sur le critère de Von-Mises, la relation entre le déviateur $\boldsymbol{\tau}$ du tenseur des contraintes et le tenseur $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ des taux de déformations est donné par :

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \hat{\mu} \cdot \hat{\boldsymbol{\gamma}} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\tau}_{II} > \hat{\tau}_0 \quad (2-3)$$

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\tau}_{II} \leq \hat{\tau}_0 \quad (2-4)$$

Où $\hat{\mu}$ représente la viscosité effective définie par la loi de comportement suivante :

$$\hat{\mu} = \left[\frac{\hat{\tau}_0}{\hat{\gamma}_{II}} + \hat{K} (\hat{\gamma}_{II})^{(n-1)} \right] \quad (2-5)$$

Avec ;

\hat{K} : la consistance du fluide

n : l'indice de structure

$\hat{\tau}_0$: contrainte seuil

Les composantes du tenseur des taux de déformations $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ sont définies par l'expression suivante $\dot{\gamma}_{ij} = (U_{i,j} + U_{j,i})$. Les seconds invariants du tenseur des taux de déformation $\hat{\gamma}_{II}$, et du déviateur du tenseur des contraintes $\hat{\tau}_{II}$ sont définis par :

$$\dot{\gamma}_{II} = \left[\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 (\dot{\gamma}_{ij} \cdot \dot{\gamma}_{ij}) \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \hat{\tau}_{II} = \left[\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 (\tau_{ij} \cdot \tau_{ij}) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2-6)$$

D'une manière générale, ce modèle suppose que le matériau se comporte d'un point de vue cinématique comme un gèle lorsque la contrainte appliquée est inférieure à la contrainte seuil, et comme un fluide visqueux lorsque la contrainte est supérieure à $\hat{\tau}_0$.

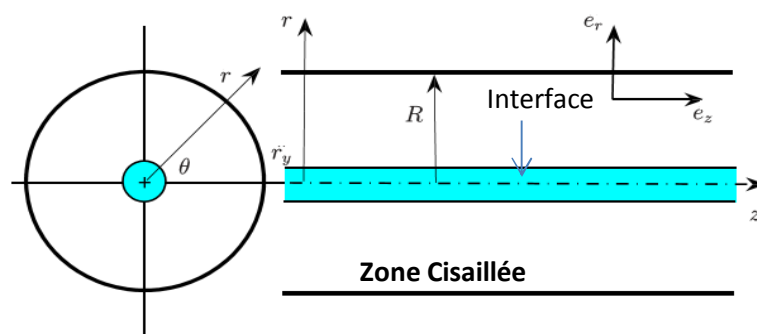


Figure (2-1) : Représentation schématique de l'écoulement

Les phases cisailée et non cisailée sont séparées par une interface, ayant les propriétés suivantes :

- L'interface n'est pas une surface matérielle, sa vitesse peut être différente de celle des particules fluides au niveau de cette interface. Ceci est une différence fondamentale par rapport à l'interface séparant deux fluides non miscibles. En effet dans ce dernier cas, la vitesse de l'interface est égale à celle des particules fluide.
- Le mouvement de l'interface est contrôlé par l'état des contraintes dans la phase liquide.
- Les contraintes $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}$, ainsi que les composantes (u, v, w) du vecteur vitesse sont continues à travers l'interface.

3/ Conditions aux limites

Aux équations établies précédemment, un ensemble de conditions aux limites est associé :

- Conditions de non glissement à la paroi qui se traduit par :

$$\hat{U} = 0 \quad \hat{r} = \hat{R} \quad (2-7)$$

- A l'interface $\hat{r} = \hat{r}_0$, entre les phases « liquide » et « gel », le modèle de **Herschel-Bulkley** impose la condition suivante:

$$\dot{\gamma}_{ij} = 0 \quad \forall i, j \quad (2-8)$$

Qui se traduit par ;

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{r}} = \frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{\theta}} + \frac{\hat{u}}{\hat{r}} = \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{z}} = 0 \quad ; \quad \hat{r} = \hat{r}_0 \quad (2-9)$$

$$\frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{\theta}} - \frac{\hat{v}}{\hat{r}} = \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{r}} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{z}} + \frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{\theta}} = 0 \quad ; \quad \hat{r} = \hat{r}_0 \quad (2-10)$$

Où r_0 est le rayon définissant la position de l'interface entre la zone gel et la zone cisailée.

4/ Ecoulement de Base

Nous considérons un écoulement en régime dynamique établi, stationnaire et unidirectionnel dans la direction axiale. Dans ce cas le profil de vitesse axiale prend la forme suivante $\hat{U} = \hat{W}_b(\hat{r}) e_z$. Les composantes du déviateur du tenseur de contrainte sont toutes nulles sauf la composante $\hat{\tau}_{rz} = \hat{\tau}_{zr}$.

Les équations de conservation (2,1) et (2,2) de conservation de masse et de quantité de mouvement se réduisent à :

$$\begin{cases} -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{z}} + \frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} (\hat{r} \cdot \hat{\tau}_{rz}) = 0 \\ \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{r}} = 0 \\ \frac{\partial \hat{p}}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \quad (2-11)$$

Il convient de noter que dans les équations précédentes, le terme de gravité est inclus dans la pression. Après intégration on obtient l'expression de $\hat{\tau}_{rz}$:

$$\hat{\tau}_{zr} = \hat{\tau}_p \cdot \frac{\hat{r}}{R} \quad , \quad \text{où } \hat{\tau}_p \text{ représente la contrainte pariétale} \quad (2-12)$$

Les équations (2-3), (2-4) et (2-5) se réduisent à :

$$\hat{\tau}_{zr} = \mu \cdot \dot{\gamma}_{rz} = \left[\text{sign} \left(\frac{d\hat{W}_b}{d\hat{r}} \right) \cdot \hat{\tau}_0 + \hat{K} \left| \frac{d\hat{W}_b}{d\hat{r}} \right|^{n-1} \cdot \frac{d\hat{W}_b}{d\hat{r}} \right] \Leftrightarrow |\hat{\tau}_{zr}| > \hat{\tau}_0 \quad (2-13)$$

$$\frac{d\hat{W}_b}{d\hat{r}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |\hat{\tau}_{zr}| \leq \tau_0 \quad (2-14)$$

Les équations (2.12)-(2.14) permettent de montrer que le profil de vitesse axiale, $\hat{W}_b(r)$ dans la zone cisailée vérifie la relation ci-dessous :

$$-\frac{d\hat{W}_b}{d\hat{r}} = \left[\frac{\hat{\tau}_p}{\hat{R}} \right]^{\frac{1}{n}} \cdot \left[\frac{\hat{\tau}_0}{\hat{\tau}_p} + \frac{\hat{r}}{\hat{R}} \right]^{\frac{1}{n}} \quad (2-15)$$

Après intégration de l'équation (2-15) et l'application des conditions aux limites, on obtient :

$$\hat{W}_b(r) = \begin{cases} \hat{W}_{bmax} & 0 \leq \hat{r} \leq \hat{r}_0 \\ \hat{W}_{bmax} \cdot \left[1 - \left(\frac{\hat{r} - \hat{r}_0}{\hat{R} - \hat{r}_0} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right] & \hat{r}_0 \leq \hat{r} \leq \hat{R} \end{cases} \quad (2-16)$$

\widehat{W}_{bmax} est donné par l'expression ci-dessous :

$$\widehat{W}_{bmax} = \frac{n}{1+n} \left[-\frac{\hat{\tau}_p}{\hat{K}} \right]^{\frac{1}{n}} \hat{R} \left[1 - \frac{\hat{r}_0}{\hat{R}} \right]^{\frac{n+1}{n}} \quad (2-17)$$

Par intégration de l'équation de conservation de la quantité de mouvement suivant la direction z on obtient la relation suivante pour la pression :

$$\hat{P}_b(\hat{z}) = -\frac{2\hat{\tau}_0}{\hat{r}_0} \hat{z} + \text{constante}. \quad (2-18)$$

4.1/ Mise en forme Adimensionnelle

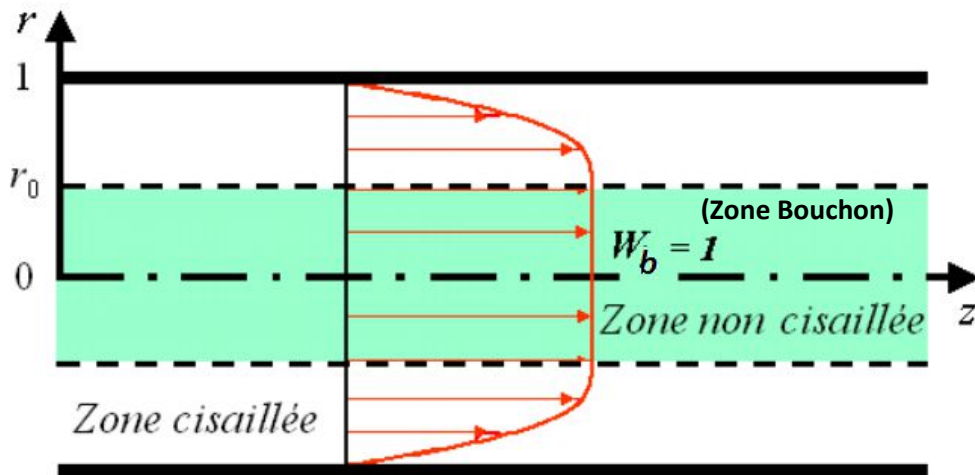


Figure (2-2) : Représentation de l'écoulement de Hagen_poiseuille d'un fluide à seuil dans une conduite cylindrique

On utilise la vitesse maximale de l'écoulement de base \widehat{W}_{bmax} , le rayon \hat{R} de la conduite et l'énergie cinétique par unité de volume ($\hat{\rho} \cdot \widehat{W}_{bmax}^2$) respectivement comme échelles caractéristiques de vitesse, de longueur, de pression ou de contraintes. On définit les variables réduites suivantes:

$$\tau_{ij} = \frac{\hat{\tau}_{ij}}{\rho \widehat{W}_{bmax}^2} \quad ; \quad P = \frac{\hat{P}}{\rho \widehat{W}_{bmax}^2} \quad ; \quad u_i = \frac{\hat{u}_i}{\widehat{W}_{bmax}} \quad ; \quad r = \frac{\hat{r}}{\hat{R}} \quad ; \quad z = \frac{\hat{z}}{\hat{R}}$$

$$\mu = \frac{\hat{\mu}}{\hat{K} [\widehat{W}_{bmax} / \hat{R}]^{n-1}} \quad ; \quad t = \frac{\hat{t} \widehat{W}_{bmax}}{\hat{R}} \quad ; \quad r_0 = \frac{\hat{r}_0}{\hat{R}} \quad ; \quad \nabla = \hat{R} \widehat{\nabla}$$

Les équations de conservation sous forme adimensionnelle, sont alors :

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (2-19)$$

$$\left[\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} \right] = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$$

Pour ce qui est de la loi de comportement adimensionnelle,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} = \mu \boldsymbol{\gamma} &= \frac{1}{Re} \left[\frac{Hb}{\dot{\boldsymbol{\gamma}}_{II}} + (\dot{\boldsymbol{\gamma}}_{II})^{n-1} \right] \dot{\boldsymbol{\gamma}} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\tau}_{II} > \frac{Hb}{Re} \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} &= \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\tau}_{II} \leq \frac{Hb}{Re} \end{aligned} \quad (2-20)$$

Les nombres de Herschel-Bulkley Hb et de Reynolds Re sont définis par :

$$Hb = \frac{\hat{\tau}_0}{\hat{K} [\hat{W}_{bmax}/\hat{R}]^n} \quad (2-21)$$

$$Re = \frac{\rho \hat{R}^n \hat{W}_{bmax}^{2-n}}{\hat{K}} \quad (2-22)$$

La relation (2-22) est connue sous le nom de nombre de Reynolds généralisé.

Les conditions aux limites sont :

$$\begin{cases} U = 0 & a & r = 1 \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}}_{ij} & a & r = r_0 \end{cases} \quad (2-23)$$

Le profil de vitesse de l'écoulement de base sous la forme adimensionnelle s'écrit aussi :

$$W_b = \begin{cases} W_{bmax} & 0 \leq r \leq r_0 \\ W_{bmax} \left(1 - \left(\frac{r-r_0}{1-r_0} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right) & r_0 \leq r \leq 1 \end{cases} \quad (2-24)$$

La variation de la pression dans la direction axiale est

$$P_b(z) = -\frac{2Hb}{Re \cdot r_0} z + \text{constante} \quad (2-25)$$

La viscosité effective s'exprime comme suit :

$$\mu(W_b) = \frac{1}{R_e} \left[\frac{Hb}{|DW_b|} + |DW_b|^{(n-1)} \right] ; \text{ Avec } D = \frac{d}{dr} \quad (2-26)$$

D'autre part la dépendance de r_0 en fonction de Hb est donnée par l'expression de la contrainte pariétale :

$$|\tau_p| = \frac{Hb}{R_e r_0} \quad (2-27a)$$

De l'équation (2-20) on peut déduire l'expression de la contrainte pariétale ;

$$|\tau_p| = \frac{1}{R_e} \left[Hb + \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \frac{1}{(1-r_0)^{1+n}} \right] \quad (2-27b)$$

La combinaison des deux équations précédentes conduit à l'expression suivante pour r_0 :

$$Hb (1 - r_0)^{n+1} - \left(\frac{n+1}{n} \right)^n r_0 = 0 \quad (2-28)$$

Pour des petites valeurs et élevées de r_0 les comportements asymptotiques suivants sont à considérés.

$$r_0 \approx \left(\frac{n}{n+1} \right)^n Hb - (n+1) \left(\frac{n}{n+1} \right)^{2n} Hb^2 \quad \text{quand } Hb \rightarrow 0; \quad (2-29a)$$

$$r_0 \approx 1 - \left(\frac{n}{n+1} \right)^{\frac{n}{n+1}} \left(\frac{1}{Hb} \right)^{\frac{1}{n+1}} \quad \text{quand } Hb \rightarrow \infty; \quad (2-29b)$$

L'écoulement de base dépend principalement de deux paramètres adimensionnelles n et Hb , ou bien n et r_0 . Dans notre étude nous nous intéressons à examiner l'influence de n et Hb sur l'étude de la stabilité d'un écoulement de Hagen-Poiseuille pour un fluide de Hershel-bulkley avec des perturbations infinitésimales. Quatre points essentiels seront pris en compte et éclaircis au fur et à mesure à savoir l'effet de :

- La variation de la zone cisailé ou l'échangé d'énergie se produit entre la perturbation et l'écoulement de base
- La variation du gradient de vitesse de la vitesse axiale $\frac{dW_b}{dr}$
- Stratification de la viscosité
- Variation non linéaire de la viscosité avec le taux de cisaillement

4.2/ Analyse de l'écoulement de Base

L'écoulement de base est essentiellement caractérisé par l'existence d'une zone centrale non cisailée qui se déplace comme un solide indéformable et une variation non linéaire de la viscosité effective entre la paroi et l'interface. Les figures (2-3) - (2-6) montrent l'influence de l'indice de réhofluidification n sur le profil de vitesse axiale en régime laminaire unidirectionnel.

La dimension r_0 de la zone bouchon étant fixée. L'augmentation du caractère réhofluidifiant se traduit par une augmentation du gradient pariétal de vitesse à la paroi et un aplatissement du profil au voisinage de la zone centrale. Un résultat similaire est observé lorsque n est fixé et on augmente le rayon de la zone bouchon.

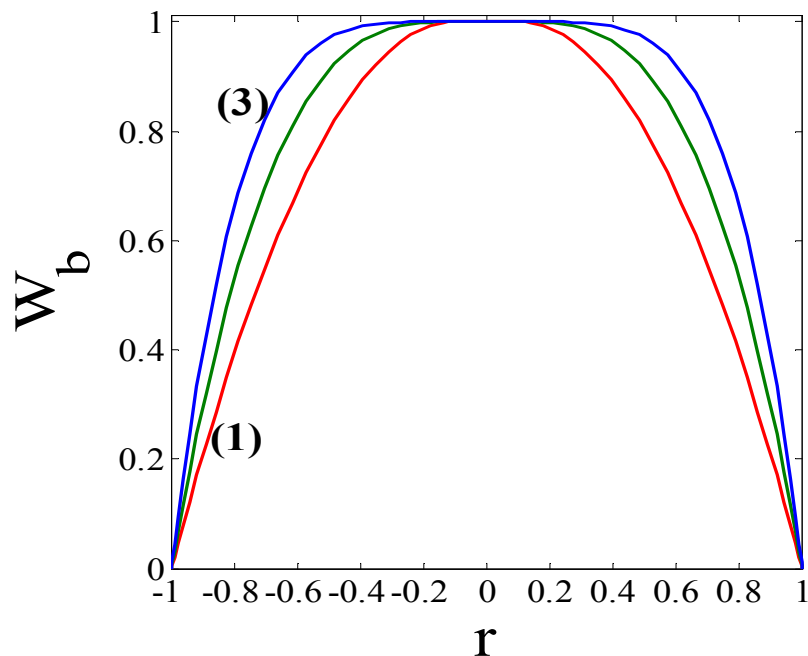


Figure (2-3) : Ecoulement de base : Profil de vitesse axiale pour $r_0 = 0.1$, $Re = 3000$ et différentes valeurs de n (1) $n = 1$ ($Hb = 0.2469$), (2) $n = 0.5$ ($Hb = 0.2029$) et (3) $n = 0.3$ ($Hb = 0.1780$)

Evidemment, cette réorganisation de l'écoulement, va modifier le profil de viscosité : $\mu = (Hb/\dot{\gamma}) + (\dot{\gamma})^{n-1}$. Au voisinage de l'interface, la viscosité est dominée par le terme $(Hb/\dot{\gamma})$. Au voisinage de la paroi, et pour une valeur fixée du rayon de la zone bouchon, l'augmentation du gradient pariétal de vitesse lorsque n diminue, se traduit par une diminution de la viscosité.

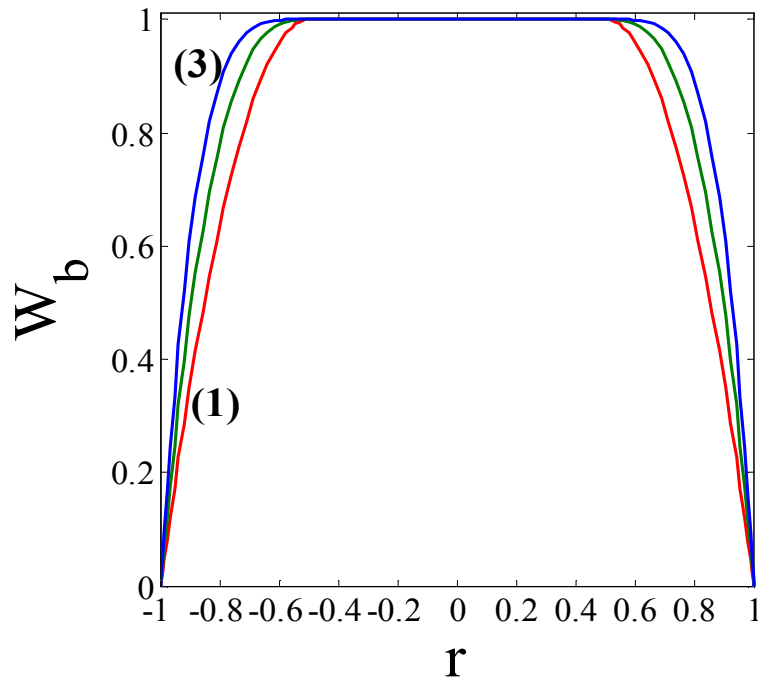


Figure (2-4) : Profil de vitesse écoulement de base pour $r_0 = 0.5$, $Re = 3000$ pour différentes valeurs de n **(1)** $n = 1$ ($Hb = 4$), **(2)** $n = 0.5$ ($Hb = 2.4495$) Et **(3)** $n = 0.3$ ($Hb = 1.9114$)

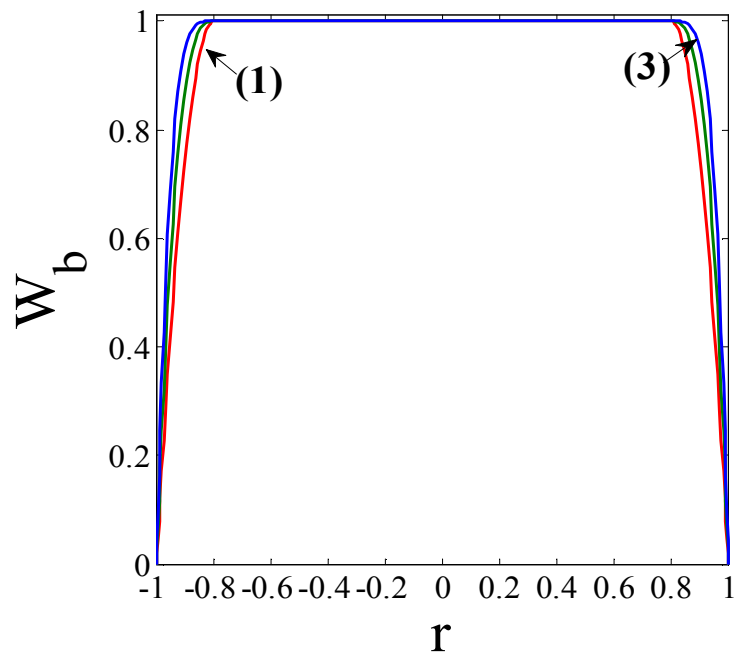


Figure (2-5) : Profil de vitesse écoulement de base pour $r_0 = 0.8$, $Re = 3000$ pour différentes valeurs de n **(1)** $n = 1$ ($Hb = 4$), **(2)** $n = 0.5$ ($Hb = 2.4495$) Et **(3)** $n = 0.3$ ($Hb = 1.9114$)

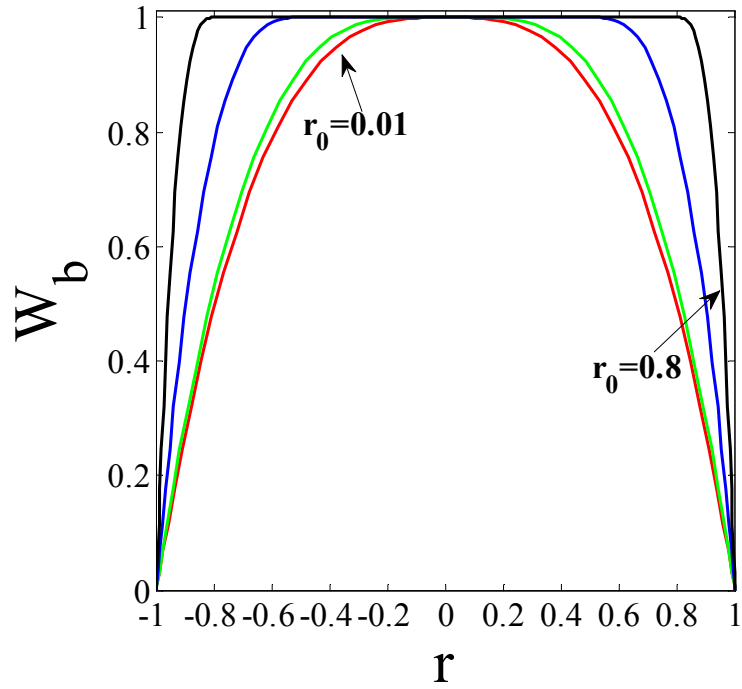


Figure (2-6) : Profile de vitesse écoulement de base $n = 0.5$ et différentes valeurs du rayon du bouchon $r_0 = 0.01$ (Hb = 0.0176), $r_0 = 0.1$ (Hb = 0.2029), $r_0 = 0.5$ (Hb = 2.4495) et $r_0 = 0.8$ (Hb = 15.4919)

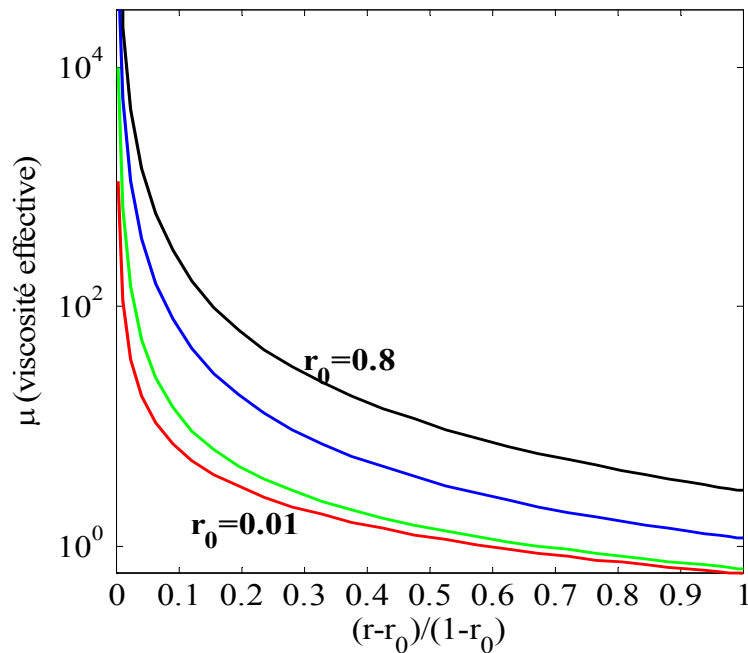


Figure (2-7): Profile de viscosité effective pour différente valeurs de zone bouchon r_0
 $n = 0.5$ et $Re = 3000$

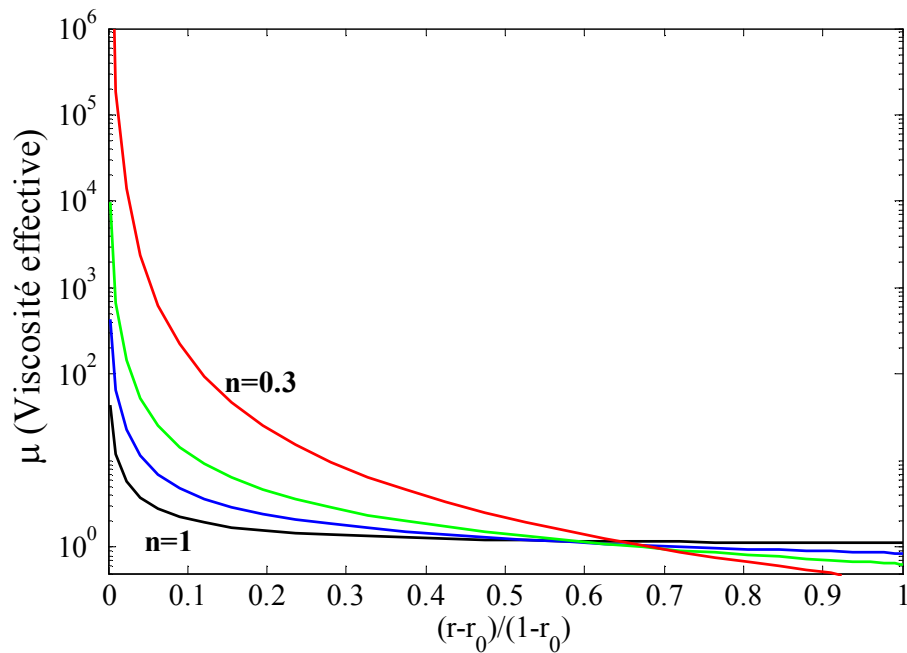


Figure (2-8): Profile de viscosité effective pour différentes valeurs de n pour $r_0 = 0.1$,
 $n = 0.3$ ($Hb = 0.1725$), $n = 0.5$ ($Hb = 0.1925$), $n = 0.7$ ($Hb = 0.2068$),
 $n = 1$ ($Hb = 0.222$) Avec $Re = 3000$

L'effet de la stratification de la viscosité est très prononcé pour des valeurs de la zone bouchons r_0 élevée ou n faible. En effet la figure (2-7) et (2-8) montrent bien le taux de cisaillement (dw/dr) à la paroi augmente quand la largeur de la zone cisailée est réduite ou si l'effet de réhofluidification augmente (n diminue).

5/Equations aux perturbations linéarisées

Nous considérons l'écoulement dans une conduite cylindrique d'un fluide non newtonien dont le comportement rhéologique obit à la loi de **Herschel-Bulkley**. D'une manière générale les équations gouvernantes sont les équations de conservations de la masse et de la quantité de mouvement établies dans le chapitre précédent.

Sous forme adimensionnelle, elles sont données par:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} \right] = -\nabla P + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (2-30)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (2-31)$$

$$\text{Avec } \boldsymbol{\tau} = \mu \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}} \quad (2-32)$$

Où $\mathbf{U} = (U, V, W)$ représente le champ de vitesse dans la direction radiale, azimutale et axiale respectivement.

P Désigne la pression, et τ est le déviateur du tenseur des contraintes.

De manière classique, on introduit une perturbation en vitesse et en pression :

$$\begin{cases} \mathbf{U}(r, \theta, z, t) = \mathbf{U}_B + \mathbf{v}(r, \theta, z, t) \\ \text{et} \\ P(r, \theta, z, t) = P_B + p(r, \theta, z, t) \end{cases} \quad (2-33)$$

\mathbf{U}_B, P_B représentent le champ de vitesse et de pression de l'écoulement de base et $\mathbf{v}(r, \theta, z, t)$ et $p(r, \theta, z, t)$ désigne la perturbation de l'écoulement de base.

Les expressions (2-33) sont injectées dans le système d'équations (2-30) et (2-31) de manière à constituer les équations aux perturbations. Dans le cadre de la théorie linéaire, on ne garde que les termes du premier ordre en perturbations. On obtient :

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + [(\mathbf{U}_B \cdot \nabla) \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{U}_B] = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}' \\ \text{et} \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \mathbf{v} = (u, v, w) \\ \mathbf{U}_B \equiv (0, 0, W_B) \end{cases} \quad (2-34)$$

Dans les équations précédentes, $\boldsymbol{\tau}'$ désigne une perturbation du déviateur du tenseur des contraintes.

Suivant r :

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} + W_B \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial r} + \left[\frac{\partial}{\partial r} \tau'_{rr} + \frac{1}{r} (\tau'_{rr} - \tau'_{\theta\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau'_{r\theta}) + \frac{\partial}{\partial z} \tau'_{rz} \right] \quad (2-35)$$

Suivant θ :

$$\left[\frac{\partial v}{\partial t} + W_B \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{r \partial \theta} + \left[\frac{\partial}{\partial r} \tau'_{r\theta} + \frac{2}{r} \tau'_{r\theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau'_{\theta\theta}) + \frac{\partial}{\partial z} \tau'_{rz} \right] \quad (2-36)$$

Suivant z :

$$\left[\frac{\partial w}{\partial t} + W_B \cdot \frac{\partial w}{\partial z} + u \cdot \frac{\partial W_B}{\partial r} \right] = -\frac{\partial p}{\partial z} + \left[\frac{\partial}{\partial r} \tau'_{rz} + \frac{1}{r} \tau'_{rz} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau'_{\theta z}) + \frac{\partial}{\partial z} \tau'_{zz} \right] \quad (2-37)$$

Continuité :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot u) + \frac{\partial v}{r \partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2-38)$$

5.1/ Expressions des contraintes

Nous exprimons les contraintes en fonction du taux de déformation $\dot{\gamma}$ et de la viscosité μ de ceux de l'écoulement de base et de la perturbation.

De ce faite on a :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} &= \mu \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \mu(\mathbf{U}_{B+v}) \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{U}_{B+v}) = (\mu_B + \mu') \cdot (\dot{\boldsymbol{\gamma}}_B + \dot{\boldsymbol{\gamma}}') \\ \boldsymbol{\tau} &= \mu_B \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}}_B + \mu' \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}}_B + \mu_B \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}}' + \mu' \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}}' \longrightarrow \text{(Terme quadratique)}\end{aligned}\quad (2-39)$$

Après simplification des termes du deuxième ordre la contrainte s'exprime par:

$$\boldsymbol{\tau} = \mu_B \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}}_B + \mu' \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}}_B + \mu_B \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}}' \quad (2-40)$$

μ_B et μ' sont les viscosités de l'écoulement de base et de la perturbation respectivement.

La perturbation du déviateur du tenseur des contraintes est :

$$\boldsymbol{\tau}' = \mu' \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}}_B + \mu_B \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}}' \quad (2-41)$$

Avec ;

$$\dot{\gamma}'_{ij} = \begin{bmatrix} \dot{\gamma}'_{rr} & \dot{\gamma}'_{r\theta} & \dot{\gamma}'_{rz} \\ \dot{\gamma}'_{\theta r} & \dot{\gamma}'_{\theta\theta} & \dot{\gamma}'_{\theta z} \\ \dot{\gamma}'_{zr} & \dot{\gamma}'_{z\theta} & \dot{\gamma}'_{zz} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \dot{\gamma}_{B,i,j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{dW_B}{dr} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{dW_B}{dr} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2-42)$$

Les éléments de la matrice $\dot{\gamma}'_{ij}$ s'écrivent eux même comme suit :

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}'_{rr} &= 2 \frac{\partial u}{\partial r} & ; & \quad \dot{\gamma}'_{\theta r} = \dot{\gamma}'_{r\theta} & ; & \quad \dot{\gamma}'_{\theta\theta} = 2 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{v}{r} \right] \\ \dot{\gamma}'_{zz} &= 2 \frac{\partial w}{\partial z} & ; & \quad \dot{\gamma}'_{zr} = \dot{\gamma}'_{rz} & ; & \quad \dot{\gamma}'_{rz} = \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right] \\ \dot{\gamma}'_{\theta z} &= \left[\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} \right] & ; & \quad \dot{\gamma}'_{z\theta} = \dot{\gamma}'_{\theta z} & ; & \quad \dot{\gamma}'_{r\theta} = \left[\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right]\end{aligned}\quad (2-43)$$

Pour un fluide de **Herschel-Bulkley** l'expression de la viscosité en fonction du deuxième invariant du tenseur des taux de déformation est donnée par :

$$\mu = \left[\frac{Hb}{\Gamma} + \Gamma \frac{n-1}{2} \right] \quad \text{Avec} \quad \Gamma = \frac{1}{2} \gamma_{ij} \cdot \gamma_{ij} \quad (2-44)$$

(voir annexe1 pour le détail des équations)

Chapitre 3

ANALYSE LINEAIRE DE STABILITE (Approche Modale)

1/ Introduction

L'équation de conservation de quantité de mouvement (2-42) et (2-43) sont linéarisées, puis exprimées selon l'un des deux formalismes (u, v) ou (u, w) . Dans un premier temps, on s'intéresse au comportement asymptotique aux temps long d'une perturbation infinitésimale. Pour cela, une approche modale est adoptée. Celle-ci conduit à un problème aux valeurs propres résolu numériquement par une méthode spectrale. Une analyse détaillée des spectres des opérateurs linéarisés est effectuée pour des perturbations axisymétriques, des perturbations homogènes dans la direction axiale et des perturbations tridimensionnelles. En conclusion, les résultats les plus significatifs sont rappelés, en particulier ceux concernant la stabilité d'un écoulement de poiseuille d'un fluide purement visqueux.

2/ Equations aux perturbations linéarisées

Les équations aux perturbations linéarisées sont homogènes dans les directions axiale et azimutale. Il est alors naturel de chercher une solution du problème linéaire sous forme d'une série de Fourier. Comme le problème est linéaire, on peut considérer chaque mode séparément

$$(v(r, \theta, z, t), p(r, \theta, z, t)) = (v(r, t), p(r, t)) e^{i(m\theta + \alpha z)}, \quad (3-1)$$

où m est le nombre d'onde azimutal et α le nombre d'onde axial.

En tenant compte de l'équation (3-1), les équations aux perturbations linéarisées se réduisent après un calcul algébrique dont les détails sont donnés en annexe 1

$$D(ru) + i[mv + \alpha rw] = 0 \quad (3-2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -DP + \left(\begin{array}{l} \text{terme Visqueux "Newtonien"} \\ \frac{1}{Re} \mu_B \left[D^2 u + \frac{1}{r} Du - \left(\frac{m^2+1}{r^2} + \alpha^2 \right) u - \frac{2imv}{r^2} \right] - \overbrace{W_B i \alpha u}^{\text{terme d'Inertie}} \\ \text{terme} \\ \frac{2}{Re} \frac{d\mu_B}{dr} Du + \frac{1}{Re} (\mu_t - \mu_B) [i \alpha Dw + i^2 \alpha^2 u] \\ \text{de Stratification} \quad \text{terme visqueux "Non-Newtonien"} \end{array} \right) \quad (3-3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{imP}{r} + \left(\begin{array}{l} \text{terme Visqueux "Newtonien"} \\ \frac{1}{Re} \mu_B \left[D^2 v + \frac{1}{r} Dv - \left(\frac{m^2+1}{r^2} + \alpha^2 \right) v + \frac{2imu}{r^2} \right] - \overbrace{W_B i \alpha v}^{\text{terme d'Inertie}} \\ \text{terme} \\ \frac{1}{Re} \frac{d\mu_B}{dr} \left[Dv - \frac{v}{r} + \frac{iu}{r} \right] \\ \text{de Stratification} \end{array} \right) \quad (3-4)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -i \alpha P + \left(\begin{array}{l} \frac{1}{Re} \mu_B \left[D^2 w + \frac{1}{r} Dw - \left(\frac{m^2}{r^2} + \alpha^2 \right) w \right] - i \alpha W_B w - u D W_B \\ \text{termes newtonien} \\ + \frac{1}{Re} \left[\frac{d\mu_B}{dr} + \frac{d(\mu_t - \mu_B)}{dr} \right] [Dw + i \alpha u] \\ \text{non-newtonien} \\ + \frac{1}{Re} (\mu_t - \mu_B) \left(\frac{1}{r} [Dw + i \alpha u] + [D^2 w + i \alpha Du] \right) \\ \text{non-newtonien} \end{array} \right) \quad (3-5)$$

2-1/Cconditions aux limites

Les conditions à la paroi et à l'interface, conduisent à

$$u(1) = v(1) = w(1) = 0, \quad (3-6)$$

$$u(r_0) = v(r_0) = w(r_0) = 0, \quad (3-7)$$

$$Du(r_0) = Dv(r_0) = 0, \quad (3-8)$$

$$Dw(r_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 1 \\ h \frac{2}{(1-r_0)^2} & \text{si } n = 1 \end{cases} \quad (3-9)$$

Les conditions initiales sont données par :

$$\begin{aligned} u(r, t = 0) &= u_0(r) \\ v(r, t = 0) &= v_0(r), \\ w(r, t = 0) &= w_0(r). \end{aligned} \quad (3-10)$$

Après manipulation, on se retrouve avec neuf conditions aux limites : trois à la paroi et six à l'interface. Le système paraît donc surdéterminé. En fait, les deux conditions de Neumann à l'interface $r = r_0$: $Du(r_0) = Dv(r_0) = 0$ sont nécessaires pour palier à la singularité de la viscosité effective au voisinage de l'interface. La condition (3-8) est aussi une condition de Neumann lorsque $n < 1$. Elle permet de faire face au comportement singulier de μ au voisinage de r_0 .

Lorsque $n = 1$ (*fluide de Bingham*), la condition (3-8) est une condition sur h et non sur w . Elle permet d'évaluer la perturbation de l'interface. Les conditions aux limites de type Dirichlet $u = 0$ à $r = r_0$, indiquent que dans le cadre de la théorie linéaire, le mouvement de la zone bouchon n'est pas modifié par une perturbation infinitésimale.

Ainsi, tout se passerait comme si on avait un écoulement composé Couette-Poiseuille d'un fluide rhéofluidifiant entre deux cylindres coaxiaux où le cylindre extérieur est fixe et le cylindre intérieur (zone bouchon) se déplace axialement avec une vitesse constante = 1. Finalement, le système d'équations (3-3), (3-4) et (3-5) peut s'écrire en termes de u et v si $\alpha \neq 0$ ou en termes u et w si $m \neq 0$

2-2/ Formulation (u, v)

En supposant que $\alpha \neq 0$, on élimine w de l'équation (3-3), et la pression résultante de (3-2) est remplacée dans (3-4) et (3-5). Ces changements conduisent aux équations suivantes formulées en termes u et v :

$$-i \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{os} & \mathcal{L}_1 \\ \mathcal{L}_2 & \mathcal{L}_{sq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} -\frac{L}{\alpha} & -\frac{im}{\alpha}(L + \alpha^2 - D^2) \\ -\frac{m}{\alpha r} D^+ & -i \left(\alpha^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (3-11)$$

Ou ;

$$L = DD^+ - \alpha^2 \quad \text{et} \quad D^+ = D + \frac{1}{r}. \quad (3-12)$$

L'équation (3-11) peut être écrite :

$$-i \mathcal{L}_{uv} (u, v)^T = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{M}_{uv} (u, v)^T \quad (3-13)$$

avec les termes ;

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{os} = & -W_\ell L - \left(\frac{DW_\ell}{r} - D^2 W_\ell \right) - \frac{i}{\alpha} \mu \left[L^2 - \frac{m^2}{r^2} L + \frac{2m^2}{r^2} \left(D + \frac{1}{r} \right) \right] \\ & - \frac{i}{\alpha} D \mu \left[\left(2DL + \frac{L}{r} \right) - \frac{m^2}{r^2} \left(D + \frac{1}{r} \right) \right] - \frac{i}{\alpha} D^2 \mu [L + 2\alpha^2] - i \alpha (\mu_t - \mu) [L + 2\alpha^2] \\ & - \frac{i}{\alpha} D \left(\frac{1}{r} D (r (\mu_t - \mu) [L + 2\alpha^2]) \right) \end{aligned} \quad (3-14)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 = & -i m W_\ell (L + \alpha^2 - D^2) - \frac{i m}{r} DW_\ell + \frac{m}{\alpha} \mu \left[L^2 - L (D^2) - \frac{m^2}{r^2} (L + \alpha^2) \right] \\ & + \frac{m}{\alpha} D \mu \left[2DL + 2\alpha^2 - 2D^3 + \frac{1}{r} (L - D^2) - \frac{m^2}{r^3} \right] - \alpha m (\mu_t - \mu) [L + \alpha^2 - D^2] \\ & + \frac{m}{\alpha} \mu \left[\alpha^2 \left(L + \frac{2}{r^2} \right) + \frac{m^2}{r^2} \left(D^2 + \frac{2}{r^2} \right) \right] + \frac{m}{\alpha} D^2 \mu [L + \alpha^2 - D^2] \\ & + \frac{m}{\alpha} D \left(\frac{1}{r} D (r (\mu_t - \mu) (L + \alpha^2 - D^2)) \right) \end{aligned} \quad (3-15)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 = & -\frac{m}{r} W_\ell \left(D + \frac{1}{r} \right) - \frac{m}{r} DW_\ell - \frac{i m}{\alpha r} \mu \left[DL + \frac{1}{r} (L - 2\alpha^2) - \frac{m^2}{r^2} \left(D + \frac{1}{r} \right) \right] \\ & - \frac{i m}{\alpha r} D \mu (L + \alpha^2) - \frac{i m}{\alpha r^2} D (r (\mu_t - \mu) (L + 2\alpha^2)) \end{aligned} \quad (3-16)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{sq} = & -i \alpha W_\ell \left(\alpha^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) + \mu \left[\left(\alpha^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) \left(L - \frac{m^2}{r^2} \right) - \frac{2m^2}{r^3} \left(D - \frac{1}{r} \right) \right] \\ & + D \mu \left[\left(\alpha^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) \left(D - \frac{1}{r} \right) \right] + \frac{m^2}{r^2} D \left[(\mu_t - \mu) \left(D - \frac{1}{r} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3-17)$$

On note que lorsque $m = 0$, les opérateurs de couplage L_1 et L_2 s'annulent et les opérateurs d'Orr-sommerfeld modifié L_{os} et de Squire modifié L_{sq} , sont complètement découplés.

2-3/Formulation (u, w)

Le problème peut être écrit en u et w pour $m \neq 0$. On élimine alors v de l'équation (3-3), et la pression résultante de (3-5) est remplacée dans (3-2) et (3-4). Ces manipulations conduisent aux équations suivantes :

$$\begin{aligned}
& -i \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{c1} & \mathcal{L}_{c2} \\ \mathcal{L}_{c3} & \mathcal{L}_{c4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \\
\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} m^2 - [r^2 (L + \alpha^2) + 2rD^+] & -i\alpha r^2 \left(D^+ + \frac{1}{r}\right) \\ -i\alpha r^2 D^+ & (m^2 + \alpha^2 r^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3-18}$$

le système peut être écrit sous la forme ;

$$-i \mathcal{L}_{uw} (u, w)^T = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{M}_{uw} (u, w)^T \tag{3-19}$$

avec les termes ci dessous;

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{c1} = & \alpha m^2 W_\ell - \alpha DW_\ell \left[r^2 \left(D + \frac{1}{r} \right) \right] - \alpha W_\ell \left[r^2 (L + \alpha^2) + 2r \left(D + \frac{1}{r} \right) \right] \\
& -i\mu \left[r^2 D^4 - m^2 (2L - \alpha^2) - L \right] - i\mu \left[6r \left(D^3 + \frac{D^2}{r} \right) - \alpha^2 r^2 \left(D^2 + \frac{3D}{r} \right) \right] \\
& -i\mu \left[2m^2 \left(\frac{D}{r} - \frac{1}{r^2} \right) - 2m^2 \left(\frac{D}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{m^4}{r^2} \right] - iD\mu \left[rL - \alpha^2 r^2 D \right] \\
& -iD\mu \left[2r^2 \left(D^3 + \frac{2D^2}{r} \right) - m^2 \left(2D - \frac{1}{r} \right) \right] - i\alpha^2 m^2 (\mu_t - \mu) \\
& -iD^2\mu \left[r^2 \left(L + \alpha^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) \right]
\end{aligned} \tag{3-20}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{c2} = & -i\alpha^2 W_\ell \left[r^2 \left(D + \frac{2}{r} \right) \right] - i\alpha^2 r^2 DW_\ell \\
& +\mu \left[\alpha r^2 D^3 + \alpha r \left(5D^2 + \frac{3D}{r} \right) - (\alpha^3 r^2 + \alpha m^2) \left(D + \frac{2}{r} \right) \right] \\
+D\mu \left[\alpha r^2 \left(2D^2 + \frac{5}{r} \right) - (\alpha^3 r + \alpha m^2) \right] & + D^2\mu \left[\alpha r^2 D \right] - (\mu_t - \mu) \alpha m^2 D
\end{aligned} \tag{3-21}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{c3} = & -i\alpha^2 W_\ell (r^2 D + r) - i m^2 DW_\ell \\
& +\mu \left[\alpha r L + \alpha r^2 \left(D^3 + \frac{3D^2}{r} \right) - \alpha r^2 \left(\alpha^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) D + \frac{\alpha m^2}{r} \right] \\
& +D\mu \left[\alpha r^2 (L + \alpha^2) \right] - \frac{\alpha m^2}{r} D \left[r (\mu_t - \mu) \right]
\end{aligned} \tag{3-22}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{c4} &= \alpha W_\ell (m^2 + \alpha^2 r^2) \\
&+ i \mu \left[(m^2 + \alpha^2 r^2) \left(L + \frac{1}{r^2} - \frac{m^2}{r^2} \right) + 2\alpha^2 r D \right] \\
&+ i D \mu \left[(m^2 + \alpha^2 r^2) D \right] + \frac{i m^2}{r} D \left[r (\mu_t - \mu) D \right]
\end{aligned} \tag{3-23}$$

3/Comportement aux temps longs de la perturbation

Lorsque le comportement au temps long est considéré, on suppose alors que la perturbation se comporte en tendance comme suit:

$$\Psi(r, t) = \psi(r) \exp(-i C t). \tag{3-24}$$

Où Ψ représente $(u, v)^T$ ou $(u, w)^T$ et $C = C_i + i C_r$ est la fréquence complexe. La vitesse de phase de la perturbation est donnée par C_r/α et le taux de croissance par C_i . En remplaçant Ψ par son expression (3-24), le problème aux valeurs initiales devient un problème aux valeurs propres qui peut être écrit formellement sous la forme suivante :

$$\mathcal{L}_{uv} (u, v)^T = C \mathcal{M}_{uv} (u, v)^T \quad \text{or} \quad \mathcal{L}_{uw} (u, w)^T = C \mathcal{M}_{uw} (u, w)^T \tag{3-25}$$

Selon que la formulation (u, v) (si $m = 0$) ou (u, w) (si $\alpha = 0$) est utilisée, on note que le problème aux valeurs propre (3-25) n'est défini que sur la zone $r \in (r_0, 1)$.

En augmentant le nombre de **Herschel-Bulkley**, la largeur de la zone de fluide cisailée $(1 - r_0)$ diminue. Pour prendre en compte cet effet géométrique, les paramètres réduits suivants sont alors introduits:

$$r = \tilde{r}(1 - r_0) + r_0, \quad z = \tilde{z}(1 - r_0), \quad t = \tilde{t}(1 - r_0), \tag{3-26}$$

$$\tilde{\alpha} = \alpha (1 - r_0), \quad \tilde{C} = C (1 - r_0), \tag{3-27}$$

$$\tilde{R}e = Re (1 - r_0)^n, \quad \tilde{H}b = Hb (1 - r_0)^n. \tag{3-28}$$

le domaine de calcul variable $(r_0, 1)$ est transformé en un domaine fixe $(0, 1)$. Le profil de l'écoulement de base devient ainsi indépendant de r_0 d'où :

$$W_b = \left(1 - (\tilde{r})^{1+\frac{1}{n}} \right) \quad ; \quad \tilde{r} \in [1, 0] \tag{3-29}$$

La méthode utilisée pour résoudre le système (3-29) est basée sur une approximation spectrale (u_n, v_n) de la forme :

$$(u_N, v_N) = \sum_{n=0}^N (a_n, b_n) T_n(x) \quad (3-30)$$

où les $T_n(x)$ sont les polynômes de Chebyshev définis par :

$$T_n(x) = \cos(n \operatorname{Arccos}(x)), \quad j = 0, 1, 2, \dots, N; |x| \leq 1. \quad (3-31)$$

Cette approximation spectrale est combinée avec une méthode de collocation, qui consiste à imposer à (u, v) de satisfaire exactement le système (3-25) en N points de collocation répartis dans l'intervalle $(-1, +1)$. Dans notre cas, ces points de collocation sont les extrêma du polynôme de Chebyshev $T(x)$, appelés aussi, points de Gauss Lobatto. Ils sont donnés par :

$$x_j = \cos \frac{\pi j}{N} \quad j = 0, \dots, N \quad (3-32)$$

Le résultat est un problème aux valeurs propres généralisé de la forme

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{pmatrix} \quad (3-33)$$

où \underline{a} et \underline{b} sont des vecteurs de la forme

$$\underline{a} = (a_0, \dots, a_N)^T, \quad \underline{b} = (b_0, \dots, b_N)^T \quad (3-34)$$

Le système (3-33) est résolu à l'aide de l'algorithme **QZ** implémenté dans le Logiciel *MATLAB*. De plus amples détails sont donnés par **Schmid et Henningson** (2002) [9].

Le nombre de points de collocation a été déterminé après étude de la convergence des quinze premières valeurs propres. Celles-ci étant rangées par ordre croissant de la valeur absolue de la partie imaginaire.

Tableau (3-1): Valeurs propres pour différentes valeurs du nombre de points N . Les calculs ont été effectués en prenant $r_0 = 0.5$, $n = 0.5$, $\tilde{R}_e = 5000$ et $\tilde{H}b = 1.73$

N	no. valeur propre	\tilde{C}_r	\tilde{C}_i
41	1	0.9318931650	-0.0523156740
61	1	0.9318932667	-0.0523156946
81	1	0.9318925805	-0.0523155387
101	1	0.9318773384	-0.0523219716
121	1	0.9318639376	-0.0523220238
41	10	0.4350580890	-0.1732119513
61	10	0.4327394411	-0.1714633935
81	10	0.4327402009	-0.1714623227
101	10	0.4327300916	-0.1714670115
121	10	0.4327153276	-0.1714915539
41	15	0.4071435198	-0.1976008642
61	15	0.5765737214	-0.2426230385
81	15	0.5765683085	-0.2426343986
101	15	0.5766036942	-0.2425648280
121	15	0.5766798690	-0.2425996316

Le tableau (3-1), montre la convergence de la 1^{ere}, 10^{eme} et 15^{eme} valeur propre lorsque N augmente, pour $\tilde{\alpha} = 1$, $m = 1$. Après plusieurs tests, pour différentes valeurs des paramètres rhéologiques.

