

Université SAAD DAHLEB BLIDA



Faculté des sciences

Département de Mathématique

Mémoire présenté par :

Cherid youssouf

En vue d'obtenir le diplôme de Master

Domaine : Mathématique et informatique

Filière : Mathématique

Spécialité : Mathématique Appliquée

Option : Recherche Opérationnelle

Sujet :

**Application de la méthode de différences finies
à la résolution de l'équation de la conduction thermique
avec des conditions aux limites imposées**

Supervisé Par

Mr. Manseur

2009/2010

REMERCIEMENT

*Aujourd'hui, notamment suite à la clôture de mon parcours universitaire,
Je tiens à noter que cette année fût la plus marquante de toutes.
Je remercie en premier lieu **DIEU**, ensuite mes parents, mes frères, mes
sœurs et tous mes collègues.*

*J'adresse aussi mes sincères sentiments de gratitude à mon promoteur
Dr : Manseur qui a fait plus que son devoir pour hausser mon niveau
intellectuel*

Tous les membres du jury

Tous les enseignants du département de Mathématique de Blida

*Je tiens également à remercier toute personne ayant contribué de près où
de loin a la concrétisation de ce mémoire.*

*J'espère que ce mémoire servira d'exemple et de support pour les années
à venir.*

GRAND MERCI.

SOMMAIRE

Introduction générale.	1
I) Généralités sur les transferts de chaleurs.	4
1. Conduction.	4
2. Conductivité Thermique et la chaleur massique.	4
3. Définitions.	5
4. Formulation d'un problème de transfert de chaleur.	6
5. Transfert de chaleur par conduction.	11
II) Généralités sur la méthode des différences finies	15
1. Méthode des différences finies.	15
1.1. Introduction.	15
1.2. Principe.	15
1.3. Discrétisation du domaine.	15
1.4. Approximation des dérivées par des différences finies.	17
1.4.1. Dérivée première.	18
1.4.2. Dérivée seconde.	19
1.4.3. Dérivée croisées.	19
1.4.4. Dérivée non linéaire.	20
1.5. Notion de consistance, stabilité et convergence.	22
1.5.1. Introduction.	22
1.5.2. Convergence.	22
1.5.3. Consistance.	23
1.5.4. Stabilité.	23
2. Méthodes itératives de résolution des systèmes d'équations linéaires.	24
2.1. Algorithmes de Jacobi.	25
2.2. Algorithme de Gauss Seidel.	26
3. Méthode de Newton pour les Systèmes d'équations non linéaires.	26
III. Résolution numérique de l'équation de la chaleur	31
1. Conduction unidimensionnelle non stationnaire.	31
1.1. Schéma explicite.	32

1.2. Schéma implicite.	37
2. Conduction unidimensionnelle stationnaire.	43
3. Conduction bidimensionnelle non stationnaire.	47
3.1. Schéma explicite.	49
3.2. Schéma implicite.	55
4. Conduction bidimensionnelle stationnaire.	63
5. Conduction tridimensionnelle non stationnaire.	69
5.1. Schéma explicite.	71
5.2. Schéma implicite.	78
6. Conduction tridimensionnelle stationnaire.	90
IV. Organigrammes et applications numériques	101
1. Approximation numérique de la solution de l'équation de la chaleur en dimension 1 par un schéma explicite.	101
2. Approximation numérique de la solution de l'équation de la chaleur en dimension 2 par un schéma explicite.	105
3. Approximation numérique de la solution de l'équation de la chaleur en dimension 3.	109
4. Programme.	112
Conclusion générale.	116

Introduction générale

Introduction générale

Thermodynamique et transfert thermique

Nous savons ce qui se passe quand nous mettons une boisson en boîte froide dans une chambre réchauffée, et une boisson en boîte chaude dans un réfrigérateur refroidit. Ceci est accompli par le transfert *de l'énergie* à partir du milieu chaud au froid.

Le transfert d'énergie commence toujours du milieu de température le plus élevé vers le milieu de température inférieur, et quand les deux milieux atteignent la même température, le transfert d'énergie s'arrête.

La thermodynamique nous montre que l'énergie existe dans diverses formes. Dans ce travail, nous sommes principalement intéressés par la **chaleur**; qui est *la forme d'énergie, cela peut être transféré à partir d'un système à l'autre en raison de la différence de la température*. La science qui traite la détermination *des taux* d'une telle énergie est le **transfert thermique**.

Vous pouvez vous demandez pourquoi nous devons entreprendre une étude détaillée sur le transfert de la chaleur. Après tout, nous pouvons déterminer la quantité du transfert thermique pour n'importe quel système subissant tout processus en utilisant une seule analyse thermodynamique. La raison est que la thermodynamique est concernée par la quantité du transfert thermique comme le système subit un processus d'un état d'équilibre vers l'autre, et cette analyse thermodynamique ne donne aucune indication concernant le temps que le processus prendra. L'analyse thermodynamique nous démontre simplement combien de chaleur doit être transférée pour réaliser le changement de l'état afin de satisfaire la conservation du principe d'énergie.