Il s'avère que pour $N = 120$, les valeurs propres calculées sont précises à quatre décimales près pour pratiquement toutes les situations considérées. Dans ce qui suit, dans nos calculs, nous adopterons ce nombre de polynomes.

4/Perturbation Unidimensionnelle

Dans le cas d'une perturbation unidimensionnelle, c'est-à-dire, $\tilde{\alpha} = m = 0$, les termes inertiels linéaires qui assurent l'échange d'énergie entre l'écoulement de base et la perturbation s'annulent. Le problème aux valeurs initiale (3-2) - (3-5) avec les conditions aux limites associées (3-6) - (3-10) se réduit à

$$u = 0 ; P(r) = \text{constante}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\tilde{R}_e} \frac{1}{\eta^2} \tilde{D} \left(\eta^3 \tilde{\mu}_b \tilde{D} \left(\frac{v}{\eta} \right) \right) \quad (3-35)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{\tilde{R}_e} \frac{1}{\eta} \tilde{D} (\eta \tilde{\mu}_t \tilde{D} w) \quad (3-36)$$

Avec ;

$$\eta = \tilde{r} + \frac{r_0}{1-r_0} ; \tilde{D} = \frac{d}{d\tilde{r}} ; \tilde{\mu}_b = \frac{\tilde{H}_b}{|\tilde{D}W_b|} + |\tilde{D}W_b|^{n-1} ; \tilde{\mu}_t = n |\tilde{D}W_b|^{n-1} \quad (3-37)$$

Les conditions aux limites sont :

$$v(\tilde{r} = 1) = w(\tilde{r} = 1) = v(\tilde{r} = 0) = w(\tilde{r} = 0) = 0; \quad (3-38)$$

On multiplie l'équation (2-40) par v et (2-41) par w puis on integre de 0 a 1 pour obtenir l'expression ci-dessous :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \langle v^2 \rangle_{\tilde{r}} = -\frac{1}{\tilde{Re}} \left\langle \tilde{\mu}_b \left(\eta \tilde{D} \left(\frac{v}{\eta} \right) \right)^2 \right\rangle_{\tilde{r}} \quad (3-39)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \langle w^2 \rangle_{\tilde{r}} = -\frac{1}{\tilde{Re}} \left\langle \eta \tilde{\mu}_t (\tilde{D}w)^2 \right\rangle_{\tilde{r}} \quad (3-40)$$

$$\text{Ou ; } \langle (\cdot) \rangle_{\tilde{r}} = \int_0^1 (\cdot) \eta d\tilde{r}$$

Il est clair que l'énergie cinétique de la perturbation diminue uniformément avec le temps. Par conséquent, l'écoulement de Hagen-Poiseuille d'un fluide de **Herschel-Bulkley** est linéairement inconditionnellement stable par rapport à une perturbation unidimensionnelle.

En cherchant une solution des équations établit (3-35) et (3-36) sous la forme $\exp(-i \tilde{C} t) (\hat{v}, \hat{w})$, on peut montrer directement que les valeurs propres sont purement imaginaires.

La Figure. (3-1) illustre le spectre des valeurs propres obtenu à un nombre de Reynolds $Re = 5000$ pour un fluide de Herschel-Bulkley avec $\tilde{r} = 0,5$ et $n = 0.5$. on constate que la valeur absolue du taux d'accroissement maximal $|\tilde{C}_{imax}|$ varie en Re^{-1} comme le montre la figure (3-2).

Pour un r_0 fixé, $|\tilde{C}_{imax}|$ diminue avec l'augmentation des effets de rhéofluidification, alors que pour n fixé, $|\tilde{C}_{imax}|$ augmente avec l'augmentation de r_0 . Des résultats opposés sont obtenus lorsqu'on utilise un nombre de Reynolds défini avec la viscosité évaluée a la paroi.

La sélection d'une échelle caractéristique de la viscosité peut varier d'un état à un autre. Ce qui est important de noter, c'est que les résultats obtenus pour une échelle caractéristique donnée de la viscosité, ne peuvent pas être transposés pour une autre échelle de la viscosité. .

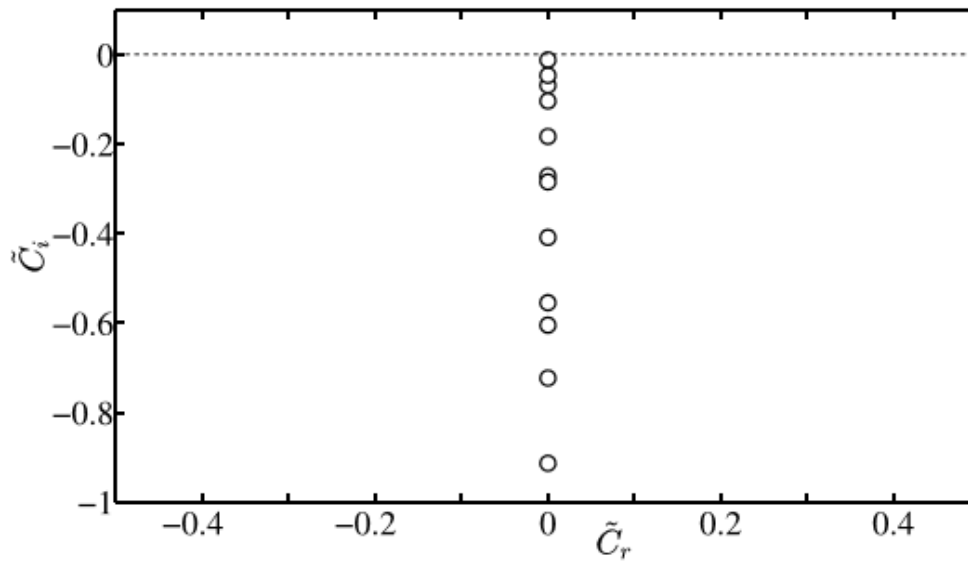


Figure (3-1): Spectre des valeurs propre. Ecoulement d'un fluide Herschel-Bulkley dans une conduite, $\tilde{Re} = 5000$, $n = 0.5$, $r_0 = 0.5$, $\tilde{\alpha} = 0$, $m = 0$

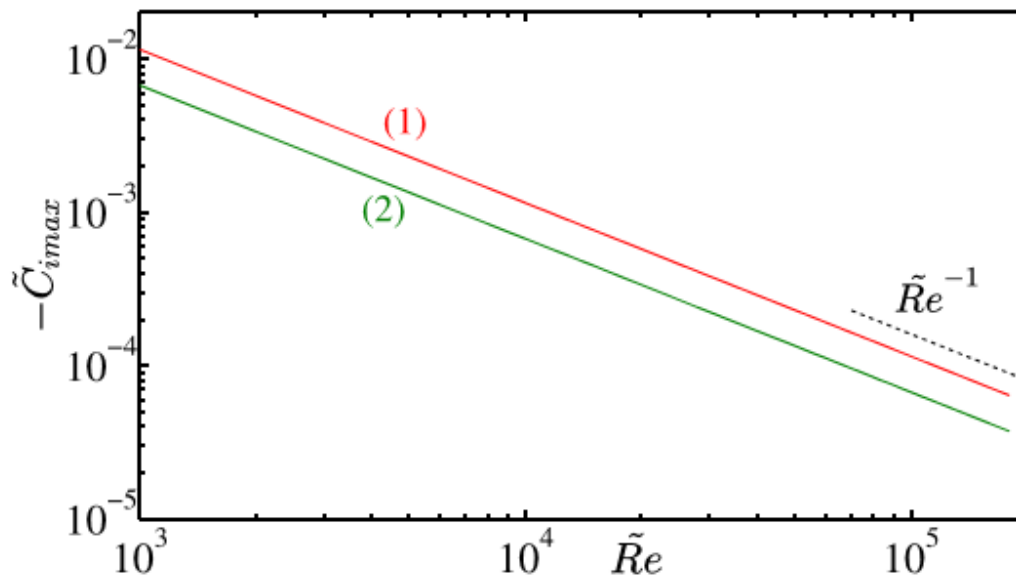


Figure (3-2): Taux d'accroissement maximal $|\tilde{C}_{i_{max}}|$ en fonction de \tilde{Re} pour deux valeurs d'indice de réhofluidification (1) $n = 1$ et (2) $n = 0.3$

5/ Cas de perturbations axisymétriques

La formulation (u, v) est utilisée $m = 0$. Le problème aux valeurs propres (3-25) se réduit à deux équations différentielles découplées: équation d'Orr-Sommerfeld et équation de Squire.

Les modes d'Orr-Sommerfeld sont solution de l'équation

$$\mathcal{L}_{os}u = -i\tilde{C}\tilde{R}eLu, \quad (3-41)$$

Avec les conditions aux limites suivantes ;

$$u(1) = \tilde{D}u(1) = u(0) = \tilde{D}u(0) = 0, \quad (3-42)$$

où

$$L = DD^+ - \tilde{\alpha}^2; \quad \tilde{D}^+ = \tilde{D} + \frac{1}{\eta}; \quad \text{et } \mathcal{L}_{os} \text{ est l'opérateur d'Orr - Sommerefeld}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{os} \equiv & -i\tilde{\alpha}\tilde{R}eW_b L - i\tilde{\alpha}\tilde{R}e \left(\frac{\tilde{D}W_b}{\eta} - \tilde{D}^2W_b \right) + \tilde{\mu}_b L^2 + (\tilde{D}\tilde{\mu}_b) \left(2\tilde{D}L + \frac{1}{\eta}L \right) \\ & + (\tilde{D}^2\tilde{\mu}_b) (L + 2\tilde{\alpha}^2) + (L + 2\tilde{\alpha}^2) [(\tilde{\mu}_t - \tilde{\mu}_b) (L + 2\tilde{\alpha}^2)]. \end{aligned} \quad (3-43)$$

Le spectre des valeurs propres associé à l'opérateur discrétisé $(i/R_e)L^{-1}\mathcal{L}_{os}$ présente trois branches notées A, P et S identifiées par Mack [23] et correspondent à trois familles différentes de valeurs propres. La figure (3-3) montre les spectres de valeurs propres obtenus pour un R_e fixé et différents paramètres rhéologiques. Globalement, le spectre est similaire au cas Newtonien.

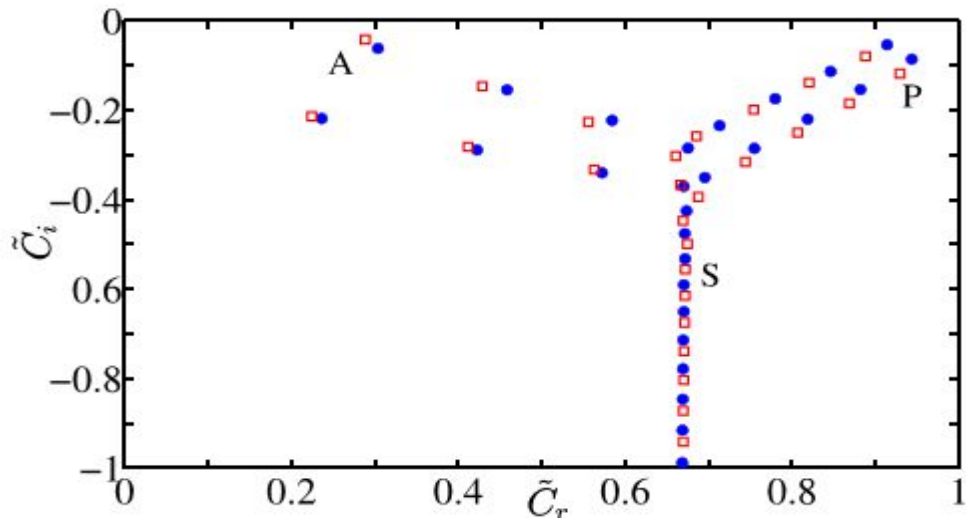


Figure (3-3): Spectre des valeurs propres à $\tilde{R}_e = 5000$, $\tilde{\alpha} = 1$, $m = 0$, $n = 0.5$ et deux valeurs différentes du rayon de la zone bouchon : $[o]$ $n = 0.5$, $r_0 = 0.1$ ($\tilde{H}b = 0.1925$) et $[■]$ $n = 0.5$, $r_0 = 0.8$ ($\tilde{H}b = 6.9282$).

La famille **A** correspond aux modes de paroi, c'est-à-dire des ondes qui se propagent à faible vitesse de phase et sont concentrées à proximité de la paroi. La famille **P** correspond à les modes d'interface, c'est-à-dire des ondes qui se propagent à

la vitesse de phase $\tilde{C}_r \approx 1$ et sont concentrées à proximité de la surface de la zone bouchon (zone non cisailée). La famille **S** correspond aux modes qui se propagent à la vitesse moyenne de l'écoulement, soit une vitesse de phase $\tilde{C}_r \approx -2/3$.

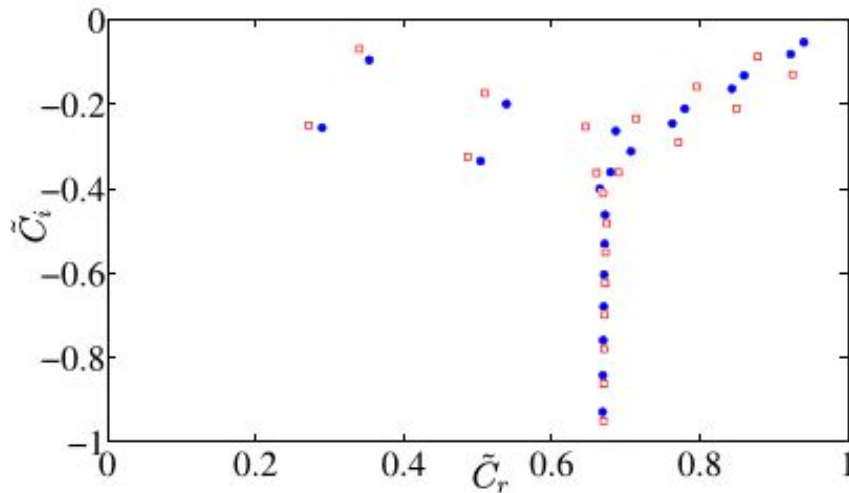


Figure (3-4): Spectre des valeurs propres de l'opérateur d'Orr-sommerfeld modifié pour un fluide Herschel-Bulkley dans une conduite, $\tilde{R}_e = 5000$, $\tilde{\alpha} = 1$ et $m = 0$ $n = 1$ les termes $\tilde{H}b$ sont artificiellement annulés pour montrer l'influence de r_0 , $\left[\bullet \right] r_0 = 0.01$ et $\left[\square \right] r_0 = 0.8$

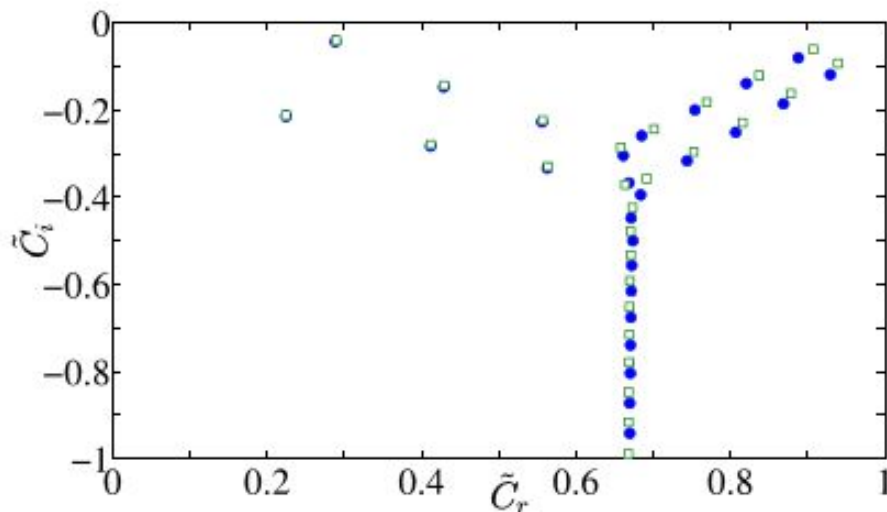


Figure (3-5): Spectre des valeurs propres pour l'opérateur Orr-sommerfeld modifié pour un fluide Herschel-Bulkley dans une conduite $\tilde{R}_e = 5000$, $\tilde{\alpha} = 1$ et $m = 0$ $n = 1$ les termes $\tilde{H}b$ sont négligé pour montrer l'influence de $\tilde{H}b$, $\left[\bullet \right] r_0 = 0.01$ et $\left[\square \right] r_0 = 0.8$

Pour faire ressortir séparément, l'influence de r_0 , c'est-à-dire la modification de la géométrie de l'écoulement sur les spectres de valeur propre, nous avons fixé $n = 1$ et nous avons annulé artificiellement les termes qui sont facteurs de $\tilde{H}b$ dans l'expression de μ_b .

Le résultat est illustré à la Figure (3-4). Le maximum du taux d'amplification de la perturbation augmente lorsque l'épaisseur de la zone cisailée diminue. Ce résultat peut être rapproché de celui obtenu par Mott et Joseph [24] dans le cas d'un fluide Newtonien en conduite annulaire. Les auteurs avaient en effet montré que le nombre de Reynolds critique décroît lorsque le rapport des rayons des cylindres interne et externe tend vers 1.

Dans la Figure. (3-5) on a représenté le spectre de valeurs propres de l'opérateur d'Orr-Sommerfeld modifié, pour $\tilde{R}_e = 5 \times 10^3$, $\alpha = 1$, $m = 0$, $n = 0.5$, $\tilde{r} = 0.8$ et $\tilde{H}b = 6.9282$. Ce spectre est comparé est à celui obtenu lorsque les termes en facteur $\tilde{H}b$ sont négligés. Il n'y a pratiquement aucun effet, en particulier pour les modes pariétaux. Ce résultat peut s'expliquer par le fait que pour une perturbation axisymétrique, les modes pariétaux sont plus sensibles à la viscosité tangente μ_t plutôt qu'à la viscosité « apparente » μ_b . En effet, les termes en facteur de μ_t font intervenir une dérivée quatrième $\tilde{D}^4 v$, alors que les termes en facteur de μ_b font intervenir une dérivée seconde $\tilde{D}^2 v$. Tout se passe donc, comme si les modes pariétaux ne sont pas « sensibles » à la contrainte seuil.

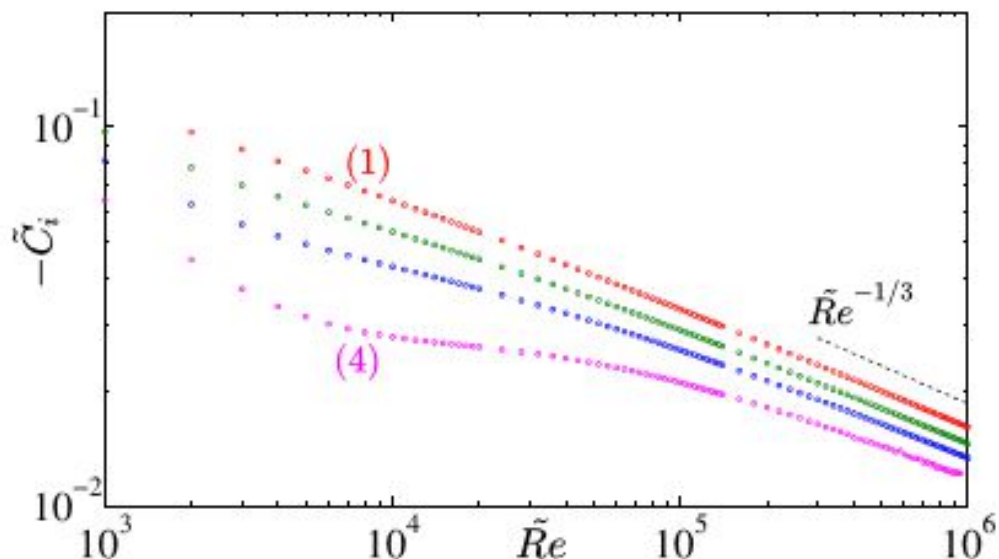


Figure (3-6): Taux d'amplification maximale de la perturbation du mode pariétal le moins stable en fonction de \tilde{R}_e pour différentes valeurs de l'indice de réhofluidification (1) $n = 1$, (2) $n = 0.7$, (3) $n = 0.5$ et (4) $n = 0.3$. Les résultats ont été obtenus pour $r_0 = 0.5$, $\tilde{\alpha} = 1$ et $m = 0$

Pour des grandes valeurs de \tilde{R}_e , le taux d'amplification maximale du mode pariétal et la vitesse de phase associée se comportent asymptotiquement en $\tilde{R}_e^{-1/3}$, comme il est montré dans la Figure(3-6) et (3-7), où nous avons représentés pour une valeur fixe de r_0 et différent valeurs de l'indice cisaillement n , $-C_{imax}$ et C_{rmax} en fonction du nombre de reynolds tilde \tilde{R}_e .

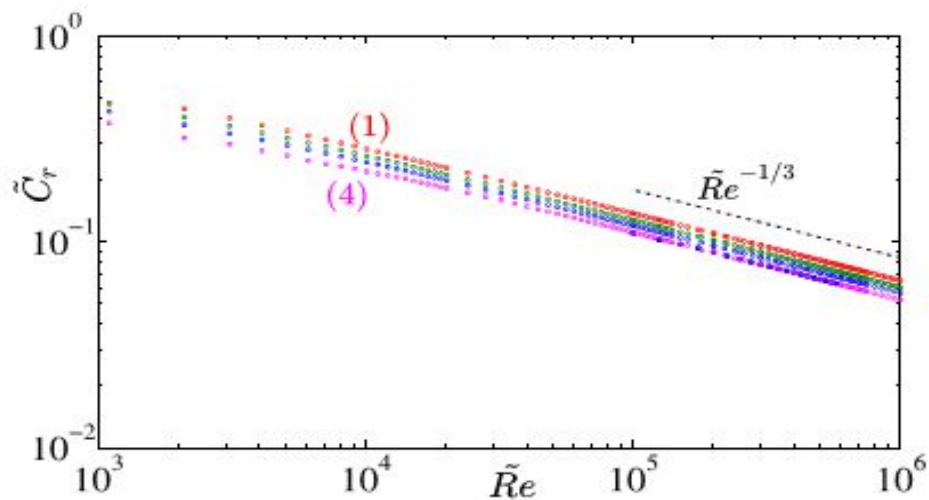


Figure (3-7): Vitesse de phase du mode pariétal le moins stable en fonction de \tilde{R}_e pour différentes valeurs d'indice (1) $n = 1$, (2) $n = 0.7$, (3) $n = 0.5$ et (4) $n = 0.3$ à un rayon de la zone bouchon $r_0 = 0.5$, $\tilde{\alpha} = 1$ et $m = 0$ d'un fluide de Herschel-Bulkley

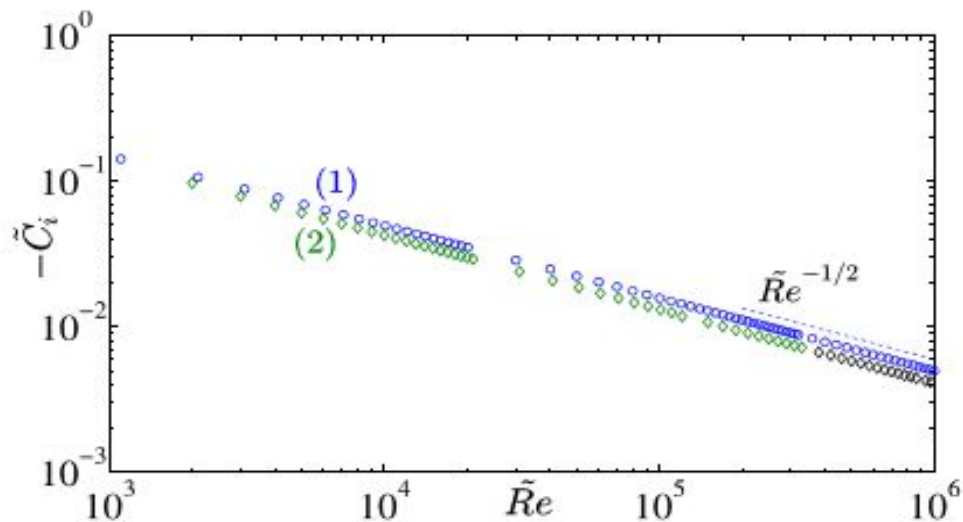


Figure (3-8): Taux d'amplification maximale de la perturbation du mode d'interface le moins stable en fonction de \tilde{R}_e pour différentes valeurs d'indice (1) $n = 1$ et (2) $n = 0.3$ à un rayon de la zone bouchon $r_0 = 0.5$, $\tilde{\alpha} = 1$ et $m = 0$ d'un fluide de Herschel-Bulkley

Concernant les modes dits d'interface, le taux d'amplification maximale de la perturbation et sa vitesse de phase associée se comportent en $\tilde{R}e^{-1/2}$, de manière similaire au cas Newtonien. Ce résultat est illustré par les Figures (3-8) et (3-9), où nous avons représentés pour une valeur fixe de r_0 et différents valeurs de l'indice de rhéofluidification n , $-C_{imax}$ et C_{rmax} en fonction du nombre de Reynolds $\tilde{R}e$.

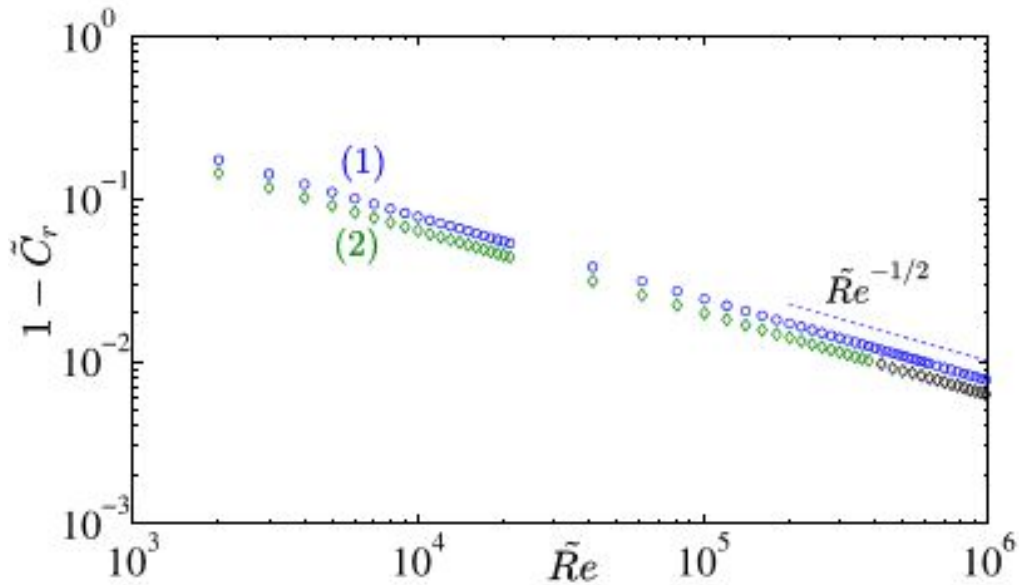


Figure (3-9): Vitesse de phase du mode d'interface le moins stable en fonction de $\tilde{R}e$ pour différentes valeurs de l'indice de rhéofluidification (1) $n = 1$ et (2) $n = 0.3$, pour un rayon de la zone bouchon $r_0 = 0.5$, avec $\tilde{\alpha} = 1$ et $m = 0$.

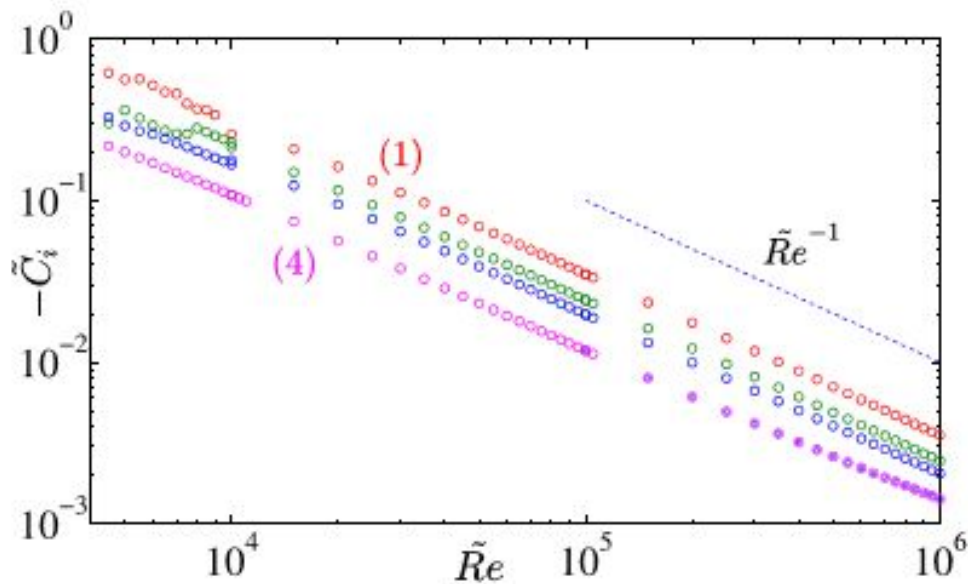


Figure (3-10): Taux d'amplification de la perturbation du mode central le moins stable en fonction de $\tilde{R}e$ pour différentes valeurs de l'indice de rhéofluidification (1) $n = 1$, (2) $n = 0.7$, (3) $n = 0.5$ et (4) $n = 0.3$, pour $r_0 = 0.5$, $\tilde{\alpha} = 1$ et $m = 0$

Pour ce qui est du mode central le moins stable, le taux d'amplification maximale de la perturbation se comporte en R_e^{-1} . La vitesse de phase étant égale à $2/3$, comme dans le cas Newtonien. Ce résultat est décrit par les Figures (3-10) et (3-11), où nous avons représentés pour une valeur fixe de r_0 et différents valeurs de l'indice de rhéofluidification n , $-C_{imax}$ et C_{rmax} en fonction du nombre de Reynolds \tilde{R}_e .

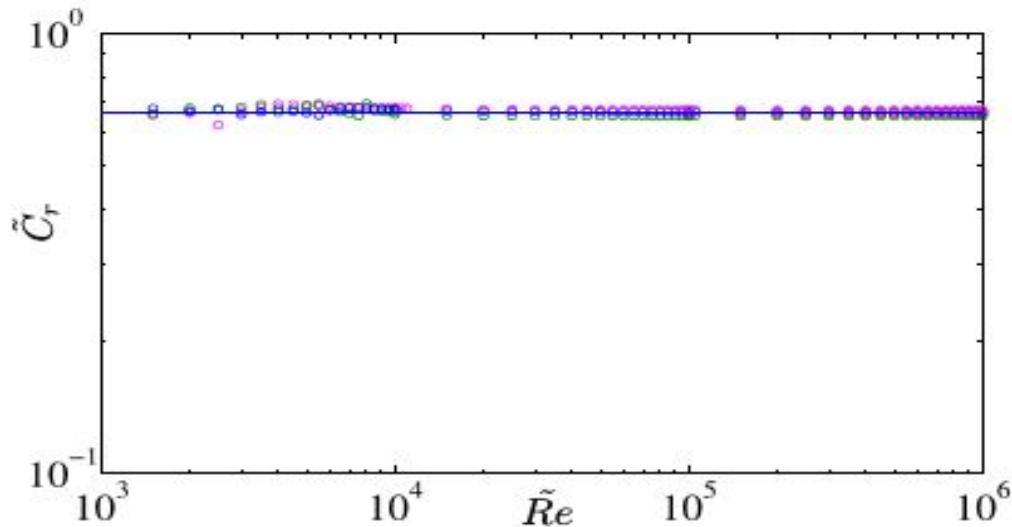


Figure (3-11): Vitesse de phase du mode central le moins stable en fonction de \tilde{R}_e pour différentes valeurs d'indice (1) $n = 1$, (2) $n = 0.7$, (3) $n = 0.5$ et (4) $n = 0.3$ à un rayon de la zone bouchon $r_0 = 0.5$, $\tilde{\alpha} = 1$ et $m = 0$.

En conclusion, les comportements asymptotiques sont similaires au cas Newtonien. En termes de \tilde{R}_e , la rhéofluidification a un effet stabilisateur.

Les modes Squire sont solution de l'équation

$$\tilde{\alpha} W_b v + i \frac{\tilde{\mu}_b}{\tilde{R}_e} (\tilde{D}\tilde{D}^+ - \tilde{\alpha}^2) + i \frac{\tilde{D}\tilde{\mu}_b}{\tilde{R}_e} \left(\tilde{D} - \frac{1}{\eta} \right) v = \tilde{C}v. \quad (3-44)$$

Avec ; $v(0) = v(1) = 0.$

En multipliant (3-51) par v^* où $(.)^*$ désigne le complexe conjugué et en intégrant ensuite entre la frontière de la zone bouchon et la paroi, on obtient:

$$\tilde{C}_i \langle |v|^2 \rangle_{\tilde{r}} = - \left\langle \frac{\tilde{\mu}_b}{\tilde{R}_e} \left[\tilde{\alpha}^2 |v|^2 + \left| \tilde{D}v - \frac{v}{\eta} \right|^2 \right] \right\rangle_{\tilde{r}}, \quad (3-45)$$

La relation (3-52) montrent clairement que les modes de Squire sont toujours amortis

6/ Cas d'une perturbations homogène dans la direction axiale

Dans ce cas nous allons utiliser la formulation (u, w) en prenant le nombre d'onde axiale $\alpha = 0$. Le problème aux valeurs propres (3-25) se réduit aux équations si dessous.

$$\begin{aligned}
 i\tilde{C} \left[(\tilde{D}^+ u)^2 + \frac{1}{\eta} \tilde{D}^+ u - \frac{m^2}{\eta^2} u \right] &= -\frac{\tilde{\mu}_b}{\tilde{Re}} \left[(\tilde{D}^+ u)^2 + \frac{1}{\eta} \tilde{D}^+ u - \frac{m^2}{\eta^2} u \right]^2 \\
 -\tilde{D} \tilde{\mu}_b \tilde{Re} \left[\left(\frac{1}{\eta} \tilde{D} \tilde{D}^+ u + 2\tilde{D}^3 u + \frac{4\tilde{D}^2}{\eta} u - \frac{2m^2}{\eta^2} \tilde{D} u + \frac{m^2}{\eta^3} u \right) \right] \\
 -\frac{\tilde{D}^2 \tilde{\mu}_b}{\tilde{Re}} \left[\tilde{D} \tilde{D}^+ u - \frac{m^2}{\eta^2} u \right] & \quad (3-46)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -i\tilde{C} w &= -\tilde{D} W_{\ell} u + \frac{\tilde{\mu}_b}{\tilde{Re}} \left[\frac{1}{\eta} \tilde{D} (\eta \tilde{D} w) - \frac{m^2}{\eta^2} w \right] \\
 &+ \frac{\tilde{D} \tilde{\mu}_b}{\tilde{Re}} \tilde{D} w + \frac{1}{\eta} \tilde{D} [\eta (\tilde{\mu}_t - \tilde{\mu}_b) (\tilde{D} w)] \quad (3-47)
 \end{aligned}$$

L'ensemble des valeurs propres du système d'équations (3-46) et (3-47) peut être divisé en deux groupes. Le premier correspond aux valeurs propres solution de l'équation (3-46) avec une solution particulière de (3-47). Le deuxième correspond aux valeurs propres (3-47) avec $u = 0$. On peut montrer facilement que les valeurs propres (pour les deux groupes) sont purement imaginaires, i.e., les modes propres sont amortis et ne se propagent pas.

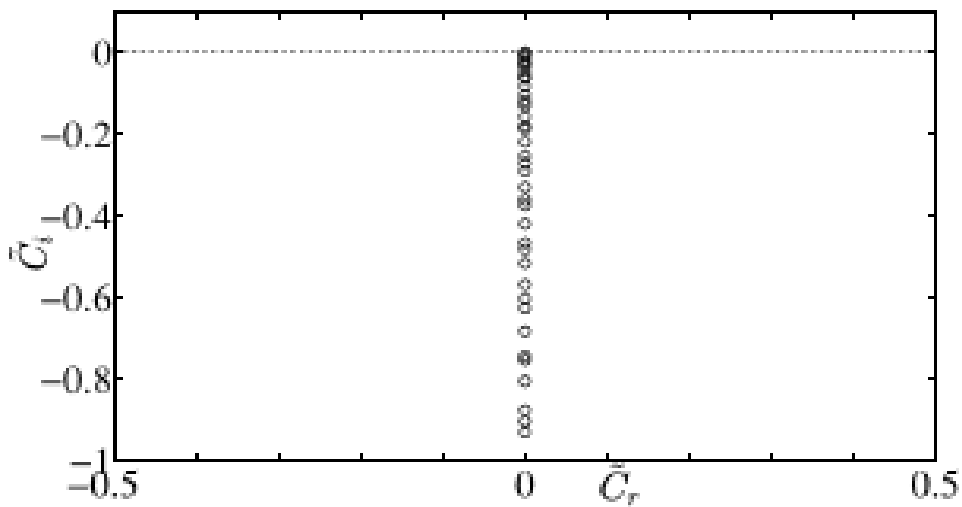


Figure (3-12): Spectre des valeurs propre Ecoulement d'un fluide Herschel-Bulkley dans une conduite $\tilde{Re} = 5000$, $n = 0.5$, $r_0 = 0.5$, $\tilde{\alpha} = 0$, $m = 1$

Sur la figure (3-12) nous avons présenté le spectre des valeurs propres pour $\alpha = 0$ et $m = 1$ avec $\tilde{R}_e = 5000$, $n = 0.5$ et $r_0 = 0.5$.

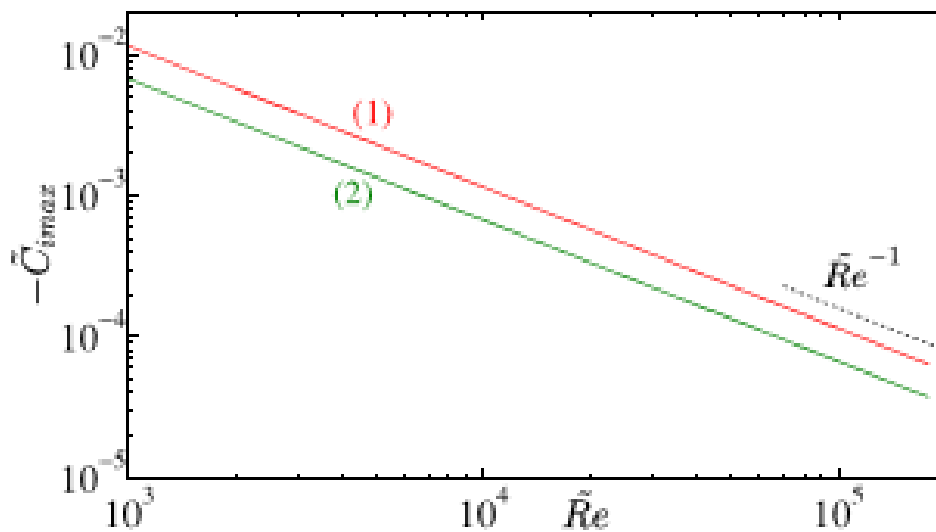


Figure (3-13): Evolution du taux d'amplification de la perturbation en fonction de \tilde{R}_e d'un fluide **Herschel-Bulkley** $\tilde{R}_e = 5000$, $r_0 = 0.5$, $\tilde{\alpha} = 0$ et $m = 1$ pour différentes valeurs d'indice (1) $n = 1$, (2) $n = 0.3$,

On constate alors que les valeurs propres se regroupent à l'origine sans passer dans le plan positif instable. Dans la figure (3-13) nous avons représenté l'évolution du taux d'amplification de la perturbation $|\tilde{C}_{imax}|$ avec le nombre de \tilde{R}_e pour un écoulement homogène dans la direction axiale $\tilde{\alpha} = 0$ et $m = 1$. L'analyse nous révèle que le taux d'amplification maximum de la perturbation approche zéros quand $\tilde{R}_e \rightarrow \infty$, avec un comportement asymptotique en \tilde{R}_e^{-1} . Les résultats numériques montrent que $|\tilde{C}_{imax}|$ décroît lorsque le caractère réhofluidifiant augmente.

7/ Cas d'une perturbation tridimensionnelle (oblique)

Dans cette situation, on peut utiliser la formulation (u, v) ou (v, w) . La forme du spectre des valeurs propres obtenue est similaire à celle d'un fluide newtonien, sauf que pour les fluides à seuil, il existe un dédoublement de la branche S , comme cela est illustré par la figure (3-14). En fait, l'une des branches est associée aux modes de Squire décrits précédemment au §5.

Pour les trois modes propres sélectionnés sur la figure (3-14), nous avons représentés les fonctions propres w dans la zone cisillée. Comme prévu pour le mode pariétal, la variation de la composante axiale se produit principalement près de la paroi, tandis que pour le mode propre d'interface, les variations sont observées près de la frontière de la zone bouchon figures (3-15) et (3-16).

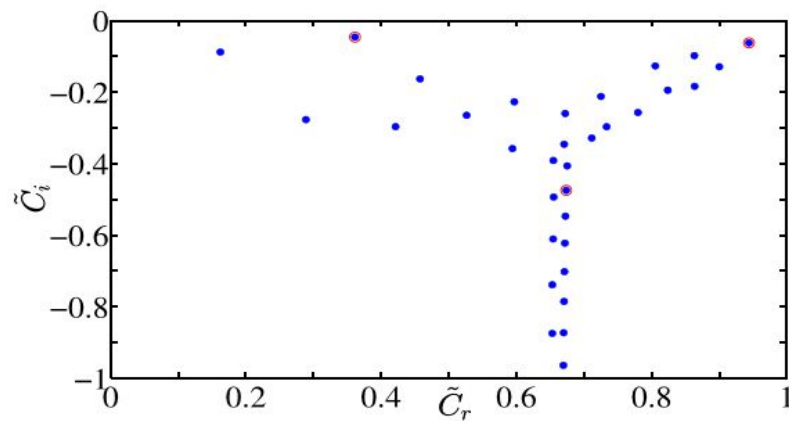


Figure (3-14): Spectre des valeurs propres $\tilde{\alpha} = 1$ et $m = 1$ $\tilde{R}_e = 3000$ pour $r_0 = 0.1$ et $\tilde{H}b = 0.193$.

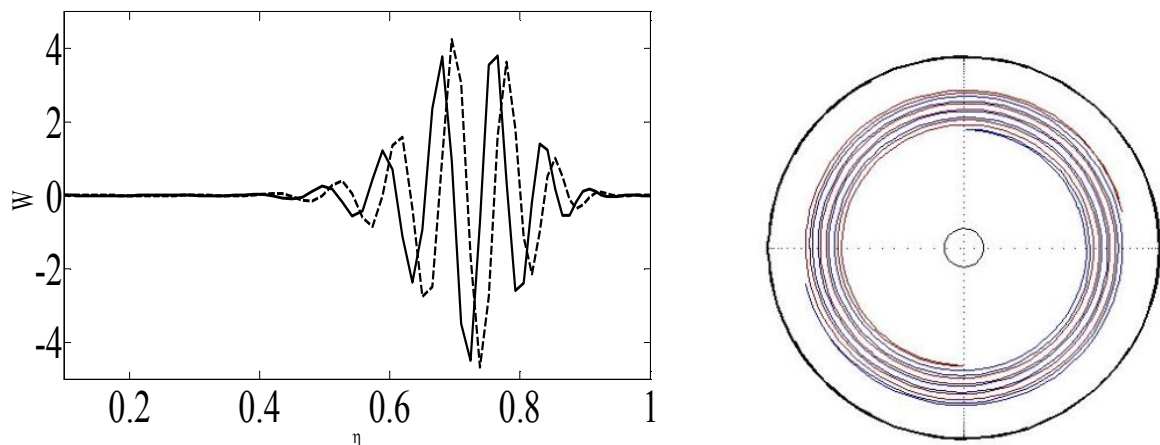


Figure (3-15): Fonction propre mode associée au mode central sélectionné sur la figure (3-14). $\tilde{R}_e = 5000$, $r_0 = 0.1$, $\tilde{\alpha} = m = 1$ et $n = 0.5$. Le trait continu correspond à la partie réelle et le trait en pointillés à la partie imaginaire.

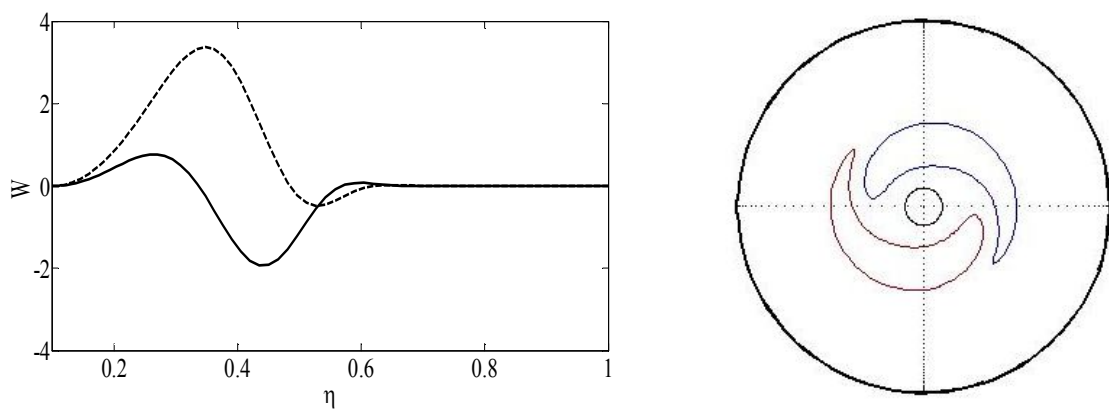


Figure (3-16): Fonction propre associé au mode d'interface sélectionné $\tilde{R}_e = 5000$, $r_0 = 0.1$, $\tilde{\alpha} = m = 1$ et $n = 0.5$. Le trait continu correspond à la partie réelle et le trait en pointillés à la partie imaginaire.

Pour ce qui est du mode central, il se caractérise par des oscillations dans les fonctions propres associées.

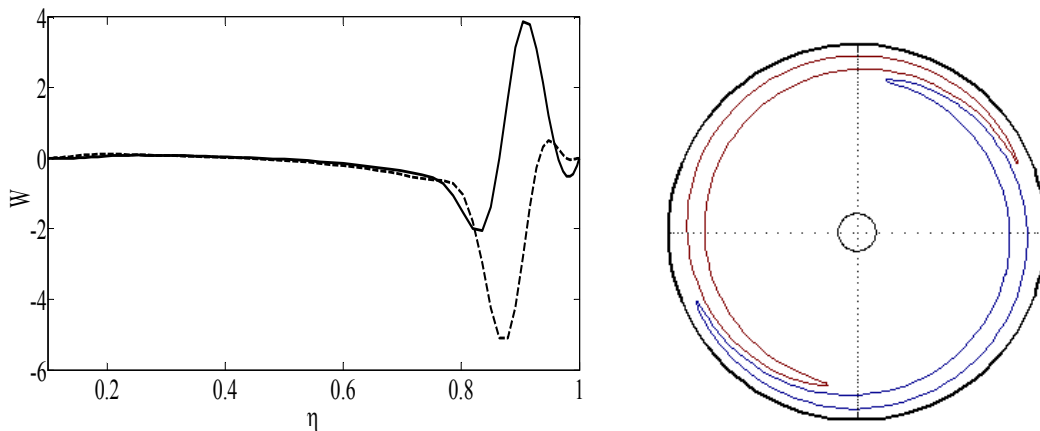


Figure (3-17): Fonction propre associée au mode pariétal sélectionné. $\tilde{R}_e = 5000$, $r_0 = 0.1$, $\tilde{\alpha} = m = 1$ et $n = 0.5$. Le trait continu correspond à la partie réelle et le trait en pointillés à la partie imaginaire.

Dans chaque figure (3-15), (3-16) et (3-17) respectivement nous avons représenté la structure de la perturbation associée aux modes les moins stables. A droite de chaque figure les contours des iso vitesses de la composante axiale sont représenté. Les couleurs bleu et rouge correspondent aux valeurs négatives et positives de la vitesse. Ces résultats sont conforme a ceux présenté par Esmail [49].

8/ Comparaison avec le cas de l'écoulement de Poiseuille annulaire avec déplacement axial du cylindre intérieur

Dans la théorie linéaire, la zone non cisillée se comporte comme un solide rigide qui se déplace axialement avec une vitesse constante. Par conséquent, l'écoulement de Hagen-Poiseuille d'un fluide à seuil peut être considéré à priori comme un écoulement composé Couette-Poiseuille axial d'un fluide réhofluidifiant dans une conduite annulaire. Ce problème n'a pas été examiné dans la littérature.

Pour un fluide Newtonien, Sadeghi et Higgins [26] ont étudié la stabilité de l'écoulement de Couette-Poiseuille dans un espace annulaire pour des perturbations axisymétriques et asymétriques. Les calculs ont été effectués pour un rapport de rayon $(R_1/R_2) = 0.5$ et un nombre d'onde azimutal, $0 \leq m \leq 3$. Ils ont déterminé pour chacun des cas considérés la vitesse maximale de déplacement du cylindre intérieur à partir de laquelle, l'écoulement de vient linéairement stable.

Preziosi et Rosso [27] ont étudié la stabilité linéaire d'un écoulement newtonien entre deux conduites cylindrique glissantes. Les équations de perturbations linéarisées

ont été résolues numériquement pour un rapport de rayon de la conduite intérieur et extérieur $(R_1/R_2) \geq 0.1, \alpha \leq 10$ et $m \leq 5$ et un nombre de Reynolds, basé sur la vitesse axiale du cylindre mobile, inférieur à 10^4 . Pour cette gamme de paramètres, les auteurs notent qu'ils n'ont pas observé d'instabilité.

Gitler [28], en utilisant une version à ondes longues de l'équation axisymétrique d'Orr-Sommerfeld (proposée initialement par Cowley et Smith [29]) a montré que pour un rapport de rayon $(R_1/R_2) < 0.1415$, l'écoulement de Couette est linéairement instable à partir d'un nombre de Reynolds fini.

Sur la base des résultats de Gitler [28], on pourrait s'attendre à ce que l'écoulement Hagen-Poiseuille d'un fluide à contrainte seuil soit instable à partir d'une valeur critique du nombre de Reynolds, au moins pour $r_0 \leq 0,14$. Une approximation du type grande longueur d'onde de l'équation d'Orr-Sommerfeld pour un fluide de Herschel-Bulkley a été effectuée (voir l'annexe A) et résolue numériquement pour deux valeurs de rayon $r_0 = 0,1$ et $r_0 = 0,05$. Nous n'avons trouvé aucune instabilité. Cela est probablement dû au fait que le profil de vitesse ne peut pas être écrit comme étant la somme de l'écoulement de Couette et de Poiseuille à contrainte seuil.

9/ Conclusion

On a étudié le comportement aux temps longs d'une perturbation infinitésimale qui est rajoutée à l'écoulement de Hagen-Poiseuille d'un fluide à seuil. Pour la gamme des paramètres rhéologiques considérés dans cette étude, les valeurs propres restent dans la moitié stable du plan complexe, i.e., les perturbations sont amorties au cours du temps. Cet amortissement est d'autant plus significatif que le seuil est important.

Cependant, il conviendra de noter que dans le cas d'une perturbation axisymétrique, le seuil n'intervient pas dans l'amortissement de la perturbation. Les calculs ont été effectués pour un nombre de Reynolds allant jusqu'à 5×10^4 . On conjecture que l'écoulement de Poiseuille d'un fluide à seuil est linéairement stable.

Chapitre 4

Croissance Transitoire et Perturbation Optimale

1/ Introduction

Ce chapitre est dédié à l'étude de la Croissance Transitoire de l'énergie cinétique d'une perturbation induite par la non-normalité de l'opérateur linéaire. Il est organisé comme suit : le deuxième paragraphe est consacré à la mise en évidence de la non-normalité de l'opérateur linéaire en étudiant les ε -*pseudospectres*. Dans le troisième paragraphe, les caractéristiques de la perturbation optimale en fonction des paramètres rhéologiques seront déterminées. Dans le quatrième paragraphe, le nombre de Reynolds critique en dessous duquel l'énergie cinétique d'une perturbation décroît uniformément est calculé et les caractéristiques de la perturbation la plus dangereuse seront déterminées. Le chapitre se termine par une conclusion qui rappelle l'essentiel des résultats obtenus.

2/ Mise en évidence de la non normalité de l'opérateur linéaire

Les valeurs propres décrivent le comportement temporel asymptotique de la perturbation. Ainsi, pour l'écoulement de **Hagen Poiseuille** d'un fluide à contrainte seuil, une perturbation introduite à $t = 0$, décroît à zéro au temps long.

L'approche traditionnelle de la stabilité basée sur les valeurs propres n'est pas suffisante pour décrire le comportement temporel de la perturbation en tout temps en raison de la non-normalité de l'opérateur linéaire.

Cette propriété mathématique signifie qu'il existe un potentiel d'extraction d'énergie à partir de l'écoulement de base par un sous-espace de perturbation conduisant à une croissance transitoire, malgré l'absence d'une instabilité exponentielle.

La non-normalité de l'opérateur de stabilité linéaire $\mathcal{L} \equiv \mathcal{M}_{uw}^{-1}(uv)\mathcal{L}_{uw}(uv)$, est caractérisée en utilisant les outils relatifs aux pseudospectres et à l'image numérique (voir Trefethen *et al.* [31]; Reddy *et al.* [32], Schmid & Henningson [33]). Le calcul nécessite de définir le produit vectorielle et la norme.

Pour une distribution de fonction vecteur de vitesse $\mathbf{q} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})^T$ le produit scalaire basé sur la densité d'énergie est définie comme suit :

$$(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)_E = \int_{r_0}^1 \mathbf{q}_H^2 \mathbf{Q} \mathbf{q}_1 r \cdot dr \quad (4-1)$$

Avec,

$$(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)_E = \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2^* + \frac{1}{\alpha^2} \mathbf{D}^+ \mathbf{u}_1 \mathbf{D}^+ \mathbf{u}_2^* + \left(1 + \frac{m^2}{\alpha^2 r} \right) \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2^* + \frac{im}{\alpha^2 r} (\mathbf{v}_1 \mathbf{D}^+ \mathbf{u}_2^* - \mathbf{D}^+ \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_2^*) \quad (4-2)$$

Où \mathcal{H} , signifie le transposé conjugué et la norme énergie associée est donnée par :

$$\|\mathbf{q}\|_E = (\mathbf{q}, \mathbf{q})_E = \int_{r_0}^1 \mathbf{q}^H \mathbf{Q} \mathbf{q} r \cdot dr \quad (4-3)$$

Q est une matrice définit positif elle peut être décomposée en $Q = \mathcal{F}^H \mathcal{F}$ en utilisant la décomposition Cholesky. La norme énergie est équivalente à la norme Euclidienne Standard L_2norm du vecteur $\mathcal{F}q$.

Soit \mathcal{F} la représentation discrète de l'opérateur linéaire \mathcal{L} (opérateur différentiel).
 . Le ε -pseudospectre de \mathcal{F} est défini comme l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels $\|z\mathcal{J} - \mathcal{F}\|_E \geq \varepsilon^{-1}$. Ils sont généralement représenté graphiquement par les contours de la norme de la résolvante $(z\mathcal{J} - \mathcal{F})^{-1}$ pour différentes valeurs de ε . Les pseudospectres peuvent être aussi définie comme étant l'ensemble des nombres complexes z qui sont valeurs propres de $\mathcal{F} + \Delta\mathcal{F}$ pour un certain nombre de matrice perturbé $\Delta\mathcal{F}$ avec $\|\Delta\mathcal{F}\|_E \leq \varepsilon$. Plus la non normalité de l'opérateur \mathcal{L} est importante plus grand est le potentiel de perturbation ($\Delta\mathcal{F}$) à affecter les valeurs propres.

Si \mathcal{L} est normal, les pseudospectres sont constitués par un ensemble de régions circulaires de rayon ε et centrées sur les valeurs propres de \mathcal{L} . si \mathcal{L} est non normale, alors des déviations peuvent avoir lieu et en général elle sont plus grandes pour un ε donné. Finalement, le pseudo spectre est un moyen pour analyser la nature de l'opérateur mis en œuvre.

L'image numérique de \mathcal{F} représente l'ensemble des nombres complexes $(\mathcal{F}q, q)_E / (q, q)_E$. pour un opérateur normal, l'image numérique est l'enveloppe convexe du spectre. A cet effet, pour un opérateur normal stable l'image numérique est toujours dans le demi-plan positif.

Cependant, pour un opérateur non-normal stable ça peut s'étendre d'une manière significative pour faire saillie dans le demi-plan instable.

La saillie maximale détermine le maximum du taux de croissance de l'énergie de perturbation au temps initiale $t = 0^+$.

Dans ce qui suit des pseudospectres sont présentés pour (i) des perturbations axisymétriques, (ii) des perturbations homogènes dans la direction axiale et (iii) des perturbations obliques. D'un point de vue pratique, une des principales méthodes de calcul des pseudospectres de \mathcal{F} est de calculer les valeurs propres de la résolvante.

2-1/ Perturbation axisymétrique

Dans la Figure (4-1), nous avons représenté le portrait spectral de l'opérateur modifié Orr-Sommerfeld à $Re = 5000, \alpha = 1$ et $r_0 = 0.01$, pour un fluide **Herschel-Bulkley**. Les lignes continues sont les limites ϵ -pseudospectre et la ligne pointillée l'image numérique. ($n = 0.5$ et $\tilde{H}b = 0.017$). Les symboles cercles plein correspondent au spectre de l'opérateur linéaire.

La non-normalité de l'opérateur linéaire Orr-Sommerfeld modifié est clairement mise en évidence. En effet pour un Reynolds $\tilde{Re} = 5000$ la perturbation pour une norme $\epsilon > 0.01$ passe nécessairement dans le domaine instable.

Il est intéressant de noter que les pseudospectres à $r_0 = 0.01$ et $r_0 = 0.8$ (figure 4-2) sont pratiquement identiques. Ceci vient du fait que l'opérateur d'Orr-Sommerfeld fait intervenir la viscosité tangente qui est indépendante de la contrainte seuil et donc du nombre de **Herschel-Bulkley**.

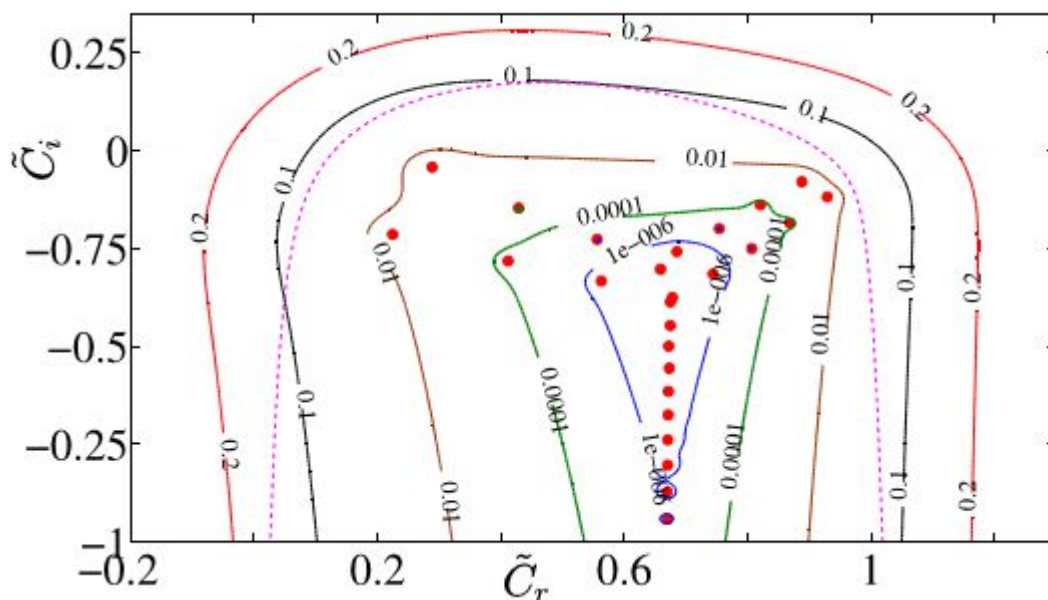


Figure (4-2): Portrait spectral de l'opérateur modifié Orr-Sommerfeld à $Re = 5000, \alpha = 1$ et $r_0 = 0.8$, pour un fluide **Herschel-Bulkley**: influence de la zone bouchon. Les lignes continues sont les enveloppes des ϵ -pseudospectres et la ligne pointillée représente l'image numérique.

Nous avons aussi représenté en pointillés, l'image numérique définie par l'ensemble des nombres complexes $(\mathcal{L}q, q)$ ou (\cdot, \cdot) est le produit scalaire associé à la norme énergie et q , un vecteur de norme unité.

D'après le théorème de Hill-Yosida [58], un opérateur non-normal asymptotiquement stable peut induire une croissance transitoire de l'énergie cinétique de la perturbation, si et seulement si son image numérique s'étend dans le demi-plan instable.

L'image numérique dans les figures (4-1) et (4-2) montre clairement que l'opérateur d'Orr-Sommerfeld est non-normal.

2-2/ Perturbation homogène dans la direction axiale

Les contours, des pseudospectres de l'opérateur linéaire et l'image numérique sont représentés dans la figure (4-3) et (4-4) pour une perturbation homogène dans la direction de l'écoulement pour des valeurs de $Re = 5000, \tilde{\alpha} = 0, m = 1, n = 0,5$ et deux valeurs de rayon de la zone bouchon : $r_0 = 0,01 (Hb = 0,017)$ et $r_0 = 0,8 (Hb = 6,93)$.

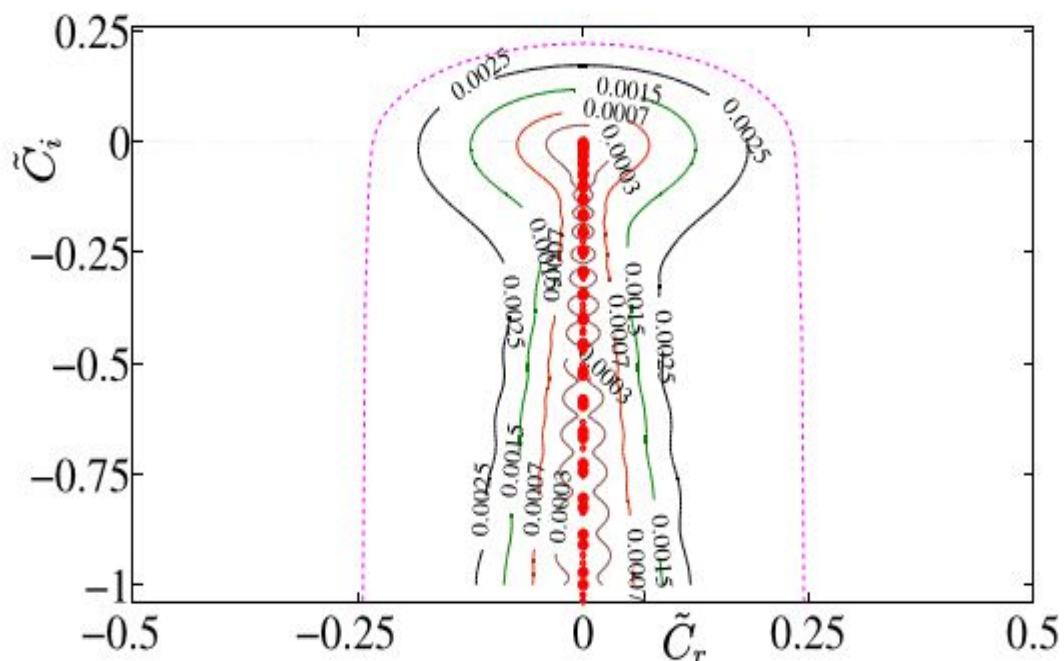


Figure (4-3): Fluide de Hershel-Bulkley. Portrait spectral de l'opérateur modifié d'Orr-Sommerfeld à $\tilde{Re} = 5000, m = 1, r_0 = 0,01$. Les lignes continues sont les limites des ϵ -pseudospectres, repérées par les valeurs de ϵ . La ligne en pointillés représente l'image numérique.

Contrairement au cas de la perturbation axisymétrique, on constate que l'augmentation du nombre de **Herschel-Bulkley**, réduit de manière significative passage des pseudospectres vers le demi plan des valeurs propres instable.

En effet, pour une valeur du rayon de la zone bouchons $r_0 = 0.01$, une perturbation de norme $\epsilon = 5.2 \times 10^{-6}$ est nécessaire pour atteindre le demi-plan instable. Alors que, pour une valeur $r_0 = 0.8$, une perturbation beaucoup plus intense $\epsilon = 1.0 \times 10^{-3}$ (2000 fois plus importante) est nécessaire.

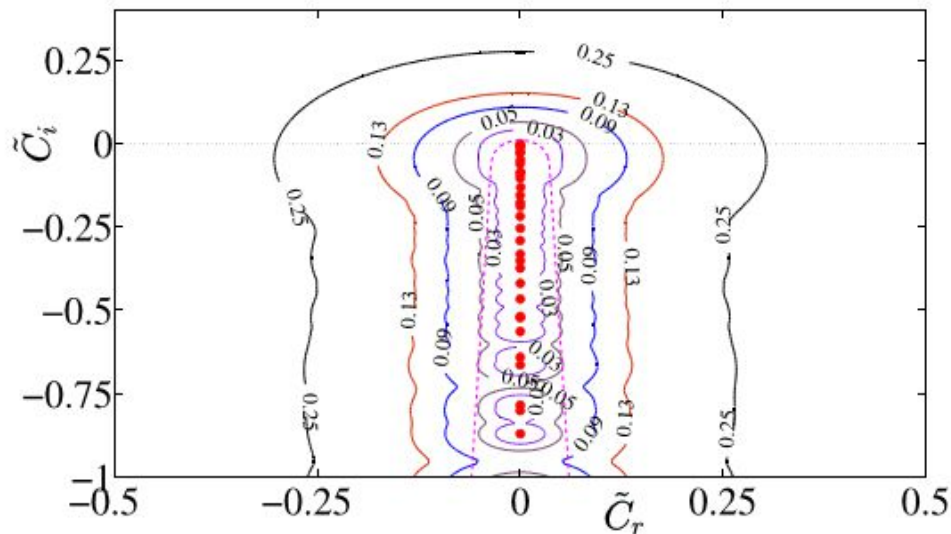


Figure (4-4): Fluide de Herschel-Bulkley. Portrait spectral de l'opérateur modifié d'Orr-Sommerfeld à $\tilde{Re} = 5000$, $m=1$, $n=0.5$, $r_0=0.8$. , pour un fluide de **Herschel-Bulkley**. Les lignes continues sont les limites des ϵ -pseudospectres et la ligne pointillée correspond à l'image numérique.

2-3/ Perturbation oblique

Dans la figure (4-5) nous avons représentés les pseudospectres et l'image numérique d'une perturbation oblique avec un nombre d'onde axial $\tilde{\alpha} = 1$ et un nombre d'onde azimutal $m=1$. Le nombre de Reynolds est fixé à $\tilde{Re} = 5000$. Les rhéologies considérées correspondent à $n=0.5$ et deux valeurs de r_0 : $r_0 = 0.01$ et $r_0 = 0.8$.

On constate, que les pseudospectres et les images numériques sont assez similaires à ceux obtenus pour une perturbation axisymétrique. Toute fois dans ce cas, l'influence du nombre de **Herschel-Bulkley** \tilde{Hb} est beaucoup plus significative. En effet, pour un rayon $r_0 = 0.01$ ($Hb = 0.017$) la norme énergie associée au pseudospectre tangent à la ligne $\tilde{C}_i = 0$ est $\epsilon = 2.2 \times 10^{-4}$. Pour cette même valeur

de ε avec un rayon $r_0 = 0.8 (Hb = 6.93)$, le pseudospectre reste nettement loin du demi plan instable.

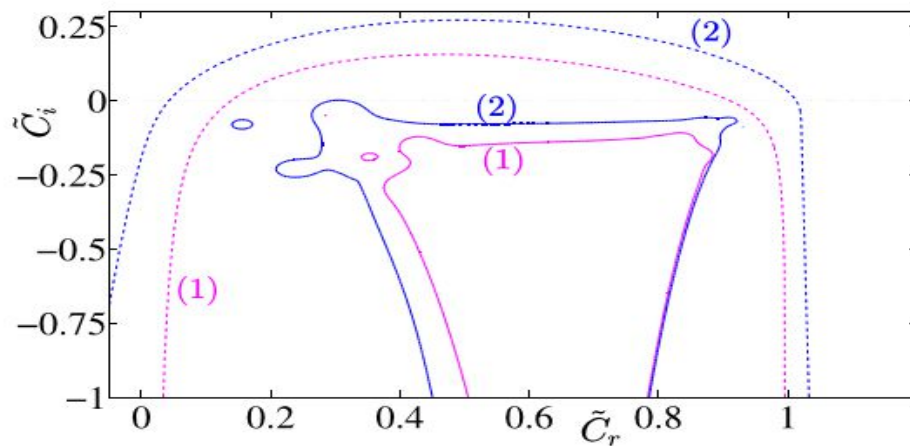


Figure (4-5): Perturbation oblique avec $\tilde{\alpha}=1$ et $m=1$. image numérique (ligne pointillée) et pseudospectres (ligne continue) pour $\varepsilon = 2.2 \times 10^{-4}$ et $\tilde{Re} = 5000$.

(1) : $r_0 = 0.01 (Hb = 0.017), n = 0.5$, (2) : $r_0 = 0.8 (Hb = 6.93), n = 0.5$

2-4/ Norme de la Perturbation Minimale

Les figures (4-6) et (4-7) illustrent l'évolution de la valeur minimale de la norme de la perturbation, ε , permettant le passage dans le demi-plan instable pour un fluide de **Herschel-Bulkley** en écoulement dans une conduite cylindrique, en fonction du nombre de Reynolds et pour différentes valeurs de l'indice de structure et du rayon de la zone bouchon.

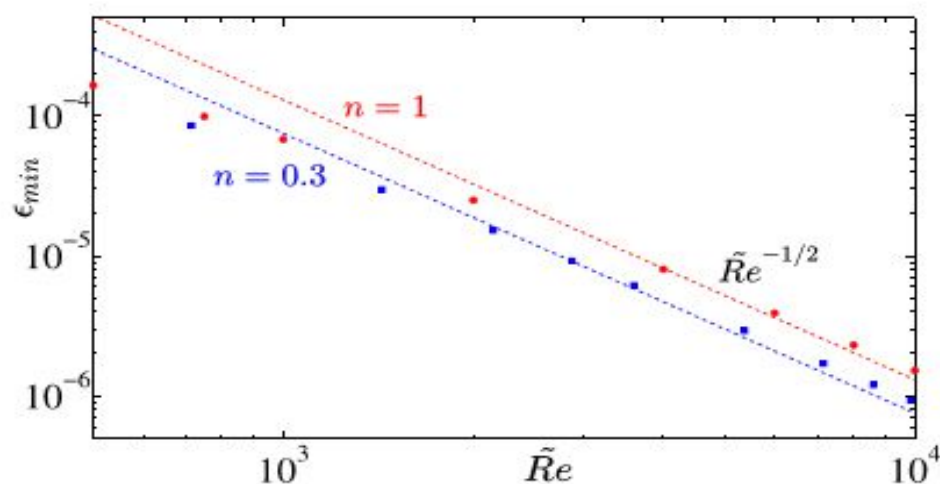


Figure (4-6) : Valeur minimale de la norme de la perturbation (ε_{min}) pour la déstabilisation de l'écoulement de Poiseuille d'un fluide de Herschel-Bulkley en fonction

du nombre de Reynolds modifié pour deux valeurs d'indice $n = 0.1$ et 0.3 . Le rayon de la zone bouchon est fixé à $r_0 = 0,01$

On voit clairement sur les deux figures que l'énergie minimale nécessaire pour déclencher une perturbation diminue au fur et mesure que le nombre de Reynolds augmente. Elle présente un comportement asymptotique similaire d'un fluide Newtonien, soit en $\tilde{Re}^{-1/2}$. Ce qui est très intéressant à noter, c'est le fait que ϵ_{min} diminue lorsque l'indice de structure diminue et augmente avec le rayon de la zone non-cisaillée.

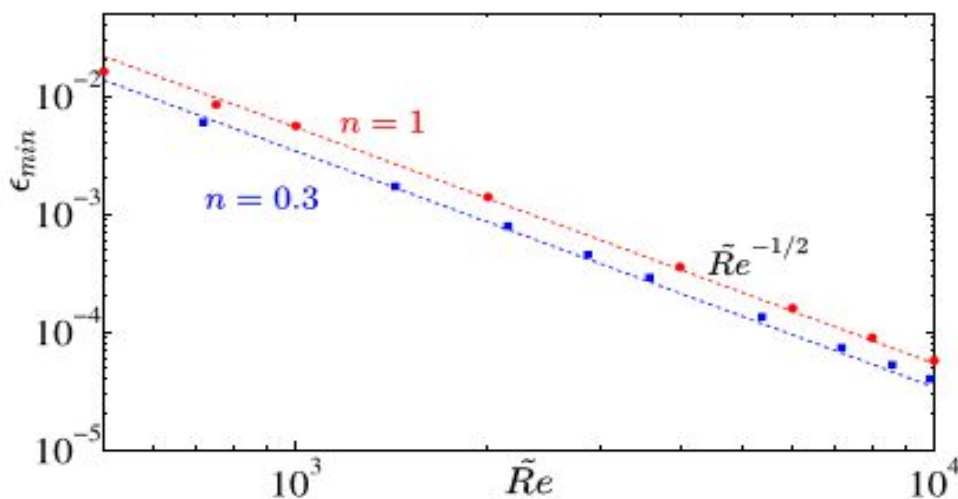


Figure (4-7) : Valeur minimale de la norme de la perturbation (ϵ_{min}) en fonction du nombre de Reynolds modifié pour deux valeurs d'indice $n = 0.1$ et 0.3 et $r_0 = 0,8$

3/ Croissance Transitoire et Perturbations Optimales

L'évolution transitoire de la perturbation en régime linéaire est déterminée selon la méthodologie décrite par Schmid et Henningson [33]. En effet la taille de la perturbation est déterminée par l'évolution temporelle de son énergie cinétique en d'autre terme c'est la norme associée au produit scalaire.

Soit q_1 et q_2 deux vecteurs vitesses solution du problème aux valeurs initiales. Le produit scalaire basé sur la norme énergie est défini par:

$$(q_1, q_2)_E = \int_{r_0}^1 (u_1^* u_2 + v_1^* v_2 + w_1^* w_2) r dr \quad (4-4)$$

Pour la formulation (u, v) , en éliminant w dans l'équation de continuité on obtient alors l'expression ci-dessous :

$$(q_1, q_2)_E = \int_{r_0}^1 \left(u_1^* u_2 + \frac{1}{\alpha^2} D^+ u_1^* D^+ u_2 + \left(\frac{m^2 + \alpha^2 r^2}{\alpha^2 r^2} \right) v_1^* v_2 \right) r dr$$

$$+ \int_{r_0}^1 \left[\frac{im}{\alpha^2 r} (D^+ u_1^* v_2 - v_1^* D^+ u_2) \right] r dr \quad (4-5)$$

Cependant la formulation (u, w) , s'exprime similairement comme suit:

$$(q_1, q_2)_E = \int_{r_0}^1 \left(u_1^* u_2 + \frac{r^2}{m^2} (D^+ u_1^* D^+ u_2) + \left(\frac{m^2 + \alpha^2 r^2}{m^2} \right) w_1^* w_2 \right) r dr \\ + \int_{r_0}^1 \left[\frac{i\alpha r^2}{m^2} (D^+ u_1^* w_2 - w_1^* D^+ u_1) \right] r dr \quad (4-6)$$

L'analyse du problème peut être simplifiée en utilisant une approximation discrète. Dans ce cas une solution q du problème aux valeurs initiales linéarisé est projetée sur la base des fonctions propres \hat{q} solutions du problème aux valeurs propres.

On considère alors l'espace S_M généré par les M premières fonctions propres $\hat{q}_j = (\hat{u}_j, \hat{w}_j)^T$ correspondant aux M premières valeurs propres $\{C_1, C_2, \dots, C_M\}$ classées dans l'ordre décroissant des parties imaginaire C_i de l'opérateur :

$$\mathcal{A}_{uw}(uv) = \mathcal{M}_{uw}^{-1}(uv) \mathcal{L}_{uw}(uv). \quad (4-7)$$

$$\text{Soit ;} \quad S_M = \{\hat{q}_1, \hat{q}_2, \dots, \hat{q}_M\} \quad (4-8)$$

Une perturbation admissible peut être approximée par une combinaison linéaire des fonctions propres \hat{q}_j :

$$q = \sum_{j=1}^M k_j q_j \quad (4-9)$$

Avec (k_j) des coefficients dépendants du temps dont L'évolution temporelle est gouvernée par l'équation différentielle obtenu à partir du problème aux valeurs initiales.

$$\frac{dq}{dt} = -i \mathcal{A}_{uw} q \quad (4-10)$$

$$\text{Avec ;} \quad \mathcal{A}_{uw} \hat{Q} = Q \Lambda \quad (4-11)$$

- \hat{Q} est une matrice dont les vecteurs colonnes sont les vecteurs propres
- $\Lambda = \text{diag}\{C_1, C_2, \dots, C_M\}$ est une matrice diagonale des valeurs propres classées par ordre décroissant des parties imaginaires des C_j .

La combinaison de (4-9) et (4-11) dans (4-10) nous ramène la solution :

$$k(t) = e^{(-i\Lambda t)} k_0 \quad (4-12)$$

Le κ_0 est le vecteur des coefficients (κ_j) à l'instant initial. Le facteur d'amplification $g(t)$ de l'énergie de perturbation au cours du temps est défini par le rapport entre la norme énergie $\|q(t)\|_E$ de la perturbation au temps t et sa norme initiale $\|q_0\|_E$ tel que

$$g(t) = \frac{\|q(t)\|_E^2}{\|q_0\|_E^2} \quad (4-13)$$

$$\|q(t)\|_E^2 = (q_1, q_2)_E = \sum_{j=1}^{j=M} k_j^H \sum_{l=1}^{l=M} k_l (q_j, q_l)_E \quad (4-14)$$

Sous la forme matricielle (4-14) s'écrit :

$$\|q(t)\|_E^2 = k^H M k \quad (4-15)$$

M est une matrice Hermitienne définie positive. Elle admet une décomposition de la forme M selon $M = F^H F$. La norme énergie de q peut-être réécrite sous la forme

$$\|q(t)\|_E^2 = k^H M k = k F^H F k = \|F k\|_2^2 \quad (4-16)$$

Le facteur d'amplification $g(t)$ se déduit alors comme suit

$$g(t) = \frac{\|q(t)\|_E^2}{\|q_0\|_E^2} = \frac{\|F k(t)\|_2^2}{\|F k(0)\|_2^2} = \frac{\|F e^{(-i\Lambda t)} k_0\|_2^2}{\|F k_0\|_2^2} \quad (4-17)$$

Pour un mode de fourrier donné, l'amplification maximale possible de l'énergie de perturbation au cours du temps obtenues, pour toutes les conditions initiales non nulles s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned} G(t, \alpha, m, Re, Hb, n) &= \text{Sup}_{\|q_0\|_E^2 \neq 0} g(t) = \text{Sup}_{\|q_0\|_E^2 \neq 0} \frac{\|F e^{(-i\Lambda t)} F^{-1} F k_0\|_2^2}{\|F k_0\|_2^2} \\ &= \|F e^{(-i\Lambda t)} F^{-1}\|_2^2 = \sigma_1^2 \quad (4-18) \end{aligned}$$

Ou σ_1^2 est la valeur singulière principale de la matrice $F e^{(-i\Lambda t)} F^{-1}$

Ainsi, le maximum de la croissance transitoire de l'énergie de perturbation possible sur tout l'intervalle de temps t est défini par :

$$G^{max}(\alpha, m) = \text{Sup} (G(t, \alpha, m, Re, Hb, n)) \quad (4-19)$$

Le temps t pour lequel ce maximum est atteint est noté $t^{max}(\alpha, m, n, Re, Hb)$, autrement dit $G^{max}(\alpha, m) = G(t^{max})$.

Par conséquent, le maximum de G^{max} pour tous les couples de nombre d'onde (α, m) s'écrit :

$$G^{opt}(Re, Hb, n) = \text{Sup}_{(\alpha, m)} G^{max}(\alpha, m) \quad (4-20)$$

On note que G^{opt} est déterminé pour la perturbation optimale au temps optimal t^{opt} . Contrairement à l'approche modale l'accroissement de l'énergie de perturbation dans ce cas se produit relativement sur un temps initial très court.

3-1/ Accroissement de l'énergie de Perturbation

➤ Cas d'une perturbation Oblique et homogène Dans la direction de l'écoulement

Dans La figure (4-8) et (4-9) nous avons représenté l'évolution de l'amplification de l'énergie cinétique $G(t)$ de la perturbation en fonction du temps pour un nombre de Reynolds $Re = 3000$ et trois valeurs du rayon de la zone bouchon $r_0 = 0.01$, ($Hb = 0.02$); $r_0 = 0.1$, ($Hb = 0.22$) et $r_0 = 0.2$, ($Hb = 0.5$). Tandis-que l'indice de l'écoulement est fixé à $n = 1$

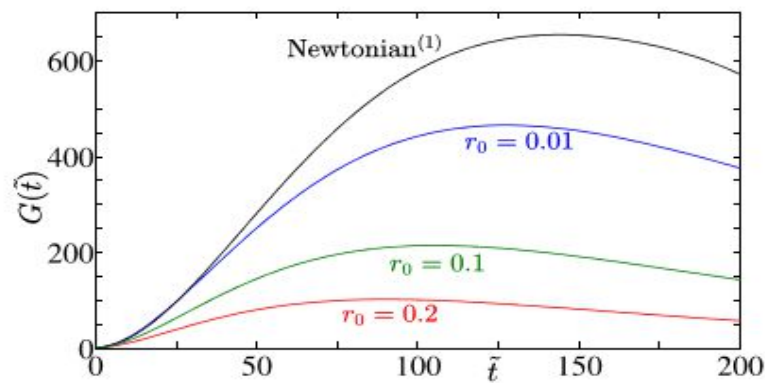


Figure (4-8):Amplification de l'énergie cinétique à $Re = 3000, n = 1$ et différentes valeurs du rayon $r_0 = 0.01$ ($Hb = 0.02$), $r_0 = 0.1$ ($Hb = 0.22$) et $r_0 = 0.2$ ($Hb = 0.5$). $\alpha = 0, m = 1$. La courbe Newtonien est donnée par Schmid et Henningson [33]

Deux cas de figures sont a considéré dans les conditions initiales à savoir deux rouleaux longitudinaux ($\alpha = 0, m = 1$) et une perturbation oblique ($\alpha = 1, m = 1$).

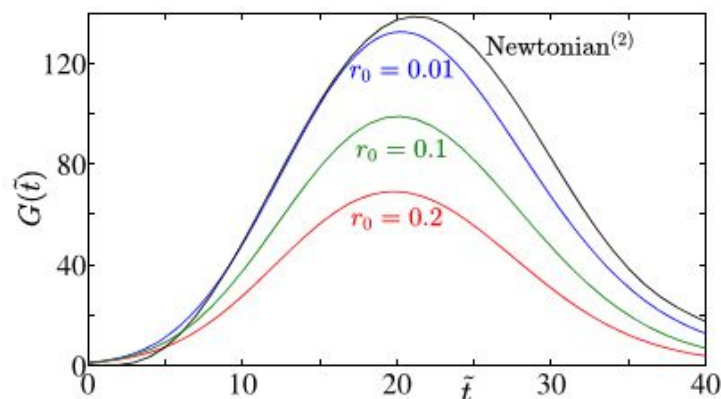


Figure (4-9):Amplification de l'énergie cinétique à $Re = 3000, n = 1$ et différentes valeurs du rayon $r_0 = 0.01$ ($Hb = 0.02$), $r_0 = 0.1$ ($Hb = 0.22$) et $r_0 = 0.2$ ($Hb = 0.5$). $\alpha = 1, m = 1$. La courbe Newtonien est donnée par Meseguer et Trefethen [35]

L'analyse des courbes nous montrent qu'avec l'augmentation du nombre de **Herschel-Bulkley** $\tilde{H}b$, la viscosité augmente ce qui induit une réduction du temps de diffusion visqueuse et par conséquent le temps t_{max} et l'amplification de l'énergie de perturbation correspondante G_{max} .

À des valeurs très faible de $\tilde{H}b$, la croissance transitoire demeure nettement inférieure à celle obtenue pour un fluide newtonien, en particulier pour le cas de $\alpha = 0, m = 1$ ou la différence est significative.

La non concordance de La croissance transitoire avec l'écoulement newtonien pour des valeurs de $\tilde{H}b = 0$ peut être Expliqué comme suit ([22], [23]).

Dans le contexte de l'analyse de stabilité linéaire, on suppose que la perturbation est infinitésimale relativement à toutes les échelles de l'écoulement de base. Si ϵ est une échelle caractéristique de la taille de perturbation, donc $\epsilon = o(r_0)$.

En d'autres termes, la zone cisailée est linéairement perturbée alors que la zone bouchon reste intacte.

Par conséquent, lorsque les termes $\tilde{H}b$ sont annulés artificiellement dans les équations de perturbations, nous retrouvons le problème de la stabilité linéaire de l'écoulement Couette-Poiseuille entre deux cylindres coaxiaux où l'extérieur est fixé et l'intérieur se déplace avec une vitesse axiale constante $W = 1$.

➤ Cas d'une perturbation Oblique et homogène Dans la direction de l'écoulement

Pour une perturbation axisymétrique on note que l'influence du rayon de la zone bouchon r_0 sur la croissance transitoire de la perturbation est relativement faible.

3-2/ Caractéristiques de la perturbation optimale et de la

Croissance transitoire optimale

Dans les figures (4-10) et (4-11) Nous avons représenté l'évolution des caractéristiques de la perturbation optimale a savoir les nombre d'onde axiale et azimutales respectivement $\tilde{\alpha}_{opt}$ et m_{opt} correspondant au maximum $Max_{\tilde{\alpha},m}(G^{max})$ ou G^{max} est calculé à $Re = 5000$ pour l'ensemble des paramètres rhéologiques du fluide $n = 0,3, 0,5, 0,7$ et 1 , et ou le rayon de la zone bouchon est comprise dans l'intervalle $0,001 \leq r_0 \leq 0,96$ ($0,0017 \leq Hb \leq 48,0$).

L'analyse des deux figures révèle l'existence de trois zones distinctes dépendante principalement du rayon r_0 . On effet la première région concerne les petites valeurs de

rayon de la zone bouchon $r_0 \leq 0.33$ correspondant à un nombre de **Herschel-Bulkley** $\tilde{H}b \leq 0.75$ pour $n = 0.5$.

On constate dans cette région que le nombre d'onde axial $\tilde{\alpha}_{opt} = 0$ alors que le nombre d'onde azimutale m_{opt} augmente avec l'augmentation de l'effet de la réhofluidification.

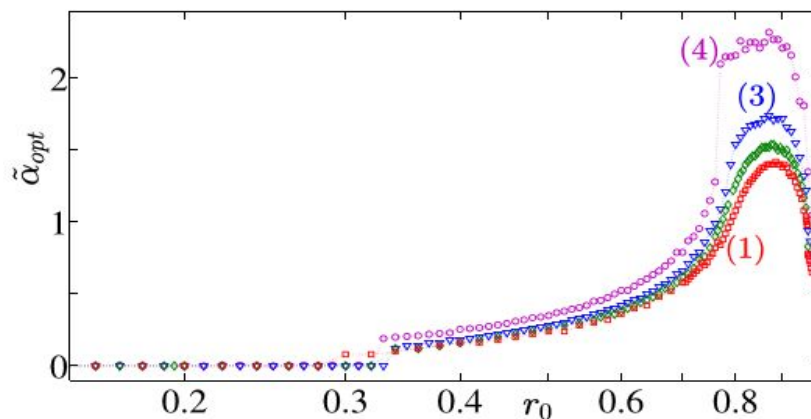


Figure (4-10):Le nombre d'onde axial optimale en fonction du rayon de la zone bouchon à $Re = 5000$ et quatre valeurs de l'indice de réhofluidification du fluide : (1) $n = 1$, (2) $n = 0,7$, (3) $n = 0,5$ et (4) $n = 0,3$.

La seconde zone, constitue l'intervalle $0.35 \leq r_0 \leq 0.93$, Dans cette dernière le nombre d'onde axial α_{opt} augmente graduellement jusqu'à $\tilde{\alpha}_{opt} = 0.5$ ce qui est équivalent à une valeur du rayon proche de $r_0 = 0.6$ puis il monte brusquement à un maximum qui est atteint autour de la valeur $r_0 = 0.93$.

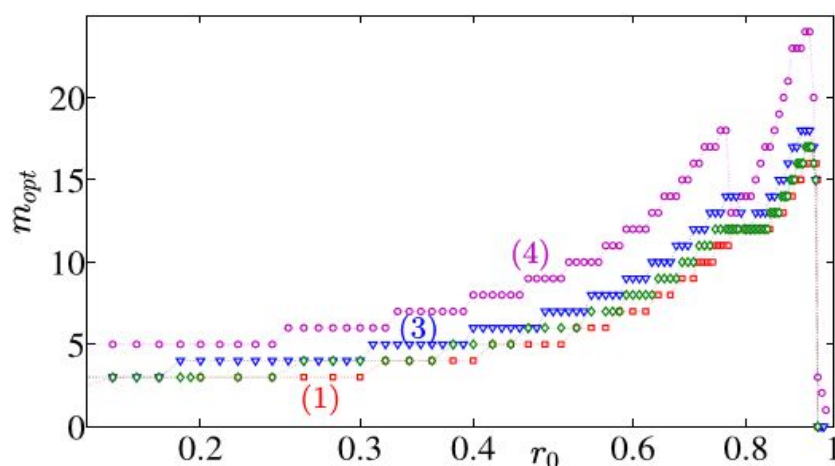


Figure (4-11):Le nombre d'onde azimutal optimal en fonction du rayon de la zone bouchon à $Re = 5000$ et quatre valeurs de l'indice de réhofluidification du fluide : (1) $n = 1$, (2) $n = 0,7$, (3) $n = 0,5$ et (4) $n = 0,3$.

Pour des valeurs assez élevées de la zone bouchon comprise dans l'intervalle $0.93 \leq r_0 \leq 1$, nous observons une diminution rapide des nombres d'ondes axiale mais brusque vers zéros pour le nombre d'onde azimutal ce qui nous permet de conclure que la perturbation optimale est devenue axisymétrique dans ce cas.

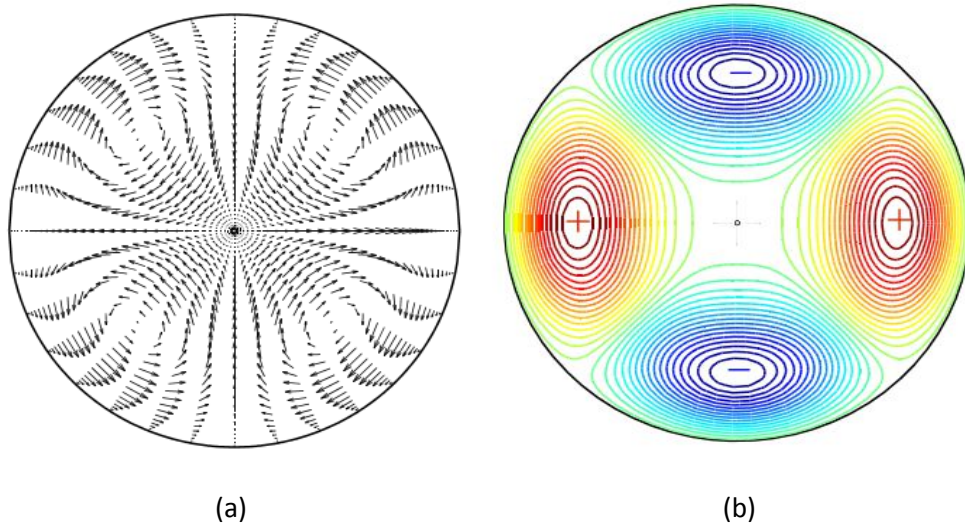


Figure (4-12): Perturbation et stries optimales à $Re = 5000, n = 0.5, r_0 = 0.01$ ($\tilde{H}b = 0.0175$) pour $\alpha = 0$ et $m = 2$. (a) Les vecteurs de vitesse $ue_r + ve_\theta$ de la perturbation optimale $a\tilde{t} = 0$. (b) Contours de la vitesse axiale w au temps $\tilde{t} = \tilde{t}^{opt} = 165$

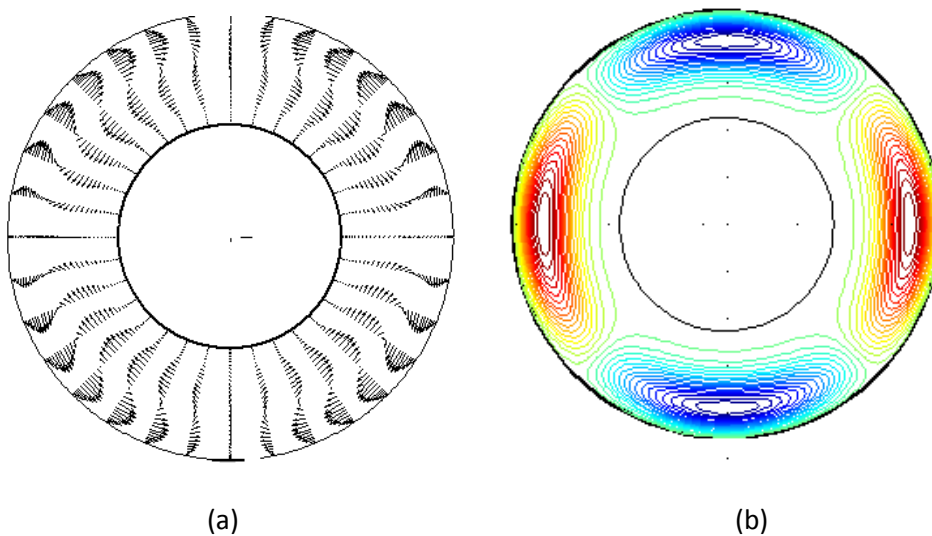


Figure (4-13): Perturbation et stries optimales à $Re = 5000, n = 0.5, r_0 = 0.5$ ($\tilde{H}b = 1.73$) pour $\alpha = 0$ et $m = 2$. (a) Les vecteurs de vitesse $ue_r + ve_\theta$ de la perturbation optimale $a\tilde{t} = 0$. (b) Contours de la vitesse axiale w au temps $\tilde{t} = \tilde{t}^{opt} = 90$.

Dans la figure (4-12) nous avons représenté la structure de la perturbation au temps initial $\tilde{t} = 0$ et au temps optimal $\tilde{t}^{opt} = 165$ pour $n = 0.5$ et un rayon $r_0 = 0.01$ ($\tilde{H}b = 0.0175$) correspondent à la première zone. On constate alors, que la perturbation optimale se présente sous forme de deux rouleaux contrarotatifs dans la direction de l'écoulement.

Deux zone distinctes de stries se forment a circulation hautes vitesses (+) et à basse vitesse (-) respectivement et qui sont la conséquence directe du mécanisme « **Lift-Up** » permettent ainsi par le biais des rouleaux de transférer l'énergie de perturbation a la composante de vitesse axiale.

On note que la position du maximum de la composante axiale de vitesse se rapproche de plus en plus de la paroi au fur et à mesure que $\tilde{H}b$ ou r_0 augmente.

Avec l'augmentation du nombre de **Herschel-Bulkley** ou de la réhofluidification la largeur de la zone ou se réalise l'échange d'énergie entre l'écoulement de base et la perturbation est réduit due à l'augmentation du nombre d'onde azimutal m_{opt} .

La perturbation optimale est oblique, son vecteur d'onde présente un angle qui augmente avec l'augmentation du rayon r_0 .

La moyenne spatiale de l'énergie cinétique de la perturbation donnée par les expressions ci-dessous est représentée dans la figure (4-14) au cours du temps pour les conditions optimales.

$$\frac{E_r}{E_0} = \frac{\langle uu^* \rangle}{E_0} ; \frac{E_\theta}{E_0} = \frac{\langle vv^* \rangle}{E_0} \quad et \quad \frac{E_z}{E_0} = \frac{\langle ww^* \rangle}{E_0} \quad (4-21)$$

$$Avec ; E_0 = \langle uu^* + vv^* + ww^* \rangle_{t=0} \quad et \quad \langle . \rangle = \frac{1}{1-r^2} \int_{r_0}^1 (.) r dr \quad (4-22)$$

On constate que l'énergie cinétique pour les deux composantes considéré décroissent asymptotiquement vers zéros au cours du temps de l'énergie initial $a\tilde{t} = 0$.

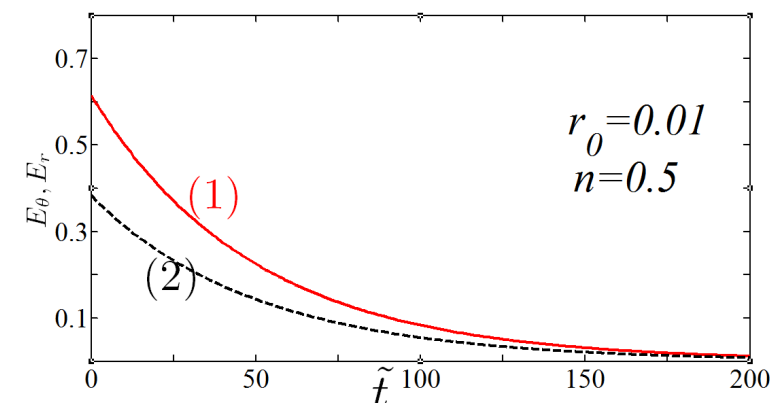


Figure (4-14): Energie cinétique radiale (2) et azimutale (1) de la perturbation au cours du temps à $Re = 5000, n = 0.5, r_0 = 0.01$ ($\tilde{H}b = 0.0175$)

En effet, à $t = 0$ presque toute l'énergie de la perturbation est dans la composante azimutale. Environ (61.52%) et (38.46%) sont respectivement dans la composante azimutal et radial. Tandis qu'une partie négligeable est dans la composante axiale.

Toutefois, au temps optimale toute l'énergie est ainsi restituée a la composante axiale de l'écoulement.

La forme de l'évolution au cours du temps de la composante axiale de la vitesse est représentée sur la Figure (4-15), dans les plans (r, θ) et (r, z) respectivement.

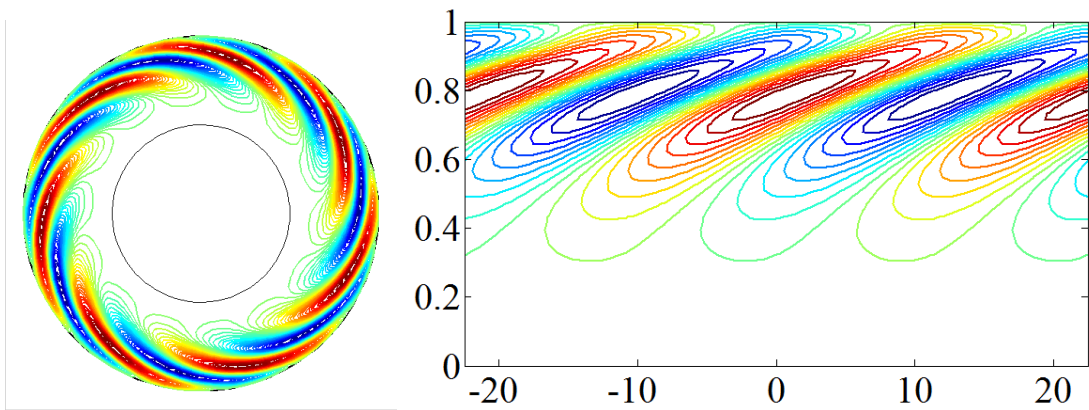


Figure (4-15a): Evolution temporelle de la perturbation optimale dans le plan (r, θ) a gauche et (r, z) a droite $Re = 5000, n = 0.5, r_0 = 0.5$ ($\tilde{H}b = 0.17321$), $\tilde{t}_{opt} = 39, \tilde{\alpha}_{opt} = 0.28$ et $m_{opt} = 7$ au temps $\tilde{t} = 0$

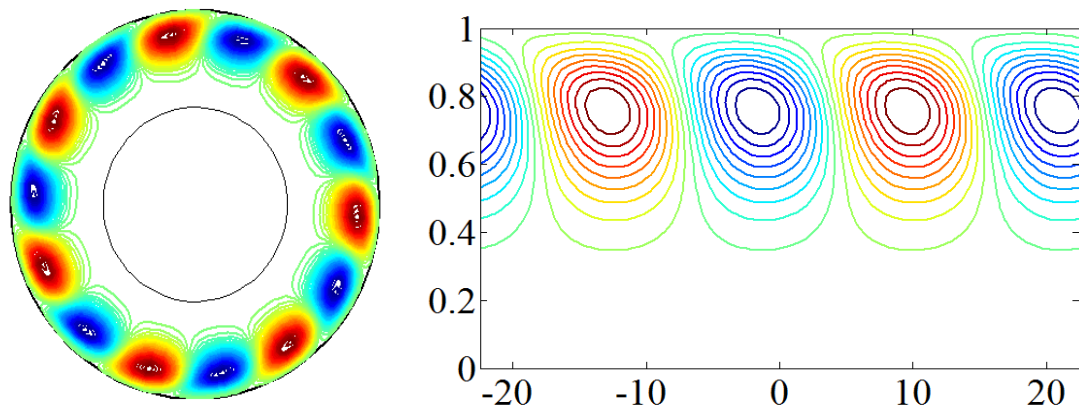


Figure (4-15b): Evolution temporelle de la perturbation optimale dans le plan (r, θ) a gauche et (r, z) a droite $Re = 5000, n = 0.5, r_0 = 0.5$ ($\tilde{H}b = 0.17321$), $\tilde{t}_{opt} = 39, \tilde{\alpha}_{opt} = 0.28$ et $m_{opt} = 7$ au temps $\tilde{t} = (1/2) \tilde{t}_{opt}$

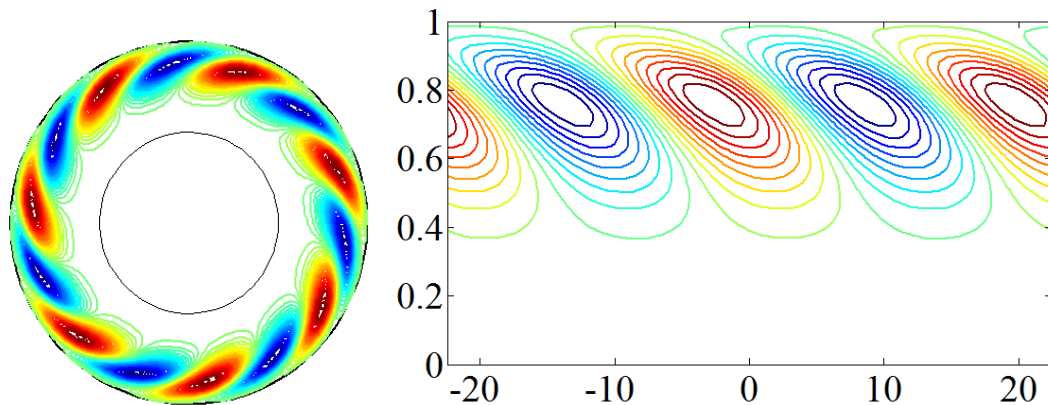


Figure (4-15c): Evolution temporelle de la perturbation optimale dans le plan (r, θ) a gauche et (r, z) a droite $Re = 5000, n = 0.5, r_0 = 0.5$ ($\tilde{H}b = 0.17321$), $\tilde{t}_{opt} = 39, \tilde{\alpha}_{opt} = 0.28$ et $m_{opt} = 7$ au temps $\tilde{t} = \tilde{t}_{opt}$

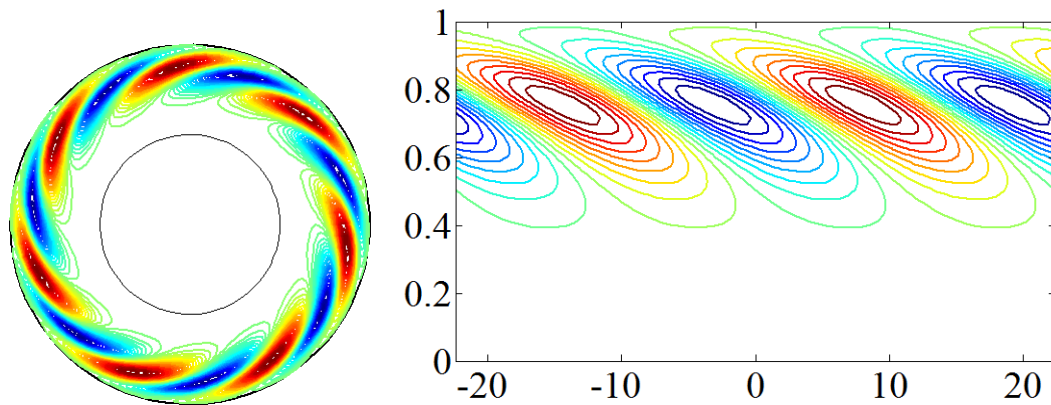


Figure (4-15d): Evolution temporelle de la perturbation optimale dans le plan (r, θ) a gauche et (r, z) a droite $Re = 5000, n = 0.5, r_0 = 0.5$ ($\tilde{H}b = 0.17321$), $\tilde{t}_{opt} = 39, \tilde{\alpha}_{opt} = 0.28$ et $m_{opt} = 7$ au temps $\tilde{t} = (3/2)\tilde{t}_{opt}$

L'analyse de la perturbation optimale pour un régime d'écoulement $Re = 5000, n = 0.5, r_0 = 0.5$ nous ramène sur des conditions optimales $\tilde{\alpha}_{opt} = 0.28$ et $m_{opt} = 7$ correspondantes à une perturbation oblique (deuxième région).