Dans la pratique, nous sommes davantage préoccupés par le taux de transfert thermique (transfert thermique par le temps d'unité). Par exemple, nous pouvons déterminer la quantité de la chaleur transférée à partir de l'isolant des thermos en mettant un café chaud à l'intérieur du thermo pour y refroidir de 90°C à 80°C par une seule analyse thermodynamique. Mais *combien du temps* elle prendra avant que le café chaud se refroidisse à 80°C, et une analyse thermodynamique ne peut pas

répondre à cette question. Aussi bien que la variation de la température est le sujet *du transfert thermique*.

La thermodynamique traite des états d'équilibre et change un équilibre d'état à l'autre. Le transfert thermique, d'autre part, traite des systèmes de cet équilibre thermique de manque, et c'est ainsi *un phénomène* de non-équilibre.

Par conséquent, l'étude du transfert thermique ne peut pas être basée sur les principes de la thermodynamique seulement. Cependant, les lois de la thermodynamique étendent le cadre pour la science du transfert thermique. *La première loi* exige que le taux du transfert d'énergie dans un système soit égal au taux d'augmentation de l'énergie de ce système. *La deuxième loi* exige que la chaleur soit transférée dans la direction de la température décroissante. C'est comme une voiture garée sur un incliné de route qui doit aller en descendant dans la direction de l'altitude décroissante quand ses freins sont libérés. Elle est également analogue à l'entrée courante électrique dans la direction de tension décroissante.

La condition de base pour le transfert thermique est la présence *d'une différence de la température*.

Il ne peut y avoir aucun transfert thermique net entre deux médias qui sont à la même température. La différence de la température est *la force d'entraînement* pour le transfert de la chaleur, juste comme *la différence de tension* est la force d'entraînement pour l'écoulement du courant électrique, et aussi *la différence de pression* est la force d'entraînement pour le flux de fluide. Le taux du transfert de la chaleur dans une certaine direction dépend de l'importance *du gradient de la température* (la différence de la température par unité de longueur ou le taux de changement de la température) dans cette direction. Plus le gradient de la température est grand, plus le taux du transfert thermique est plus haut [1].

Domaines d'application du transfert thermique

Le transfert thermique est généralement produit dans des systèmes de technologie et d'autres aspects de la vie, et on n'a pas besoin d'aller très loin pour voir quelques domaines d'application du transfert thermique. En fait, on n'a pas besoin d'aller n'importe où, le corps humain rejette constamment la chaleur à son environnement, et le confort humain est étroitement attaché au taux de ce rejet de la chaleur. Nous

Chapitre I

Généralités sur les transferts de chaleurs

Généralités sur les transferts de chaleurs

1) Conduction

La conduction est le transfert de l'énergie à partir des particules plus énergiques à une substance moins énergique en raison des interactions entre les particules. La conduction peut avoir lieu en solides, liquides, ou gaz. Dans les gaz et les liquides, la conduction est due *aux collisions* et à *la diffusion* des molécules pendant leur mouvement aléatoire. En solides, il est dû à la combinaison *des vibrations* des molécules dans un treillis et le transport d'énergie par *libre électrons*. Une boisson en boîte froide dans une salle chaude, par exemple, se réchauffe par la suite à la température ambiante en raison du transfert thermique à partir de la salle à la boisson par le bidon d'aluminium, par la conduction [1].

2) Conductivité Thermique et la chaleur massique

On sait que les différents matériaux stockent la chaleur différemment, et on définit la chaleur spécifique de propriété C_p comme mesure de la capacité d'un matériau de conserver l'énergie thermique. Par exemple, $C_p = 4,18 \text{ kJ/kg} \cdot ^\circ\text{C}$ pour l'eau et $C_p = 0,45 \text{ kJ/kg} \cdot ^\circ\text{C}$ pour le fer à la température ambiante, qui indique que l'eau peut conserver presque 10 fois l'énergie qu'un bidon de fer par masse d'unité. De même, la conductivité k est une mesure de la capacité d'un matériau de conduire la chaleur. Par exemple : $k = 0,608 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$ pour l'eau et $k = 80,2 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$ pour le fer, qui indique que le fer conduit la chaleur plus de 100 fois plus rapidement que l'eau. Ainsi nous disons que la conduction de la chaleur dans l'eau est faible, bien que l'eau soit un excellent milieu pour conserver l'énergie thermique.

Ainsi **la conductivité thermique** d'un matériau peut être définie comme *taux de transfert thermique par une épaisseur d'unité du matériau, par unité de superficie, par unité de différence de la température* [1].