La représentation temporelle de l'évolution de la perturbation dans les plans respectifs (r, θ) et (r, z) est illustré dans les figures (4-15) pour différents temps \tilde{t} montre que la perturbation est initialement orienté dans le sens opposé de la direction du cisaillement puis elle s'aligne au temps optimale $\tilde{t} = \tilde{t}_{opt}$.

Tel qu'il a été mentionné par Farrel et Ioannou [7], l'amplification de l'énergie cinétique de la perturbation est assurée grâce au mécanisme Orr et Lift-Up. Une autre explication de l'accroissement de l'énergie de perturbation est proposée en alternative par Vitoshkin et al [30].

Ces auteurs ont clarifié le rôle interactif joué entre la vorticité q dans la direction azimutal et la divergence plane d dans le plan de cisaillement (r, z) .

Ceci est expliqué par l'analyse de l'énergie de perturbation à travers les termes de production des contraintes de Reynolds. Pour cela une décomposition de Helmotz en **2D** est réalisé tel que :

$$u = u_d + u_q$$

Avec ; $u_d = \nabla(\varphi)$ et $u_q = -rot(\psi_{e\theta})$ **(4-23)**

φ et ψ Sont deux fonctions scalaires telles que la divergence plane

$$d = \partial u / \partial r + u / r + \partial w / \partial z$$
 (4-24)

Et la vorticité azimutale

$$q = \partial v / \partial r + v / r - (1 / r) \partial U / \partial \theta$$
 (4-25)

Satisfaisant la condition suivante.

$$d = \Delta_H(\varphi) \text{ et } q = \Delta_H(\psi)$$
 (4-26)

Où

$$\Delta_H \equiv \partial^2 / \partial r^2 + (1 / r) \partial / \partial r + \partial^2 / \partial z^2$$

Est l'opérateur Laplacien **2D** dans le plan de cisaillement (r, z) .

L'expression de l'accroissement de l'énergie via les contraintes de Reynolds est donné par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} &= -\Re \langle \dot{\gamma}_{rz}^b u w^* \rangle \\ &= -\Re \langle \dot{\gamma}_{rz}^b (u_d + u_q)(w_d^* + w_q^*) \rangle \\ &= -\Re \langle \dot{\gamma}_{rz}^b (u_d w_d^*) \rangle - \Re \langle \dot{\gamma}_{rz}^b (u_q w_q^*) \rangle - \Re \langle \dot{\gamma}_{rz}^b (u_d w_q^*) \rangle - \Re \langle \dot{\gamma}_{rz}^b (u_q w_d^*) \rangle \end{aligned}$$
 (4-27)

Avec ;

$$n = |u|^2 \text{ et } \langle (\cdot) \rangle = \int_{r_0}^1 (\cdot) r dr.$$

L'évolution temporelle des différents termes des contraintes de Reynolds sont décrites sur la figures (4-12a) pour $Re = 5000, n = 0.5$ et $r_0 = 0.5$. on note que le

premier terme de l'équation (4-11) qui exprime la contribution de la divergence plane à l'accroissement de l'énergie de la perturbation, est positive et reste relativement faible.

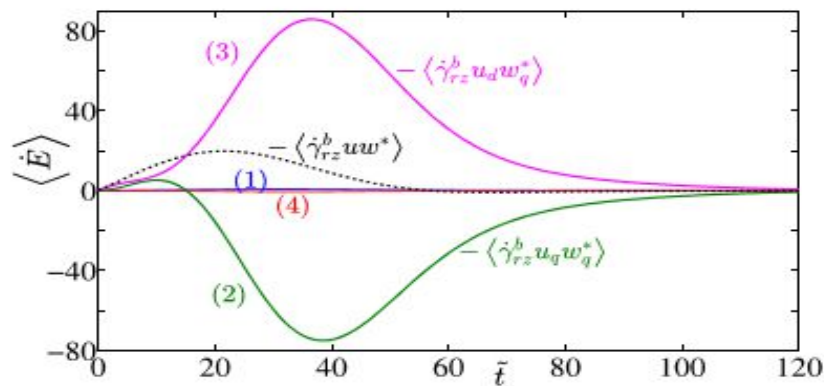


Figure (4-12a): Contribution des différents composants des contraintes de Reynolds à l'amplification optimale d'une perturbation oblique à $Re = 5000, n = 0.5, r_0 = 0.5, \tilde{\alpha} = 0.28$ et $m = 7$;

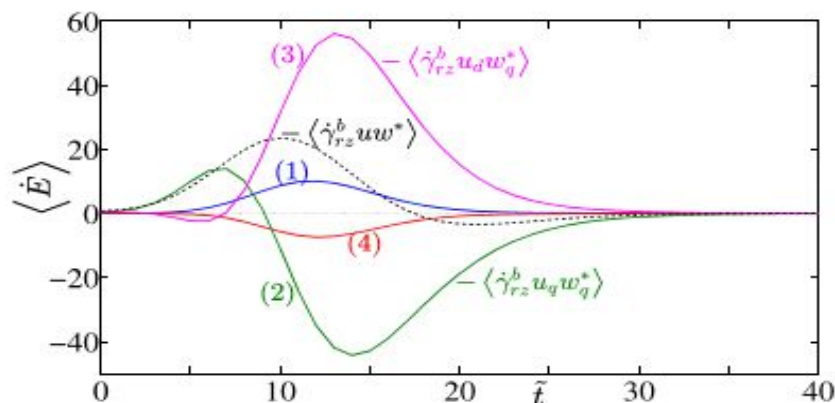


Figure (4-12b): Contribution des différents composants des contraintes de Reynolds à l'amplification optimale d'une perturbation oblique à $Re = 5000, n = 0.5, r_0 = 0.8, \tilde{\alpha} = 1.54$ et $m = 12$

Le second terme de l'équation (4-11), autrement dit le terme rotationnelle $-\langle \dot{\gamma}_{rz}^b(u_q w_q^*) \rangle$ représente la contribution en 2D du mécanisme Orr. Initialement ce terme est positif et participe à l'augmentation de l'énergie.

A partir de $\tilde{t} = \left(\frac{1}{2}\right)\tilde{t}_{opt}$, les tourbillons basculent avec le cisaillement et le terme $-\langle \dot{\gamma}_{rz}^b(u_q w_q^*) \rangle$ est négatif. Le mécanisme Orr contribue à la dégradation de l'énergie.

Le troisième terme $-\langle \dot{\gamma}_{rz}^b(u_d w_q^*) \rangle$, est le premier terme mixte qd . Il est positif et contribue fortement à l'accroissement de l'énergie de la perturbation et peut

submerger la grande contribution négative du mécanisme Orr, lorsque les tourbillons s'alignent avec le cisaillement de base.

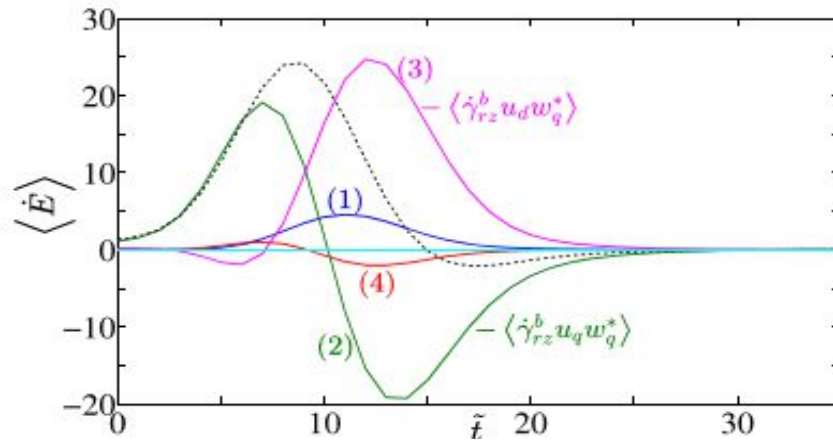


Figure (4-12c): Contribution des différents composants des contraintes de Reynolds à l'amplification optimale d'une perturbation oblique à $Re = 5000, n = 0.5, r_0 = 0.9, \tilde{\alpha} = 1.715$ et $m = 17$;

Le quatrième terme $-\langle \dot{\gamma}_{rz}^b u_q w_d^* \rangle$, est le deuxième terme mixte qd . Il est négatif et très faible. Avec l'augmentation du rayon r_0 , la contribution du mécanisme Orr dans l'amplification de l'énergie cinétique de la perturbation devient plus significative. Cette constatation est mise au clair sur les Figures (4-12b) et (4-12c).

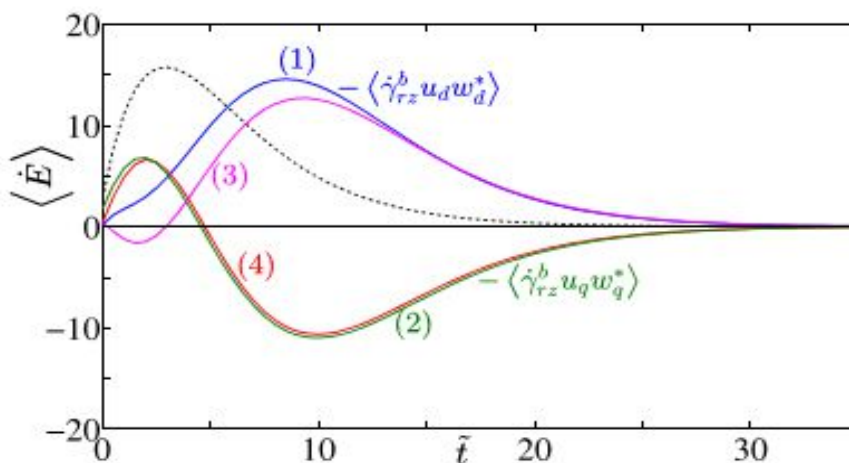


Figure (4-12d): Contribution des différents composants des contraintes de Reynolds à l'amplification optimale d'une perturbation oblique à $Re = 5000, n = 0.5, r_0 = 0.9, \tilde{\alpha} = 0.6$ et $m = 44$ termes $(\mu_t - \mu_b)$ et leurs dérivées sont annulées;

Pour une valeur du rayon comprise dans l'intervalle, $0.93 \leq r_0 < 1$, la perturbation optimale est axisymétrique. La croissance transitoire de l'énergie de perturbation provient du mécanisme Orr.

Il est associé à l'inclinaison de la perturbation dans la direction du cisaillement moyen. Ce phénomène de basculement est illustré dans la Figure (4-13a) à (4-13d)

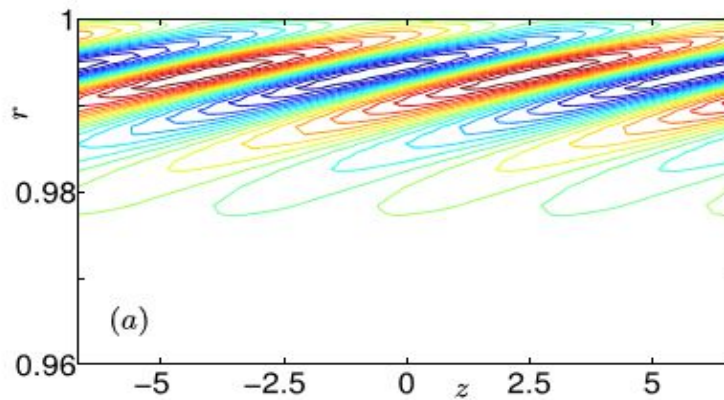


Figure (4-13a):Évolution temporelle de la perturbation optimale $a\tilde{t} = 0$ $n = 0.5$, $r_0 = 0.96$ ($Hb = 41.47$), $Re = 5000$, avec $\tilde{\alpha}_{opt} = 0.94$, $m_{opt} = 0$ $\tilde{t}_{opt} = 16.2$. ;

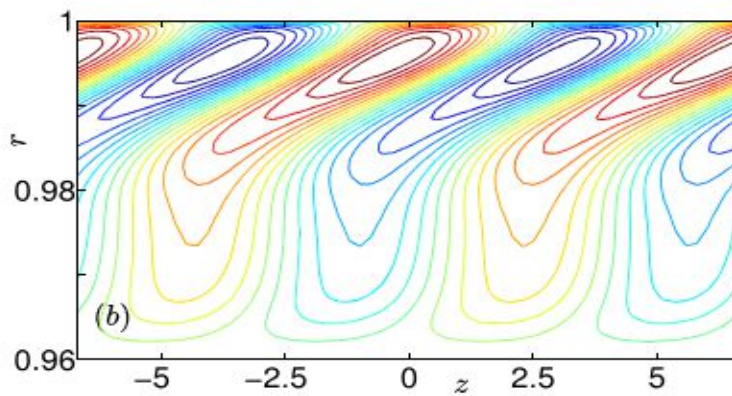


Figure (4-13b):Évolution temporelle de la perturbation optimale $a\tilde{t} = \tilde{t}_{opt}/2$; $n = 0.5$, $r_0 = 0.96$ ($Hb = 41.47$), $Re = 5000$, avec $\tilde{\alpha}_{opt} = 0.94$, $m_{opt} = 0$ $\tilde{t}_{opt} = 16.2$. ;

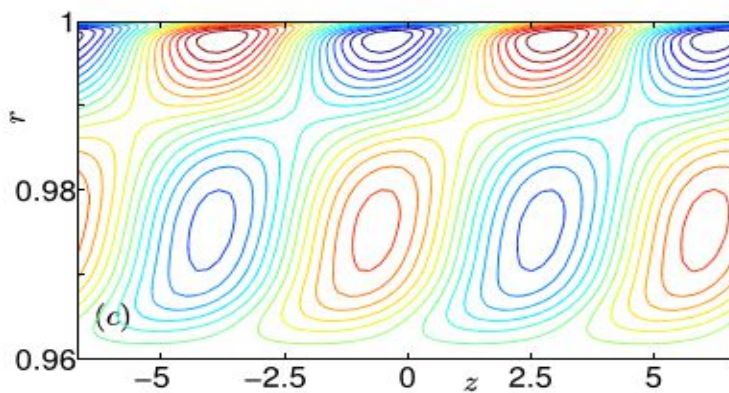


Figure (4-13c):Évolution temporelle de la perturbation optimale $a\tilde{t} = \tilde{t}_{opt}$; $n = 0.5$, $r_0 = 0.96$ ($Hb = 41.47$), $Re = 5000$, avec $\tilde{\alpha}_{opt} = 0.94$, $m_{opt} = 0$ $\tilde{t}_{opt} = 16.2$. ;

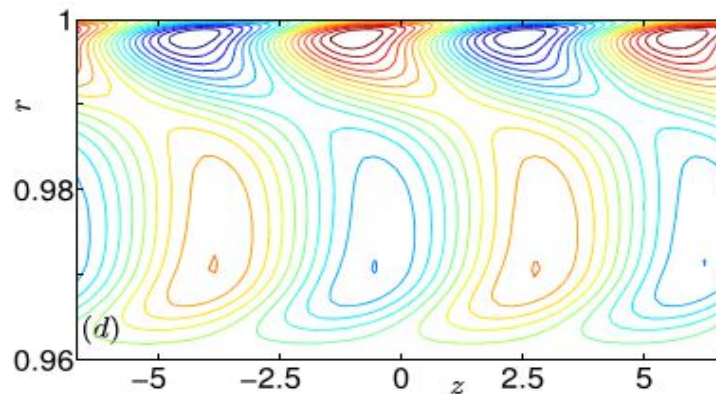


Figure (4-13d):Évolution temporelle de la perturbation optimale $a\tilde{t} = (3/2)\tilde{t}_{opt}$; $n = 0.5$, $r_0 = 0.96$ ($Hb = 41.47$), $Re = 5000$, avec $\tilde{\alpha}_{opt} = 0.94$, $m_{opt} = 0$, $\tilde{t}_{opt} = 16.2$. ;

Les contours de la vitesse axiale de la perturbation optimale sont représentés à différent intervalle de temps. Contrairement à la situation précédente décrite dans la figure (4-15) et correspondante à la deuxième zone du rayon r_0 , la perturbation optimale 2D est orientée transversalement au cisaillement principal au temps optimal \tilde{t}_{opt} .

3-3/ Interprétation Physique

- si nous posons $n = 1$, et nous annulons artificiellement les termes en $\tilde{H}b$ dans les opérateurs de stabilité linéaire, nous retrouvons l'écoulement newtonien de Couette-Poiseuille.
- La perturbation optimale consiste en une paire de tourbillons longitudinal contra rotatif ($\alpha = 0$) pour tout $r_0 < 1$. Le mécanisme Lift Up est le seul mécanisme opérationnel dans l'amplification de l'énergie. Le nombre d'ondes azimutales augmente de façon significative avec l'augmentation de r_0 . Une légère augmentation de G_{opt} avec l'augmentation de r_0 est observée.
- L'obliquité de la perturbation optimale qui peut être caractérisé par le rapport $arctang(\alpha/m)$ est une conséquence des termes d'anisotropies autrement dit les termes issus de la perturbation de viscosité.
- En effet, si nous annulons artificiellement les termes $(\mu_t - \mu_b)$ et $D(\mu_t - \mu_b)$, l'obliquité est fortement réduite. A titre d'exemple pour $r_0 = 0.9$, le rapport (α/m) est beaucoup plus petit (10 fois moins) quand les termes d'anisotropies sont négligé.

On note que l'amplification de l'énergie est aussi réduite d'une manière significative et seul le mécanisme Lift-Up est opérationnel.

- La contribution des différents termes de l'équation (4-11) dans la croissance transitoire à $r_0 = 0,9$ et $n = 0,5$ est représenté sur la Figure (4-12d). En comparaison à la Figure (4-12c), la contribution du mécanisme Orr est limitée. Le Lift-Up demeure le principal mécanisme de l'amplification énergétique.

3-4/ Lois De Comportement et Facteur d'échelle G_{opt} et T_{opt}

Pour un r_0 et n donné, on a étudié la dépendance de G_{opt} et T_{opt} avec le nombre de Reynolds \tilde{Re} . On constate que G augmente avec l'augmentation de \tilde{Re} .

La mise à l'échelle avec Re^2 , est illustré dans la Figure (4-12a) on constate que ce comportement est retrouvé pour les fluides de **Hershel-Bulkley** dans la première région où $\alpha = 0$.

Elle s'applique également dans la deuxième région jusqu'à $r_0 = 0,6$, où le mécanisme Lift-Up est le mécanisme dominant dans la croissance transitoire (voir figure (4-14a)).

De même, la mise à l'échelle de du temps t_{opt} avec le nombre de Reynolds \tilde{Re} est satisfaite, voir Figure (4-14b).

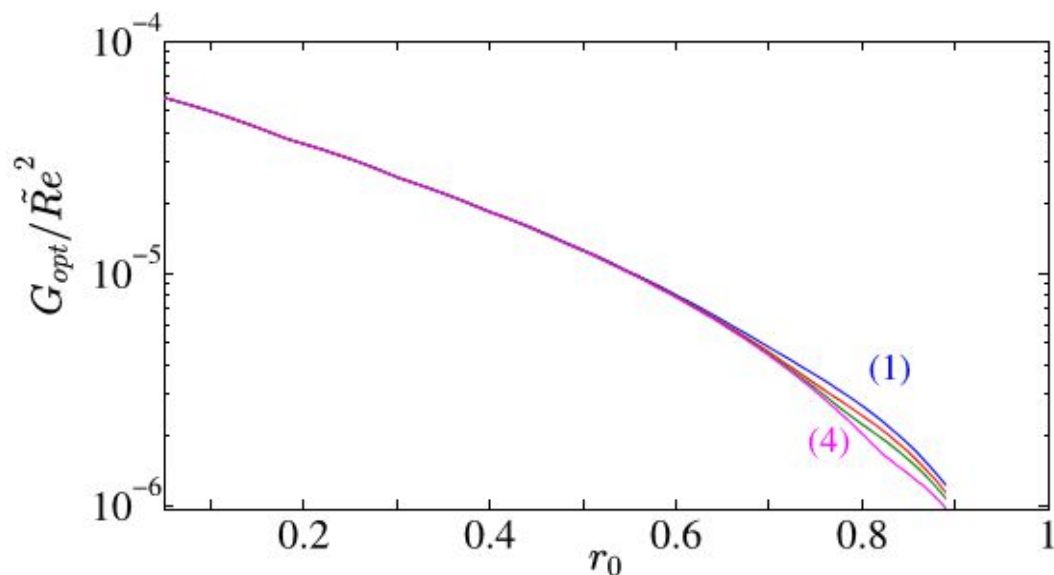


Figure (4-14a):Évolution de G_{opt} / \tilde{Re}^2 en fonction du rayon de la zone bouchon r_0 pour $n = 0,5$ et différents valeur de Reynolds \tilde{Re} : (1) $\tilde{Re} = 3000$, (2) $\tilde{Re} = 4000$ (3) $\tilde{Re} = 5000$, (4) $\tilde{Re} = 7000$.

La figure ci-dessus illustre l'évolution de l'énergie optimale mise à l'échelle en fonction du rayon de la zone non cisailé r_0 .

La figure ci-dessous illustre l'évolution de l'énergie le temps optimale de la perturbation en fonction du rayon de la zone non cisailé r_0

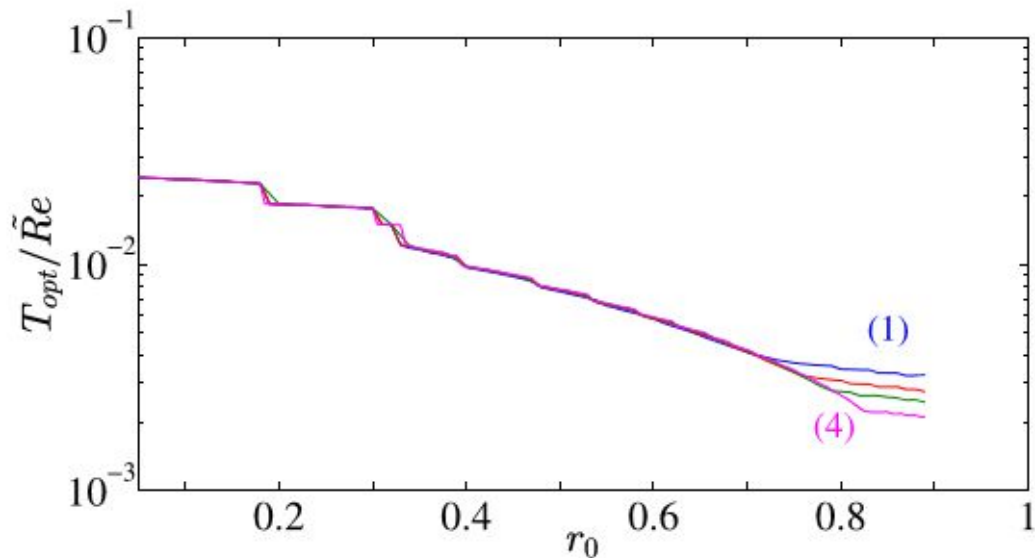


Figure (4-14b):Évolution de $\tilde{t}_{opt} / \tilde{Re}$ en fonction du rayon de la zone bouchon r_0 pour $n = 0.5$ et différentes valeur de Reynolds \tilde{Re} : (1) $\tilde{Re} = 3000$, (2) $\tilde{Re} = 4000$ (3) $\tilde{Re} = 5000$, (4) $\tilde{Re} = 7000$.

L'analyse des résultats numériques montre qu'ils peuvent être interpolés sous la forme suivante.

$$\frac{G_{opt}}{\tilde{Re}^2} = A_n \exp(B_n r_0) \quad (4-28)$$

$$\frac{\tilde{t}_{opt}}{Re} = A'_n \exp(B'_n r_0) \quad (4-29)$$

Où le coefficient A_n, A'_n et l'exposant B_n, B'_n dépendent de n sont donnés dans *Tableau (4-1)*.

Tableau(4-1) :Facteurs d'échelle

n	0.3	0.5	0.7	1
$A_n \times 10^6$	66.1	68.1	68.1	62.9
B_n	-2.22	-3.28	-3.55	-3.62
$A'_n \times 10^6$	24.6	32.1	35.4	32.9
B'_n	-2.72	-2.81	-2.96	-2.8

4/ Condition de non-augmentation de l'énergie de la perturbation

Dans cette partie, on se propose de déterminer le nombre de Reynolds maximal en dessous duquel l'énergie cinétique de toute perturbation admissible décroît de façon monotone au cours du temps.

On rappelle que pour des nombres d'onde α et m donnés, une perturbation admissible peut être écrite sous la forme d'une combinaison linéaire des fonctions propres. Soit E l'énergie cinétique moyenne de la perturbation dans la zone cisailée $\Omega = [r_0, 1] \times [0, 2\pi] \times [0, 2\pi/\alpha]$, défini ici par

$$E = \frac{1}{\|\Omega\|} \int_{\Omega} \left[\frac{u_r'^2 + v_r'^2 + w_r'^2}{2} \right] d\Omega \quad (4-30)$$

Dans l'équation (4-19), u_r' est la partie réelle de $u(r; t) \exp[(i\alpha z + m\theta)]$ il en est de même pour v_r' et w_r' , soit encore E se met sous la forme :

$$E = \frac{1}{(1-r_0^2)} \int_{r_0}^1 [uu^* + vv^* + ww^*] r dr \quad (4-31)$$

où u^* , v^* et w^* sont respectivement le complexe conjugué de u , v et w .

La variation temporelle de l'énergie cinétique moyenne de la perturbation $\frac{dE}{dt}$ est obtenue en multipliant les équations aux perturbations linéarisées (3-3), (3-4) et (3-5) par u^* , v^* et w^* respectivement et intégrées sur le domaine Ω en respectant la condition $u = 0$ à la paroi et à l'interface.

Le résultat est une équation de type Reynolds-Orr modifié donnée par

$$(1 - r_0^2) \frac{dE}{dt} = \mathfrak{I}(u) - \frac{1}{Re} [v(u) - \mathcal{A}(u)] \quad (4-32)$$

où $\mathfrak{I}(u)$, $v(u)$ et $\mathcal{A}(u)$ désignent respectivement les termes d'inertie de dissipation visqueuse et d'anisotropie. Ils sont donnés par :

$$\mathfrak{I}(u) = \langle DW_b(u_r v_r + u_i v_i) \rangle \quad (4-33)$$

$$v(u) = \langle \mu_b \left(|D(u)|^2 + \alpha^2 |u|^2 + \frac{m}{r^2} \right) |w|^2 \rangle \quad (4-34)$$

$$\mathcal{A}(u) = \langle (\mu_b - \mu_t) |Dv + i\alpha u|^2 \rangle \quad (4-35)$$

. Finalement, la condition de stabilité de l'écoulement au sens de la norme énergie est satisfaite si $\frac{dE}{dt} < 0$.

Soit donc R_{e1} , le plus grand nombre de Reynolds pour lequel cette condition est satisfaite :

$$\frac{1}{R_{e1}} = \max_u \frac{\mathfrak{I}(u)}{\mathcal{V}(u) - \mathcal{A}(u)} \quad (4-36)$$

Où u est une perturbation admissible qui satisfait l'équation de continuité et les conditions aux limites.

Ce problème d'optimisation avec contraintes est résolu en utilisant un calcul variationnel.

Pour tenir compte de la condition d'incompressibilité, un multiplicateur de Lagrange $\xi(r, \theta, z)$ est introduit. Le problème d'optimisation peut être reformulé comme suit :

$$\delta [\mathcal{I}(\mathbf{u}) - \Lambda (\mathcal{V}(\mathbf{u}) - \mathcal{A}(\mathbf{u})) - \xi \nabla \cdot (\mathbf{u})] = 0 \quad (4-37)$$

Où δ est l'opérateur variationnel. Les équations d'Euler-Lagrange déduites de l'équation (4-21) sont données par :

$$wDW_\ell = -D\xi + 2\Lambda \left[\mu \left(\Delta u - \frac{2im}{r^2}v - \frac{u}{r^2} \right) + 2\frac{d\mu}{dr} \frac{du}{dr} \right] + 2\Lambda [(\mu_t - \mu)(Dw + i\alpha)], \quad (4-38)$$

$$0 = -\frac{i\beta}{r}\xi + 2\Lambda \left[\mu \left(\Delta v + \frac{2im}{r^2}u - \frac{v}{r^2} \right) + \frac{d\mu}{dr} \left(Dv + \frac{im}{r}u - \frac{v}{r} \right) \right], \quad (4-39)$$

$$uDW_\ell = -i\alpha\xi + 2\Lambda \left[\mu \Delta w + \frac{d\mu}{dr} (Dw + i\alpha u) \right] + 2\Lambda \frac{1}{r} D[r(\mu_t - \mu)(Dw + i\alpha)]. \quad (4-40)$$

Avec

$$D^+u + i \left[\frac{m}{r}v + \alpha rw \right] = 0 \quad \text{où} \quad D^+u = Du + \frac{u}{r} \quad (4-41)$$

Les équations (4-26) a (4-28), déniassent un problème aux valeurs propres, qui peut être écrit en termes de u et w si $m \neq 0$.

L'expression développée est donnée dans l'annexe A. Dans le cas particulier $m = 0$, la formulation (u, v) est adoptée.

Le problème aux valeurs propres se réduit ainsi à :

$$\begin{aligned}
 & 2\Lambda \mu [L^2 u] + 2\Lambda D\mu \left[2DLu + \frac{Lu}{r} \right] + 2\Lambda D^2\mu [Lu + 2\alpha^2 u] \\
 & + 2\Lambda \alpha^2 (\mu_t - \mu) [Lu + 2\alpha^2 u] + 2\Lambda D \left(\frac{1}{r} D (r (\mu_t - \mu) [Lu + 2\alpha^2 u]) \right) \\
 & = -2i\alpha DW_\ell Du - i\alpha DW_\ell \frac{u}{r} - i\alpha D^2 W_\ell u
 \end{aligned} \tag{4-42}$$

Avec les conditions aux limites

$$\begin{aligned}
 r = r_0; \quad u = Du = 0 \\
 r = 1; \quad u = Du = 0.
 \end{aligned} \tag{4-43}$$

Le problème de la valeur propre (4-42) - (4-43) est résolu numériquement en utilisant la même procédure décrite précédemment au chapitre 3 avec la conversion du domaine $[r, 1]$ dans $[0,1]$ et les transformations (3-26) - (3-28). Les résultats du calcul numérique sont présentés en termes de courbes de stabilité marginales, c'est-à-dire des courbes dans le plan (α, Re_1) , qui sépare la zone de la croissance initiale de la densité d'énergie de la zone de dégénérescence de l'énergie initiale.

4-1/ Influence du rayon de la zone bouchon

Afin de mettre en évidence l'influence du rayon de la zone non cisailée, r_0 , sur les conditions de stabilité globale, les termes $\tilde{H}\tilde{b}$ sont annulés artificiellement alors que n est fixé à l'unité.

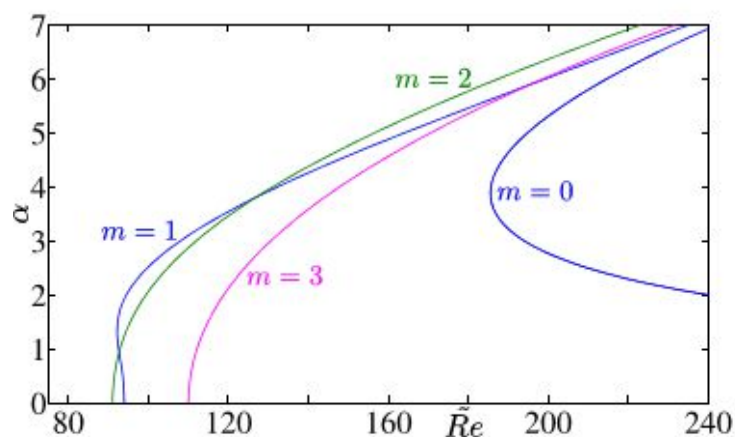


Figure (4-15a): Frontières de délimitation de la stabilité globale d'un écoulement Newtonien Couette-Poiseuille. $r_0 = 0.001$ et $\tilde{Re}_{CE} = 91.08$, m le nombre d'onde azimutal

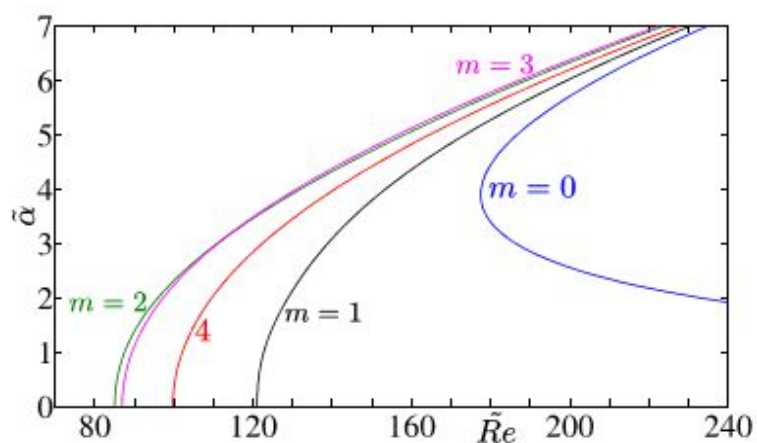


Figure (4-15b):Frontières de délimitation de la stabilité globale d'un écoulement Newtonien Couette-Poiseuille. $r_0 = 0.2$ et $\tilde{Re}_{cE} = 85.06$, m le nombre d'onde azimutal

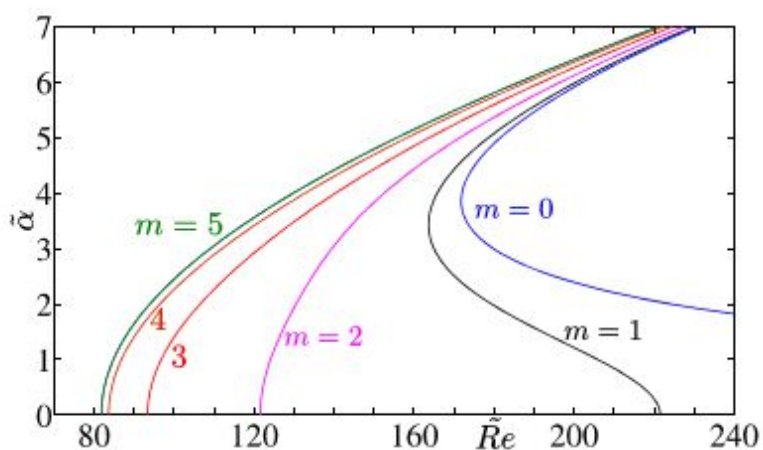


Figure (4-15c):Frontières de délimitation de la stabilité globale d'un écoulement Newtonien Couette-Poiseuille. $r_0 = 0.5$ et $\tilde{Re}_{cE} = 81.84$, m le nombre d'onde azimutal

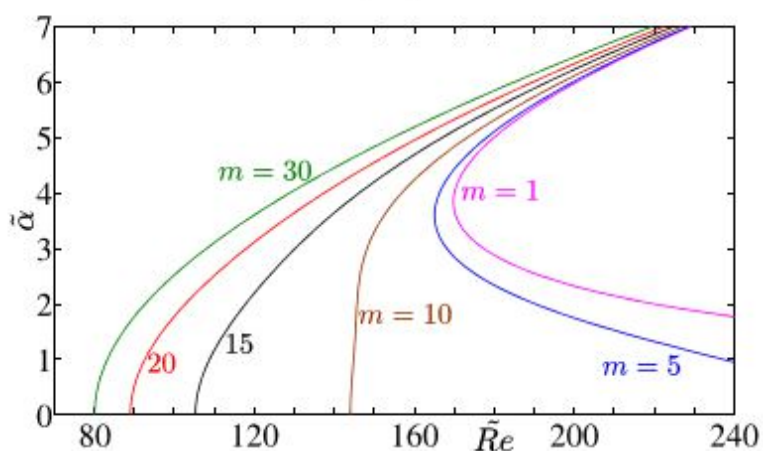


Figure (4-15d):Frontières de délimitation de la stabilité globale d'un écoulement Newtonien Couette-Poiseuille. $r_0 = 0.9$ et $\tilde{Re}_{cE} = 80.06$, m le nombre d'onde azimutal

Les figures (4-15) montrent dans ce cas particulier de l'écoulement newtonien de Couette - Poiseuille, que la perturbation la plus dangereuse est un tourbillons longitudinal ($\alpha = 0$) avec un nombre d'onde azimutal qui augmentant avec le rayon r_0 .

Le nombre de Reynolds maximum, $\tilde{Re}_{CE} = \min_{(\tilde{\alpha}, m)} Re(\tilde{\alpha}, m)$, qui ne garantit pas la croissance de l'énergie de perturbation, dépend faiblement de r_0 . Toute fois lorsque $r_0 \rightarrow 1$, \tilde{Re}_{CE} tend vers la valeur obtenue par Nouar et al. [20] pour un écoulement Poiseuille plan de Bingham, c'est-à-dire $\tilde{Re}_{CE} = 79,82$.

Cependant lorsque $r_0 \rightarrow 0$, \tilde{Re}_{CE} a une tendance à $\tilde{Re}_{CE} = 91,08$. Cette valeur est différente de celle obtenue par Joseph et Carmi [36] pour écoulement de fluide newtonien de Hagen-Poiseuille, c'est-à-dire $\tilde{Re}_{CE} = 81,49$. Cette singularité est une conséquence des conditions aux limites à la surface de l'interface de cisaillement.

4-2/ Stratification de la viscosité sans termes d'anisotropie

L'influence de la stratification de la viscosité, sur la stabilité globale, est illustrée dans la Figure (4-16). Les termes résultant des perturbations de viscosité sont annulés.

Après analyse des courbes Il est intéressant de noter que:

- (i) la perturbation la plus dangereuse est une perturbation longitudinale avec un nombre d'onde azimutal m_c plus grand que celui obtenu pour un écoulement Newtonien Couette-Poiseuille;
- (ii) (li) le nombre de Reynolds critique \tilde{Re}_{CE} augmente fortement avec l'augmentation de r_0 (ou $\tilde{H}b$), en raison de l'augmentation de la Dissipation visqueuse. A partir de $Hb \approx 30$ le résultat numérique montre que $\tilde{Re}_{CE} \propto \tilde{H}b$

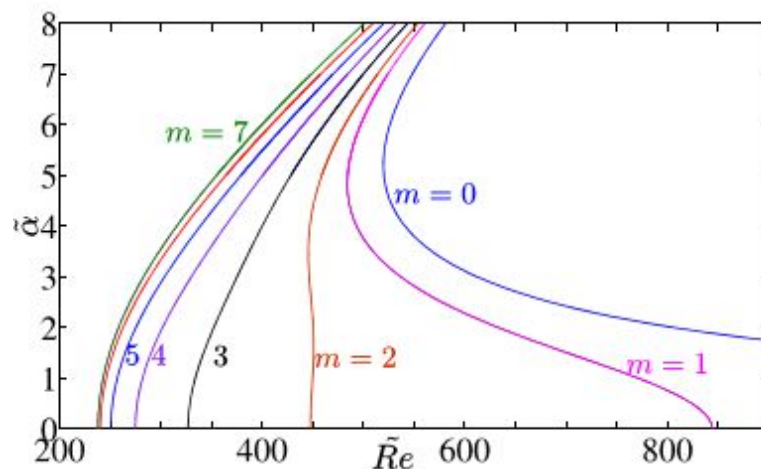


Figure (4-16a): Influence de la stratification sans les termes d'anisotropie. Frontière de délimitation $(\tilde{\alpha}, \tilde{Re})$ de la zone de stabilité globale $r_0 = 0.5$ $n = 0.5$, $Hb = 1.73$ $m_c = 7$ et $\tilde{Re}_{CE} = 237,9$, m le nombre d'onde azimutal

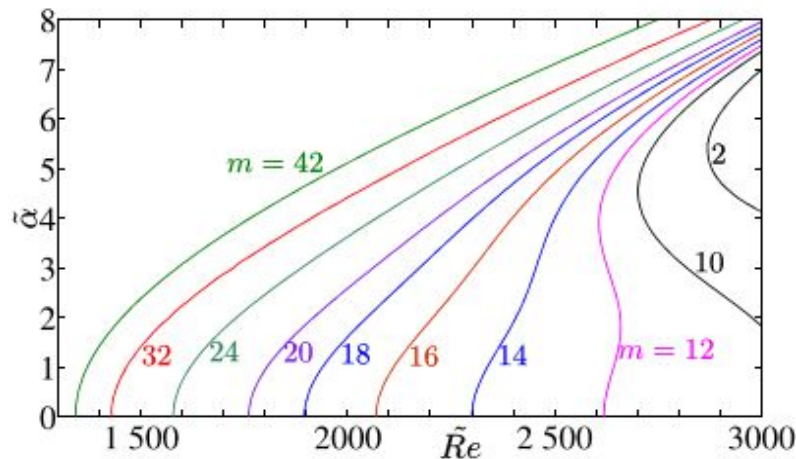


Figure (4-16b):Influence de la stratification sans les termes d'anisotropie. Frontière de délimitation $(\tilde{\alpha}, \tilde{Re})$ de la zone de stabilité globale $r_0 = 0.9$ $n = 0.5$, $Hb = 15.59 m_C = 42$ et $\tilde{Re}_{cE} = 1342$, m le nombre d'onde azimuthal

4-3/ Stratification de la viscosité avec des termes d'anisotropie

La prise en considération des termes $\tilde{H}b$ avec $n < 1$, réduit considérablement le nombre de Reynolds critique de non accroissement de l'énergie de perturbation. Pour des valeurs faibles de $\tilde{H}b$, les conditions critiques sont encore obtenues pour une perturbation sous la forme de rouleaux longitudinaux, mais avec un nombre d'onde azimuthal inférieur, figure(4-17a). La variation de \tilde{Re}_{cE} avec l'indice n est interpolé par l'équation si après :

$$\tilde{Re}_{cE} = 91.1 - 26(1 - n) \quad 0.3 \leq n \leq 1 \quad (4-44)$$

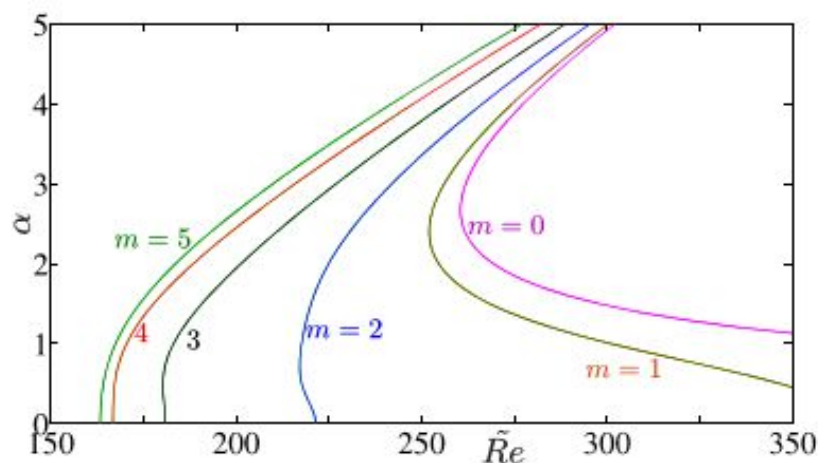


Figure (4-17a):Influence de la stratification avec les termes d'anisotropie. Frontière de délimitation $(\tilde{\alpha}, \tilde{Re})$ de la zone de stabilité globale $r_0 = 0.9$ $n = 0.5$, $Hb = 15.59 m_C = 42$ et $\tilde{Re}_{cE} = 1342$, m le nombre d'onde azimuthal

En augmentant $\tilde{H}b$, la perturbation la plus dangereuse devient oblique voir figure (4-17b).

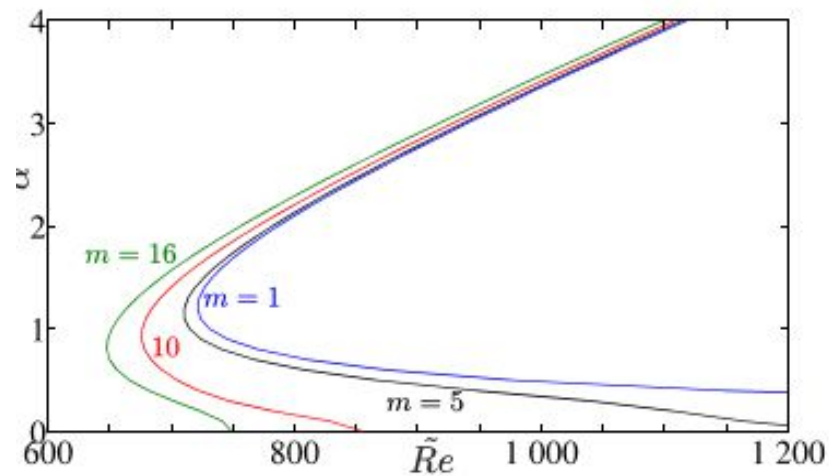


Figure (4-17b): Influence de la stratification avec les termes d'anisotropie. Frontière de délimitation $(\tilde{\alpha}, \tilde{Re})$ de la zone de stabilité globale $r_0 = 0.9$ $n = 0.5$, $Hb = 15.59$ $m_c = 42$ et $\tilde{Re}_{cE} = 1342$, m le nombre d'onde azimutal

Pour une valeur nettement élevée de $\tilde{H}b$, le mode critique est axisymétrique, comme le montre la figure (4-22), où nous avons représenté les nombres d'ondes critiques axiale $\tilde{\alpha}_c$ et azimutale m_c en fonction de $\tilde{H}b$. Il convient de noter que pour la perturbation axisymétrique, la dissipation visqueuse implique la viscosité tangente $\mu_t < \mu_b$.

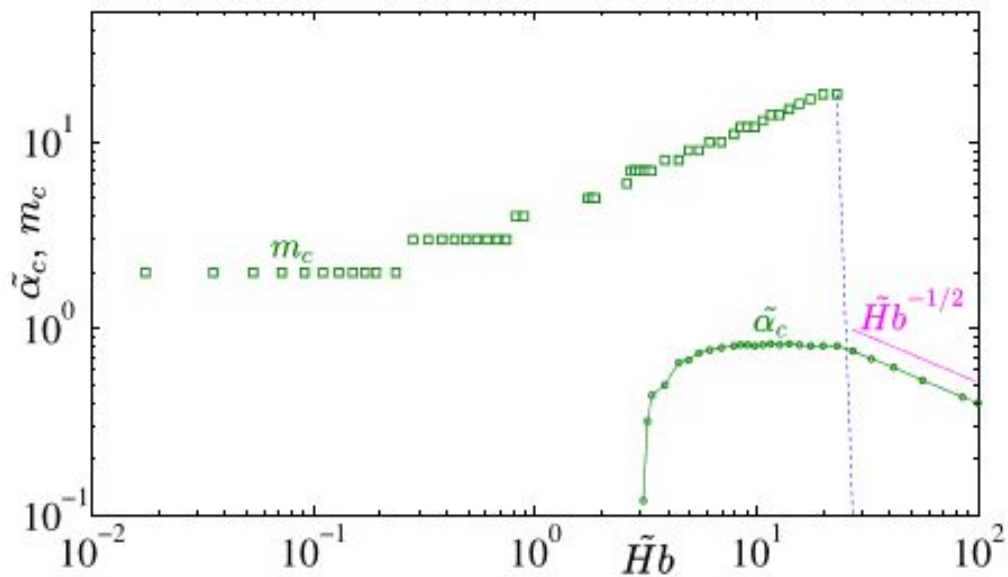


Figure (4-18): Evolution du nombre d'onde critique axial et azimutale ($\tilde{\alpha}_c$ et m_c en fonction de $\tilde{H}b$, $n = 0.5$)

La variation du nombre de Reynolds critique \tilde{Re}_{CE} est donnée par la courbe (1) dans la figure (4-19). La stabilité conditionnelle dérivée par Nouar et Frigaard [37] pour un fluide de Bingham est également représentée par la courbe (2).

Dans cette analyse, l'effet de la contrainte de cisaillement est limité à la modification du rayon de zone non cisailé. Pour des valeurs élevées de $\tilde{H}b$ ($\tilde{H}b \geq 30$), \tilde{Re}_{CE} suit un comportement asymptotique en $\tilde{H}b^{1/2}$. Le résultat numérique peut être interpolé comme suite :

$$\tilde{Re}_{CE} \approx 218n^{0.46} \cdot \tilde{H}b^{1/2} \quad (4-45)$$

Il est intéressant de noter que pour un fluide de Bingham en poiseuille plan on retrouve que $\tilde{Re}_{CE} \approx 217 \cdot \tilde{B}^{1/2}$. De même concernant le nombre d'onde critique le comportement asymptotique en $\tilde{\alpha} \sim \tilde{H}b^{-1/2}$.

Ce résultat peut être considéré comme une extension de la prédiction théorique faite par Frigaard et Nouar [38] pour un fluide de Bingham à Herschel-Bulkley ;

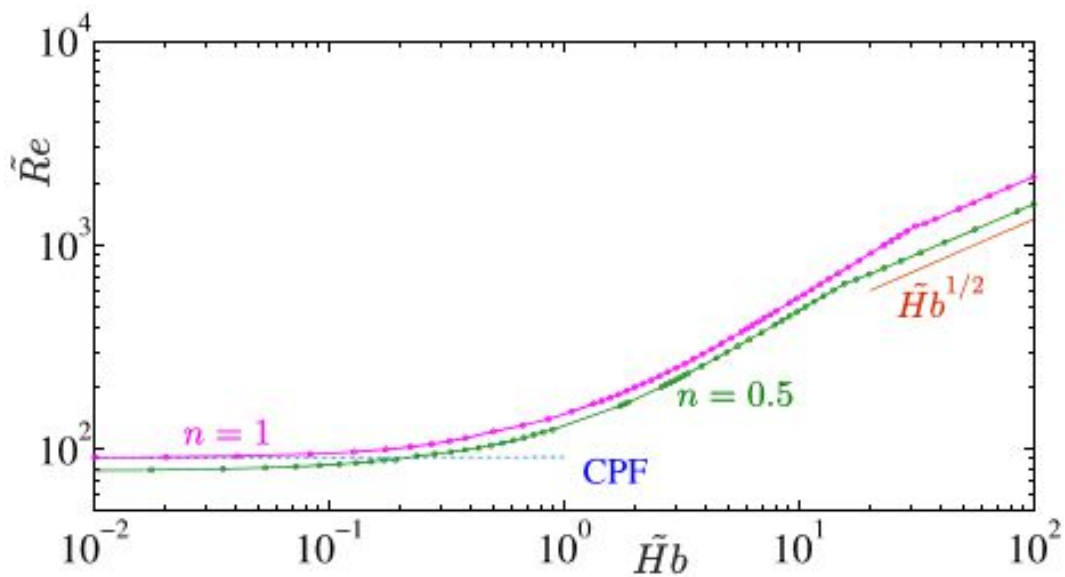


Figure (4-19): Evolution du nombre de Reynolds critique en fonction de $\tilde{H}b$ avec $n = 0.5$. CFP marque la limite de l'écoulement newtonien de Couette-Poiseuille entre de cylindre coaxial quand $r_0 \rightarrow 0$

Chapitre 5

Dispositif Expérimental et Mesures

1/ Introduction

Ce chapitre est dédié à la description du dispositif expérimental utilisé pour la détermination de la vitesse axiale dans différentes sections de la conduite et à différentes positions azimutales. Le circuit expérimental est inspiré de celui présenté par Peixhino (2004) [45] avec des modifications et une longueur plus importante. Une solution aqueuse de **Carbopol 940** est utilisée comme fluide d'expérimentation. Les aspects physico-chimiques ainsi que les propriétés de la microstructure de la solution de Carbopol sont déterminés. La caractérisation rhéologique du fluide est effectuée afin de déterminer le comportement rhéologique en déterminant la contrainte seuil et la dépendance non linéaire de la viscosité effective. Les mesures de vitesse sont réalisées par la **LDA** et la **PIV** pour étudier la transition à la turbulence et notifier l'effet de la rhéologie ainsi que la longueur de la conduite sur l'évolution de la dissymétrie le long de la conduite.

2/ Dispositif Expérimental

2-1/ Présentation et descriptive

Le circuit expérimental est réalisé sur une boucle où le fluide à l'air libre dans un bac est mis en circulation forcé par une pompe spéciale pour minimiser l'effet de cisaillement et sauvegarder ces caractéristiques non newtoniennes.

Il est alors mis sous pression puis renvoyé vers un échangeur à chaleur à faisceau tubulaire où se réalise un échange de chaleur de refroidissement par circuit d'eau externe afin de contrôler l'augmentation de la température durant les mesures.

Un ballon sous pression reçoit le fluide et alimente la conduite de mesure avec un débit uniforme contrôlé par la variation du régime de la pompe à l'aide d'un variateur de fréquence dans l'armoire de commande électrique de la pompe. Un ensemble de dispositif de mesure est installé permettant de porter le laser pour la mesure de vitesse par **LDA**. D'autre part un prisme est installé sur la conduite de manière à pouvoir réaliser aussi la prise d'image pour la **PIV**.

Le dispositif supportant la source laser pour la **LDA** permet de réaliser des rotations afin de pouvoir positionner la source à différents angles de mesures azimutal et dans différentes positions de la conduite. Cette dernière est en matière PVC translucide fixé sur un support et aligné horizontalement.

Les schémas ci-dessous donnent une vue généralisée du dispositif expérimental et le circuit de mesure. On note que la longueur de la conduite est plus importante par rapport à celle qui a été utilisée durant la réalisation des mesures par Esmail [49].

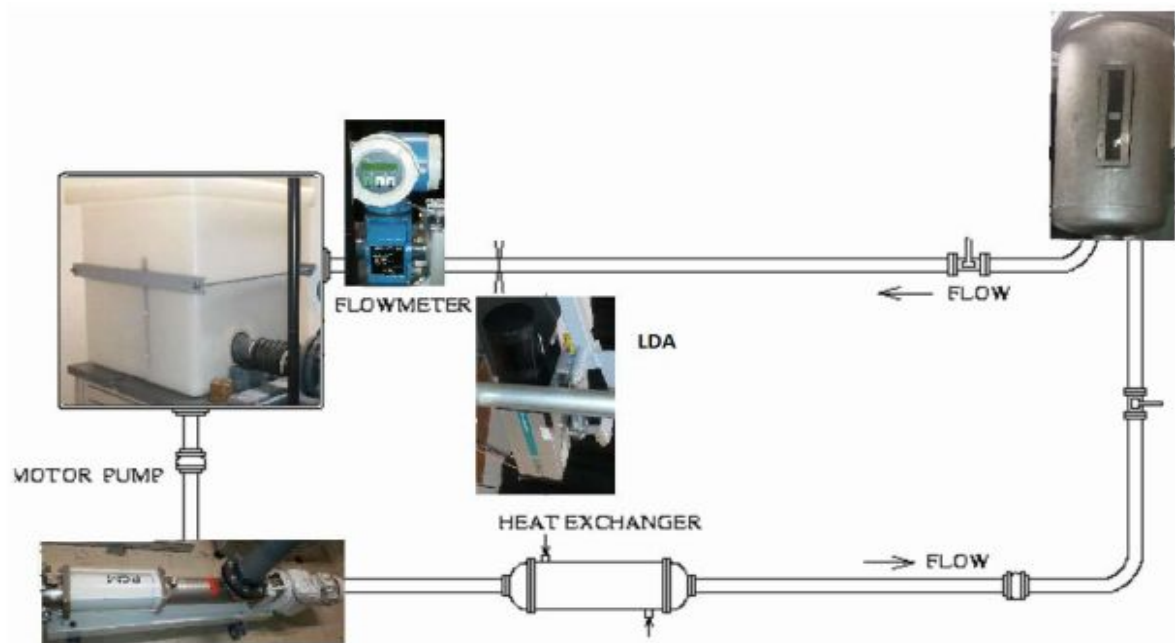


Figure (5-1): Montage expérimental

Un circuit de dérivation permet de contrôler le débit avec précision dans la veine principale. L'écoulement est assuré au moyen d'une pompe volumétrique à rotor excentré (Moineau 4515). Le débit, Q_V , est réglable jusqu'à **400 l/min** avec une précision de 1%.

Un bac pressurisé de 50 litres placé en amont de la veine d'essai avec des manchons d'anti vibration permettent de limiter la transmission des vibrations de la pompe au châssis qui supporte la conduite.

Le bac d'alimentation installé en aval de la veine d'essai peut contenir jusqu'à 125 litres des 250 litres de fluide nécessaire au fonctionnement optimal de l'installation. La veine d'essai est une conduite cylindrique horizontale en plexiglass de rayon intérieur $R = 15\text{mm}$ et de longueur $L = 8\text{m}$.

Elle est instrumentée en prises de pression pour l'évaluation du coefficient de frottement. L'ensemble de la veine repose sur un berceau qui assure l'alignement des divers éléments.

Les profils de vitesse axiale peuvent être mesurés par vélocimétrie laser à effet Doppler à différentes positions axiales marquées sur la conduite (20, 40, 60, 90, 120, 160, 200, 240 et 263 diamètres de l'entrée) et pour des positions azimutales séparées de $\pi/4$.

Pour toutes les expériences effectuées, la température du fluide à l'entrée de la conduite est maintenue constante à l'aide d'un réglage précis assurant un contrôle de débit d'eau de refroidissement dans le circuit de l'échangeur de chaleur pour une marge de ± 0.2 autour de la valeur réglée.

2-2/ Longueur D'établissement

La longueur \hat{L}_e d'établissement de l'écoulement laminaire d'un fluide de **Herschel-Bulkley** dans une conduite cylindrique peut être estimée en utilisant la corrélation proposée par Froishteter et Vinogradov (1980) [56], donnée par :

$$\frac{\hat{L}_e}{\hat{R} Re_g} = 0.23 \left(\frac{1}{n}\right)^{0.31} - 0.4 r_0 \quad (5-1)$$

Avec

$$Re_g = \frac{\rho \hat{W}_d^{2-n} \hat{R}^n}{\hat{R}} \quad (5-2)$$

La relation (5-1) résulte d'une corrélation des résultats numériques issus de la résolution des équations du mouvement munies des hypothèses de Prandtl. L'expression est réécrite en termes de Reynolds basé sur la viscosité pariétale et le diamètre de la conduite.

$$\frac{Re_g}{Re_p} = \frac{1}{2} \frac{\hat{\mu}_p}{\hat{R} \left(\frac{\hat{W}_d}{\hat{R}}\right)^{n-1}} \quad (5-3)$$

En écrivant μ_p en fonction du gradient pariétal de vitesse théorique et après quelques calculs algébriques, on arrive à :

$$\frac{Re_g}{Re_p} = \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{W}_d}{\hat{W}_{max}}\right)^{1-n} \frac{1}{(1-r_0)^n} \left(\frac{1+n}{n}\right)^{n-1} \quad (5-4)$$

Soit

$$\frac{\hat{L}_e}{\hat{R}} = \left[0.23 \left(\frac{1}{n} \right)^{0.31} - 0.4 r_0 \right] \times \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\hat{W}_d}{\hat{W}_{max}} \right)^{1-n} \frac{1}{(1-r_0)^n} \left(\frac{1+n}{n} \right)^{n-1} \right] Re_p \quad (5-5)$$

Avec,

$$\frac{\hat{W}_d}{\hat{W}_{max}} = 1 - \frac{2n(1-r_0)}{(2+n)} \left(1 - \frac{n(1-r_0)}{3+n} \right) \quad (5-6)$$

La figure (5-2) illustre à titre d'exemple l'évolution de la longueur d'établissement L_e rapportée au rayon de la conduite en fonction du nombre de Reynolds pari Re_p pour un indice du fluide $n = 0.5$ et deux valeurs de la zone bouchon (a) $r_0 = 0.1$ ($H_b = 0.19225$) et (b) $r_0 = 0.5$ ($H_b = 1.7321$). On peut noter en particulier une diminution de la longueur d'établissement rapportée au rayon de la conduite (L_e/R) lorsque H_b augmente.

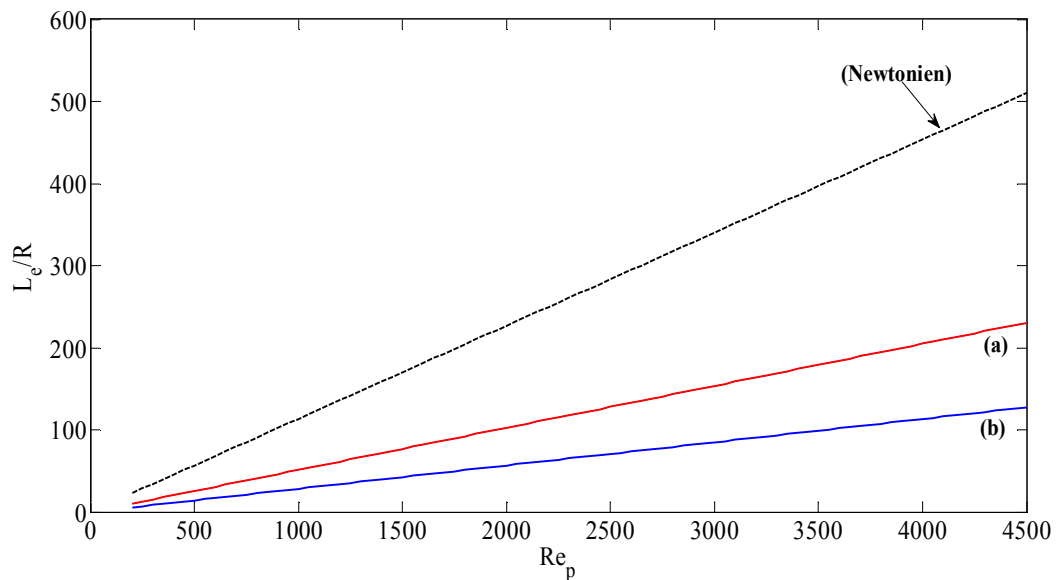


Figure (5-2): longueur d'établissement en fonction de Re_p [56]

On a aussi représenté à titre comparatif la corrélation proposée récemment par Durst et al (2005) [57] de la longueur d'entrée pour un fluide Newtonien valable dans l'intervalle $0 \leq Re \leq +\infty$ tant que l'écoulement est laminaire.

$$\frac{\hat{L}_e}{\hat{R}} = 2 \times \left[(0.619)^{1.6} + (0.0567 \times Re)^{1.6} \right]^{\frac{1}{1.6}} \quad (5-7)$$

3/ Techniques de Mesure

3-1/ Mesure De perte De Charge

Deux prises de pression sont installées dans un tronçon de la conduite loin de l'entrée pour déterminer les pertes de charge. Elles ont un diamètre de 4mm chacune et sont

distantes de $L = 2\text{ m}$ l'une de l'autre. Les deux prises de pression sont reliées à un transmetteur de pression différentielle (**Druck LPX 9481**).

C'est un transmetteur à membrane qui permet la transformation d'une différence de pression en déformation. Celle-ci est mesurée à l'aide d'un capteur à courants de Foucault. La précision du transmetteur est estimée à **0.25%** de la valeur maximale de l'étendue de mesure (**1 bar**).

Pour obtenir des mesures correctes, on utilise des chambres cylindriques reliées aux prises de pression. Les chambres cylindriques et les tubes de raccordement menant au transmetteur sont remplis d'un fluide Newtonien (de l'eau). Le capteur de pression est relié à un ordinateur par une carte d'acquisition.

3-2/ Mesure De Débit

Un débitmètre électromagnétique est placé à une distance de **300 mm** en aval de la conduite. L'erreur commise sur la mesure du débit n'excède pas **1%** de l'étendue de mesure (**0– 400 l/min**). Le principe de mesure repose sur la loi d'induction de Faraday.

Le liquide qui traverse le débitmètre constitue un élément conducteur qui génère une tension induite par le champ magnétique créé par les bobines d'induction de cet appareil électromagnétique. Cette tension est linéairement proportionnelle à la vitesse de passage du liquide.

3-3/ Mesure De Température

La température du fluide est contrôlée à l'aide d'un thermocouple de type *Chromel – Alumel* de 1 mm de diamètre placé à l'entrée de la conduite. Elle est maintenue constante à $(20 \pm 0.2)^\circ\text{C}$ durant toutes les expériences, grâce à un échangeur de chaleur tubulaire (**CIAT**).

L'échangeur est alimenté par une conduite d'eau du réseau. Le réglage du débit se réalise par le biais d'un potentiomètre qui commande une électrovanne réglable et un circuit de bypass installé sur le circuit d'eau.

Un afficheur de température nous permet de suivre l'évolution de la mesure pendant la réalisation de l'expérience de mesure. Il faut constamment régler le débit d'eau afin de maintenir une température durant l'expérience qui avoisine les 20°C .

3-4/ Mesures des vitesses

Les profils radiaux de la composante axiale de la vitesse ont été mesurés aux positions axiales prédéfinies préalablement à partir de la section d'entrée et à quatre positions azimutales séparées de $\pi/4$, comme cela est illustré dans la figure (5-2).

Les mesures ont été effectuées par vélocimétrie laser Doppler (*VLD*). Cette technique se base sur l'analyse fréquentielle du signal lumineux diffusé par une particule passant à travers un volume de mesure constitué de franges d'interférence.

Ces dernières sont obtenues à partir de l'intersection de deux faisceaux monochromatiques cohérents, issus d'un même laser.

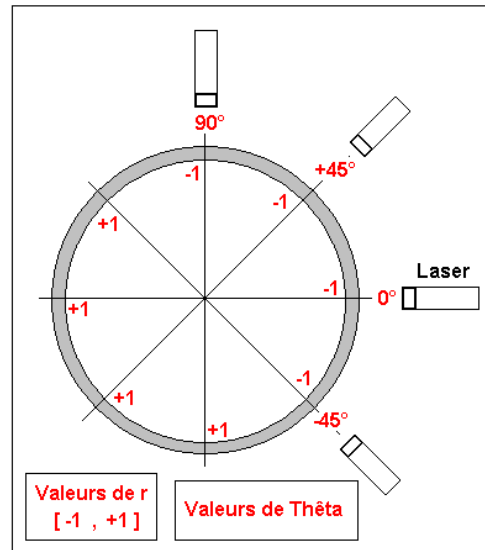


Figure (5-2): Positions azimutales des différents angles suivant lesquels les profils de vitesse axiale ont été mesurés.

Les franges d'interférence sont des plans parallèles, équidistants alternativement sombres et brillants. Ils sont parallèles à la bissectrice intérieure et perpendiculaire au plan formé par ces faisceaux. La distance $\hat{\delta}_f$ entre deux franges brillantes ou interfrange dépend de la longueur d'onde de la lumière laser et de l'angle ϑ formé par les deux faisceaux. Elle est donnée par

$$\hat{\delta}_f = \frac{\lambda_0}{2 \sin(\vartheta/2)} \quad (5-10)$$

Le temps mis par une particule pour passer d'une frange brillante à l'autre est donné par la relation ci-dessous :

$$\hat{T} = \frac{\hat{\delta}_f}{\hat{u}_p} \quad (5-11)$$

Avec, \hat{u}_p la composante de la vitesse perpendiculaire au plan des franges.

La fréquence de lumière diffusée par la particule est l'inverse de la période.

$$\hat{F}_D = \frac{1}{\hat{T}} = \frac{2 \hat{u}_p \sin(\vartheta/2)}{\lambda_0} \quad (5-12)$$

Le faisceau laser utilisé dans l'expérience est du type Hélium-Néon d'une puissance maximale de 120 mW , d'une longueur d'onde $\ell_0 = 632.8\text{ nm}$. Le faisceau issu du laser est séparé en deux autres faisceaux grâce à un miroir semi-transparent. L'un de ces faisceaux est décalé en fréquence de 40 MHz par passage dans une cellule de Bragg voir figure (5-3).

Les faisceaux sont ensuite dirigés vers une fibre optique. La tête optique comprend un module d'expansion qui accroît le diamètre des faisceaux ainsi que leur

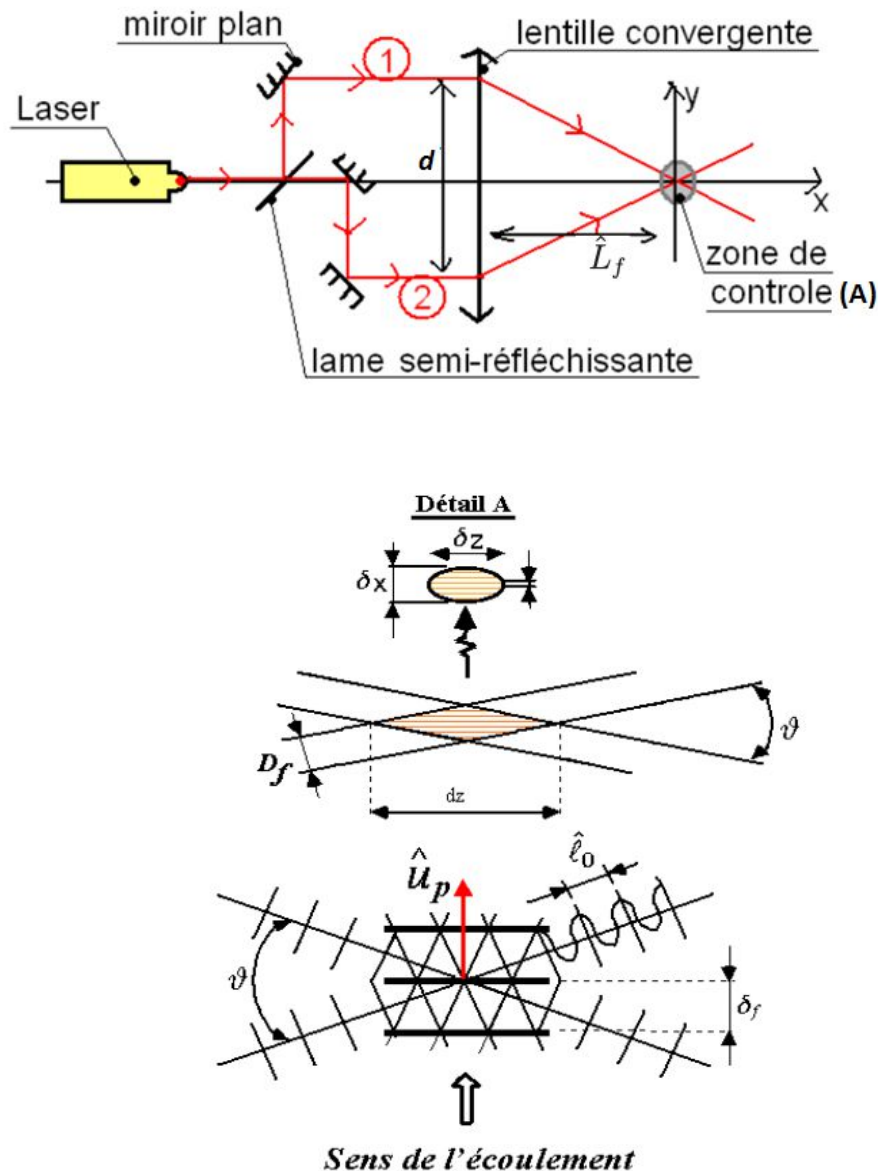


Figure (5-3): Principe de la Mesure de vitesse par vélocimétrie laser Doppler.

Écartement et une lentille de focalisation qui assure la convergence des faisceaux. Dans notre cas, à la sortie du système optique, les faisceaux sont séparés d'une distance $d = 38.4\text{ mm}$ Ils convergent ensuite à une distance focale $\hat{L}_f = 160\text{ mm}$.

En raison de la forme cylindrique des faisceaux, le volume de mesure résultant de leur intersection est un ellipsoïde de révolution comprenant les franges d'interférence orientées parallèlement à la bissectrice de l'angle formé par les deux faisceaux incidents voir la figure (5-3).

Les dimensions du volume de mesure sont donnés par

$$\hat{\delta}_z = \frac{4\hat{\ell}_0 \hat{L}_f}{\pi \hat{D}_f \sin(\vartheta/2)} = 0.636 \text{ mm} \quad (5-13)$$

$$\hat{\delta}_x = \frac{4\hat{\ell}_0 \hat{L}_f}{\pi \hat{D}_f \cos(\vartheta/2)} = 0.076 \text{ mm} \quad (5-14)$$

La distance entre deux franges brillantes successives est

$$\hat{\delta}_f = \frac{\hat{\ell}_0}{2 \sin(\vartheta/2)} = 2.655 \text{ } \mu\text{m} \quad (5-15)$$

Le nombre de franges dans le volume de mesure est

$$N_f = \frac{\hat{\delta}_x}{\hat{\delta}_f} = 28 \quad (5-16)$$

La table ci-dessous regroupe les caractéristiques optiques et géométriques du système de mesure optique de vitesse.

Tableau (5-1) : Caractéristiques optiques et géométriques du système de vélocimétrie laser Doppler utilisé [49].

$\hat{\ell}_0$	<i>Longueur d'onde</i>	632.8 nm
\hat{L}_f	<i>Distance focale</i>	160 mm
\hat{d}	<i>Ecartement des faisceaux</i>	38.4 mm
\hat{D}_f	<i>Diamètre du faisceau</i>	1.7 mm
ϑ	<i>Angle entre deux faisceaux</i>	13.686 °
$\hat{\delta}_x$	<i>Epaisseur du volume de mesure</i>	0.076 mm
$\hat{\delta}_z$	<i>Longueur du volume de mesure</i>	0.636 mm
$\hat{\delta}_f$	<i>Espacement des franges</i>	2.655 μm
N_f	<i>Nombre de franges dans le volume de mesure</i>	28

En traversant ce réseau de franges, une particule va diffuser de la lumière dans l'espace. Une partie de celle-ci va être transmise, via une lentille de focalisation à la photo multiplicateur dont le rôle est de convertir l'énergie lumineuse en un signal électrique.

Le traitement du signal électrique est effectué à l'aide d'un **BSA** (Burst Spectrum Analysers) **57N11** de chez **DANTEC**. La figure (5-4) montre l'enveloppe et la forme du signal électrique pour un passage de particules dans le volume de mesure.

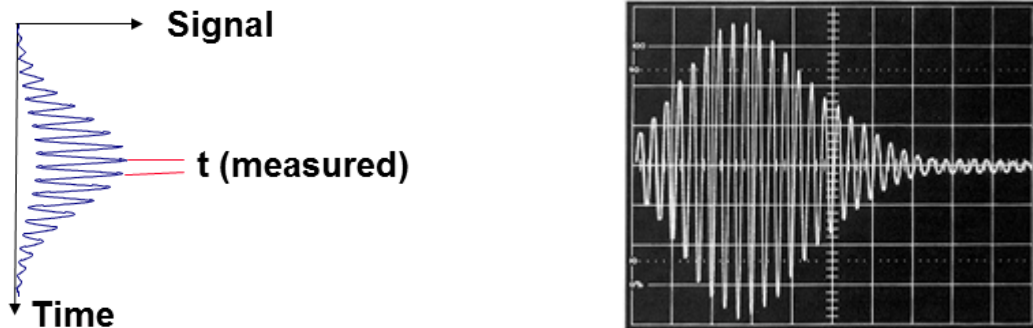


Figure (5-4): Enveloppe du signal électrique pour un passage de particules dans le volume de mesure (bouffée Doppler) [59]

Le signal caractéristique est connu sous le nom de “**bouffée Doppler**”. Pour améliorer la qualité du signal, l'écoulement est ensemencé avec des particules sphériques creuses d'un diamètre de $10\mu m$.

3-5/ Vélocimétrie par Images de Particules (PIV)

Pour l'enregistrement des clichés ou d'une séquence de **PIV**, l'écoulement est ensemencé par des micro-particules servant d'indicateurs. Dans le souci d'avoir des particules entraînées par le mouvement global à accélération non nulle, il faut garantir que leur vitesse s'approche le plus possible de celle du fluide.

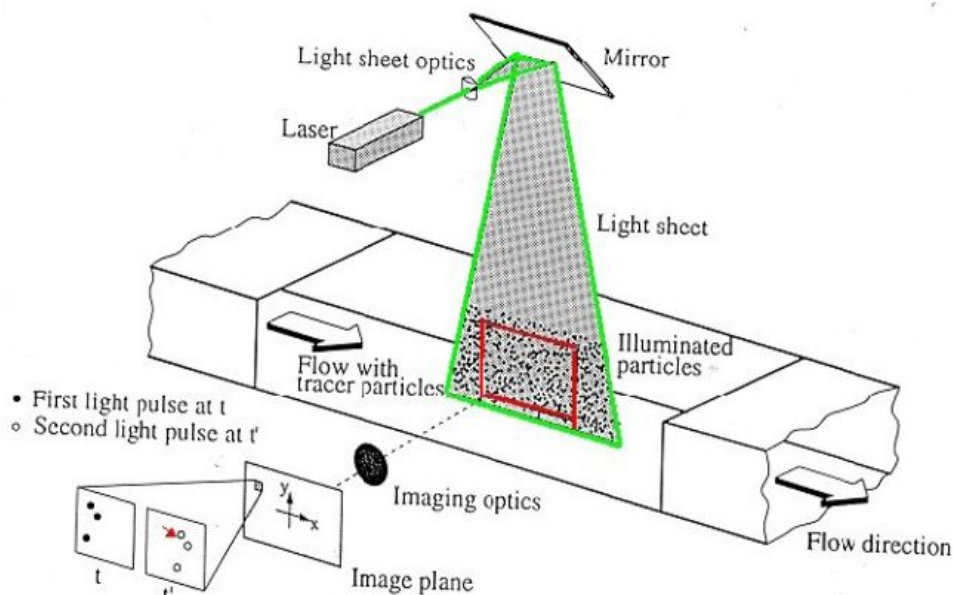


Figure (5-4): Mesure Par Particule Image Vélocimétrie PIV

Le choix sera également conditionné par la faculté qu'a la particule à rediffuser la lumière du plan laser vers le plan de prise de vue. Des exemples de ces particules peuvent être du polystyrène, du polyamide, des sphères de verre creuses.

Il est aussi intéressant de noter qu'on utilise d'autres types de traceurs pour les gaz qui tiennent compte des spécificités de cette catégorie de fluides ainsi, pour l'air, utilise-t-on généralement des fumées froides (générateurs de fumée à l'eau glycolée), de l'eau pulvérisée en microgouttelettes, ou des particules solides microniques.

Il est aussi important d'insister sur l'homogénéité de l'ensemencement puisque, en l'absence de cette condition cruciale, un certain biais dans le traitement des fenêtres d'interrogation apparaît, biais dès lors causé par une différence spatiale du taux d'ensemencement.

- Eclairage et prise de vue.

Une source Laser pulsée génère sur un même axe optique deux impulsions lumineuses décalées dans le temps d'un intervalle Δt programmable et qui sera l'intervalle de capture de paires d'images soit par un appareil photo, soit par une caméra *CCD*.

La connaissance de ce temps d'émission et la possibilité du contrôle qu'on exerce dessus sont considérées comme un avantage de la méthode. En effet, de ce temps dépend la fréquence de la prise de vues de la caméra *CCD* ou du capteur. On pourra donc, utiliser une gamme variée de ces capteurs de position et accompagner les progrès qui s'opèrent sur eux quant à l'accroissement de leurs fréquences. Une source Laser pulsée génère sur un même axe optique deux impulsions

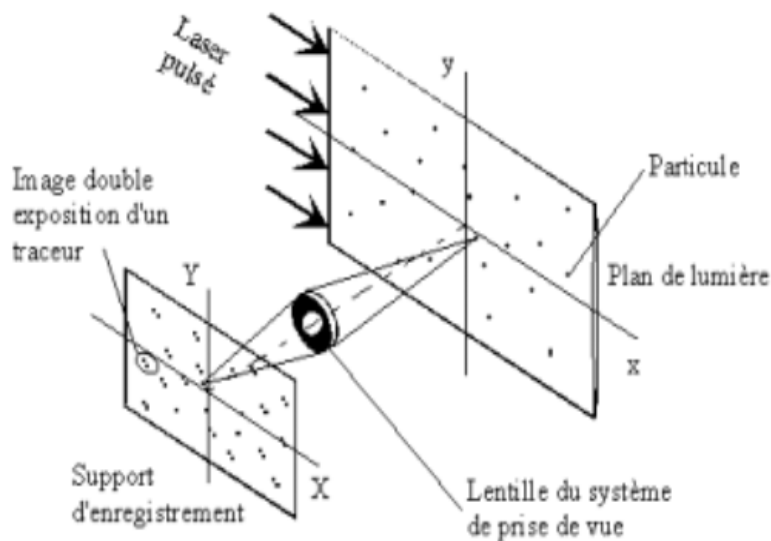


Figure (5-5): Eclairage du fluide par une source Laser et capture de clichés

Les impulsions émises par le Laser traversent un dispositif optique. C'est une lentille cylindrique qui diverge le faisceau réalisant un plan de lumière.

Les particules présentes dans ce plan sont donc éclairées périodiquement et celles qui ont servi à l'ensemencement diffusent la lumière reçue.

Dès lors, on peut choisir une zone du plan de lumière qu'on appelle fenêtre d'analyse ou fenêtre d'interrogation et qui va être surveillée par la lentille du système de prise de vue. Régulièrement captée à des intervalles de temps correspondant à la fréquence de la caméra *CCD* ou du capteur, cette zone est ainsi projetée sur un support d'enregistrement, en principe numérique, pour pouvoir traiter ces informations et dresser les différentes cartes sus-indiquées.

Les images sont stockées par doublets, corrélation oblige. En effet pour pouvoir calculer le comportement du champ de vitesse dans le temps, il est nécessaire de comparer des positions successives prises par différents indicateurs.

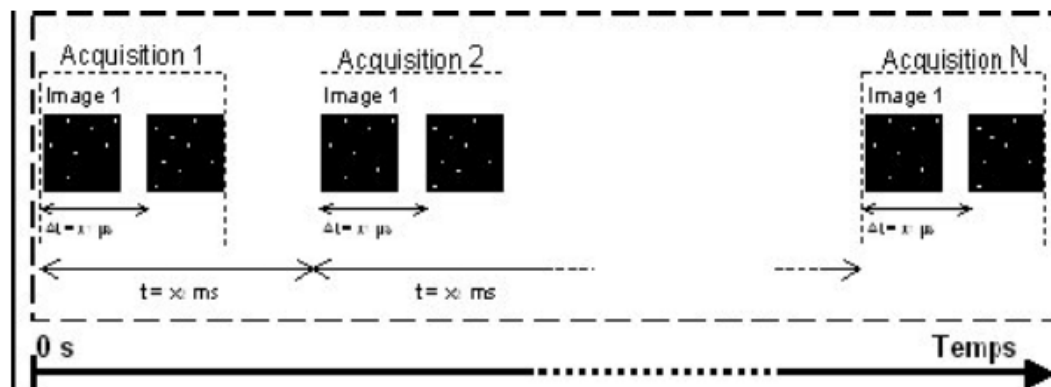


Figure (5-6): Séquençage de doublets d'images au cours du temps

Chaque paire d'images sera stockée en temps réel dans la mémoire vive d'un processeur dans l'attente d'un traitement du signal reçu. Les dimensions des fenêtres d'analyse (ou d'interrogation) sont comprises entre 16×16 et 64×64 pixels pour un capteur *CCD* de 1024×1024 pixels ce qui correspond à un champ de l'ordre de 200 à 4000 vecteurs vitesse instantanée. Enfin arrive l'étape du traitement de l'information, autrement dit traitement informatique par un logiciel de traitement d'image et de corrélations

4/ Fluide de travail Utilisé

Le fluide non Newtoniens utilisés est Une solution aqueuse de **Carbopol 940** à **0.2%** en masse (polymère de l'acide acrylique fourni par **B. F. Goodrich**). C'est un fluide à seuil fortement rhéofluidifiant.

C'est un fluide qui est très souvent cités dans la littérature comme fluide modèle de fluides rhéofluidifiant avec contrainte seuil. Il présente en plus l'avantage d'être non toxique et translucide, donc adaptés aux mesures par vélocimétrie laser et *PIV*.

4-1/ Préparation Du Fluide

La solution de **Carbopol 940** (polymère de l'acide acrylique) à **0.2%** en masse est d'abord préparée dans des récipients de *25 litres* d'eau déminéralisée. Le polymère sous forme de poudre blanche hygroscopique est dispersé progressivement dans l'eau, tout en mélangeant à l'aide d'un agitateur du type **Heidolph** muni d'un agitateur tige à deux lames à pales marines d'une puissance de *0.45 Kw*.

Après deux heures d'agitation à une vitesse de rotation de *500 tr/min*, on obtient une dispersion homogène non limpide. Cette dispersion est acide qui présente une valeur du $pH = 3$.

Le système est laissé au repos pendant *24 heures*. Par la suite, la dispersion est neutralisée en rajoutant une solution d'Hydroxyde de Sodium (*NaOH*) à 18% (*53 ml pour 25 l de solution à 0.2% en masse*). Le pH est contrôlé à l'aide d'un papier pH ou d'un $pH - mètre$. La solution finale se présente sous forme d'un gel translucide. Elle est laissée au repos pendant au moins *48 heures* avant tout essai rhéologique.

4-2/ Propriétés Physico-Chimique

Le **Carbopol 940 (B. F. Goodrich)** est un polymère de l'acide acrylique de formule développée $6 [CH - CH - COOH]$ de masse moléculaire $M = 1.410^6 g/mol$.

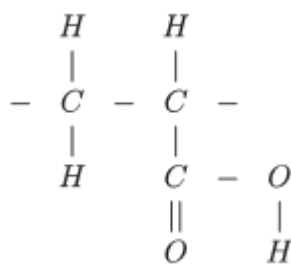


Figure (5-7): Forme développée de l'acide acrylique.

Sous forme anhydre, le polymère se présente d'un point de vue statistique comme une pelote de taille moyenne *0.2 μm*. En dispersion dans l'eau, on a une solution acide avec un $pH = 3$. L'addition d'un agent neutralisant tel que l'Hydroxyde de Sodium, provoque une ionisation du groupe acide acrylique.

La répulsion électro- statique qui en résulte, suite à l'apparition de charges négatives sur le squelette du polymère, conduit à un étirement des molécules [60].

Par effet d'encombrement spatial, le contact et l'enchevêtrement entre les chaînes polymère favorise la constitution d'un réseau.

L'hydratation des parties hydrophiles du polymère conduit à un gonflement des structures polymériques qui donne naissance à des micro-gels. C'est le contact entre ces micro-gels qui est responsable des propriétés gélifiantes des solutions de **Carbopol**. La figure (5-9) est une illustration représentante de la dispersion des micro-gels selon la concentration $C(\%)$ en masse du **Carbopol 940** :

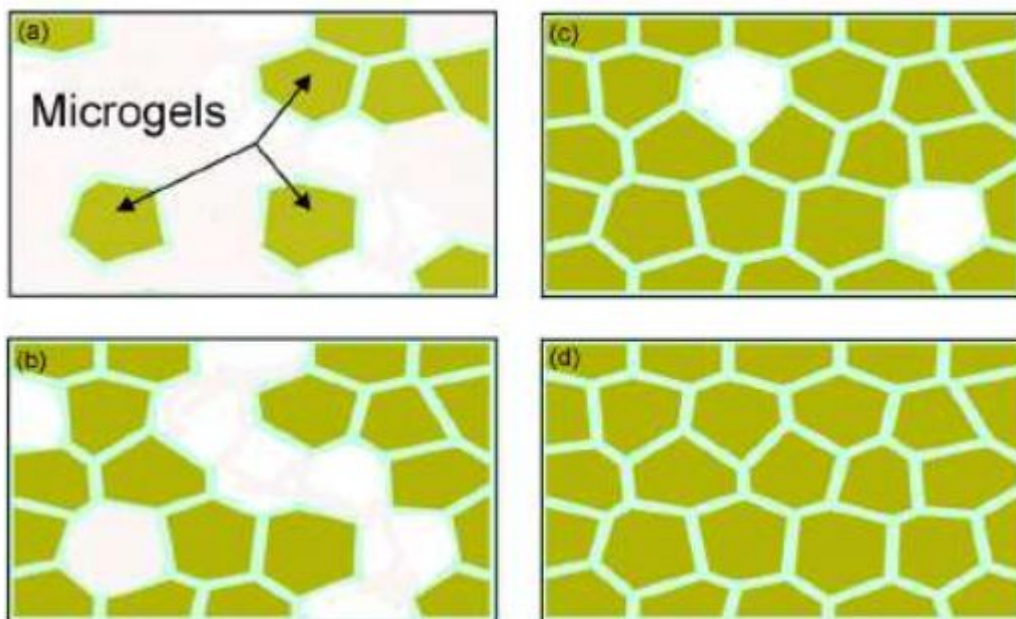


Figure (5-9): Dispersion des micro-gels selon la concentration en masse de **Carbopol 940** [51]

- $C < 0.035\%$. On a une dispersion diluée de micro-gels, viscoélastique sans contrainte seuil (a).
- $0.035 < C < 0.12\%$. Une percolation des micro-gels est observée (b).
- $0.12 < C < 0.21\%$. Une inversion de phase de la dispersion est obtenue (c).
- Pour des concentrations en masse supérieures à 0.21% , on a un assemblage compact de micro-gels poly dispersé (d).

Remarque :

Lorsqu'une contrainte suffisamment faible $\tau < \tau_0$ est appliquée à la dispersion, le système se déforme sans modification de la structure interne. Lorsque la contrainte est relâchée, le système revient à son état initial. Il a un comportement du type solide élastique.

Pour des contraintes intermédiaires $\tau_0 < \tau < \tau_1$, le réseau formé par les micro-gels est brisé et un écoulement est observé. Suite à cela, les micro-gels se réorganisent. Dans ce cas une compétition entre déstructuration et restructuration qui s'établit du fait du cisaillement et du mouvement brownien [52].

Pour des contraintes plus élevées $\tau > \tau_1$, le temps caractéristique associé au cisaillement est beaucoup plus petit que le temps caractéristique de restructuration. On a alors un régime visqueux.

5/ Rhéologie Du Fluide

5-1/ Viscosité effective

La caractérisation rhéologique des fluides utilisés a été effectuée à l'aide d'un rhéomètre fonctionnant à couple imposé et à vitesse imposée. (AR 2000 de TA Instrument).

Il est équipé d'une géométrie cône-plan entraîné par un moteur le cône a un diamètre d_c de : 6cm, angle α de : 1° et une troncature de : 5.8 mm) muni d'une trappe à solvant pour éviter l'évaporation du fluide.

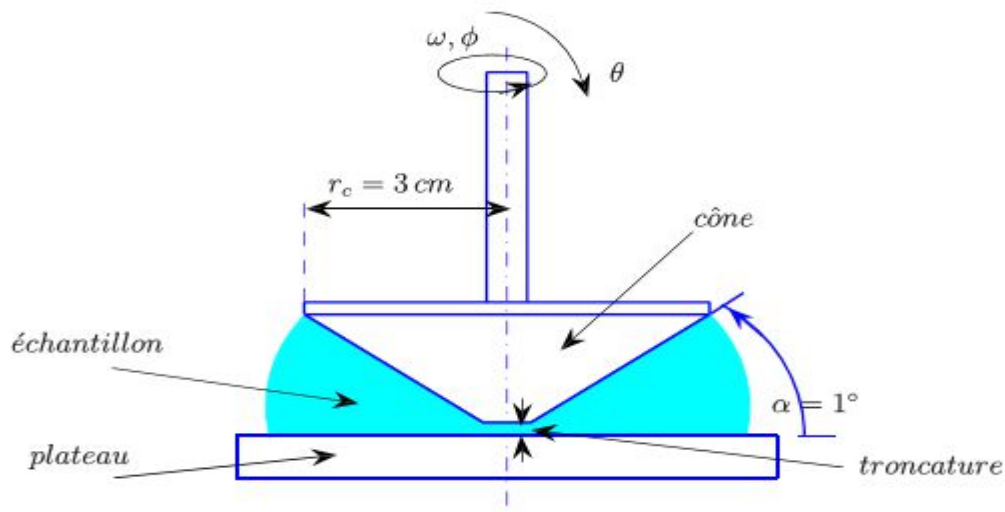


Figure (5-10): Géométrie du cône de mesure rhéomètre [

La surface du cône en contact avec le fluide a été traitée et rendue rugueuse afin d'éviter le problème de glissement du fluide à la paroi. Un schéma de la géométrie cône-plan est donné par la figure (5-10). Le fluide est cisailé entre le cône en rotation et le plateau fixe. La relation entre la contrainte $\tau_{\phi\theta}$ et le couple \mathcal{M} imposé sur le cône est donnée par

$$\tau_{\phi\theta} = \frac{3\mathcal{M}}{2\pi r_c^3 \sin^2 \theta} \approx \frac{3\mathcal{M}}{2\pi r_c^3} \quad (5-17)$$

La contrainte est considérée comme homogène lorsque ($\alpha < 4^\circ$). Sous la même hypothèse, on a la relation suivante pour le cisaillement

$$\dot{\gamma}_{\phi\theta} = \frac{\omega}{\tan \alpha} \approx \frac{\omega}{\alpha} \quad (5-18)$$

La viscosité effective est ;
$$\mu = \frac{\tau_{\phi\theta}}{\dot{\gamma}_{\phi\theta}} \quad (5-19)$$

5-2/ Analyse Rhéologique

La caractérisation rhéologique du fluide d'expérience est menée pour définir le régime de l'écoulement pendant la prise des données dans le plan de mesure. Un échantillon est prélevé directement de la conduite d'essai au début et à la fin de chaque expérience puis analysé dans le rhéomètre à cône-plat.

Un protocole d'essai est suivi pour les mesures rhéologiques: en effet une fois le fluide est mis dans l'entrefer cône-plan, on l'amène à un état de cisaillement permanent. Pour cela, on le pré-cisaille à 5 s^{-1} pendant 5 mn . Ensuite on le laisse au repos pendant 3 mn pour que le matériau se restructure complètement.

Une rampe par paliers de cisaillements croissants $0.01 \leq \dot{\gamma} \leq 2000 \text{ s}^{-1}$ suivie d'une rampe par paliers décroissants. Typiquement, pour un ordre de 2000 s^{-1} , la durée d'une rampe est de l'ordre maximum d'une heure.

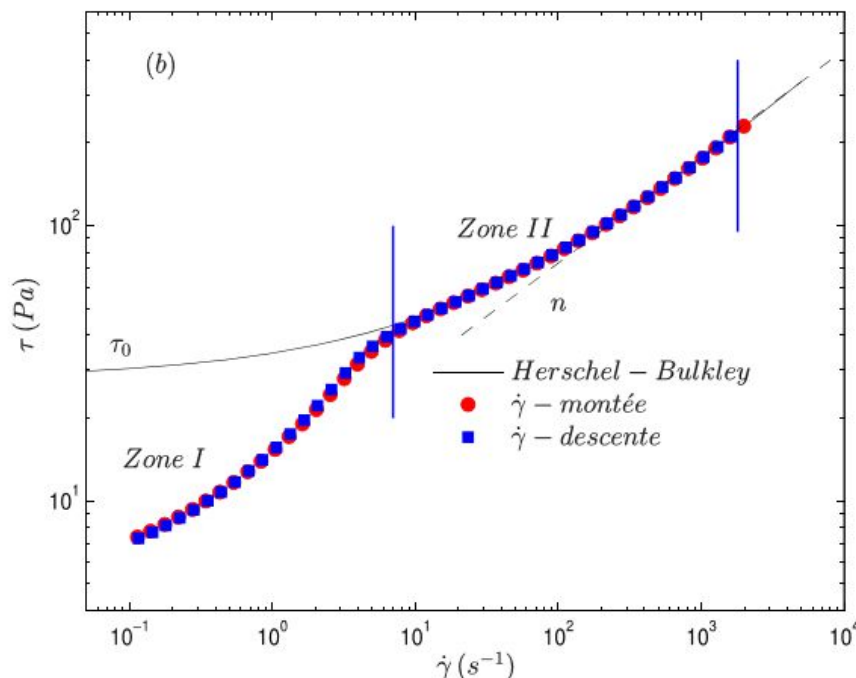


Figure (5-11): Comportement rhéologique de la solution de Carbopol à 0.2% décrit par le modèle de **Herschel-Bulkley** avec les paramètres rhéologique ($\tau_0 = 28 \text{ Pa}$, $K = 6.37 \text{ Pa} \cdot \text{s}^n$ et $n = 0.45$).

La figure (5-11) montre un rhéogramme typique des résultats obtenu par le rhéomètre. Le graphe montre alors l'évolution de la contrainte mesurée en fonction du cisaillement appliqué pour la solution de Carbopol. Un exemple du fichier généré par le rhéomètre est donné en (ANNEXE V)

Deux comportements différents du fluide sont clairement identifiés par les zones I et II à partir d'une valeur critique de cisaillement $\dot{\gamma}_c = 7s^{-1}$. Un tel comportement rhéologique similaire a été observé et mentionné dans la littérature pour une plus faible concentration de Carbopol [60], [61] et [62]. Toute fois Lorsque $\dot{\gamma} > \dot{\gamma}_c$ (zone II), le cisaillement dans le cône-plan est homogène et le comportement rhéologique peut être décrit par le modèle de **Herschel-Bulkley**.

Cependant, si $\dot{\gamma} < \dot{\gamma}_c$ (zone I) le cisaillement n'est plus homogène dans l'entrefer. Il serait localisé dans une couche de fluide en contact avec le cône en rotation. L'épaisseur de cette couche augmente lorsque le cisaillement croit et remplit tout l'entrefer une fois la valeur critique est dépassé cette zone est attribuée à la phase où il se réalise une compétition entre les effets de déstructuration et de restructuration du réseau formé par les micro-gels.

La solution de Carbopol dans le dispositif expérimental s'accompagne d'une dégradation mécanique des chaînes de polymère qui induit une modification considérable du comportement rhéologique cette constatations a été notifié dans les travaux de Esmail [49].

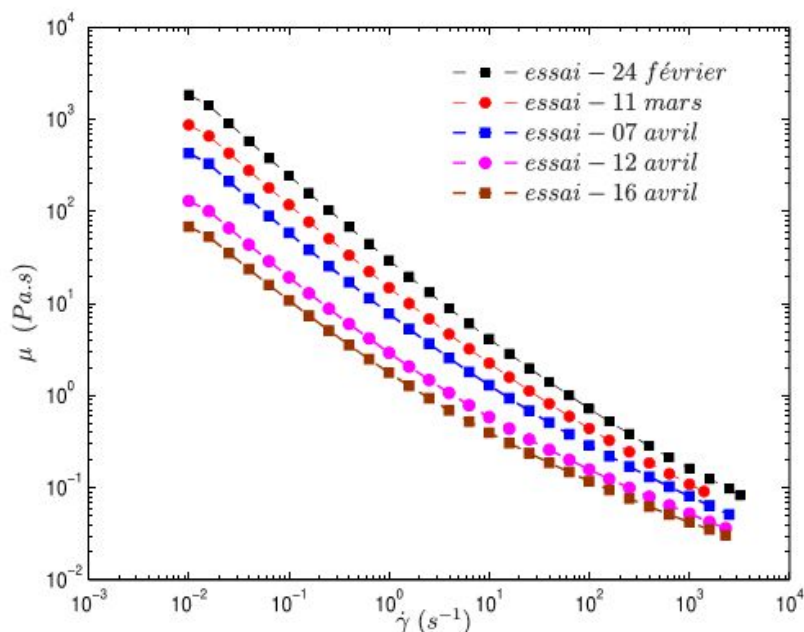


Figure (5-12): Modification de la viscosité et du caractère rhéofluidifiant de la solution de **Carbopol 940** pendant une campagne d'essais expérimentaux sur la transition vers la turbulence. [49]

La figure (5-12) montre la modification de la viscosité le long d'une campagne d'essais expérimentaux réalisés sur une période d'environ deux mois on note que

- On ne distingue plus l'effet du cisaillement localisé.
- Une forte réduction du caractère viscoélastique

Dans les figures ci-dessous nous avons représenté l'évolution du comportement rhéologique décrit par le model de **Hershel-Bulkley** de la contrainte et la viscosité effectives en fonction du cisaillement $\dot{\gamma}$ sur une campagne d'essai réalisé dans la période de [2008 à 2017]. Nous nous intéressant seulement au cas où nous avons mesurée une dysmétrie du profil de vitesse.

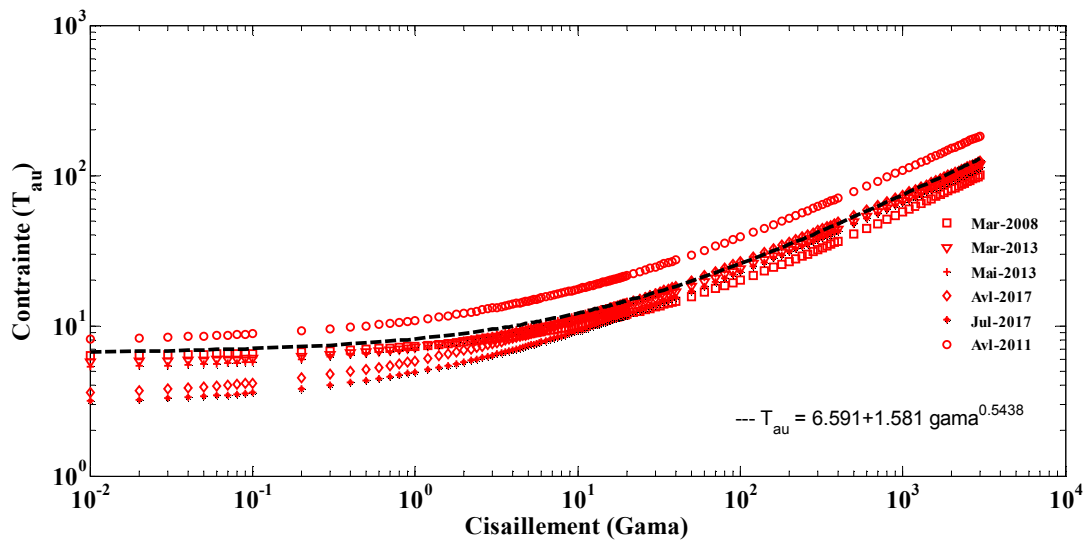


Figure (5-13): Evolution de la contrainte pour la solution de **Carbopol 940** a 0.2% pendant une campagne d'essais expérimentaux.

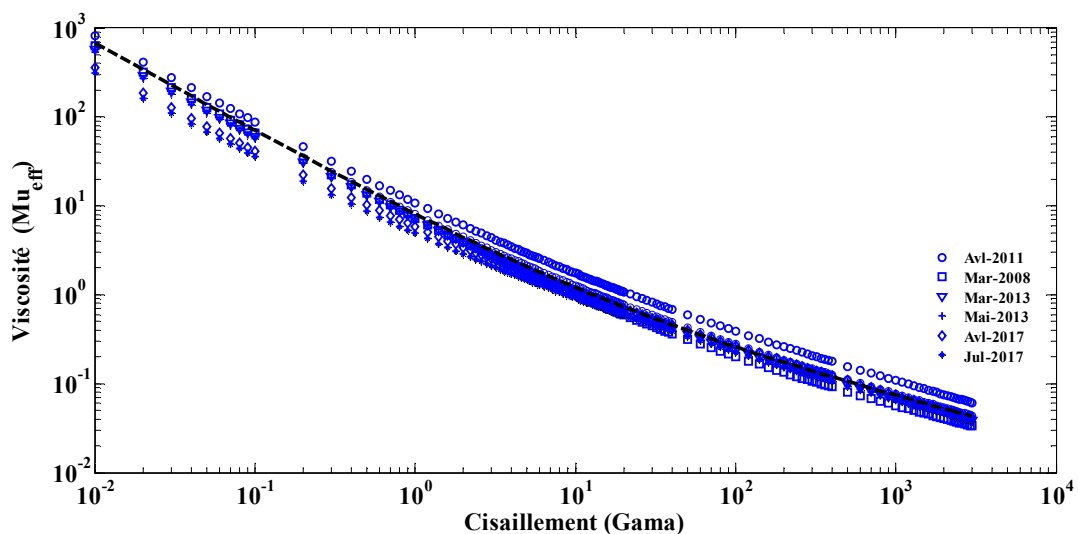


Figure (5-14): Evolution de la viscosité effective pour la solution de **Carbopol 940** a 0.2% pendant une campagne d'essais expérimentaux.