3) Définitions

3.1) Champ de température

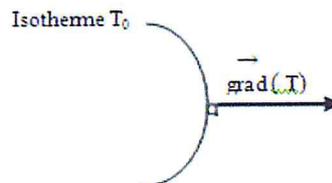
Les transferts d'énergie sont déterminés à partir de l'évolution dans l'espace et dans le temps de la température : $T=f(x,y,z,t)$. La valeur instantanée de la température en tout point de l'espace est un scalaire appelé champ de température. Nous distinguerons deux cas :

-champ de température indépendant de temps : le régime est dit permanent ou stationnaire.

-Evolution du champ de température avec le temps : le régime est dit variable ou non stationnaire [2].

3.2) Gradient de température

Si l'on réunit tous les points de l'espace qui ont la même température, on obtient une surface dite surface isotherme. La variation de température par unité de longueur est maximale le long de la normale à la surface isotherme. Cette variation est caractérisée par le gradient de température :



$$\vec{grad}(T) = \vec{n} \frac{\partial T}{\partial n} \quad (1.1)$$

Avec : \vec{n} vecteur unitaire de la normale

$\frac{\partial T}{\partial n}$ Dérivée de la température le long de la

normale [2].

3.3) Flux de chaleur

La chaleur s'écoule sous l'influence d'un gradient de température par conduction des hautes vers les basses températures. La quantité de chaleur transmise par unité de temps et par unité d'aire de la surface isotherme est appelée densité de flux de chaleur :

$$\phi = \frac{1}{S} \frac{dQ}{dt} \quad (Wm^{-2}) \quad (1.2)$$

où S est l'aire de la surface (m^2) [2].

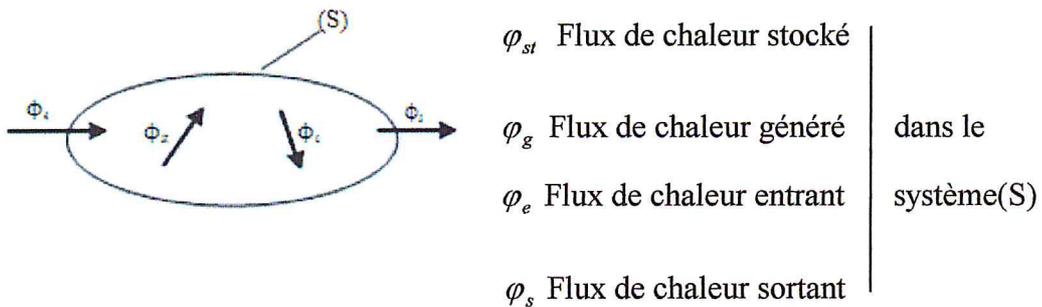
On appelle flux de chaleur la quantité de chaleur transmise sur la surface S par unité de temps :

$$\varphi = \frac{dQ}{dt} \quad (W) \quad (1.3)$$

4) Formulation d'un problème de transfert de chaleur

4.1) Bilan d'énergie

Il faut tout d'abord définir un système (S) par ses limites dans l'espace et il faut ensuite établir l'inventaire des différents flux de chaleur qui influent sur l'état du système et qui peuvent être [2]:



On applique alors le 1^{er} principe de la thermodynamique pour établir le bilan d'énergie du système (S) :

$$\varphi_e + \varphi_g = \varphi_s + \varphi_{st} \quad (W) \quad (1.4)$$

4.2) Expression des flux d'énergie

Il faut maintenant établir les expressions des différents flux d'énergie. En reportant ces expressions dans le bilan d'énergie, nous obtiendrons l'équation différentielle dont la résolution permettra de connaître l'évolution de la température en chaque point de système [2].

4.2.1) Conduction

C'est le transfert de chaleur au sein d'un milieu opaque, sans déplacement de matière, sous l'influence d'une différence de température. La propagation de la chaleur par conduction à l'intérieur d'un corps s'effectue selon deux mécanismes distincts : une transmission par les vibrations des atomes ou molécules et une transmission par les électrons libres.