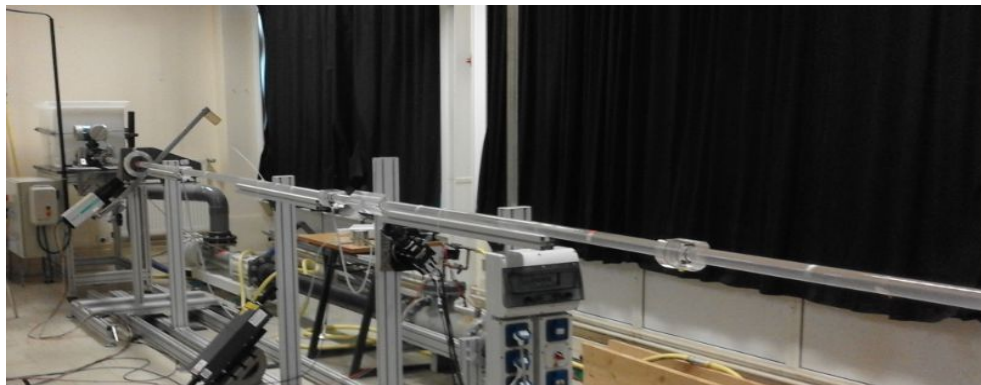
Le comportement rhéologique du fluide est très complexe, il est marqué par un caractère réhofluidifiant très important et un aspect viscoélastique qui diminue aux cours des essais étendu sur une forte gamme de débit et d'utilisations continue a cause de la dégradation de la chaine polymère. Il faut alors constamment vérifier la rhéologie et maintenir une température de travaille constante durant chaque expérience.

Dans l'ensemble les courbes de la figure (5-13) et (5-14) nous informe que durant la campagne qui a été menée de **2008** jusqu'à **2017** la solution Carbopol utilisée est toujours du même type de comportement à savoir un fluide non-newtonien de **Hershel-Bulkley** qui obéit à la loi de comportement $\tau = \tau_0 + K\dot{\gamma}^n$.

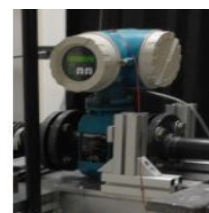
6/ Interprétation des Résultats Expérimentaux

6.1/Mesure du champ de Vitesse(LDA)

Une série de mesures du champ de vitesse est réalisé le long de la conduite d'une longueur de 8 mètres équivalente à 263 diamètres (263D) deux fois plus longue par rapport à l'expérience réalisée par Ahmed Esmail en 2008. Ce choix n'est pas arbitraire mais, on réalité nous nous intéressant à étudier l'évolution axiale de la dissymétrie le long de la conduite et voir aussi l'effet de la longueur sur la dissymétrie.



armoire de commande électrique



débimètre



capteur et afficheur de pression

Figure (5-15) ; Installation expérimentale de la conduite

La technique utilisée est la mesure par laser LDA le long du diamètre de la conduite, une fréquence du potentiomètre dans l'armoire électrique de commande de la pompe permet alors de régler le débit désiré et ainsi le régime de l'écoulement en terme du Nombre de Reynolds pari R_{ep} . Ce dernier est obtenu à partir de la lecture de la perte de charge ΔP_c réalisé sur un tronçons de conduite de 2 mètres de long et les résultats de la rhéologie d'un échantillon de fluide du jours de la manipulation déterminé à la température de travail du test selon les étapes suivantes ci- dessous :

- | | |
|---|--|
| 1- On détermine la contrainte pari $[P_a]$ | $\tau_p = \frac{\Delta P_c \cdot \hat{R}}{2L}$ |
| 2- On cherche la solution $\dot{\gamma} [P_a \cdot s^n]$ de l'égalité | $\tau_p = \tau_0 + K \cdot \dot{\gamma} ^n$ |
| 3- La viscosité $\mu [m^2 \cdot s]$ est obtenue par | $\tau_p = \mu \cdot \dot{\gamma}$ |
| 4- La vitesse débitante $U_d [m/s]$ | $U_d = \frac{QV}{A}$ |
| 5- Le Nombre de Reynolds | $R_{ep} = \frac{\rho \cdot U_d \cdot D}{\mu}$ |

Dans l'étape (2) la solution dépend des paramètres de la rhéologie un ensemble de prélèvements est réalisé au début et en fin de l'expérience pour bien situé le régime correspondant.

Le dispositif de mesure de la vitesse de **DANTEC DYNAMICS** émet un laser rouge d'une fréquence de 666 MHz à une puissance maximale de 120mW. Le croisement des faisceaux est réglé de manière à ce qu'il soit dans le fluide pour effectuer une mesure. Le positionnement est assuré par un déplacement en translation du dispositif dans la direction radiale par un chariot a vice sans fin au pas très petit.

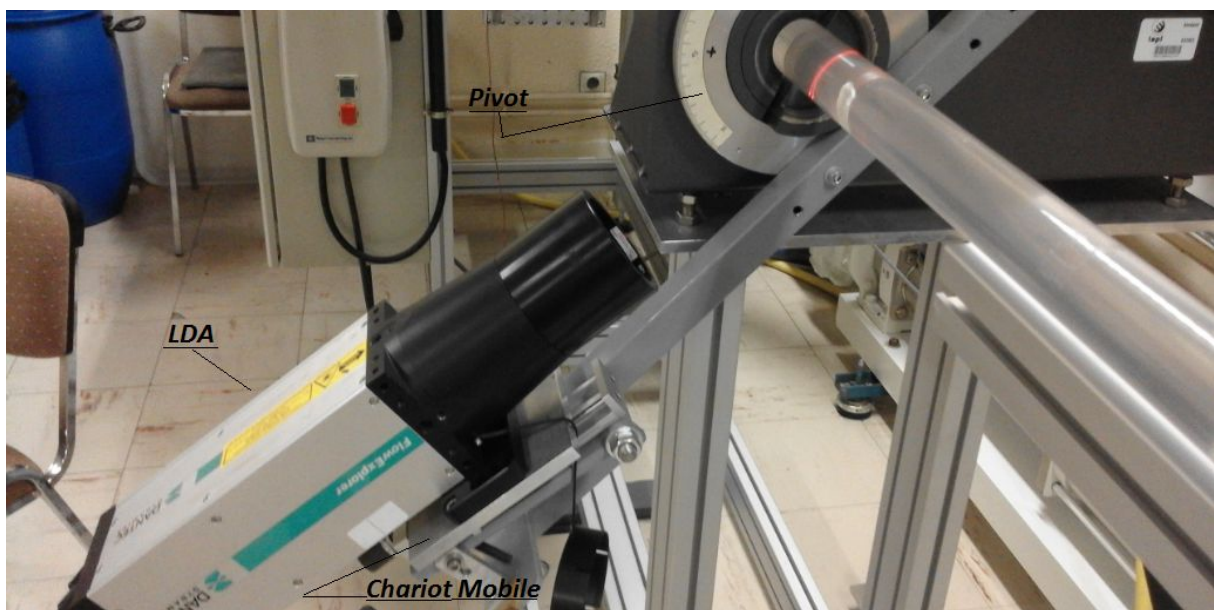


Figure (5-16) ; Support de Mesure de Vitesse LDA

Un tour complet de la vise détermine une position dans le fluide le long du diamètre correspondant à un pas de déplacement $\Delta r = 1.364 \text{ mm}$ réalisant ainsi 23 positions de mesure à partir de la paroi. De plus le support de mesure de vitesse est monté sur un pivot permettant d'effectuer une position azimutale sur 360° autour de l'axe de la conduite.

L'ensemble du dispositif support de mesure de vitesse est monté sur un bâti qui peut être déplacé et immobilisé le long de la conduite. Un ensemble de positions sont marquées sur la conduite pour désigner les stations les plus significatifs de mesure. Le signal de la LDA est renvoyé au processeur de l'unité centrale qui réalise le traitement et présente les résultats sous l'interface BSA.

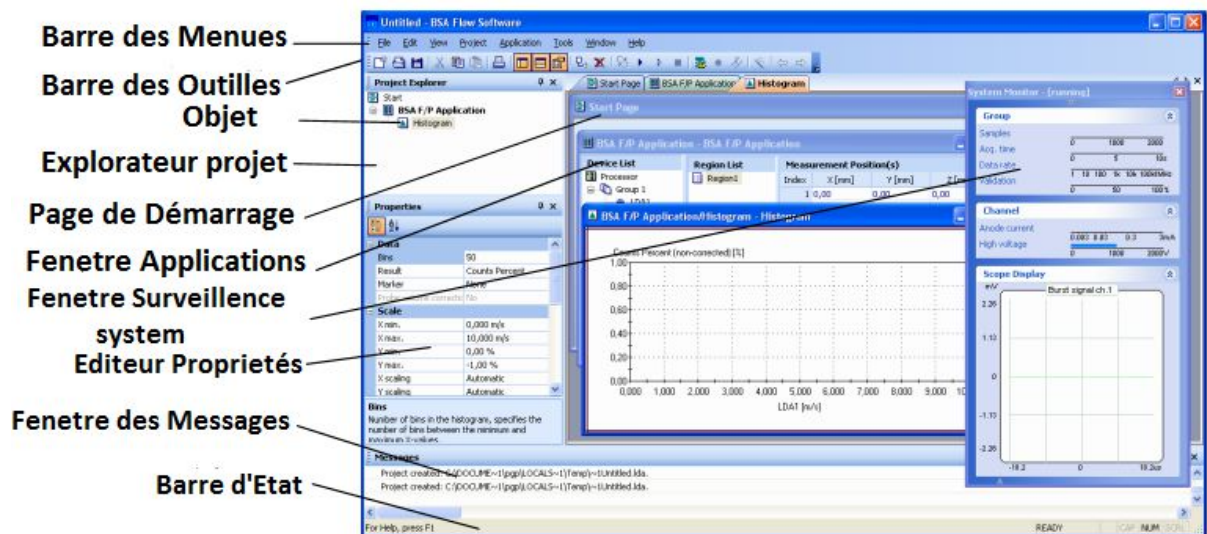


Figure (5-16) ; Interface graphique BSA de la LDA (DANTEC)

Pour toute mesure effectuée il faut constamment débiter par la recherche de la position de la paroi à partir de l'analyse du signal bruit de l'effet doppler et surtout des histogrammes de la vitesse voir (5-17).

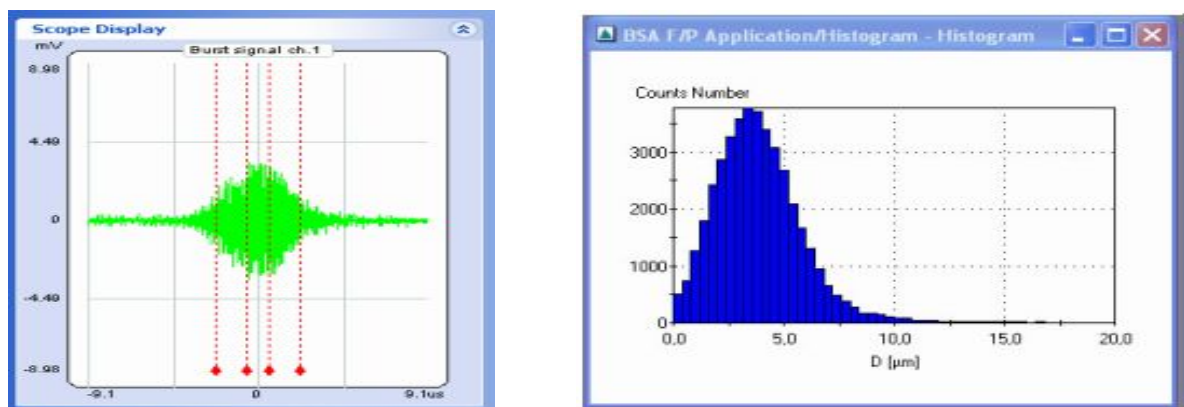
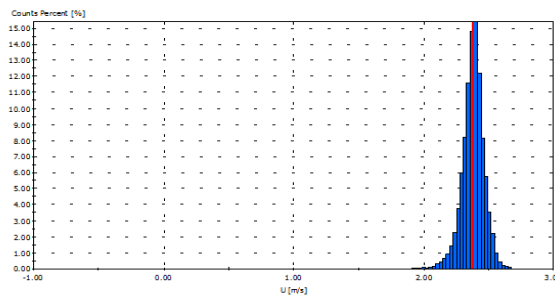
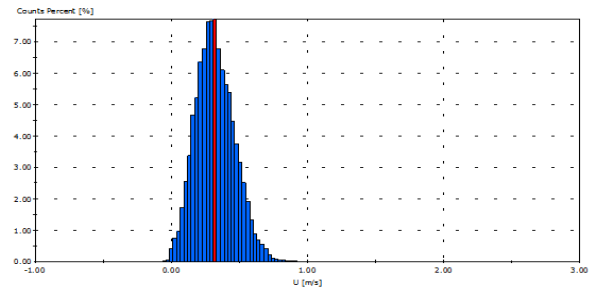


Figure (5-17) ; Fenêtre Signal Bruit (à gauche) et Histogramme Vitesse (à droite)

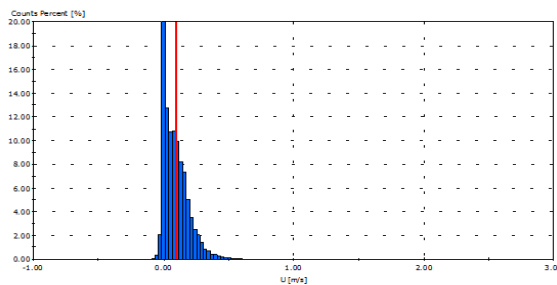
La recherche de la position de la paroi débute d'un point initial dans le fluide ou le signal bruit est claire similaire à celui de la figure (5-17). En tournant la vise de réglage dans le sens de recule du spot laser en surveille la modification du signal bruit et en confirme la position de la paroi avec l'histogramme et la valeur lue de la vitesse. Les figures ci-dessous illustrent un exemple de recherche effectué sur la position de la paroi.



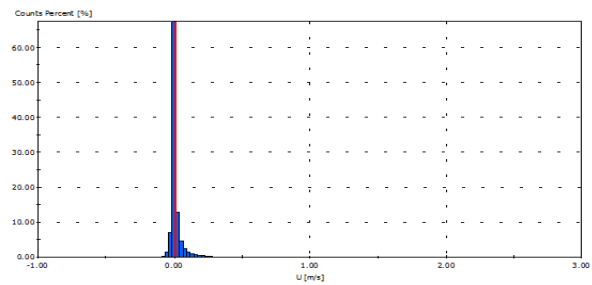
(a) Vitesse moyenne $U = 2.38 \text{ m/s}$



(b) vitesse moyenne $U = 0.322$



(c) Vitesse moyenne $U = 0.095 \text{ m/s}$



(d) vitesse moyenne $U = 0.012$
Position probable de la paroi

Figure (5-18) ; Histogramme de la recherche de la paroi

Les résultats mesurés se présentent dans un tableau de données ci-dessous :

Tableau (5-2) ; Liste de la mesure BSA de la LDA

POSITION	COUNT	Data Rate{1} [#s]	Validation [%]	U-Mean [m/s]	U-RMS [m/s]	U-AnodeCur [µA]	U-Skew	U-Flat
1	405163	10399.77	69.94	0.052	0.1611	364	6.195	43.479
2	31836	1218.4	85.53	2.319	0.1941	240	-0.807	9.798
3	59660	1239.1	90.59	3.342	0.1304	60	-0.539	16.088
4	31836	1126.82	87.81	4.15	0.1009	38	-0.142	3.244
5	33246	955.93	93.34	4.774	0.082	32	-0.134	3.887
6	30738	616.96	92.83	5.23	0.0736	28	-0.037	10.58
7	69208	518.28	94.78	5.535	0.0822	35	-3.411	274.06
8	18659	427.81	98.79	5.723	0.0575	25	1.64	30.571
9	15992	446.92	97.57	5.822	0.0848	32	0.777	14.662
10	12301	326.56	98.87	5.861	0.0755	28	1.279	7.964
11	10227	168.67	99.25	5.827	0.0644	28	1.244	12.037
12	4092	79.75	98.99	5.862	0.0853	28	1.344	11.342
13	5887	46.13	98.61	5.826	0.0934	32	-0.372	8.073
14	8061	149.31	99.11	5.812	0.0603	41	0.122	21.04
15	4750	109.16	99.15	5.74	0.0623	48	-0.187	10.24
16	2262	61.88	99.15	5.628	0.0859	51	0.071	16.385
17	4020	49.24	99.06	5.42	0.089	57	0.831	6.625
18	2025	36.39	99.77	4.976	0.0927	67	-0.14	9.551
19	1428	13.66	99.1	4.421	0.1641	76	0.283	3.836
20	2117	12.92	92.64	3.537	0.203	92	0.18	6.228
21	2296	9.69	91.64	2.432	0.3846	124	-1.071	14.27
22	353	3.52	93.95	1.365	0.5856	112	2.258	8.371
23	5206	119.15	73.7	0.094	0.1001	150	9.542	249.081

Un traitement de données est réalisé sur une feuille excel pour évaluer l'écart relatif du profil de vitesse par rapport au profil moyenne. (voir tableau ci-dessous)

Tableau (5-3) ; Calcul sur la feuille excel

position	Vitesse(Exp)	Vitesse(calc)	Moyenne	Ecart relatif
-1	0.052	0	0	0
-0.90909091	2.319	2.271503961	1.797361935	-0.133751116
-0.81818182	3.342	3.410569567	2.947630072	-0.130590984
-0.72727273	4.15	4.14639708	3.83450327	-0.087982382
-0.63636364	4.774	4.735552062	4.555970946	-0.050658185
-0.54545455	5.23	5.219055926	5.113426824	-0.029797001
-0.45454545	5.535	5.562726583	5.489081344	-0.020774646
-0.36363636	5.723	5.74726915	5.692072724	-0.015570405
-0.27272727	5.822	5.80811675	5.773276676	-0.009828065
-0.18181818	5.861	5.825021388	5.808814784	-0.004571734
-0.09090909	5.827	5.861394903	5.852261534	-0.002576439
0	5.862	5.8577	5.8577	0
0.09090909	5.826	5.843128166	5.858238316	0.004262435
0.18181818	5.812	5.792608181	5.832909307	0.011368578
0.27272727	5.74	5.738436602	5.774107067	0.010062311
0.36363636	5.628	5.636876298	5.657741656	0.005885926
0.45454545	5.42	5.415436106	5.451668946	0.010220952
0.54545455	4.976	5.007797722	5.11727242	0.030881808
0.63636364	4.421	4.37638983	4.611496895	0.066321546
0.72727273	3.537	3.522609461	3.8893342	0.103449685
0.81818182	2.432	2.484690578	2.906760789	0.119062134
0.90909091	1.365	1.323219909	1.624127289	0.084883211
1	0.094	0	0	0
			Dissymetrie	0.119062134

On effectue une normalisation de la position est effectuée entre l'intervalle [-1,1] puis, le vecteur vitesse **U-Mean** obtenu par la lecture laser est introduit au position correspondante.

On détermine alors la vitesse après interpolation sur la plage du vecteur en deux parties. Le profil moyen défini le vecteur vitesse non dévié ce qui nous ramène à déduire la déviation comme étant l'écart max entre le profil moyen et celui qui a été calculé suite à l'interpolation.

Les profils de vitesse à différentes stations axiales relatives sont représentés dans la figure (5-19) obtenu pour un nombre de Reynolds pari autour de $Rep = 3500$. A chaque station la dissymétrie est recherchée dans quatre stations culminantes pour $\theta = 0^\circ, +45^\circ, -45^\circ$ et 90° on ne représentera que le profil le plus dissymétrique dans cette station.

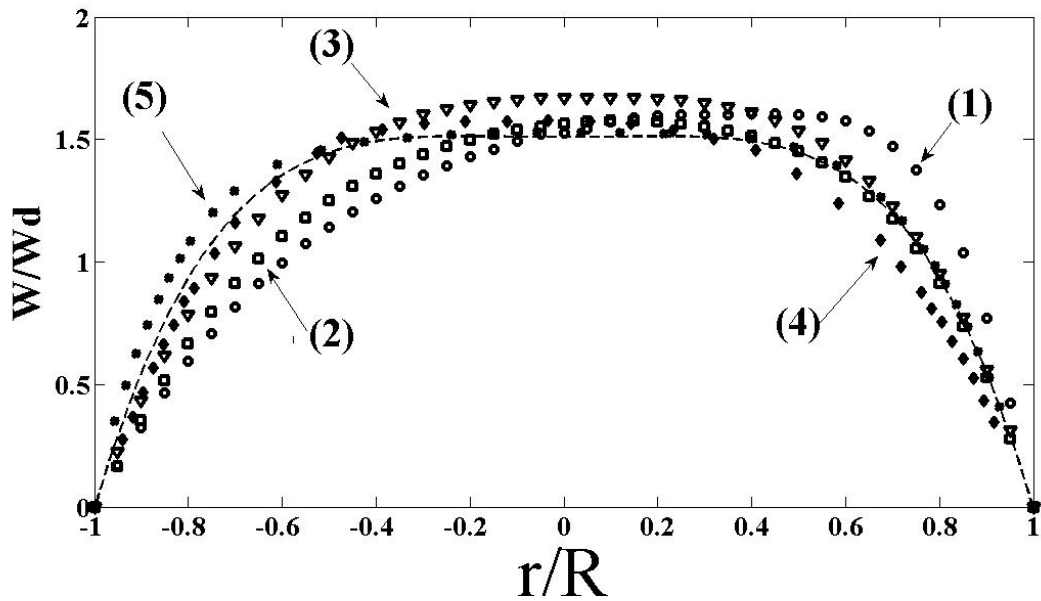


Figure (5-19) ; profile de vitesse à différentes stations de la conduite $Re_p = 3500$
 (1) 240D, (2) 200D, (3) 120D, (4) 60D et (5) 40D
 la ligne en pointillé est le profil non déviée

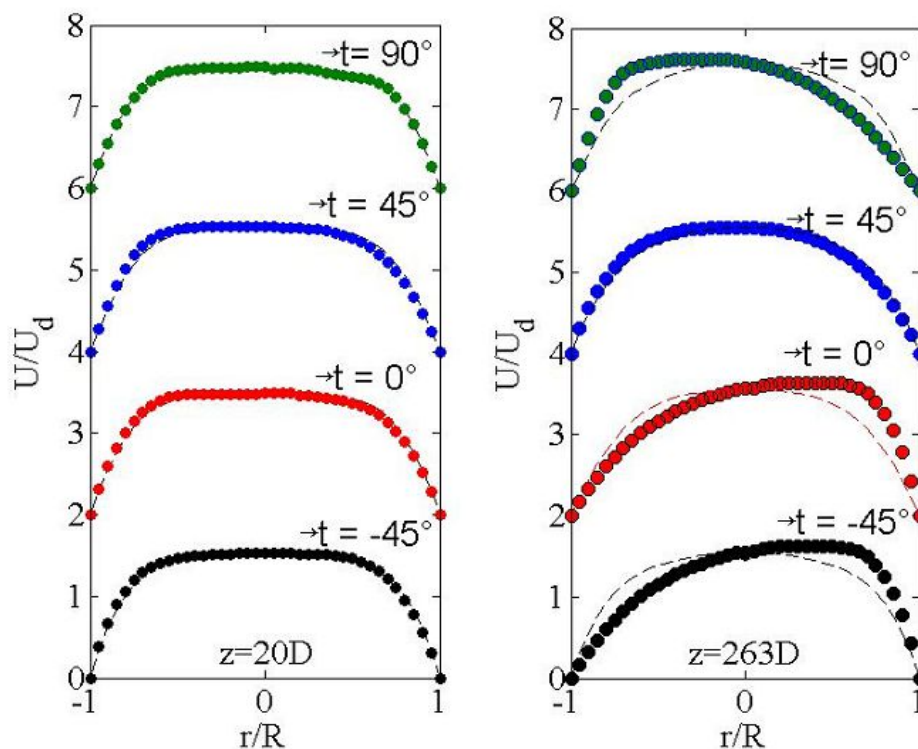


Figure (5-20) ; profile de vitesse à une station 20D et 263D de la conduite pour un $Re_p = 3500$ et une position azimutale $\theta = -45, 0, +45^\circ$ et 90°

Les graphes (5-19) et (5-20) montrent l'évolution de la vitesse dans le long des stations de la conduite et à des positions azimutales respectivement. L'analyse montre que la dissymétrie est présente et évolue le long de la conduite.

D'autre part le maximum de la dissymétrie se déplace suivant la position azimutal θ il n'y a pas de position privilégié mais il dépendra de beaucoup de paramètres à savoir le régime de l'écoulement, la nature du fluide et peut être de la température sans oublier l'effet de dégradation de la structure du fluide causé par la pompe lors d'une utilisation prolongée.

Cependant, il n'est toujours pas évident de retomber sur la même valeur de dissymétrie ou de sa position d'une expérience à une autre on constate le long des essais effectués sur 4 jours consécutifs à une position axiale relative $240D$ et azimutal $\theta = 45^\circ$ que par moment des chutes de l'écart relatif du profil de vitesse est à noter dans la même station voir figure (5-21).

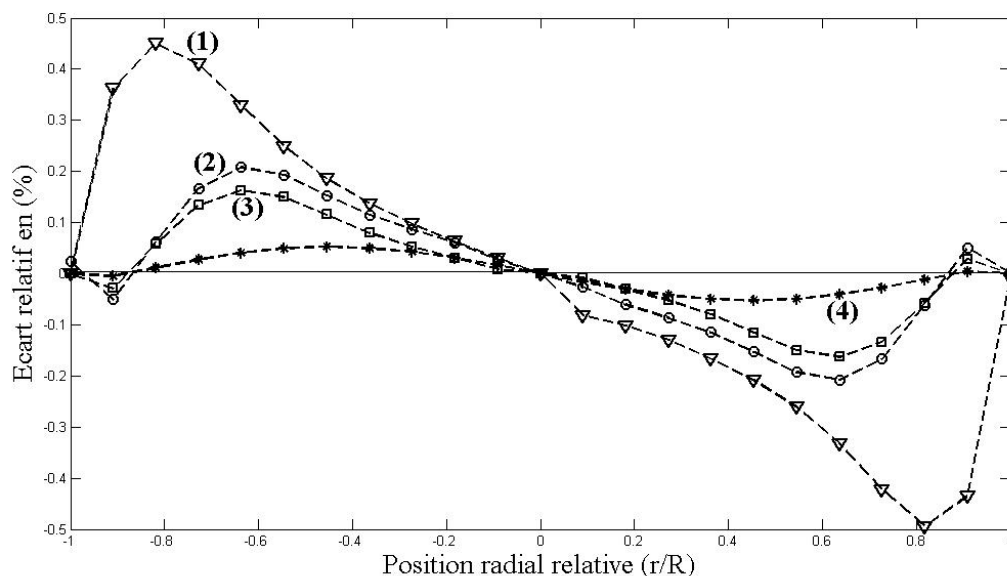


Figure (5-21) ; Ecart relatif de la vitesse à une station $240D$ de la conduite pour $Rep = 3500$ Enregistrer sur 4 jours consécutifs
 $K = 1.967$, $\tau_0 = 2.948$ et $n = 0.5022$

L'analyse des résultats présentés montre qu'il y a un maximum de déviation du profil de vitesse à une position azimutal $\theta = 45^\circ$ de l'ordre de 44% *courbe (1)*, une valeur plus importante à celle qui a été enregistrée par **Esmail [49]**, sur une longueur de 4m à un nombre de Reynolds pari de l'ordre de $Rep = 3750$ qui avoisine les 23% par contre la position du maximum de déviation est identique il est dans le même secteur de $\theta = 45^\circ$.

Ce qui n'est pas le cas lors des essais effectués par **A. Lefevre [46]** où il a enregistré des extrêmes de déviation à -45° et même proche de 90° des fois. Ce qui nous conduit à conclure que la position du maximum de la déviation du profil à un angle $\theta = \mp 45^\circ$ n'est pas tout le temps vraie sûrement que le profil n'a pas de préférence a priori il passe plus de temps dans une position que dans une autre.

On dira beaucoup plus que l'extremum se présente alors dans un secteur que dans une position θ fixée.

La figure ci-dessous regroupe une synthèse des résultats obtenu sur une période de 5 années de la dissymétrie maximale du profil de vitesse le long de la conduite pour un écoulement du fluide **Hurshel-Buckley** qui évolue a un nombre de Reynolds autour de **3500**.

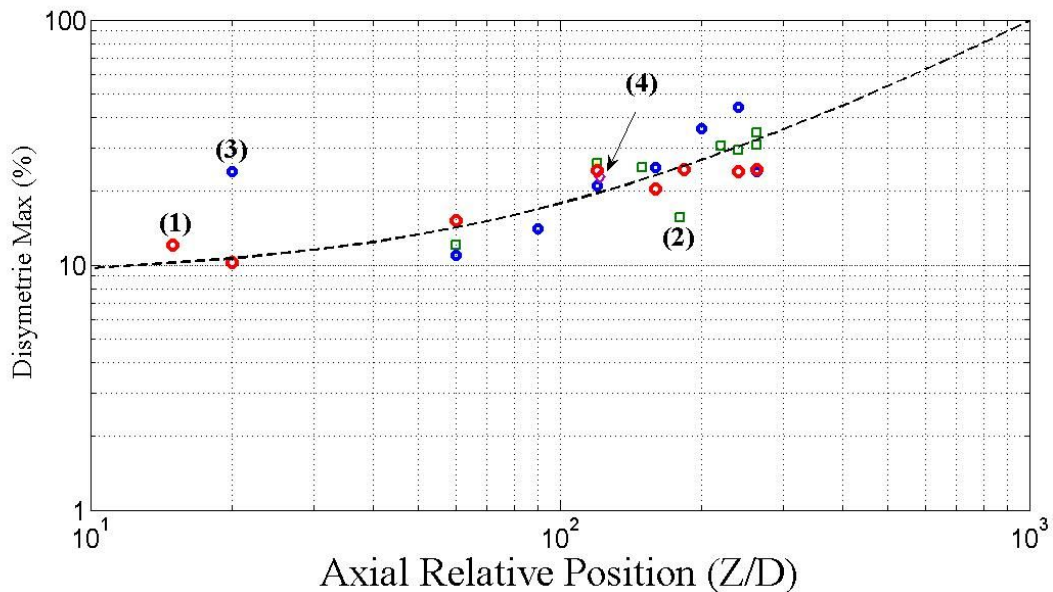


Figure (5-22) ; Evolution de la dissymétrie avec la position axial relatif
Re=3500

En effet, les résultats obtenus par Esmail [49] *cercle magenta* est réalisé en **2009** sur une conduite de longueur 4m. Les résultats d'Alin (1) *cercle rouge* & (2) *carré vert* s'étalent sur une période d'essai expérimental de **[2010 – 2013]**, les points (1) sont les mesures obtenues pour une position du laser à **-45°** et **+45°** perpendiculaire à l'axe de la conduite.

Tandis que, les résultats (2) sont obtenus par une mesure de la vitesse a une position radiale **r=0.7** et un balayage du laser a **360°** autour de de cette position avec un pas de **15°**. Suite à cette mesure la dissymétrie est déterminée on fessant le rapport de la moyenne des pics à la vitesse débitante.

Toutefois, les résultats (3) *cercle bleu* sont ceux réalisés en 2017 pour des positions azimutales de **-45°, 0, +45** et **90°** ces points représentent le maximum de la dissymétrie obtenu entre les positions angulaire.

L'analyse de ces résultats montrent qu'il y a effectivement une augmentation signifiante de l'effet de la dissymétrie le long de la conduite et parfois une chute inattendu dans certaines positions. Les résultats obtenus en 2017 présentent une

bonne concordance en majorité avec ceux réalisés par Alain et Esmail à partir d'une position axiale relative équivalente à $60D$. On note que la longueur d'établissement est de $L_e \geq 40D$ pour un Reynolds paroi de 3500.

La valeur de la dissymétrie importante au départ s'explique par le fait que l'écoulement n'est encore établi et qu'on est en effet en présence dans des conditions de l'effet de l'entrée à la conduite. On note aussi que la dissymétrie du profil ne peut continuer à augmenter indéfiniment il y aura une chute cela a été enregistré dans un essai conduit à $Re_p = 3500$ où le maximum était atteint à $240D$ à 44% et à la station $263D$ aux mêmes conditions et en même temps nous avons noté une déformation de 22.32%.

D'autre part nous avons représenté dans la figure (5-23) l'évolution de la dissymétrie en fonction du nombre de Reynolds pour deux positions axiales relatives $120D$ et $220D$.

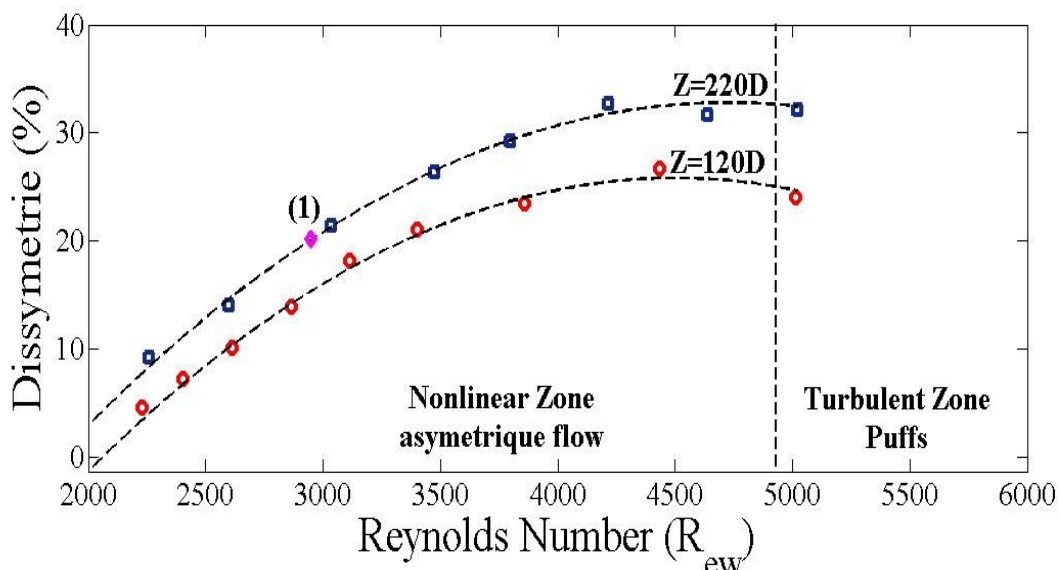


Figure (5-23) ; Evolution de la dissymétrie avec le Régime (Re_p)

L'évolution, montre qu'il y a une augmentation de l'effet de la dissymétrie de l'écoulement avec l'augmentation du régime dans la zone de comportement non linéaire qui tend à s'atténuer et à s'éclater dans la zone dite turbulente où on assiste à l'apparition des bouffées de turbulences après avoir enregistré des fluctuations de débit.

L'apparition des bouffées est notée au tour de $Re_p = 2300$ et ils seront complètement installés aux environs de $Re_p = 4900$. Ceci décrit que le niveau d'asymétrie ne peut augmenter indéfiniment et demeure stable.

La structure de l'écoulement est illustrée dans les figures ci-dessous pour différentes positions axial le long de la conduite puis comparé avec ceux établis par Esmail et Alin.

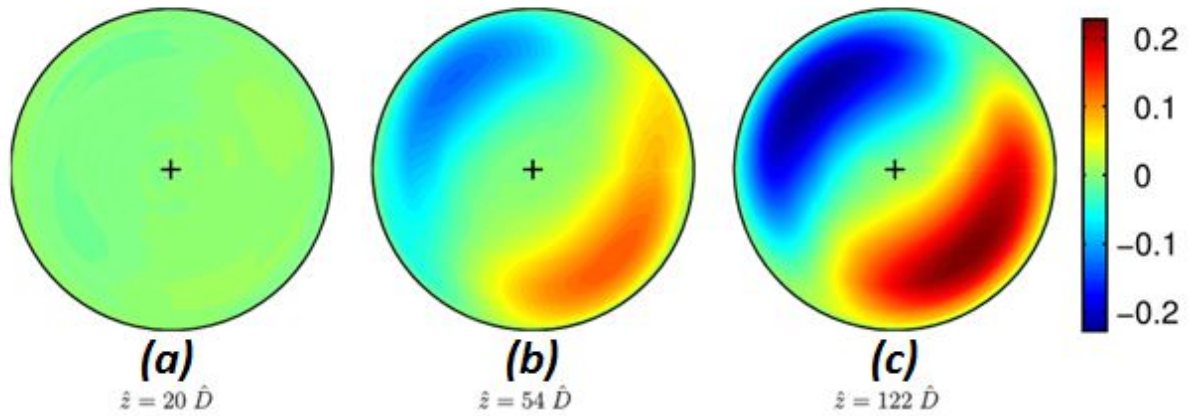


Figure (5-24) ; Structure de l'écoulement travaux Esmail $Rep = 2420$ [49]

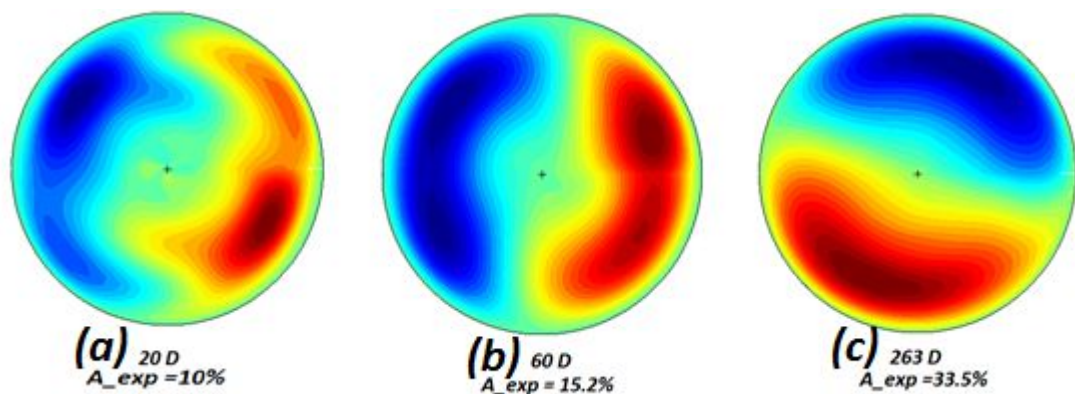


Figure (5-25) ; Structure de l'écoulement travaux Alin $Rep = [3300 - 3500]$

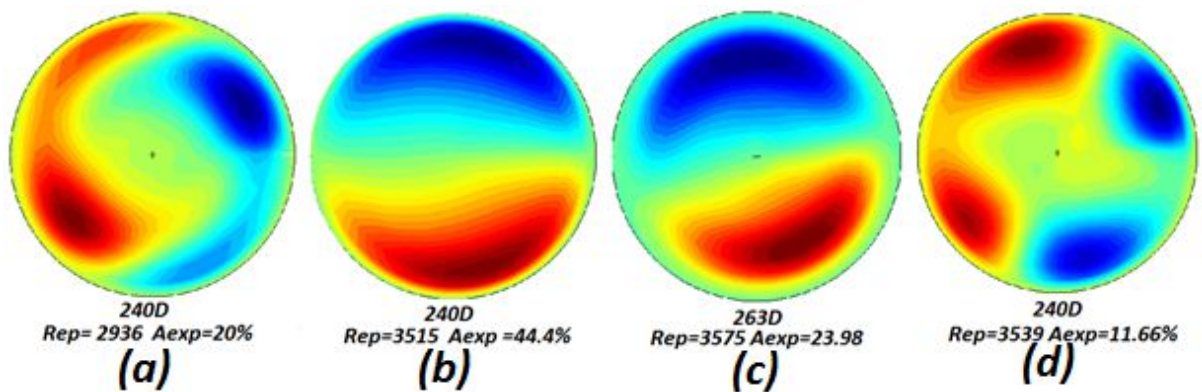


Figure (5-26) ; Structure de l'écoulement travaux 2017 $Rep = [3300 - 3500]$

L'analyse faite, met en évidence la présence de structures cohérentes dans l'écoulement qui se caractérise par deux rouleaux axisymétrique contra rotatif et qui se manifeste par une zone de circulation accéléré (rouge) et une autre décéléré (bleu) identique, a ceux déjà observés préalablement par Esmail (2009) sur une conduite de 4m de long.

La comparaison qualitative des représentations de l'écoulement dans les figures (5-24) et (5-25) décrivent bien l'effet non linéaire asymétrique de l'écoulement qui s'installe au fur et à mesure le long de la conduite de $20D$ jusqu'à $263D$ et avec l'augmentation du régime d'écoulement.

Pour une position donnée $z = 20D$ et $z = 60D$ on note l'évolution de la structure et du degré de dissymétrie avec l'augmentation du régime dans un intervalle de $Rep = 2420$ à $Rep = 3500$. En effet la dissymétrie s'amplifie et les deux rouleaux se constituent et prennent plus d'importance.

Cependant la position de leurs maximum est différente d'un régime à un autre et d'une station à une autre cette position ne peut être reproduite continuellement sur une même station de la conduite pour le même régime nous pensons que le paramètre rhéologique de l'écoulement a une contribution là dessus.

Le traitement des résultats obtenu pour une même station $240D$ et un régime d'écoulement voisins $Rep = [3300 - 3500]$ répété dans une série d'essai espacé dans le temps. Nous confirme le maintien de cette structure des deux rouleaux au moment où la dissymétrie évaluée était importante 44.4% et qui a changé de position lors d'une chute du degré de dissymétrie figure (5-26d).

En effet nous avons enregistré durant les mesures deux niveaux de dissymétrie proches l'un de l'autre dans deux positions azimutales de l'ordre de 12%. Ceci dit, nous pensons dans ce cas que les effets non linéaires sont devenus beaucoup plus complexes et que le système perd sa stabilité.

Toutefois, on note aussi la constatation faite sur la structure cohérente dans les figures (5-26a) et (5-26b) obtenue dans un même essai sous des conditions identiques et où on a obtenu un maximum de déviation de l'écoulement de l'ordre de 44.4%. L'équipement de mesure LDA a été déplacé à la station $263D$ où la dissymétrie est évaluée à 23.9%. Ceci nous révèle encore que la dissymétrie ne peut continuellement augmenter le long de la conduite.

6.2/Mesure de Pertes de charges

La mesure de perte de charge dans la conduite est assuré par une prise de pression sur un tronçon de longueur $\ell_p = 2m$ ou un capteur **GE DRUCK**, type **LPX9481** permet de transmettre un signal analogique de la pression différentielle ΔP enregistré. Chaque point de mesure représente une moyenne de 100000 points sur une fréquence de mesure allant de 300 Hz à 4kHz. La perte de charge est donc donnée par

$$\Delta P = \frac{\Delta P_c - 1}{4} \times 1000 \quad (5-20)$$

ΔP_c : est la mesure réalisé sur le detecteur en voltage

La chute de pression est reliée au débit volumique par l'expression ci-dessous [49]

$$Q_v = \frac{2n\pi^3}{1+n} \left[\frac{\hat{R}\Delta P}{2K\ell_p} \right]^{\frac{1+n}{n}} (1 - r_0)^{\frac{1+n}{n}} \left[1 - \frac{2n(1-r_0)}{2n+1} \left(1 - \frac{2n(1-r_0)}{3n+1} \right) \right] \quad (5-21)$$

ℓ_p : désigne la longueur de mesure de la perte de charge

n : l'indice du fluide

Avec r_0 le rayon de la zone bouchon exprimé par :

$$r_0 = \left(\frac{n}{3n+1} \right)^n Hb - \frac{n}{2n+1} \left(\frac{n}{3n+1} \right)^{2n-1} Hb^2 + O(Hb^3) \quad \text{lorsque } Hb \rightarrow 0 \quad (5-22)$$

Et

$$r_0 = 1 - C_1 \left(\frac{1}{Hb} \right)^{\frac{1}{1+n}} - C_2 \left(\frac{1}{Hb} \right)^{\frac{2}{1+n}} + O\left(\left(\frac{1}{Hb} \right)^{\frac{3}{1+n}} \right) \quad \text{lorsque } Hb \rightarrow \infty \quad (5-23)$$

Avec,

$$C_1 = \left(\frac{1+n}{n} \right)^{\frac{n}{1+n}} ; \quad C_2 = \frac{2n^2}{(1+n)(2n+1)} C_1^2 - C_1^{\frac{n-1}{n}} ; \quad Hb = \frac{\hat{\tau}_0}{K[\hat{W}_d/\hat{R}]^n}$$

Le coefficient de frottement C_f est défini par :

$$C_f = \frac{2\tau_P}{\rho W_d^2} \quad \text{et} \quad \tau_P = \frac{\Delta P \cdot \hat{R}}{2L} \quad (5-24)$$

Une relation theorique existe dans la littérature donnée par [49]

$$C_f = \frac{4}{Re_p} \left(\frac{Hb}{r_0} \right)^{\frac{1}{n}} (1 - r_0)^{1+\frac{1}{n}} \quad (5-25)$$

Un très bon accord est observé avec les prévisions théoriques. Dans la littérature, on introduit le nombre de Reynolds de Metzner et al [64] noté :

$$C_f = \frac{16}{R_e'} \quad (5-26)$$

avec R_e' nombre de Reynolds de Metzner exprimé par

$$R_e' = \frac{16}{C_f} = \frac{8r_0 Re_g}{Hb} = 8 \left(\frac{n}{6n+2} \right) Re_p \quad (5-27)$$

Re_g le nombre de Reynolds Généralisé de Schowalter

La figure suivante montre l'évolution de la perte de charge en fonction du nombre de Reynolds pari Re_p .

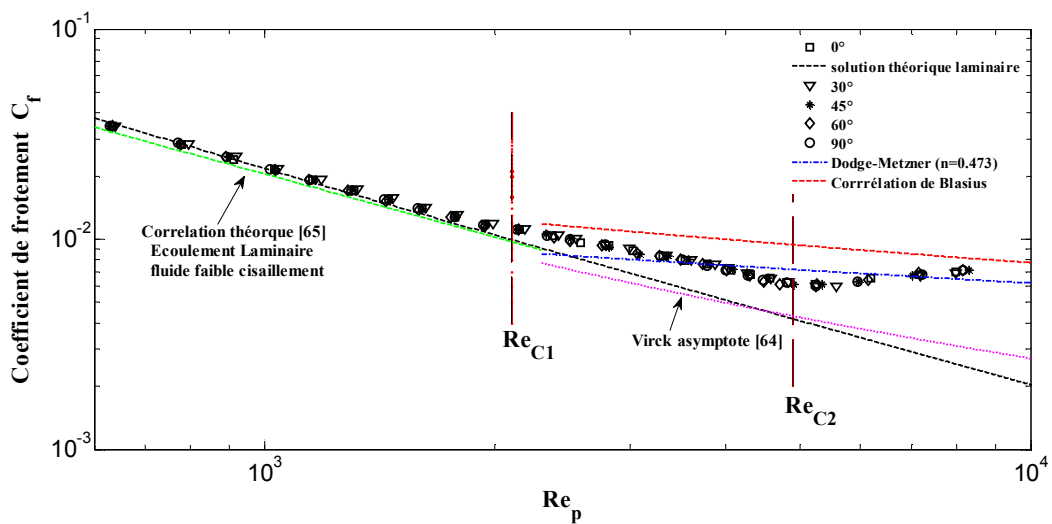


Figure (5-24) ; évolution du coefficient de frottement en fonction de Reynolds pari $n = 0.473, K = 3.047 \text{ (pa.s}^n\text{) et } \tau_0 = 7.18 \text{ (pa)}$ $Re_{C1} = 2100$ et $Re_{C2} = 4900$

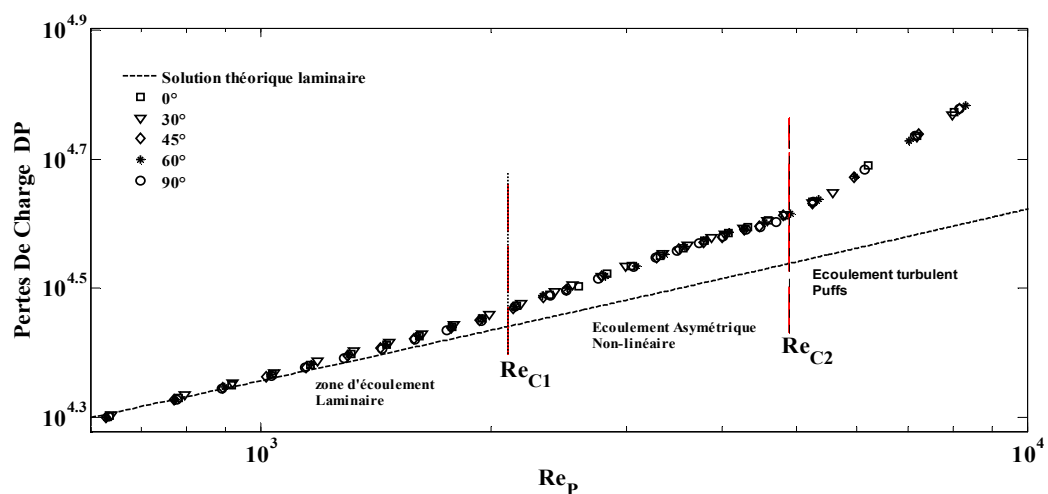


Figure (5-25) ; évolution de la perte de charge en fonction de Reynolds pari $n = 0.473, K = 3.047 \text{ (pa.s}^n\text{) et } \tau_0 = 7.18 \text{ (pa)}$ $Re_{C1} = 2100$ et $Re_{C2} = 4900$

Dans la figure (5-24) nous avons représenté l'évolution du coefficient de frottement C_f en fonction du nombre de Reynolds paroi Re_p . Une diminution de la force de frottement est enregistrée le long de la conduite avec l'augmentation du régime d'écoulement.

Dans la zone d'écoulement laminaire $Re_p < Re_{c1}$ une bonne concordance est observée entre les mesures expérimentales et la solution théorique laminaire nous donne $C_f Re_p = 20.45665$ [64]. Pour des valeurs de Re_p élevé une bonne correspondance avec la corrélation de **Dodge-Metzner** pour un indice $n = 0.473$ est à noter. Cependant, les résultats expérimentaux sont nettement au-dessous de la corrélation de **Blasius** qui est représentative de l'évolution du coefficient de frottement d'un fluide Newtonien. Ces même constatations sont aussi observé d'une manière similaire pour un fluide non newtonien rhéofluidifiant une solution de xhantan Gomme en écoulement dans une conduite circulaire voir figure (5-26)

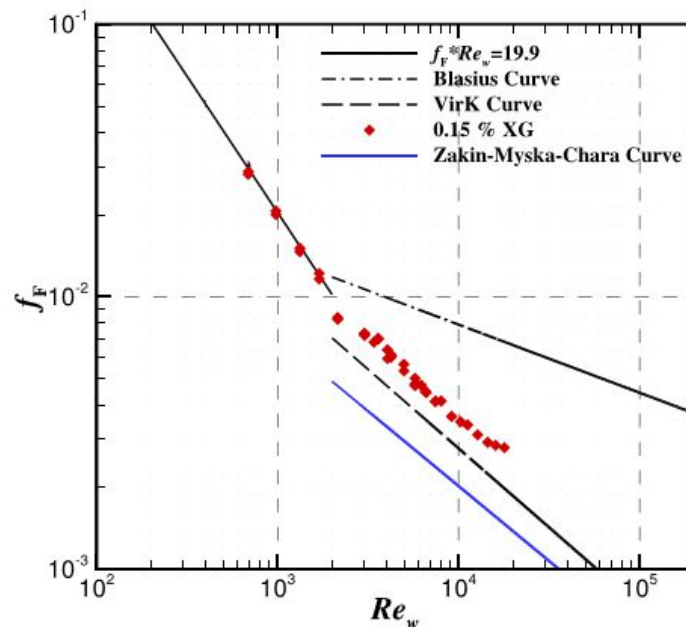


Figure (5-26) ; évolution du Coefficient de frottement en fonction de Reynolds paroi Pour une solution de **Xanthan gomme** à **0.15 %** et comportement rhéologique selon le model **Carreau Yoshida** $n = 0.5379, \lambda_{cy} = 4.75 (s), \mu_{\infty} = 0.0033 (Pa.s), \mu_0 = 0.8108 (Pa.s)$ et $a = 1.041$ [63]

Deux régions remarquables sont à notifier particulièrement pour des fluides non newtonien rhéofluidifiant, la première se situe dans la zone de régime compris dans l'intervalle $Re_{c1} \leq Re_p \leq Re_{c2}$ caractérisé par l'écoulement non linéaire asymétrique non observé dans un écoulement newtonien ou très peu d'information existe dans la littérature elle représente la zone de transition vers la turbulence et la seconde se situe dans un régime $Re_p \geq Re_{c2}$ cette dernière est plutôt classique connue et se manifeste par l'apparence des bouffées de turbulences.

6.3/Analyse des signaux

6.3.1/Signal Débit et Pression

Dans cette partie nous nous sommes intéressés à représenter le signal électronique obtenu par les capteurs de pression et de débit au cours du temps sur un ensemble d'échantillon de 8000, une fréquence de 100Hz et voir leur évolution avec le régime de l'écoulement.

Un ensemble de graphes de mesure est présenté ci-dessous pour une valeur relative de débit et de pression rapporté à leur valeur moyenne au cours du temps.

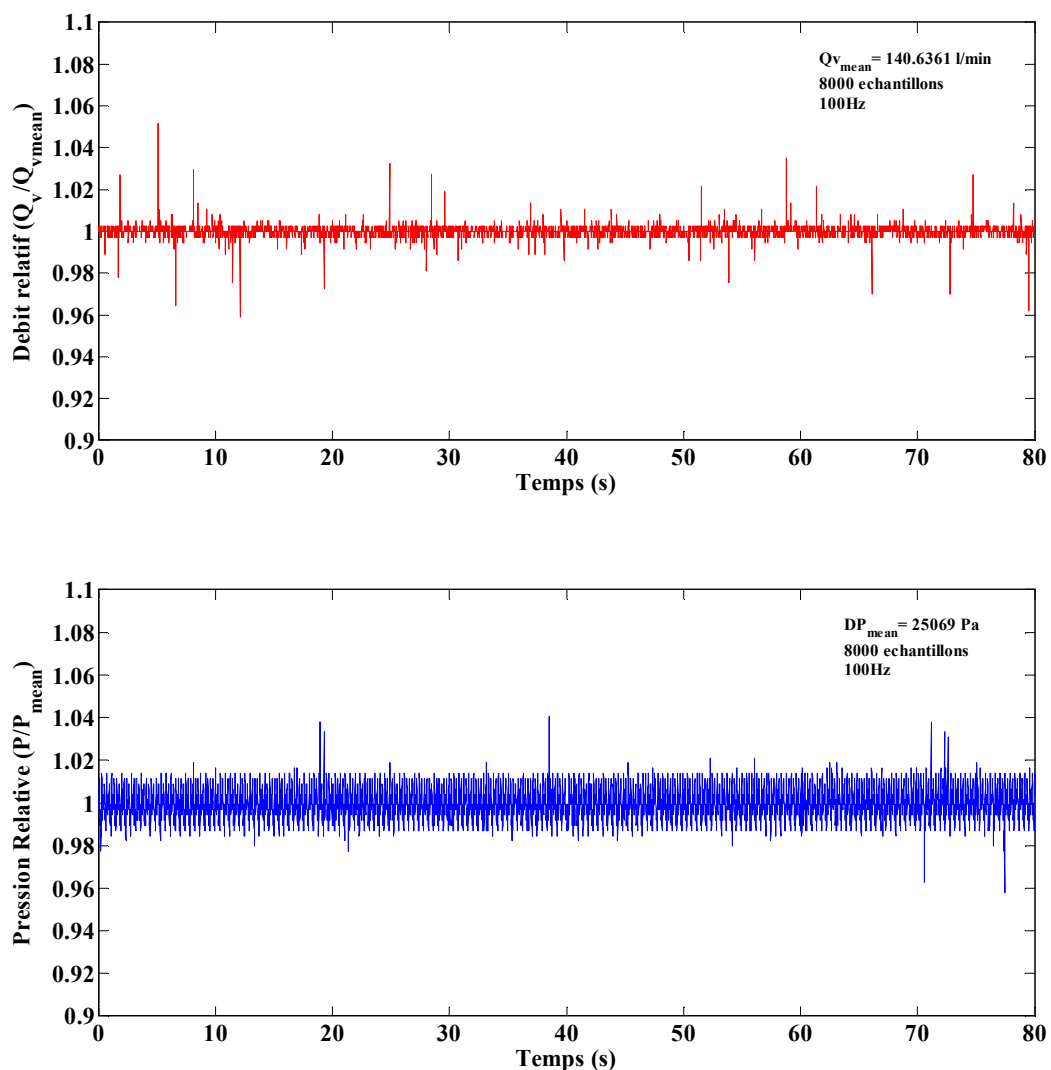


Figure (5-27) Signal de débit et de pression relative à leur valeur moyenne
 $n = 0.463, K = 3.047 \text{ (pa} \cdot \text{s}^n)$ et $\tau_0 = 7.18 \text{ (pa)}$ $Re_p = 1380$
 (Régime Laminaire)

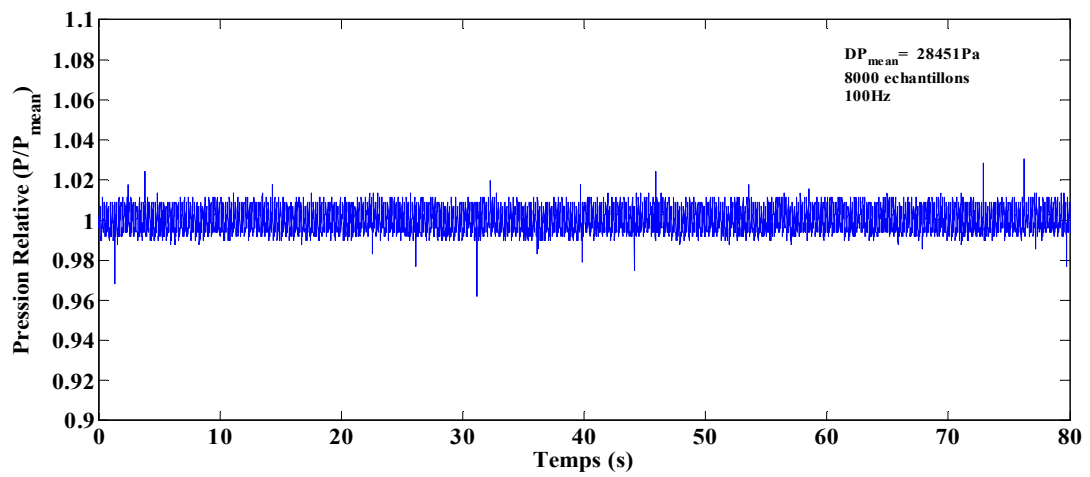
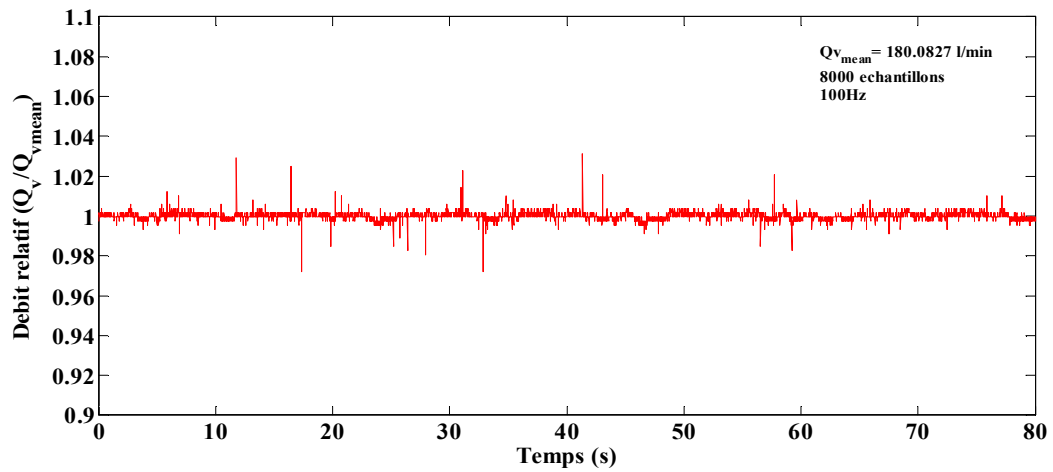
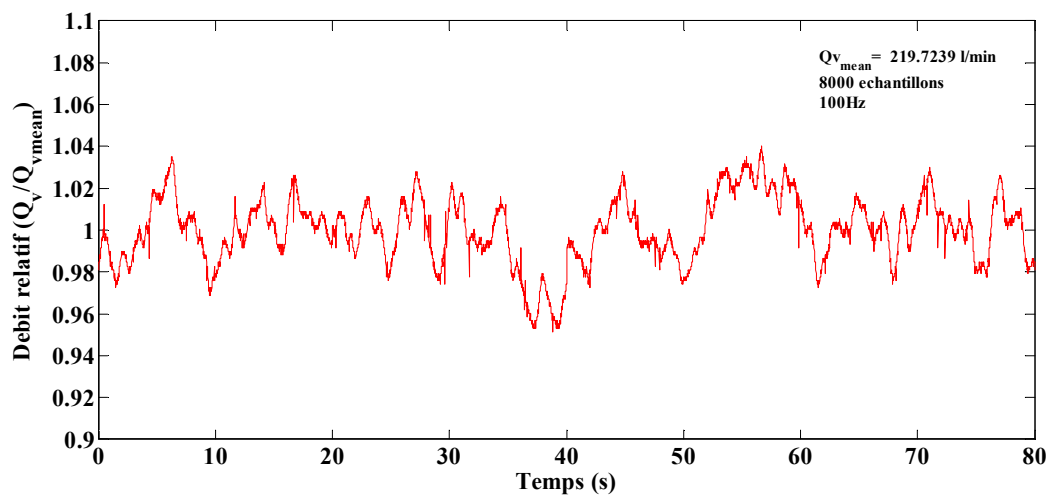


Figure (5-28) Signal de débit et de pression relative à leur valeur moyenne
 $n = 0.463, K = 3.047 \text{ (pa.s}^n\text{) et } \tau_0 = 7.18 \text{ (pa)}$ $Re_p = 2077$
 (Approche fin du régime laminaire)



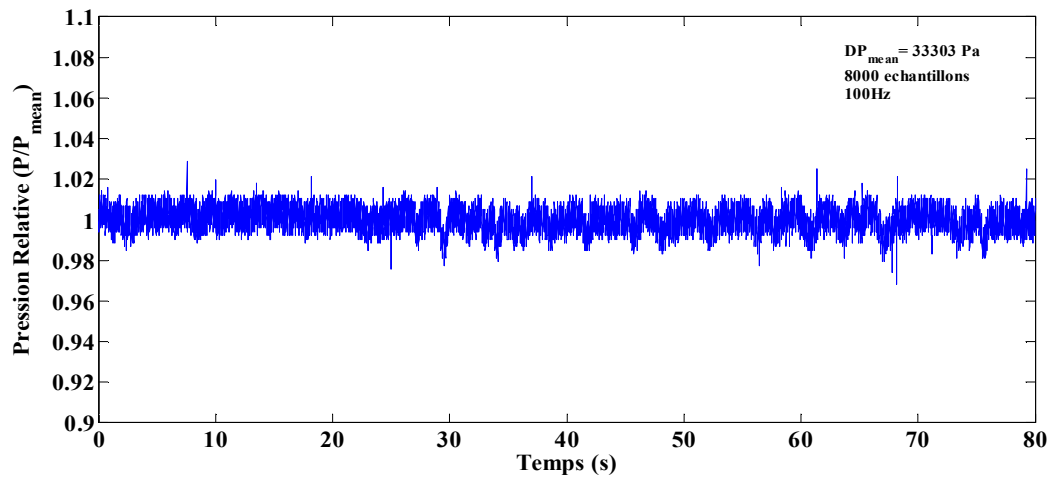


Figure (5-29) Signal de débit et de pression relative à leur valeur moyenne
 $n = 0.463, K = 3.047 \text{ (pa.s}^n\text{) et } \tau_0 = 7.18 \text{ (pa)}$ $Re_p = 3124$
 Milieu Zone intermédiaire

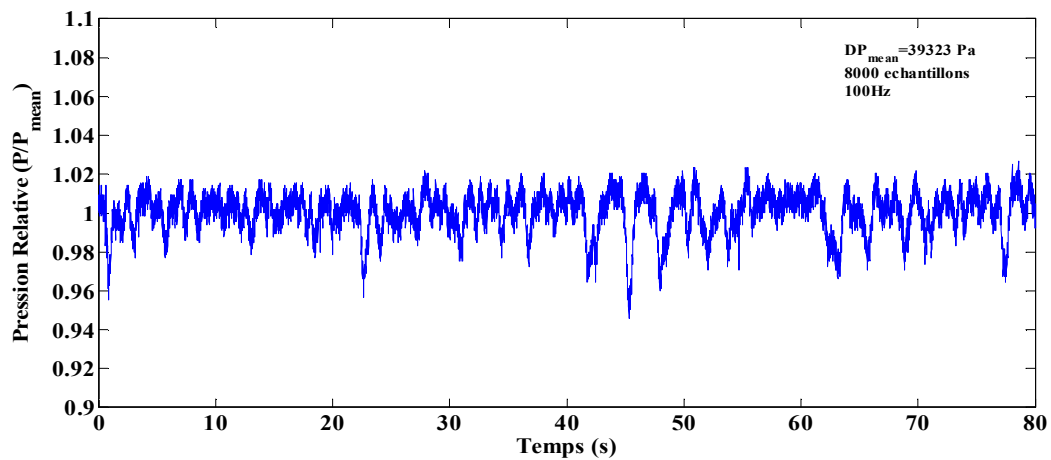
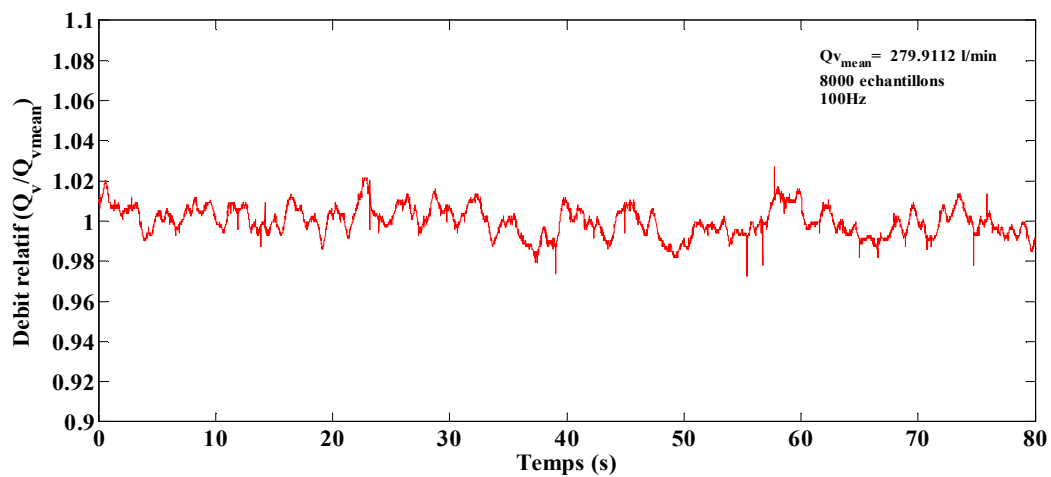


Figure (5-30) Signal de débit et de pression relative à leur valeur moyenne
 $n = 0.463, K = 3.047 \text{ (pa.s}^n\text{) et } \tau_0 = 7.18 \text{ (pa)}$ $Re_p = 5184$
 Proche début des Bouffées de turbulence

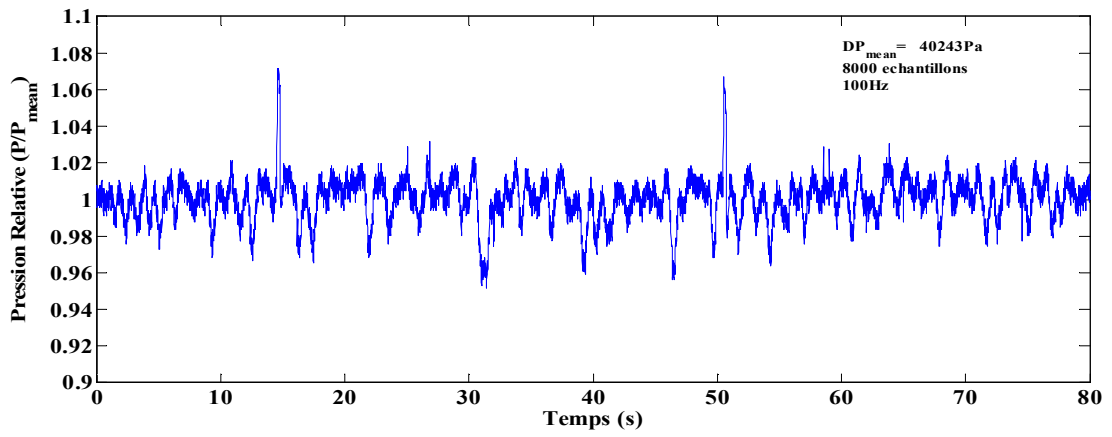
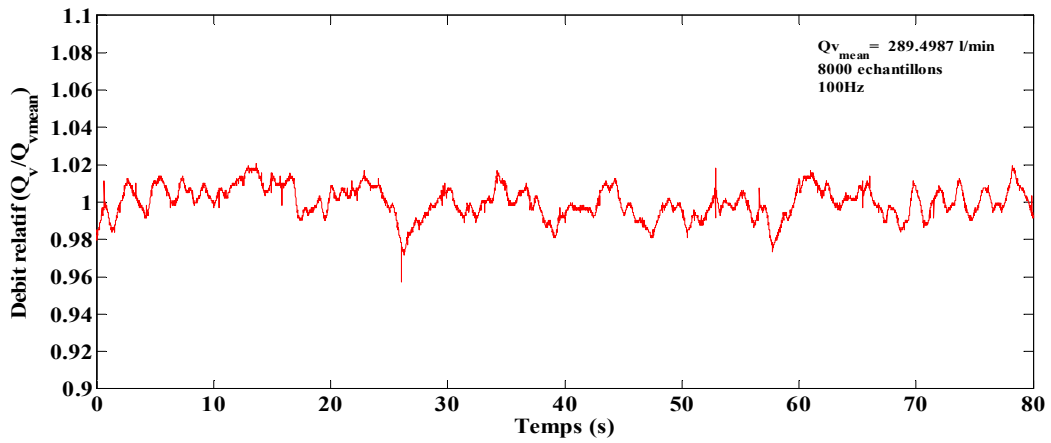
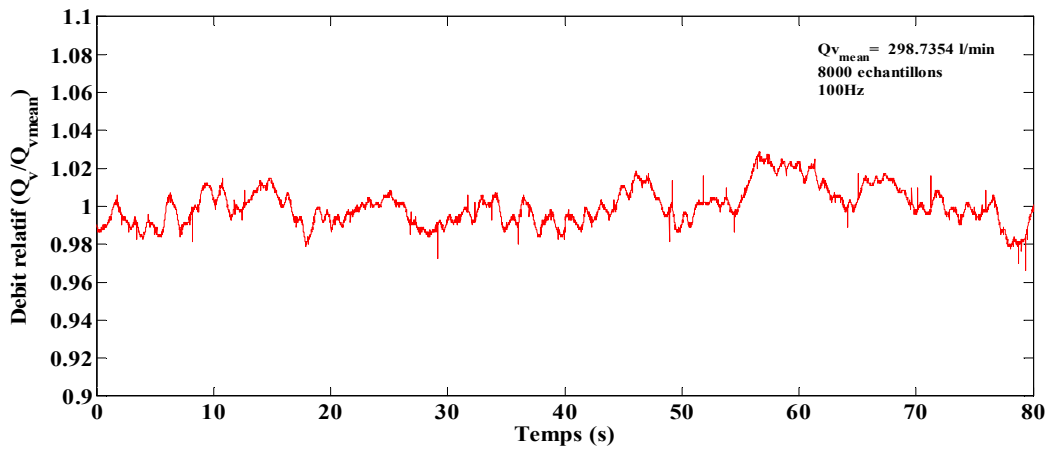


Figure (5-31) Signal de débit et de pression relative à leur valeur moyenne
 $n = 0.463, K = 3.047 \text{ (pa} \cdot \text{s}^n)$ et $\tau_0 = 7.18 \text{ (pa)}$ $Re_p = 5251$
 Apparition des Bouffées de turbulence



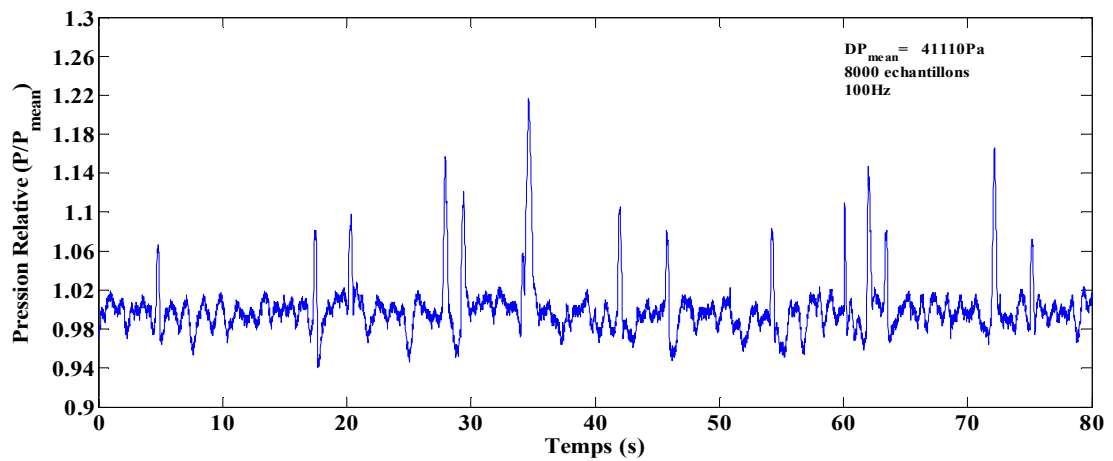


Figure (5-32) Signal de débit et de pression relative à leur valeur moyenne
 $n = 0.463, K = 3.047 \text{ (pa.s}^n\text{) et } \tau_0 = 7.18 \text{ (pa)}$ $Re_p = 5816$
 Apparitions de Plus de Bouffées

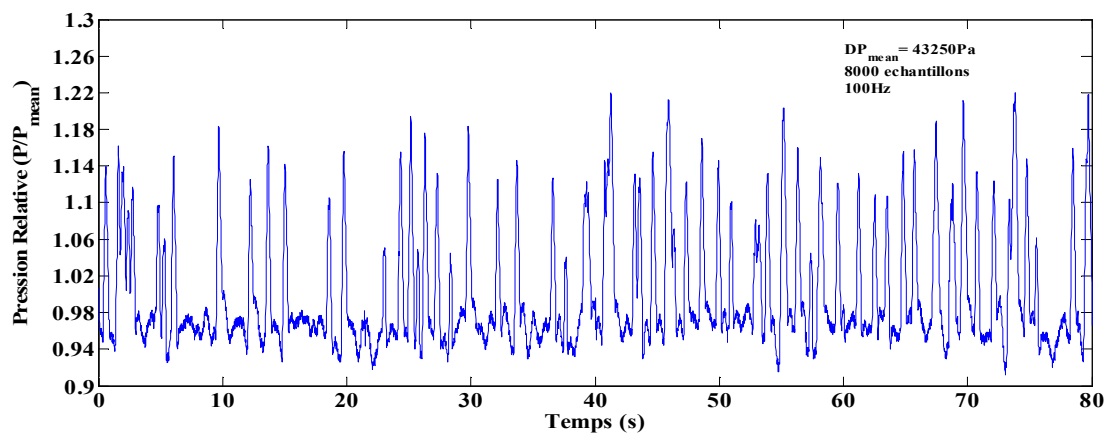
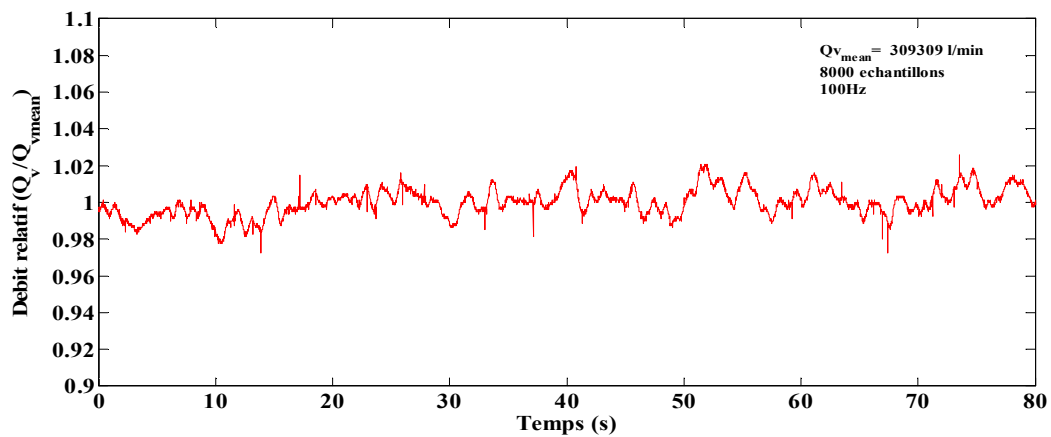


Figure (5-33) Signal de débit et de pression relative à leur valeur moyenne
 $n = 0.463, K = 3.047 \text{ (pa.s}^n\text{) et } \tau_0 = 7.18 \text{ (pa)}$ $Re_p = 6815$
 Bouffées Installé

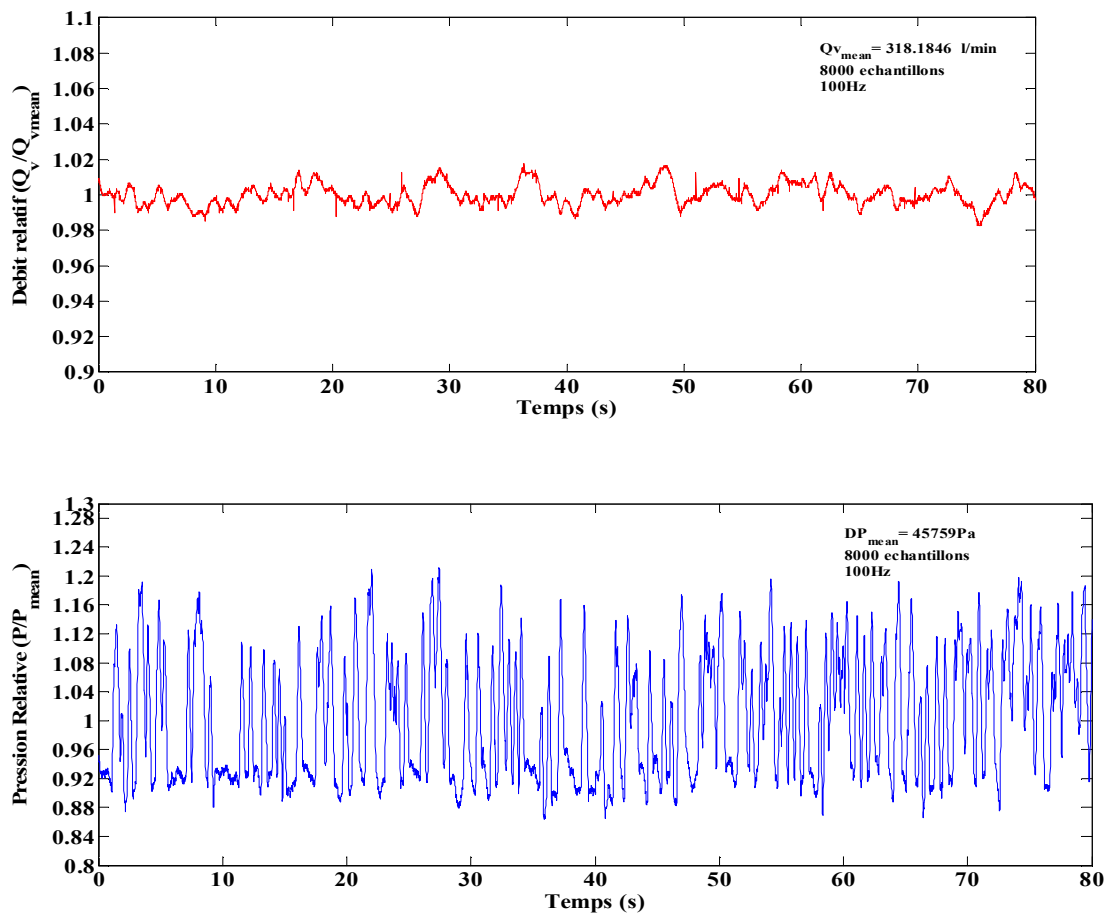


Figure (5-34) Signal de débit et de pression relative à leur valeur moyenne

$$n = 0.463, K = 3.047 \text{ (} pa \cdot s^n \text{)} \text{ et } \tau_0 = 7.18 \text{ (} pa \text{)} \quad Re_p = 8147$$

Turbulence établie

Le comportement du signal débit et de pression nous renseignent sur le passage dans chaque zone d'écoulement. En effet dans la zone laminaire le signal débit enregistre quelque frémissement mais sans trop se prononcé sur la pression. Cependant a la fin de la zone laminaire et dans la zone intermediaire des frémissement dans la pression sont enregistrées et des fluctuations plus importante sont établis dans le signal débit signe de la zone d'asymetrie ou l'écoulement presente un comportement non linéaire complexe.

Toute fois, au delà de la limite de transition des pic de pression débute a apparaitre dans le signal de pression signe de présence de bouffées de turbulence dans l'écoulement. Le nombre se simplifie avec l'augmentation du régime j'usqu'a ce qu'ils sintallent complètement et engendre l'établissement de la turbulence le signal de pression dans ce cas présente des fluctuations importante.

6.3.2/ Valeur Efficace « RMS »

Dans la figure (5-35) nous avons représenté l'évolution de la fluctuation du signal de vitesse valeur efficace RMS autour de trois position azimuthal ou une dissymetrie du profil a été enregistré au allontours de 60° . La mesure faite du signal est positionné a 0.7 du rayon de la conduite a une position axiale relative 263D.

Le calcul de RMS est donnée par la relation ci-dessous :

$$U_{RMS}/U_d = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N (u_i - U)^2 / N}}{U_d} \quad (5-28)$$

Avec ;

U : vitesse Moyenne dans le temps

N : Nombre d'échantillons

U_d : vitesse débitante

u_i : vitesse instantanée

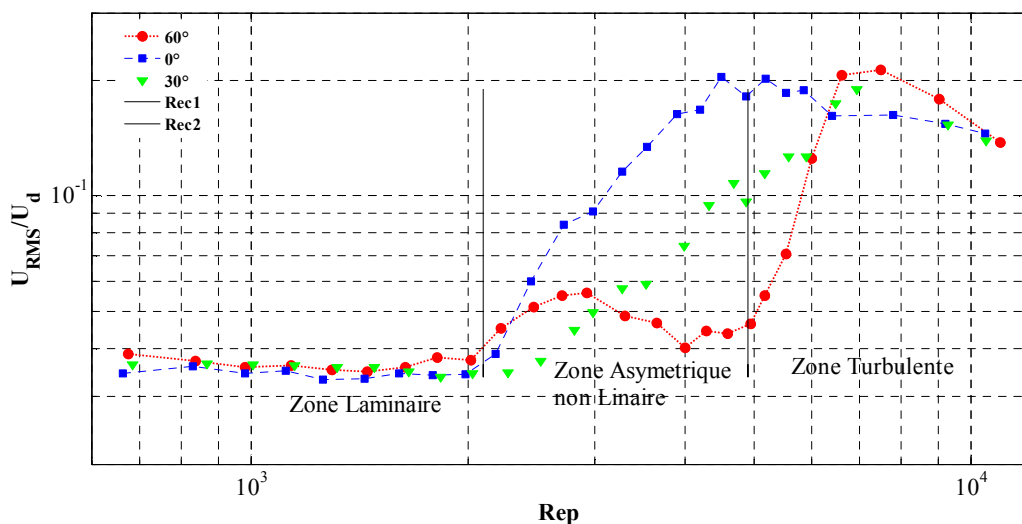


Figure (5-35) l'évolution de la fluctuation du signal de vitesse valeur efficace RMS

$$n = 0.463, K = 3.047 \text{ (pa} \cdot \text{s}^n) \text{ et } \tau_0 = 7.18 \text{ (pa)}$$

Dans la zone laminaire la valeur de la RMS relative a la vitesse débitante demeure inchangée pour les trois mesure d'angles. Cependant la RMS augmente dans la zone de transition pour un maximum atteint a partir de la limite critique de la zone turbulente ou la RMS diminue signe de l'installation de la turbulence. Se comportement est familier pour un fluide newtonien parcontre l'apparition d'un pic dans la zone de transition est une chose qui est observé uniquement pour le cas non newtonien signe de la complexité de l'écoulement et la presence de la desymetrie dans cette zone nonlinaire ou il se presente une tres forte stratification de viscosité.

6.3.3 /Mesure PIV

La technique de mesure PIV (2D) est adoptée pour réaliser des mesures dans une zone de la conduite ou une boîte de section carrée 60x60 et de longueur 150 mm est introduite à l'extérieur de la conduite. Cette dernière a été utilisée afin de pouvoir prendre des images dans plan et éviter la déformation engendrée par la courbure de la conduite. Le schéma suivant montre l'installation de l'équipement de mesure il se compose d'une source laser haute énergie (200mj/pulse) et d'une caméra numérique CMOS de Dnatec à haute sensibilité et de résolution (1280x800 pixels) avec un maximum 260 fps. La caméra nous permet d'acquérir un doublet d'image à une fréquence jusqu'à 20 Hz et une lentille d'une distance focale qui permet de couvrir la conduite dans son champ de vision.

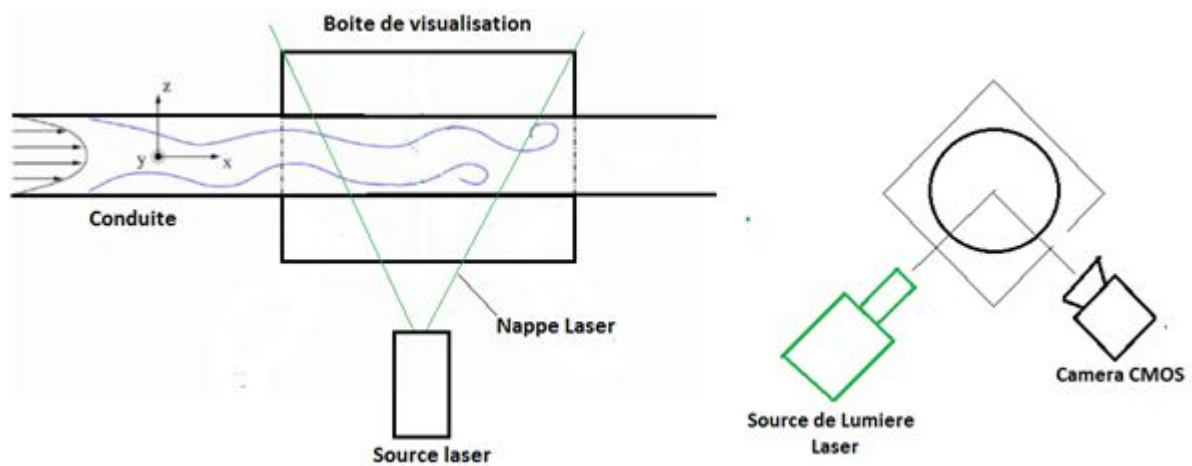


Figure (5-36) Schémas de configuration de la mesure PIV

L'installation et le réglage de la caméra nécessite une grande attention pour pouvoir acquérir des images nettes et correctes pour le post-traitement. Dans ce sens, l'ensemencement est réalisé par l'introduction de particules de bille sphérique creuse argentée de $10\mu\text{m}$ de diamètre. L'épaisseur de la nappe laser est de 1.5 mm.

Après calibration, un enregistrement de 100 doublets d'image a été réalisé pour une fréquence de 10 Hz ce qui nous résulte un temps de 10 s au total de la séquence d'image. La zone d'interrogation est prise à 64x64 pixels, une résolution acceptable pour le traitement mais qui consomme plus de temps de calcul. Les images, une fois stockées, doivent être traitées par les différents programmes de corrélation et de correction d'image disponibles sur l'application dynamique *studio* de Dantec. Une zone d'intérêt a été définie en éliminant la partie qui est très proche de la paroi. Nous procéderons ensuite par un traitement avec corrélation adaptative comme algorithme et une gaussienne dans la zone d'interrogation et une validation d'une valeur de 2 au minimum. Les différents frames dans la période de 10 s pour la vitesse axiale sont représentés sur la figure suivante (5-37).

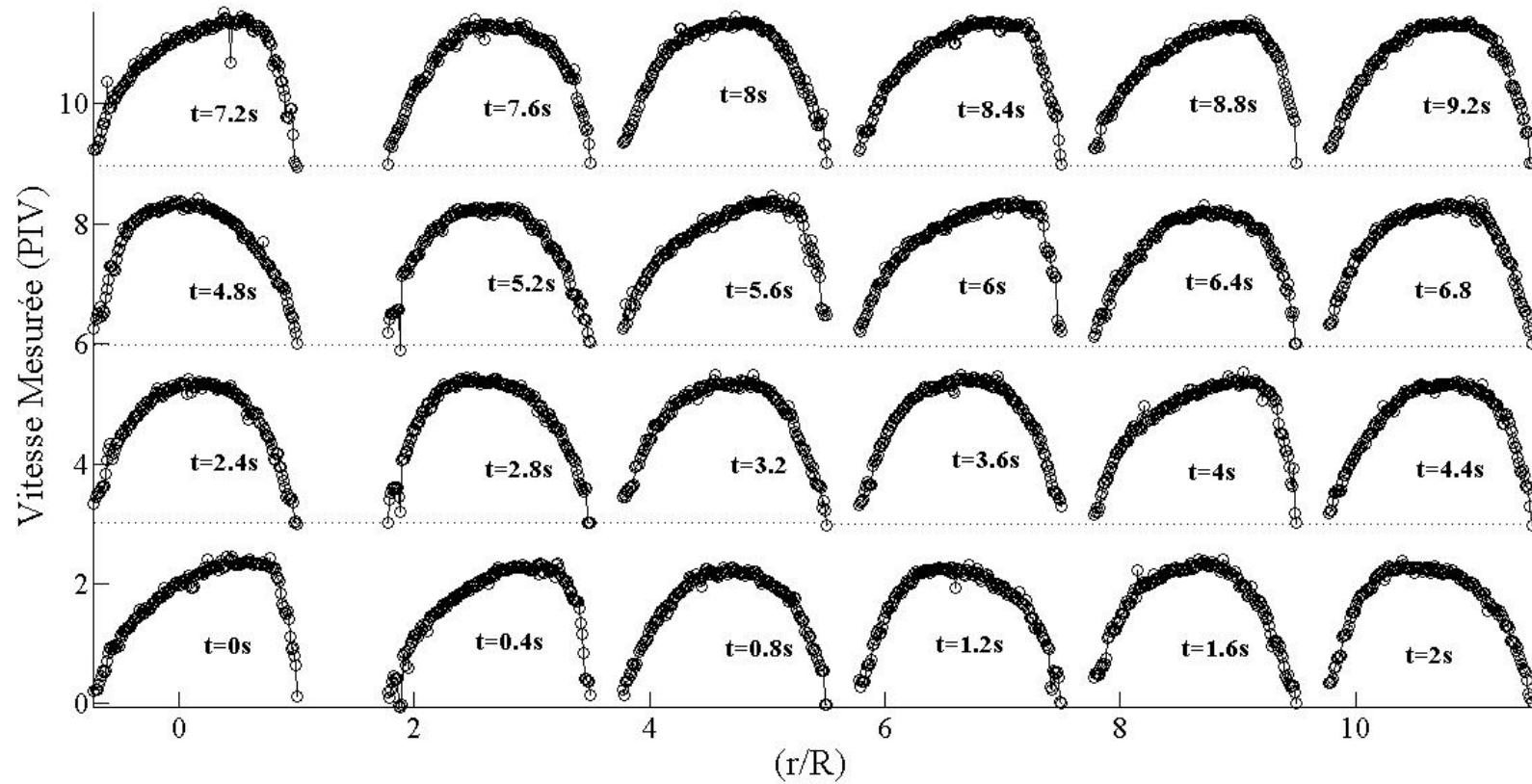


Figure (5-37) ; évolution du profil vitesse instantané dans une période de $T=10s$
 $n = 0.5, K = 1.05$ ($pa \cdot s^n$) et $\tau_0 = 2.05$ (pa)

Nous constatons la presence de la disymetrie avec une oscillation du profil de vitesse autour d'une position donnée. Chose qui na pas été signaler par les travaux desmail on observe qu'il ya une preference de presence du profil d'un coté plus que lautre ouil passe plus de temps il bascule de temps a l'autre sans trop tarder.

Nous avons representé l'osillation du maximum de vitesse pour la periode de temps de mesure. On note le passage du maximum par rapport a une valeur moyen. Il passe plus de temps d'un coté que d'autre

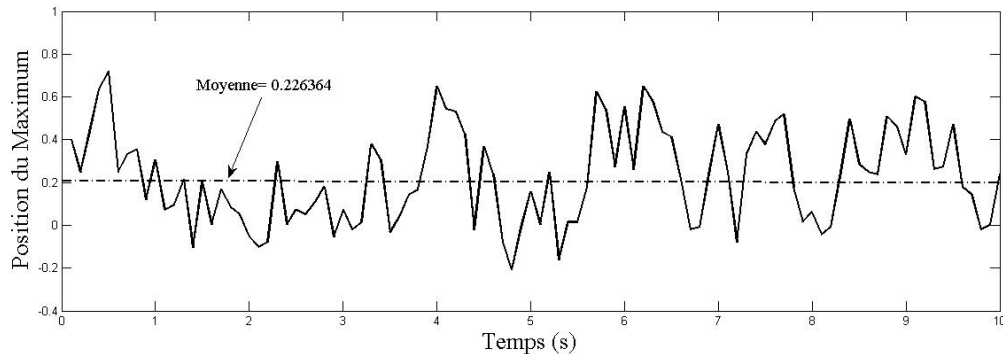


Figure (5-38) Signal de la position du maximum de vitesse au cours du temps

Ce phénomèn observer a été mentionner récemment par les travaux de Robert Poole [65] et confirme les constatations que nous avons fait aussi. On effet il stipule qu'il ya vraiment une disymetrie et que l'osillation a lieu aussi dans la zone de transition. La figure montre clairement les resultats des mesures effectuer par la stereo PIV.

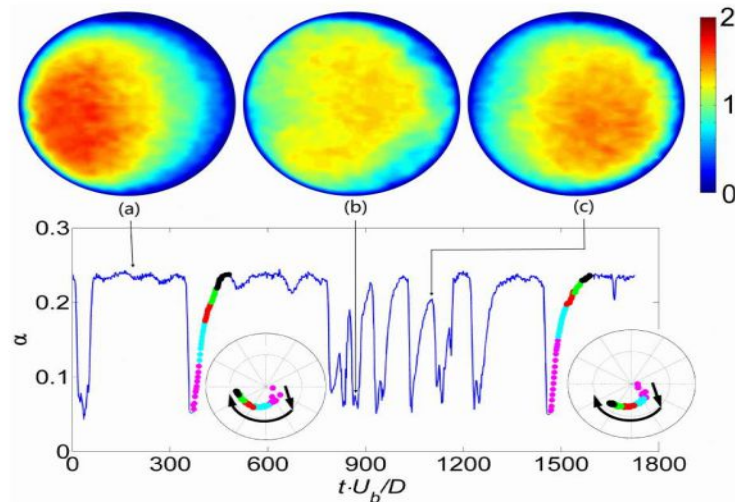


Figure (5-39) champ de vitesse instantané dans une section transversale de la conduite [65]

Dans la figure ci-dessus (5-39) on a en (a) l'écoulement est asymétrique avec une orientation préférée, (b) l'écoulement fait un passage axisymétrique instantané qui est induit par la bouffée de turbulence en (c) une bref visite vers l'écoulement asymétrique avec une orientation alternatives.

Avec la transformé de fourrier nous avons calculé la densité spectrale de puissance du signale de l'évolution du maximum de profil de vitesse et nous l'avons représenté dans la figure (5-40). La puissance du signal présente une dominance autour d'une fréquence autour de la valeur $f = 0.25 \text{ Hz}$.

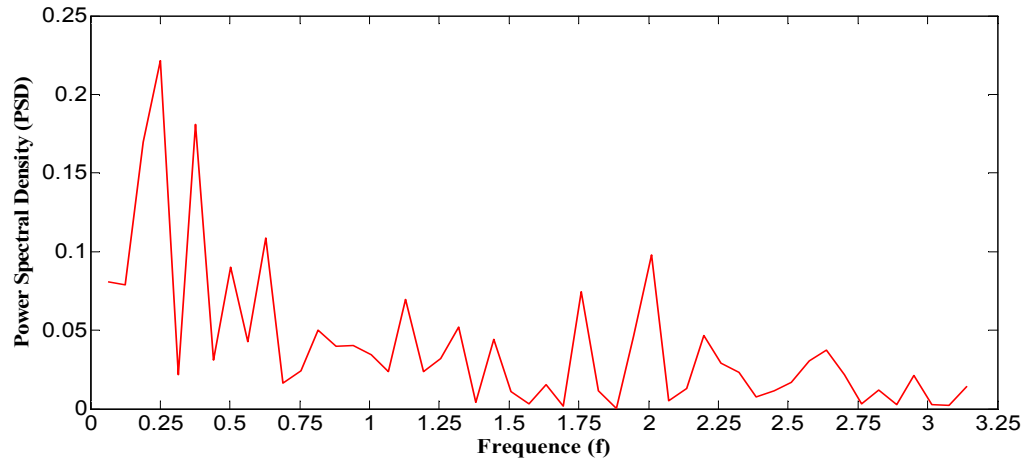


Figure (5-40) densité spectrale de puissance du signal du maximum de vitesse axiale

5.3.4 / Densité Spectrale de la fluctuation de pression

Dans le paragraphe précédent (5.31) nous avons constaté le lien existant entre le signal de débit et de pression et leur comportement lors du passage de l'écoulement du régime laminaire vers le régime turbulent. Nous nous sommes intéressés de déterminer la densité spectrale de la puissance du signal pression et voir la loi de fréquence à laquelle est reliée la densité spectrale de puissance. Un intérêt a été porté sur quatre valeurs du régime correspondant à la zone laminaire, intermédiaire, apparition de bouffées de turbulence et turbulence installée respectivement.

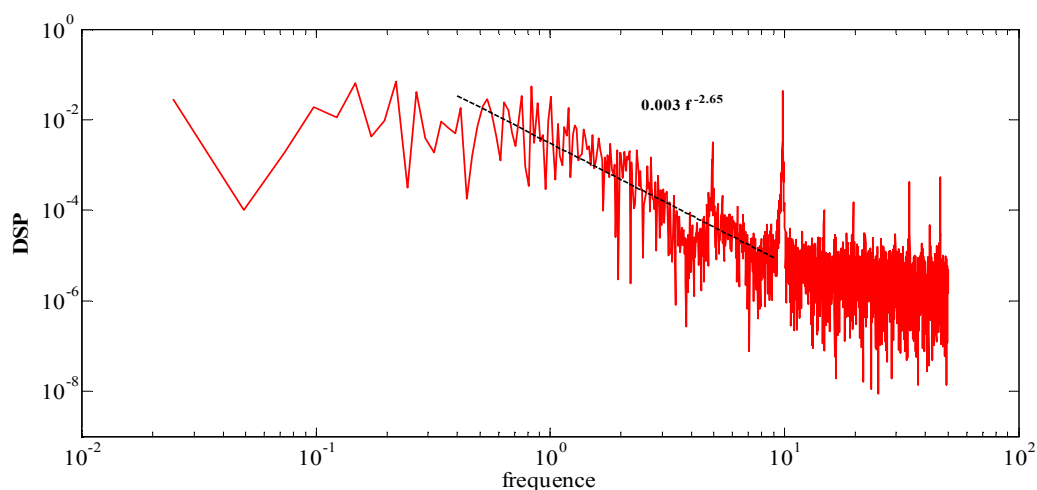


Figure (5-41) densité spectrale de puissance du signal de pression $Re_P = 1380$

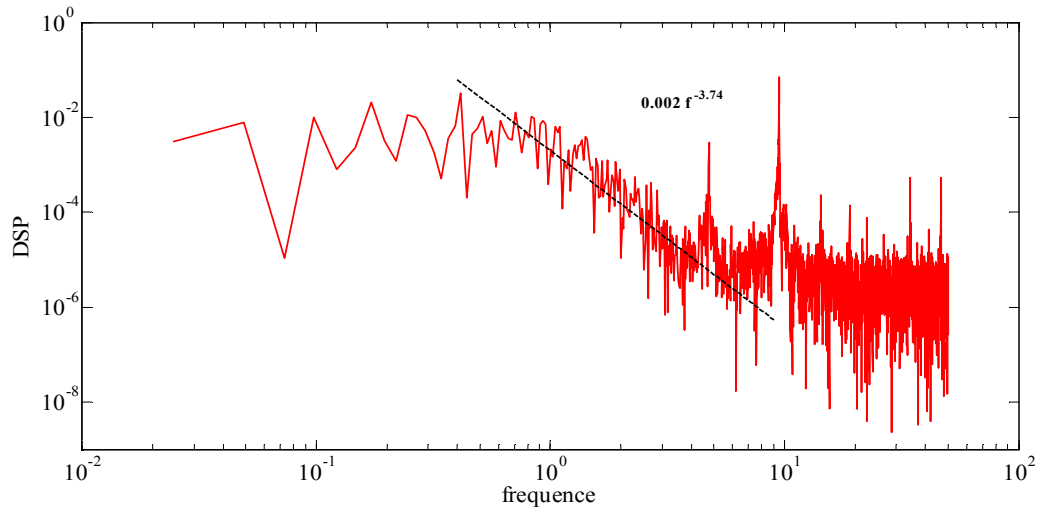


Figure (5-42) densité spectrale de puissance du signal de pression $Re_p = 5184$

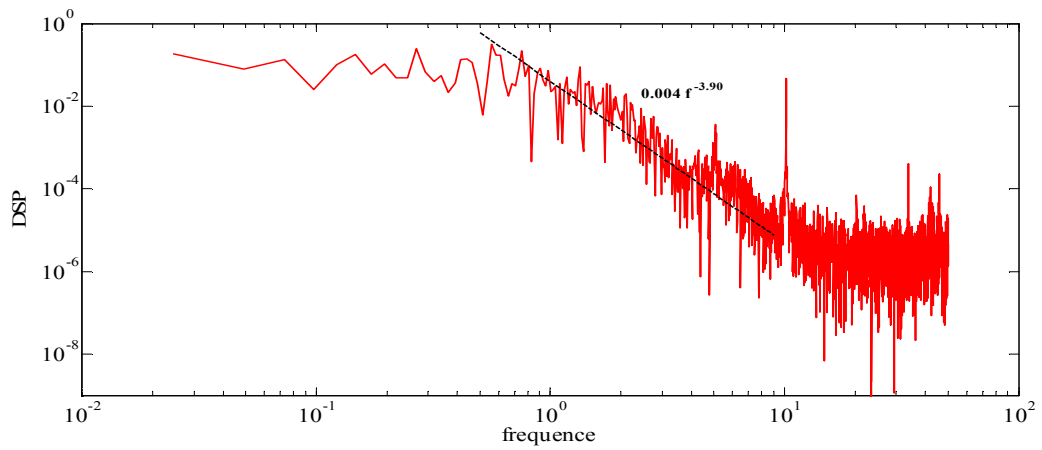


Figure (5-43) densité spectrale de puissance du signal de pression $Re_p = 5816$

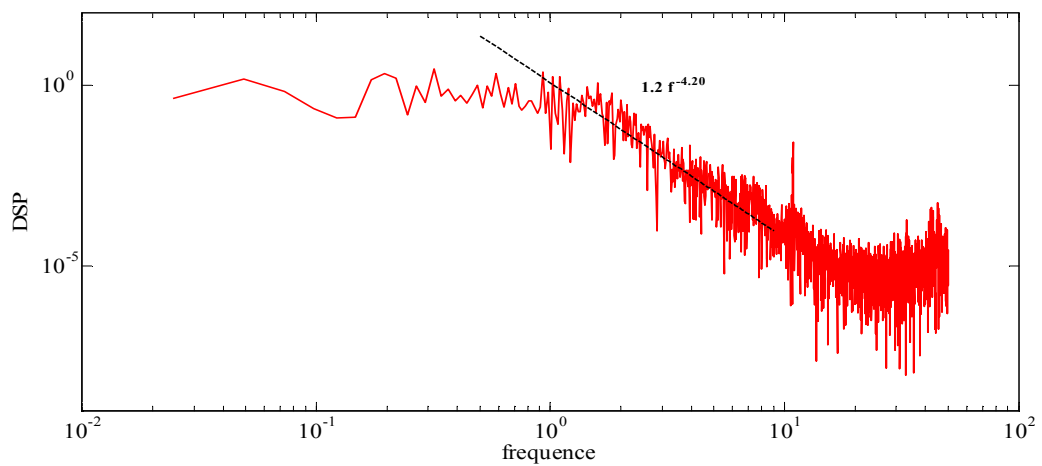


Figure (5-44) densité spectrale de puissance du signal de pression $Re_p = 8147$

Les résultats du traitement sont illustrés dans les figures (5-41) à (5-44). On effectue dans la zone laminaire le profil de vitesse est complètement axisymétrique et on observe des frémissements dans le signal de débit sans trop dire sur celui de la pression.

La puissance du spectre fréquentielle est au environs de 10^{-2} a Reynolds paroi $Re_p = 1380$ puis augmente avec le régime jusqu'a 10^0 a $Re_p = 8147$. Nous constatons une oscillation des fluctuations de pression au-dessous de $f = 10 \text{ Hz}$ qui décroît et suit une loi puissance af^m ou la valeur de m est comprise $[2.65 - 4.2]$ ces résultats sont en bonne concordance avec ceux obtenu par A.Esmael [49] et Robert Poole [65].

CONCLUSION

L'analyse de stabilité linéaire et la réceptivité de l'écoulement de Hagen-Poiseuille d'un fluide de **Herschel-Bulkley** sont étudiées en utilisant des approches modales et non modales. L'écoulement de base se caractérise principalement par

- (i) une zone centrale de rayon r_0 se déplace avec une vitesse constante
- (ii) une variation non linéaire de la viscosité entre la paroi et la surface de cisaillement.

Deux paramètres sans dimension gouvernent le problème: l'indice de l'écoulement n et le nombre modifié de **Herschel-Bulkley** $\tilde{H}b$ ou par équivalence l'indice n et r_0 .

Dans l'analyse de la stabilité linéaire, compte tenu de, la perturbation de la viscosité cela conduit à une anisotropie dans la perturbation du tenseur de contrainte. La composante $\tau'_{rz} = \tau'_{zr}$ s'exprime en fonction de la viscosité tangente μ_t , qui est indépendante de la contrainte seuil, tandis que les autres contraintes $\tau'_{ij}, ij \neq rz \text{ et } zr$, s'exprime en fonction de la viscosité effective $\mu_b > \mu_t$. Les résultats de l'approche modale montrent que:

(i) Dans le cas d'une perturbation axisymétrique, l'influence de $\tilde{H}b$ (contrainte seuil adimensionnelle) est réduite Principalement à la modification de la largeur de la zone cisailée;

(ii) Dans le cas d'une perturbation oblique, les termes $\tilde{H}b$ contribuent à stabiliser l'écoulement par une augmentation de la dissipation visqueuse;

(iii) l'écoulement de Hagen-Poiseuille du fluide de Herschel-Bulkley est stable d'une manière asymptotique aux perturbations infinitésimales.

En raison de la non-normalité des opérateurs de stabilité linéaire (par rapport à un produit scalaire basé sur la norme énergie), une amplification algébrique transitoire de l'énergie cinétique de la perturbation est observée. L'influence des paramètres rhéologiques sur la croissance transitoire et les caractéristiques de la perturbation optimale est étudiée et a été démontré que:

- en augmentant la contrainte seuil adimensionnelle $\tilde{H}b$, l'amplification de l'énergie cinétique G_{max} est réduite. Cependant, pour une perturbation axisymétrique, $\tilde{H}b$ n'a pratiquement aucun effet sur G_{max} .
- Pour $\tilde{H}b \ll 1$, la perturbation optimale est sous la forme de rouleaux longitudinaux. L'amplification de l'énergie cinétique est régie par le mécanisme lift-up. Les lois de mise à l'échelle pour G_{opt} et t_{opi} en \tilde{R}_e^2 sont retrouver.
- Avec l'augmentation de $\tilde{H}b$, les effets de cisaillement deviennent plus significatifs, la perturbation optimale est oblique dans le plan (r, z) avec un nombre d'onde axial $\tilde{\alpha} = O(1)$. Le nombre d'onde azimutal optimal augmente en

diminuant la largeur de la zone cisailée. La perturbation optimale évolue suite aux effets des mécanismes Orr et Lift-up.

- Pour une valeur suffisamment élevée de $\tilde{H}b$, la perturbation optimale est axisymétrique et la croissance transitoire vient principalement du mécanisme Orr.

Concernant l'analyse de stabilité de l'énergie et la détermination du nombre maximal Reynolds $\tilde{R}e_{CE}$ au-dessous duquel, l'énergie cinétique de la perturbation diminue uniformément avec le temps. Les résultats numériques montrent que pour $\tilde{H}b \ll 1$, avec $0.3 \leq n \leq 1$, la perturbation la plus dangereuse est sous la forme de rouleaux longitudinaux avec $\tilde{R}e_{CE} \approx 91.1 - 26(n - 1)$. Pour les grandes valeurs de $\tilde{H}b$, la perturbation la plus dangereuse est axisymétrique et $\tilde{R}e_{CE} \approx 218n^{0.46}\tilde{H}b^{0.5}$ avec $\tilde{\alpha} \propto \tilde{H}b^{-0.5}$. Toutefois si la perturbation de viscosité n'est pas prise en considération $\tilde{R}e_{CE} \propto \tilde{H}b$.

Les différents lois de mise à l'échelle décrits dans le chapitre 4 aux paragraphes 3 et 4 respectivement, sont exprimées avec Hb et Re lui-même fonction de la viscosité généralisée $\hat{\mu}_{gen}$ conduite de la forme adimensionnelle des équations de la quantité de mouvement. Cependant, le mode le moins stable de l'écoulement de base et la perturbation optimale suggère que la viscosité paroi le choix le plus approprié pour l'échelle de viscosité tant disque, dans le cas d'une perturbation axisymétrique la viscosité tangente sera la plus appropriée.

Les résultats obtenus en terme de Re peuvent être relatés en terme de Reynolds paroi Re_W en utilisant la relation suivante $Re_W = Re(1 - r_0)^n [n/(n + 1)]^{n-1}$. L'utilisation de Re_W plutôt que Re ne change pas globalement la conclusion faite sur l'analyse présentée ci-dessus. Néanmoins, la comparaison des écoulements à contrainte seuil et à faible cisaillement entre eux nécessite d'indiquer l'échelle de viscosité adoptée.

L'étude expérimentale de la transition à la turbulence dans une conduite pour un écoulement à contrainte seuil à faible cisaillement reste un domaine d'étude ouvert depuis les travaux entamés par Phexino [45], A.Esmael [49] et Guzel [47]. Les travaux de mesure par LDA confirment l'existence de la dissymétrie et caractérisent le régime non linéaire asymétrique. La déviation du profil de vitesse le long de la conduite augmente et aussi avec le nombre de Reynolds cette augmentation n'est pas indéfinie. L'observation PIV révèle elle aussi l'existence d'une fluctuation de la dissymétrie dans le plan azimutal et montre un temps de séjour plus important dans un côté privilégié.

L'étude fréquentielle de la perturbation de pression et de débit nous montre qu'il y a une oscillation des fluctuations de pression au-dessous de $f = 10 \text{ Hz}$ qui décroît et suit une loi puissance αf^m où la valeur de m est comprise [2.65 - 4.2] ces résultats sont en bonne concordance avec ceux obtenus par A.Esmael [49] et Robert Poole [65].

Ce travail introduit juste une contribution modeste dans une construction compréhensive d'idées pour identifier les possibles chemins de transition a la turbulence. Il peut être poursuivi dans deux directions. Le premier, également basé sur des équations de stabilité linéaire, part du fait que l'écoulement de base autour duquel la linéarisation est effectuée est juste une idéalisation, alors qu'en réalité de petits défauts se produisent inévitablement.

Cette approche proposée par Bottaro et al. [17] a montré un certain succès dans la capture des caractéristiques de la transition de l'écoulement dans une conduite (Gavarinni et al. [73], Ben-Dov & Cohen [42], [41]). Il a été appliqué pour la première fois a l'écoulement de Bingham par Nouar et al. [43], où une mise à l'échelle de lois pour la transition a été proposée. Il est intéressant d'appliquer cette approche pour le cas de l'écoulement a contrainte seuil a faible cisaillement et chercher si un défaut minimum du profil de vitesse le rend instable et engendre une dissymetrie.

La deuxième direction consiste à déterminer une perturbation optimale faiblement non linéaire. Cette approche, proposée récemment par Pralits et al. [44] permet d'identifier les états initiaux qui relaminarise de ceux qui accroît sans limite.

ANNEXE 1

Suivant r :

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} + W_B \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial r} \tau'_{rr} + \frac{1}{r} (\tau'_{rr} - \tau'_{\theta\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau'_{r\theta}) + \frac{\partial}{\partial z} \tau'_{rz} \right]$$

Prenons maintenant le traitement de chaque terme apart :

$$W_B \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = W_B iku$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \tau'_{rr} = \frac{\partial}{\partial r} \left(2\mu_B \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 2\mu_B D^2 u + 2 \frac{d\mu_B}{dr} Du \quad \text{avec } D = \frac{\partial}{\partial r} \text{ et } \mu_B = f(r)$$

$$\tau'_{\theta\theta} = 2\mu_B \left[\frac{imv}{r} + \frac{u}{r} \right] \quad \text{et} \quad \tau'_{rr} = 2\mu_B Du$$

$$\frac{1}{r} (\tau'_{rr} - \tau'_{\theta\theta}) = \frac{1}{r} 2\mu_B Du - \frac{1}{r} 2\mu_B \left[\frac{imv}{r} + \frac{u}{r} \right]$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau'_{r\theta}) = \mu_B \left[\frac{imDv}{r} - \frac{imv}{r^2} + \frac{i^2 m^2 u}{r^2} \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \tau'_{rz} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_B \left[\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right] + (\mu_t - \mu_B) \left[\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right] \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial z} (\mu_B [Dw + i\alpha u] + (\mu_t - \mu_B) [Dw + i\alpha u])$$

$$= \mu_B [i\alpha Dw + i^2 \alpha^2 u] + (\mu_t - \mu_B) [i\alpha Dw + i^2 \alpha^2 u]$$

On finalité on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = & -\frac{\partial p}{\partial r} + 2\mu_B D^2 u + 2 \frac{d\mu_B}{dr} Du + \frac{1}{r} 2\mu_B Du - \frac{1}{r} 2\mu_B \left[\frac{imv}{r} + \frac{u}{r} \right] \\ & + \mu_B \left[\frac{imDv}{r} - \frac{imv}{r^2} + \frac{i^2 m^2 u}{r^2} \right] \end{aligned}$$

$$+ \mu_B [i\alpha Dw + i^2 \alpha^2 u] + (\mu_t - \mu_B) [i\alpha Dw + i^2 \alpha^2 u] - W_B i\alpha u \quad (1)$$

En regroupant les termes entre eux on auras :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -DP + \frac{1}{Re} \underbrace{\mu_B \left[D^2 u + \frac{1}{r} Du - \left(\frac{m^2 + 1}{r^2} + \alpha^2 \right) u - \frac{2imv}{r^2} \right]}_{\text{termes newtonien}} - W_B i\alpha u$$

$$+ \frac{1}{Re} \underbrace{\mu_B \left[D^2 u + \frac{1}{r} Du + i\alpha Dw - \frac{imv}{r^2} + \frac{imDv}{r} - \frac{u}{r^2} \right]}_{\text{dévée équation de continuité}} \quad (2)$$

$$+ \frac{1}{Re} \underbrace{\left(2 \frac{d\mu_B}{dr} Du + (\mu_t - \mu_B) [i\alpha Dw + i^2 \alpha^2 u] \right)}_{\text{temes non-newtonien}}$$

Suivant θ :

On a :

$$\left[\frac{\partial v}{\partial t} + W_B \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{r \partial \theta} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial r} \tau'_{r\theta} + \frac{2}{r} \tau'_{r\theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau'_{\theta\theta}) + \frac{\partial}{\partial z} \tau'_{\theta z} \right]$$

Avec :

$$W_B \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = W_B i \alpha v$$

$$\frac{2}{r} \tau'_{r\theta} = 2\mu_B \left[\frac{Dv}{r} - \frac{v}{r^2} + \frac{imu}{r^2} \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \tau'_{r\theta} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu_B \left[\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu_B \left[Dv - \frac{v}{r} + \frac{imu}{r} \right] \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \tau'_{r\theta} = \frac{d}{dr} \mu_B \left[Dv - \frac{v}{r} + \frac{imu}{r} \right] + \mu_B \left[D^2 v - \frac{Dv}{r} + \frac{v}{r^2} + \frac{imDu}{r} - \frac{imu}{r^2} \right]$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau'_{\theta\theta}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(2\mu_B \left[\frac{imv}{r} + \frac{u}{r} \right] \right) = 2\mu_B \left[\frac{i^2 m^2 v}{r^2} + \frac{imu}{r^2} \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \tau'_{\theta z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_B \left[\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} \right] \right) = \mu_B \left[\frac{i^2 m \alpha w}{r} + i^2 \alpha^2 v \right]$$

D'où :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{imP}{r} + \left(\underbrace{\frac{1}{Re} \mu_B \left[D^2 v + \frac{1}{r} Dv - \left(\frac{m^2+1}{r^2} + \alpha^2 \right) v + \frac{2imu}{r^2} \right]}_{\text{termes newtonien}} - W_B i \alpha v \right) + \underbrace{\frac{im}{r} \frac{1}{Re} \mu_B \left(Du + \frac{u}{r} + \frac{imv}{r} + i \alpha w \right)}_{\text{équation de continuité}} + \underbrace{\frac{1}{Re} \frac{d\mu_B}{dr} \left[Dv - \frac{v}{r} + \frac{imu}{r} \right]}_{\text{non-newtonien}} \quad (3)$$

Finalement :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{imP}{r} + \left(\frac{1}{Re} \mu_B \left[D^2 v + \frac{1}{r} Dv - \left(\frac{m^2+1}{r^2} + \alpha^2 \right) v + \frac{2imu}{r^2} \right] - W_B i \alpha v \right) + \frac{1}{Re} \frac{d\mu_B}{dr} \left[Dv - \frac{v}{r} + \frac{imu}{r} \right] \quad (4)$$

Suivant Z :

Ona :

$$\left[\frac{\partial w}{\partial t} + W_B \cdot \frac{\partial w}{\partial z} + u \cdot \frac{\partial W_B}{\partial r} \right] = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial r} \tau'_{rz} + \frac{1}{r} \tau'_{rz} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau'_{\theta z}) + \frac{\partial}{\partial z} \tau'_{zz} \right]$$

Avec ;

$$W_B \cdot \frac{\partial w}{\partial z} + u \cdot \frac{\partial W_B}{\partial r} = W_B i\alpha w + u D W_B$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \tau'_{rz} = \frac{\partial}{\partial r} (\mu_B [Dw + i\alpha u] + (\mu_t - \mu_B) [Dw + i\alpha u])$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \tau'_{rz} &= \frac{d\mu_B}{dr} [Dw + i\alpha u] + \mu_B [D^2 w + i\alpha Du] + \frac{d(\mu_t - \mu_B)}{dr} [Dw + i\alpha u] \\ &\quad + (\mu_t - \mu_B) [D^2 w + i\alpha Du] \end{aligned}$$

$$\frac{1}{r} \tau'_{rz} = \frac{1}{r} (\mu_B [Dw + i\alpha u] + (\mu_t - \mu_B) [Dw + i\alpha u])$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau'_{\theta z}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\mu_B \left[\frac{1}{r} i m w + i\alpha v \right]) = \frac{1}{r} \mu_B \left[\frac{1}{r} i^2 m^2 w + i^2 m \alpha v \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \tau'_{zz} = \frac{\partial}{\partial z} (2\mu_B \frac{\partial w}{\partial z}) = 2\mu_B i^2 \alpha^2 w$$

D'où :

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -i\alpha P + \left(\begin{aligned} &\underbrace{\frac{1}{Re} \mu_B \left[D^2 w + \frac{1}{r} D w - \left(\frac{m^2}{r^2} + \alpha^2 \right) w \right] - i\alpha W_B w - u D W_B}_{\text{termes newtonien}} \\ &+ i\alpha \underbrace{\frac{1}{Re} \mu_B \left(D u + \frac{u}{r} + \frac{i m v}{r} + i\alpha w \right)}_{\text{équation de continuité}} + \underbrace{\frac{1}{Re} \left[\frac{d\mu_B}{dr} + \frac{d(\mu_t - \mu_B)}{dr} \right] [Dw + i\alpha u]}_{\text{non-newtonien}} \\ &+ \underbrace{\frac{1}{Re} (\mu_t - \mu_B) \left(\frac{1}{r} [Dw + i\alpha u] + [D^2 w + i\alpha Du] \right)}_{\text{non-newtonien}} \end{aligned} \right) \quad (5)$$

Finalement on a ;

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -i\alpha P + \left(\begin{aligned} &\underbrace{\frac{1}{Re} \mu_B \left[D^2 w + \frac{1}{r} D w - \left(\frac{m^2}{r^2} + \alpha^2 \right) w \right] - i\alpha W_B w - u D W_B}_{\text{termes newtonien}} \\ &+ \underbrace{\frac{1}{Re} \left[\frac{d\mu_B}{dr} + \frac{d(\mu_t - \mu_B)}{dr} \right] [Dw + i\alpha u]}_{\text{non-newtonien}} \\ &+ \underbrace{\frac{1}{Re} (\mu_t - \mu_B) \left(\frac{1}{r} [Dw + i\alpha u] + [D^2 w + i\alpha Du] \right)}_{\text{non-newtonien}} \end{aligned} \right)$$

ANNEXE 2

$$\mathcal{L}_{uv}(u_N, v_N)^T |_{x=x_j} = C \mathcal{M}_{uv}(u_N, v_N)^T |_{x=x_j} \quad j = 1, \dots, N-1. \quad (1)$$

avec les conditions aux limites suivant

$$u_N(-1) = \tilde{D}u_N(-1) = v_N(-1) = 0, \quad (2)$$

$$u_N(+1) = v_N(+1) = 0. \quad (3)$$

En utilisant l'approximation (3-35) on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \mathcal{L}_{uv} T_n(x_j) (a_n, b_n)^T = \\ C \sum_{n=0}^N \mathcal{M}_{uv} T_n(x_j) (a_n, b_n)^T \quad \text{pour } 1 \leq j \leq (N-1) \end{aligned} \quad (4)$$

avec les conditions aux limites

$$\sum_{n=0}^N a_n T_n(-1) = 0; \quad \sum_{n=0}^N b_n T_n(-1) = 0; \quad \sum_{n=0}^N a_n D T_n(-1) = 0 \quad (5)$$

Et

$$\sum_{n=0}^N a_n T_n(+1) = 0; \quad \sum_{n=0}^N b_n T_n(+1) = 0; \quad \sum_{n=0}^N a_n D T_n(+1) = 0 \quad (6)$$

ANNEXE 3 FORMULATION – UV

1. Equation de continuité

$$w = \frac{i * u}{\alpha * r} - \frac{\beta * v}{\alpha * r} + \frac{i * Du}{\alpha}$$

2. Termes de viscosité suivant w

$$\Delta w = D^2w + (1/r) * Dw - (\beta^2/r^2) * w - \alpha^2 * w$$

$$\begin{aligned} \Delta w = & \frac{i * u}{\alpha r^3} - \frac{i * \beta^2 * u}{\alpha r^3} - \frac{i * \alpha * u}{r} - \frac{\beta * v}{\alpha * r^3} + \frac{\beta^3 * v}{\alpha * r^3} \\ & + \frac{\alpha * \beta * v}{r} - i * \alpha * Du - \frac{i * Du}{\alpha * r^2} - \frac{i * \beta^2 * Du}{\alpha * r^2} \\ & + \frac{\beta * Dv}{\alpha * r^2} + \frac{2 * i * D^2u}{\alpha * r} - \frac{\beta * D^2v}{\alpha * r} + \frac{i * D^3u}{\alpha} \end{aligned}$$

3. Terme de pression Equation W

$$P = 1/(I * \alpha) * \Delta w$$

$$\begin{aligned} P = & \frac{u}{\alpha^2 * r^3} - \frac{\beta^2 * u}{\alpha^2 * r^3} - \frac{u}{r} + \frac{i * \beta * v}{\alpha^2 * r^3} - \frac{i * \beta^3 * v}{\alpha^2 * r^3} - \frac{i * \beta * v}{r} - Du \\ & - \frac{Du}{\alpha^2 * r^2} - \frac{\beta^2 * Du}{\alpha^2 * r^2} - \frac{i * \beta * Dv}{\alpha^2 * r^2} + \frac{2 * D^2u}{\alpha^2 * r} \\ & + \frac{i * \beta * D^2v}{\alpha^2 * r} + \frac{D^3u}{\alpha^2} \end{aligned}$$

4 Termes en mub qui viennent du -DP

$$\begin{aligned} -DP = & \frac{3 * u}{\alpha^2 * r^4} - \frac{3 * \beta^2 * u}{\alpha^2 * r^4} - \frac{u}{r^2} + \frac{3 * i * \beta * v}{\alpha^2 * r^4} - \frac{3 * i * \beta^3 * v}{\alpha^2 * r^4} \\ & - \frac{i * \beta * v}{r^2} - \frac{3 * Du}{\alpha^2 * r^3} - \frac{\beta^2 * Du}{\alpha^2 * r^3} + \frac{Du}{r} - \frac{3 * i * \beta * Dv}{\alpha^2 * r^3} \\ & + \frac{i * \beta^3 * Dv}{\alpha^2 * r^3} + \frac{i * \beta * Dv}{r} + D^2u + \frac{3 * D^2u}{\alpha^2 * r^2} \\ & + \frac{\beta^2 * D^2u}{\alpha^2 * r^2} + \frac{2 * i * \beta * D^2v}{\alpha^2 * r^2} - \frac{2 * D^3u}{\alpha^2 * r} - \frac{i * \beta * D^3v}{\alpha^2 * r} \\ & - \frac{D^4u}{\alpha^2} \end{aligned}$$

4. Termes en mub dans l'équation suivant u

$$\text{TMubU} = -DP + D2u + (1/r) * Du - (\text{beta}^2/r^2) * u - \text{alpha}^2 * u - u/r^2$$

Termes_Mub_Equation_U

$$\begin{aligned} &= -\text{alpha}^2 * u + \frac{3 * u}{\text{alpha}^2 r^4} - \frac{3 * \text{beta}^2 * u}{\text{alpha}^2 r^4} - \frac{2 * u}{r^2} - \frac{\text{beta}^2 * u}{r^2} \\ &+ \frac{3 * i * \text{beta} * v}{\text{alpha}^2 r^4} - \frac{3 * i * \text{beta}^3 * v}{\text{alpha}^2 r^4} - \frac{3 * i * \text{beta} * v}{r^2} - \frac{3 * Du}{\text{alpha}^2 r^3} \\ &- \frac{\text{beta}^2 * Du}{\text{alpha}^2 r^3} + \frac{2 * Du}{r} - \frac{3 * i * \text{beta} * Dv}{\text{alpha}^2 r^3} + \frac{i * \text{beta}^3 * Dv}{\text{alpha}^2 r^3} \\ &+ \frac{i * \text{beta} * Dv}{r} + 2 * D2u + \frac{3 * D2u}{\text{alpha}^2 r^2} + \frac{\text{beta}^2 * D2u}{\text{alpha}^2 r^2} \\ &+ \frac{2 * i * \text{beta} * D2v}{\text{alpha}^2 r^2} - \frac{2 * D3u}{\text{alpha}^2 r} - \frac{i * \text{beta} * D3v}{\text{alpha}^2 r} - \frac{D4u}{\text{alpha}^2} \end{aligned}$$

5. Termes en mub dans l'équation suivant u, multiplié par(-alpha^2)

$$\begin{aligned} \text{Termes_Mub_Equation_U} &= \text{alpha}^4 * u - \frac{3 * u}{r^4} + \frac{3 * \text{beta}^2 * u}{r^4} + \frac{2 * \text{alpha}^2 * u}{r^2} \\ &+ \frac{\text{alpha}^2 * \text{beta}^2 * u}{r^2} - \frac{3 * i * \text{beta} * v}{r^4} + \frac{3 * i * \text{beta}^3 * v}{r^4} + \frac{i * \text{alpha}^2 * \text{beta} * v}{r^2} \\ &+ \frac{3 * Du}{r^3} + \frac{\text{beta}^2 * Du}{r^3} - \frac{2 * \text{alpha}^2 * Du}{r} + \frac{3 * i * \text{beta} * Dv}{r^3} - \frac{i * \text{beta}^3 * Dv}{r^3} \\ &- \frac{i * \text{alpha}^2 * \text{beta} * Dv}{r} - 2 * \text{alpha}^2 * D2u - \frac{3 * D2u}{r^2} - \frac{\text{beta}^2 * D2u}{r^2} \\ &- \frac{2 * i * \text{beta} * D2v}{r^2} + \frac{2 * D3u}{r} + \frac{i * \text{beta} * D3v}{r} + D4u \end{aligned}$$

ANNEXE 4 FORMULATION U W

1. Equation de continuite

$$v = \frac{i * u}{m} - \frac{\alpha * r * w}{m} + \frac{i * r * Du}{m}$$

2. Termes mub dans l'équation suivant theta

Termes_{MubTheta}

$$= D2v + (1/r) * Dv - (m^2/r^2) * v - \alpha^2 * v + (2 * I * m/r^2) * u - v/r^2$$

Termes_Mub_Theta

$$= -\frac{i \alpha^2 * u}{m} - \frac{i * u}{mr^2} + \frac{i * m * u}{r^2} + \frac{\alpha * m * w}{r} + \frac{\alpha^3 * r * w}{m} + \frac{i * Du}{mr} - \frac{i * m * Du}{r} - \frac{i * \alpha^2 * r * Du}{m} - \frac{3 * \alpha * Dw}{m} + \frac{4 * i * D2u}{m} - \frac{\alpha * r * D2w}{m} + \frac{i * r * D3u}{m}$$

$$DP = -\frac{\alpha^2 u}{m^2} - \frac{u}{r^2} + \frac{u}{m^2 r^2} - \frac{2 i \alpha^3 r w}{m^2} + \frac{Du}{r} - \frac{Du}{m^2 r} - \frac{3 \alpha^2 r Du}{m^2} - i \alpha Dw + \frac{3 i \alpha Dw}{m^2} - \frac{i \alpha^3 r^2 Dw}{m^2} - D2u + \frac{5 D2u}{m^2} - \frac{\alpha^2 r^2 D2u}{m^2} + \frac{5 i \alpha r D2w}{m^2} + \frac{6 r D3u}{m^2} + \frac{i \alpha r^2 D3w}{m^2} + \frac{r^2 D4u}{m^2}$$

Termes en DMub

$$DMUB * \left[\frac{u}{r} - \frac{u}{m^2 r} - \frac{\alpha^2 r u}{m^2} - i \alpha w - \frac{i \alpha^3 r^2 w}{m^2} - Du + \frac{Du}{m^2} - \frac{\alpha^2 r^2 Du}{m^2} + \frac{3 i \alpha r Dw}{m^2} + \frac{4 r D2u}{m^2} + \frac{i \alpha r^2 D2w}{m^2} + \frac{r^2 D3u}{m^2} \right]$$

ANNEXE 5
Exemple de Données du test Rhéomètre
31/03/2017

TA Instruments					
carb300317-0002f					
31/03/2017 12:37					
Sample name	carbo300317				
Sample notes					
Experiment notes	vendredi 31 mars echentillon preleve le 30 mars 2017				
Operator					
Sample density	1,000 g/cm ³				
User Variable	0				
Results file name	carb300317				
Run number	2				
Results directory	D:\Caroline				
Experiment was run on	31/03/2017 12:37				
Procedure name	RD				
Procedure notes					
Step name	Conditioning Step				
Step notes					
Perform step	No				
Initial temperature	20,2 °C				
Wait for correct temperature	Yes				
Do set temperature	Yes				
Wait for normal force	No				
Perform pre-shear	Yes				
Pre-shear variable	5,000 1/s				
Pre-shear duration	0:01:00 hh:mm:ss				
Motor mode	auto				
Perform equilibration	Yes				
Equilibration duration	0:01:00 hh:mm:ss				
Wait for zero velocity	No				
Control normal force	Uses current instrument settings				
Purge gas only	No				
Step name	Steady state flow step				
Step notes					
Perform step	Yes				

Ramp type	Steady state flow				
Start controlled variable	shear rate 2500 1/s				
End controlled variable	shear rate 1,000 1/s				
Ramp mode	log				
Points per decade	5				
Temperature	19,5 °C				
Wait for temperature	Yes				
Sample period	0:00:30 hh:mm:ss				
Percentage tolerance	2,0				
Consecutive within tolerance	3				
Maximum point time	0:03:00 hh:mm:ss				
Motor mode	auto				
Integer rotation averaging	No				
Terminate on equilibrium	torque				
Percentage tolerance	3,0				
Consecutive within tolerance	2				
Step name	Post-Experiment Step				
Step notes					
Perform step	No				
Set temperature system idle	No				
Geometry name	60mm 1036 steel cone				
Geometry notes	Standard steel cone - default AR measurement geometry				
Geometry material	Steel				
Solvent trap	Yes				
Angle	1:00:36 deg:min:sec				
Diameter	60,0 mm				
Truncation gap	28,00 micro m				
Gap offset	0 micro m				
Geometry inertia	7,085 micro N.m.s ²				
Geometry compliance	0 rad/N.m				
Gap temperature compensation	0 micro m/°C				
Gap temperature compensation enabled	No				
Shear rate factor	56,72				
Shear stress factor	17680 1/m ³				
Measurement system factor	311,7 1/m ³				
Fluid density factor	1,794E-10 m ⁵				
Normal force factor	707,4 1/m ²				
Backoff distance	45000 micro m				
Approximate sample volume	1,00 ml				
Gap zero mode	Normal force - 5,000 N				

Sample compression	none				
Compression distance	1500,0 micro m				
Compression velocity	500,0 micro m/s				
Fine velocity	3000,0 micro m/s				
Coarse velocity	3000,0 micro m/s				
Other velocity	3000,0 micro m/s				
Current temperature system	Peltier plate				
Temperature control	Enabled				
Purge gas only	No				
Temperature calibration	Peltier plate - 0 micro m/°C				
	Torsion oven - plate - 0 micro m/°C				
	Torsion oven - solid sample - 0 micro m/°C				
	Peltier concentric cylinders - 0 micro m/°C				
	None - 0 micro m/°C				
	Stress relaxation - 0 micro m/°C				
	Current temperature system - 0 micro m/°C				
Cooling water temperature	0 °C				
Cooling water range	0 °C				
Bearing friction correction	Yes				
Bearing friction	0,946 micro N.m/(rad/s)				
Bearing offset	0 micro N.m				
Temperature system span and offset	Peltier plate - span 1,0000 , offset 0 °C				
	Torsion oven - plate - span 1,0000 , offset 0 °C				
	Torsion oven - solid sample - span 1,0000 , offset 0 °C				
	Peltier concentric cylinders - span 1,0000 , offset 0 °C				
	None - span 1,0000 , offset 0 °C				
	Stress relaxation - span 1,0000 , offset 0 °C				
	Current temperature system - span 1,0000 , offset 0 °C				
Bearing mapping type	standard				
Number of mapping iterations	1				
Instrument type (MType)	AR2000				
Firmware version	7.20 03/10/06				
Configuration version (CnfVer)	301				
Parameter version (PrmVer)	301				
PCB Number	*NOT_SET*				

Comms port	COM1				
Baud rate	9600				
Software version	V5.4.12				
Windows version	Windows 2000 5.0 (Service Pack 4)				
Instrument inertia	16,00 micro N.m.s ²				
Auto increment run number	Yes				
Prompt for file name at start of run	Yes				
Auto save results file	Yes				
Results file storage	Consecutive steps of same type to 1 file				
Temperature tolerance	0,2 °C				
Temperature duration	0:00:10 hh:mm:ss				
Wait for temperature even if OK	Yes				
Gap tolerance	4 micro m				
Gap duration	0:00:02 hh:mm:ss				
Override wait for gap	No				
Velocity tolerance	0,1000 rad/s				
Zero speed after pre-shear	Leave as is				
Zero normal force before run	No				
Zero timer before run	Before pre-shear				
Non-equilibrium minimum velocity	3,000E-4 rad/s				
Zero strain at the start of each flow step	Yes				
Inertia correction	No				
Collect negative shear rate data if stress is positive	Yes				
Collect all points	No				
Display flow point graph during run	Yes				
Store flow point graph with results	Yes				
Store images to the results for flow steps	No				
Creep zero displacement	Yes				
Store images to the results for creep steps	No				
Standard creep image store frequency	10 s				
Repeated creep image store frequency in repeats	10				
Display oscillation waveform graph during run	Yes				
Store oscillation waveform graph with results	Yes				
Display strain control tries during run	Yes				
Store strain control tries with results	Yes				
Store images to the results for oscillation steps	No				

Stress relaxation zero displacement	Yes				
Store images to the results for stress relaxation steps	No				
Flow torque limit	10,00 micro N.m				
Flow velocity limit	1,000E-3 rad/s				
Oscillation torque limit	5,00 micro N.m				
Oscillation displacement limit	1,00E-5 rad				
Oscillation raw phase limit	170,0 degrees				
Oscillation minimum normal force limit	0,1000 N				
Oscillation maximum normal force limit	50,00 N				
Flow velocity tolerance	5,00 %				
Oscillation torque tolerance	1,00 %				
Oscillation displacement tolerance	5,00 %				
Oscillation velocity tolerance	5,00 %				
Temperature tolerance	1,0 °C				
Steady state flow step					
shear stress	shear rate	viscosity	time	temperature	normal stress
Pa	1/s	Pa.s	s	°C	Pa
122,8	2500	0,04912	121,08	19,5	-179,2
99,69	1577	0,06320	246,27	19,5	-44,45
81,06	995,3	0,08144	372,16	19,5	-2,142
66,04	628,0	0,1052	497,88	19,5	5,341
54,02	396,2	0,1363	623,00	19,5	1,019
44,42	250,0	0,1777	748,19	19,5	-6,824
36,74	157,7	0,2329	874,25	19,5	-14,54
30,57	99,53	0,3071	999,88	19,5	-22,34
25,60	62,80	0,4077	1124,9	19,5	-30,17
21,54	39,62	0,5437	1250,1	19,5	-36,82
18,23	25,00	0,7290	1375,1	19,5	-42,39
15,49	15,77	0,9820	1501,1	19,5	-48,67
13,23	9,953	1,329	1626,0	19,5	-54,01
11,35	6,280	1,808	1751,0	19,5	-56,71
9,765	3,962	2,465	1875,9	19,5	-70,17
8,427	2,500	3,371	2001,0	19,5	-80,16
7,279	1,577	4,614	2126,1	19,5	-94,46
6,288	1,000	6,288	2251,2	19,5	-102,1

Bibliographies

- [1] **S. Grossmann**. The onset of shear flow turbulence. *Rev. Mod. Phys.*, 72:603–618, 2000.
- [2] **W.M.F. Orr**. The stability or instability of the steady motions of a perfect liquid and of a viscous liquid. part i: A perfect liquid. *Proc. R. Irish. Acad. A*, 27:9–68, 21907.
- [3] **F. Waleffe**. Hydrodynamic stability and turbulence: Beyond transients to a self-sustaining process. *Stud. Appl. Math.*, 95:319–343, 1995.
- [4] **T. Ellingsen and E. Palm**. Stability of linear flow. *Phys. Fluids. A*, 18:487–488, 1975.
- [5] **M. T. Landhall**. A note on an algebraic instability of inviscid parallel shear flows. *J. Fluid. Mech.*, 98:243–251, 1980.
- [6] **K.M. Buttler and B. Farrell**. Three optimal perturbations in viscous shear flow. *Phys. Fluids. A*, 4:1637–1650, 1992.
- [7] **B. Farrell and P.J. Ioannoul**. Optimal excitation of three-dimensional perturbations in viscous constant shear flows. *Phys. Fluids. A*, 5(6):1390–1400, 1993.
- [8] **D. Henningson**. Comment on - nonlinear normality versus nonnormal linearity. *Phys. Fluids*, 8:2257–2260, 1996.
- [9] **P. J. Schmid and D. S. Henningson**. *Stability and transition in shear flows*. Springer - Verlag, New York, 2001. [10] H. Hristova, S. Roch, P.J. Schmid, and L. S. Tuckerman. Transient growth in Taylor-Couette flow. 2002.
- [10] **H. Hristova, S. Roch, P.J. Schmid, and L. S. Tuckerman**. Transient growth in Taylor-Couette flow. *Phys. Fluids*, 14:3475–3482, 2002.
- [11] **A. Meseguer**. Energy transient growth in the Taylor-Couette problem. 2002. [12] M.R. Jovanovic and S. Kumar. Transient growth without inertia. 2010.
- [12] **M.R. Jovanovic and S. Kumar**. Nonmodal amplification of stochastic disturbances in strongly elastic channel flows. *J. Non-Newtonian. Fluid Mech.*, 166:755–778, 2011.
- [13] **M.R. Jovanovic and S. Kumar**. Nonmodal amplification of stochastic disturbances in strongly elastic channel flows. *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, 166:755–778, 2011.
- [14] **M. Zhang, I. Lashgari, T.A. Zaki, and L. Brandt**. Linear stability analysis of channel flow of viscoelastic Oldroyd-B and FENE-P fluids. *J. Fluid Mech.*, 737:249–279, 2013.

- [15] **R. Govindarajan and K.C. Sahu.** Instabilities in viscosity-stratified flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 46:331–353, 2014.
- [16] **V. Chikkadi, A. Sameen, and R. Govindarajan.** Preventing transition to turbulence: A viscosity stratification does not always help. *Phys. Rev. Lett.*, 95:264504, 2005.
- [17] **C. Nouar, A. Bottaro, and J.P. Brancher.** Delaying transition to turbulence in channel flow: revisiting the stability of shear-thinning fluids. *J. Fluid Mech.*, 592:177–194, 2007.
- [18] **R. Liu and Q.S. Liu.** Nonmodal stability in hagen poiseuille flow of a shear-thinning fluid. *Phys. Rev. E.*, 85:066318, 2012.
- [19] **R. Liu and Q.S. Liu.** Non-modal instability in plane couette flow of a power-law fluid. *J. Fluid Mech.*, 676:145–171, 2011.
- [20] **C. Nouar, N. Kabouya, J. Dusek, and M. Mamou.** Modal and non-modal linear stability of the plane Bingham-Poiseuille flow. *J. Fluid Mech.*, 577:211–239, 2007.
- [21] **R. Liu and Q.S. Liu.** Non-modal stability in hagen-poiseuille flow of a bingham fluid. *Phys. Fluids*, 26:014102, 2014.
- [22] **N.J. Balmforth, I. A. Frigaard, and G. Ovarlez.** Yielding to stress: Recent developments in viscoplastic fluid mechanics. *Ann. Rev. Fluid. Mech.*, 46:121–146, 2014.
- [23] **L. M. Mack,** A numerical study of the temporal eigenvalue spectrum of the Blasius boundary layer, *Journal of Fluid Mech.* 73, 497-520 (1976).
- [24] **J. E. Mott, D. D. Joseph,** Stability of parallel flow between concentric cylinders, *Physics of fluids*, 11, 2065-2073 (1968).
- [25] **B. Eckhardt, T. M. Schneider, B. Hopf and J. Westerweel,** Turbulence in pipe flow., *Annual Review of Fluid Mechanics.* 39, 447-468 (2007).
- [26] **V. M. Sadeghi and B. G. Higgins,** Stability of sliding Couette-Poiseuille flow in an annulus subject to axisymmetric and asymmetric disturbance. *Phys. Fluids A* 3, 2092-2104 (1991).
- [27] **L. Preziosi, F. Rosso,** Stability of a viscous liquid between sliding pipes, *Physics of fluids/A*, 2, 1158-1162 (1990).
- [28] **Ph. Gittler,** Stability of axial Poiseuille-Couette flow between Concentric cylinders, *Acta Mechanica*, 101, 1-13 (1993).
- [29] **S. J. Cowley, F. T. Smith,** On the stability of Poiseuille-Couette : a bifurcation from infinity, *Journal Of Fluid Mechanics*, 156, 83-100 (1985).

- [30] **H. Vitoshkin, E. Heifetz, A. Yu. Gelfgat, and N. Harnik.** On the role of vortex stretching in energy optimal growth of three-dimensional perturbations on plane parallel shear flows. *J. Fluid Mech.*, 707:369–380, 2012.
- [31] **L.N. Trefethen, A.E. Trefethen, S. C. Reddy, and T. A. Driscoll.** Hydrodynamic stability without eigenvalues. *Science*, 261:578–583, 1993.
- [32] **S.C. Reddy, P.J. Schmid, and D.S. Henningson.** Pseudospectra of the Orr-Sommerfeld operator. *SIAM J. APPL. MATH.*, 53:15–47, 1993.
- [33] **P. J. Schmid and D. S. Henningson.** Optimal energy density growth in Hagen-Poiseuille flow. *J. Fluid Mech.*, 277:197–225, 1994.
- [34] **C. Metivier, C. Nouar, and J. P. Brancher.** Linear stability involving the Bingham model when the yield stress approaches zero. *Phys. Fluids*, 17:104106, 2005.
- [35] **A. Meseguer and L. N. Trefethen.** A spectral Petrov-Galerkin formulation for pipe flow I: Linear stability and transient growth. 2000.
- [36] **D. D. Joseph and S. Carmi.** Stability of Poiseuille flow in pipes, annuli and channels. *Quart. Appl. Math.*, 26:575–599, 1969.
- [37] **C. Nouar and I. Frigaard.** Nonlinear stability of Poiseuille flow of a bingham fluid: theoretical results and comparison with phenomenological criteria. *J. non-Newtonian Fluid Mech.*, 100:127–149, 2001.
- [38] **I. Frigaard and C. Nouar.** On three dimensional linear stability of Poiseuille flow of Bingham fluids. *Phys. Fluids*, 15(10), 2003.
- [39] **A. Bottaro, P. Corbett, and P. Luchini.** The effect of base flow variation on flow stability. *J. Fluid Mech.*, 476:293–302, 2003.
- [40] **L. M. Mack.** The initial stage of transition in cylindrical pipe flow: role of optimal base-flow distortion. *J. Fluid Mech.*, 517:131–165, 2004.
- [41] **G. BenDov and J. Cohen.** Critical Reynolds number for a natural transition to turbulence in pipe flows. *Phys. Rev. Lett.*, 98:064503, 2007.
- [42] **G. BenDov and J. Cohen.** Instability of optimal non-axisymmetric base flow deviations in pipe poiseuille flow. *J. Fluid Mech.*, 588:189–215, 2007.
- [43] **C. Nouar and A. Bottaro.** Stability of the flow of a bingham fluid in a channel: eigenvalue sensitivity, minimal defects and scaling laws of transition. *J. Fluid Mech.*, 642:349–372, 2010.
- [44] **J.O. Pralits, A. Bottaro, and S. Cherubini.** Weakly nonlinear optimal perturbations. *J. Fluid Mech.*, 785:135–151, 2015.

- [45] **J. Peixinho**, Contribution expérimentale à l'étude de la convection thermique en régime laminaire, transitoire et turbulent pour un fluide à seuil en écoulement dans une conduite, Thèse (UHP), (2004).
- [46] **A. Esmael, C. Nouar, A. Lefevre, and N. Kabouya**. Transitional flow of a non-newtonian fluid in a pipe: Experimental evidence of weak turbulence induced by shear-thinning behavior. *Phys. Fluids*, 22:101701, 2010.
- [47] **B. Guzel, T. Burghilea, I. Frigaard, and D.M. Martinez**. Observation of laminar-turbulent transition of a yield stress fluid in Hagen-Poiseuille flow. *J. Fluid Mech.*, 627:97–128, 2009.
- [48] **R. J. Poole, B. S. Ridley**, Development-length requirements for fully developed laminar pipe flow of inelastic non Newtonian liquids. *J. Fluids Eng.* 129, 1281- 1287 (2007).
- [49] **A. Esmael**, Transition vers la turbulence pour un fluide à seuil en écoulement dans une conduite cylindrique. Thèse de doctorat (2008), Ecole Doctorale EMMA Département de formation Doctorale Mécanique – Energétique LEMTA – UMR 7563 CNRS, NANCY – université de la lorraine
- [50] **M. Alain**, Le Carbopol 940 : Caractérisation physicochimique et processus de gélification, Thèse de doctorat en pharmacie, Université de Montpellier 1, Faculté de Pharmacie (1973).
- [51] **J. M. Piau**, Carbopol gels : Elastoviscoplastic and slippery glasses made of individual swollen sponges Meso- and macroscopic properties, constitutive equations and scaling laws, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 23, 1-29 (2007).
- [52] **A. M. V. Putz, T. L. Burghilea**, The solid-fluid transition in a yield stress thinning physical gel. Article soumis à *Rheol. Acta*. Juin (2007). [70] **C. W. B. Macosco**, *Rheology principles, measurements and applications*. VCH publishers (1994).
- [53] **N. Kabouya**, influence de la contrainte seuil sur la stabilité de l'écoulement de Poiseuille d'un fluide viscoplastique: Etudes modale et non modale. Thèse de doctorat (2005), Ecole Doctorale EMMA Département de formation Doctorale Mécanique – Energétique LEMTA – UMR 7563 CNRS, INPL & UHP.
- [54] **S. N. Carranza**, Transition laminaire-turbulent en conduite cylindrique pour un fluide non Newtonien. Thèse de doctorat (2012), université de lorraine école doctorale EMMA.
- [55] **J. J. S. Jerome**, transient growth in Rayleigh Bénard poiseuille/ couette flow. These de doctorat (2011) école polytechnique laboratoire d'hydrodynamique.
- [56] **G. B. Froishteter, G. V. Vinogradov**, The laminar flow of plastic disperse systems in circular tubes, *Rheol. Acta*, 19, 239-250 (1980).

- [57] **F. Durst, S. Ray, B. Unsal, O. A. Bayoumi**, The development lengths of laminar pipe and channel flows. *J. Fluids Eng.* 127, 1154-1160 (2005).
- [58] **H.Barucq, J.Diaz , S.Tordeux**, Analyse mathématique des phénomènes de propagation d'ondes. Cours. LMA, UMR CNRS 5142, Université de Pau et Pays de l'Adour, (2016).
- [59] **Dantec Dynamics A/S**, LDA Manual Tonsbakken 16-18 DK-2740 Skovlunde Denmark france@dantecdynamics.com, www.dantecdynamics.com
- [60] **P. Coussot, J. S ; Raynaud, F. Bertrand, P. Moucheront, J. P. Guilbaud, H. T. Huynh, S. Jarny, D. Lesueur**, Coexistence of liquid and solid phases in flowing soft glassy materials, *phy. Rev. Lett.*, 88, 218301 (2002).
- [61] **P. C. F. Møller, S ; Rodts, M. A. J. Michels, D. Bonn**, Shear banding and yield stress in soft glassy materials, *Phys. Rev. E* 77, 041507 (2008).
- [62] **F. Varnik, L. Bocquet, J. L. Barrat, L. Berthier**, Shear localization in a model glass, *Phys. Rev. Lett.* 90, 095702 (2003).
- [63] **A. B. Metzner, J. C. Reed**, Flow of non-Newtonian fluids-Correlation of laminar, transition and turbulent-flow regions, *A.I.Ch.E.J.* 1, 434-440 (1955).
- [64] **Guillermo Aguilar, Kazimir Gasljevic, Eric F.M**, Asymptotes of Maximum friction and Heat transfert reductions for drag –reduction surfactant solutions, *journal heat and mass transfert* 44 (2001) 2835-2843
- [65] **Chaofan Wen, Robert.J.Poole, Ashley P.Willis, David J.C.Denis**, Experimental evidence of symmetry-Breaking Supercritical Transition in pipe flow of shear-thinning fluids *Physical review fluids* 2.031901 © (2017).
- [66] **W. Pfenninger**. Boundary layer suction experiments with laminar ow at high Reynolds numbers in the inlet length of a tube by various suction methods. In *Boundary layer and ow control*. Pergamon - Oxford, 1961.
- [67] **A. Meseguer et L. N. Trefethen**. Linearized pipe flow to 10^7 . *Journal of Computational Physics.*, vol. 186, pages 178197, 2001. (Cité en pages 2, 14, 44, 50 et 133.).
- [68] **J. Peixinho et T. Mullin**. Decay of turbulence in pipe flow. *Phys. Rev. Lett.*, vol. 128, pages 172 -184, 2006.
- [69] **A.G. Darbyshire et T. Mullin**. Transition to turbulence in constant-mass-flux pipe flow. *J. Fluid Mech.*, vol. 289, pages 83 -114, 1995.
- [70] **B. Hof, A. Juel et T. Mullin**. Scalling of the turbulence transition threshold in a pipe. *Phys Rev. Letters*, vol. 91, pages 244-502, 2003.

- [71] **J. Peixinho et T. Mullin.** Finite-amplitude thresholds for transition in pipe ow. *Phys. Rev. Lett.*, vol. 582, 2007.
- [72] **F. Mellibovsky et A. Meseguer.** Critical threshold in pipe ow transition. *Phil. Trans. R. Soc. A*, 2008.
- [73] **M.I. Gavarini, A. Bottaro et F.T.M. Nieuwstadt.** The initial stage of transition in pipe flow : Role of optimal base ow distortions. *J. Fluid Mech.*, vol. 517, pages 131 - 165, 1984.
- [74] **S. J. Chapman.** Subcritical transition in channel flows. *J. Fluid Mech.*, vol. 35, page 451, 2002.
- [75] **I. J. Wygnanski et F.H. Champagne.** On transition in a pipe. Part 1. The origin of puffs and slugs and the flow in a turbulent slug. *J. Fluid. Mech.*, vol. 59, pages 281- 351, 1973.
- [76] **I. J. Wygnanski, M. Sokolov et D. Friedman.** On transition in a pipe. Part 2. The equilibrium puff. *J. Fluid. Mech.*, vol. 69, pages 283-304, 1975.
- [77] **Bandyopadhyay P.R** Aspects of the equilibrium puff in transitional pipe flow. *J. Fluid Mech.* **163**, 439–458, 1986.
- [78] **Robinson S.K** Coherent motions in the turbulent boundary layer. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **23**, 601–639, 199.
- [79] **A. Meseguer.** Streak breakdown instability in pipe Poiseuille flow. *Physis of Fluids.*, vol. 15, pages 12031213, 2003.
- [80] **O. Y. Zikanov.** On the instability of pipe Poiseuille flow. *Phys. Fluids*, vol. 8, pages 2923-2932, 1996.
- [81] **H. Faisst et B. Eckhardt.** Traveling waves in pipe flow. *Phys. Rev. Lett.*, vol. 91, page 224502, 2003.
- [82] **H. Wedin et R. Kerswell.** On transition in a pipe. Part 1. The origin of puffs and slugs and the flow in a turbulent slug. *J. Fluid. Mech.*, vol. 508, pages 333-371, 2004.
- [83] **B. A. Toms.** *Proc int Cong. Rheology.* North-Holland, Amsterdam, 1949.
- [84] **J. Peixinho, C. Nouar, C. Desaubry et B. Théron.** Laminar transitional and turbulent flow of yield stress fluid in a pipe. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, vol. 128, pages 172-184, 2005.
- [85] **M. P. Escudier et F. Presti.** Pipe ow of thixotropic liquid. *J. Non-Newtonain Fluid Mech.*, vol. 62, pages 221-306, 1996.
- [86] **A. A. Draad, F. T. M. Nieuwstadt,** The earth's rotation and laminar pipe flow., *J. Fluid Mech.* 361, 297-308 (1998).

[87] **M. Rudman, H. M. Blackburn, L.J.W. Graham et L. Pullum.** Turbulent pipe flow of shear-thinning fluids. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, vol. 118, pages 33-48, 2004.