La théorie de la conduction repose sur l'hypothèse de Fourier : la densité de flux est proportionnelle au gradient de température :

$$\vec{\phi} = -k \vec{\text{grad}}(T) \quad (1.5)$$

Ou sous forme algébrique :

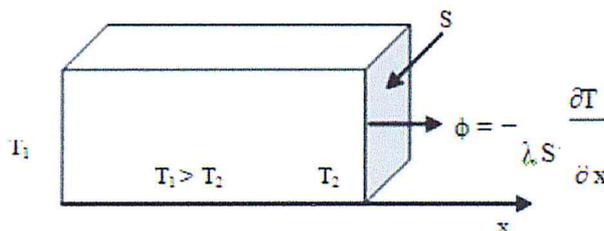
$$\phi = -kS \frac{\partial T}{\partial x} \quad (\text{W}) \quad (1.6)$$

Avec : ϕ Flux de chaleur transmis par conduction (W)

k Conductivité thermique du milieu ($\text{Wm}^{-1}\text{C}^{-1}$)

X variable d'espace dans la direction du flux (m)

S Aire de la section de passage du flux de chaleur (m^2)



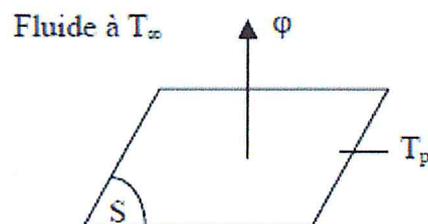
On trouvera dans le tableau ci_ après les valeurs de la conductivité thermique k de certains matériaux parmi les plus courants [2] :

Matériau	$k(Wm^{-1}C^{-1})$	Matériau	$k(Wm^{-1}C^{-1})$
Argent	419	Plâtre	0,48
Cuivre	386	Amiante	0,16
Aluminium	204	Coton	0,059
Acier doux	45	Liège	0,044-0,049
Acier inox	14,9	Laine de roche	0,038-0,041
Glace	1,88	Laine de verre	0,035-0,051
Béton	1,4	Polystyrène expansé	0,036-0,047
Bois (feuillu- résineux)	0,12-0,23	Polyuréthane (mousse)	0,030-0,045
Brique terre cuite	1,1	Polystyrène extrudé	0,027
Verre	0,78	Aire	0,026

Tableau des conductivités thermiques

4.2.2) Convection

C'est le transfert de chaleur entre un solide et un fluide, l'énergie étant transmise par déplacement du fluide. Ce mécanisme de transfert est régi par la loi de Newton [2] :



$$\phi = hS(T_p - T_\infty) \quad (W) \quad (1.7)$$

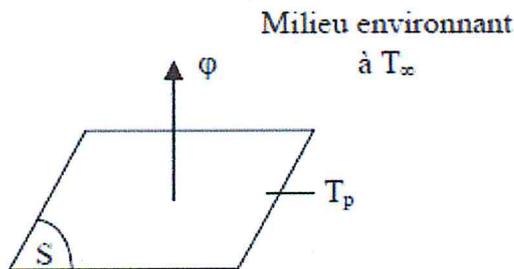
Avec : φ	Flux de chaleur transmis par convection	(W)
h	Coefficient de transfert de chaleur par convection	($Wm^{-2}C^{-1}$)
T_p	Température de surface du solide	($^{\circ}C$)
T_{∞}	Température du fluide loin de la surface du solide	($^{\circ}C$)
S	Aire de la surface de contact solide-fluide	(m^2)

Remarque : La valeur du coefficient du transfert de chaleur par convection h est en fonction de la nature du fluide, de sa température, de sa vitesse et des caractéristiques géométriques de la surface de contact solide-fluide.

4.2.3) Rayonnement

C'est un transfert d'énergie électromagnétique entre deux surfaces (même dans le vide). Dans les problèmes de conduction, on prend en compte le rayonnement entre un solide et le milieu environnant et dans ce cas nous avons la relation [2] :

$$\varphi = \sigma \varepsilon_p S (T_p^4 - T_{\infty}^4) \quad (W) \quad (1.8)$$



Avec : φ	Flux de chaleur transmis par rayonnement	(W)
σ	Constante de Stéphane	($5,67.10^{-8} Wm^{-2}K^{-4}$)
ε_p	Facteur d'émission de la surface	
T_p	Température de la surface	(K)
T_{∞}	Température du milieu environnant la surface	(K)

S Aire de la surface (m²)

4.2.4) Stockage d'énergie

Le stockage d'énergie dans un corps correspond à une augmentation de son énergie interne au cours du temps d'où (à pression constante) :

$$\varphi_{st} = \rho V c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{W}) \quad (1.9)$$

Avec : φ_{st} Flux de chaleur stocké (W)

ρ Masse volumique (Kg m⁻³)

V Volume (m³)

C Chaleur massique (J Kg⁻¹ °C⁻¹)

T Température (°C)

t Temps (s)

ρ , V et c sont supposés constants, le produit $\rho V c$ est appelé la capacitance thermique du corps [2].

4.2.5) Génération d'énergie

Elle intervient lorsqu'une autre forme d'énergie (chimique, électrique, mécanique, nucléaire) est convertie en énergie thermique. Nous pouvons l'écrire sous la forme :

$$\varphi_g = \dot{q} V \quad (\text{W}) \quad (1.10)$$

Avec : φ_g Flux d'énergie thermique générée (W)

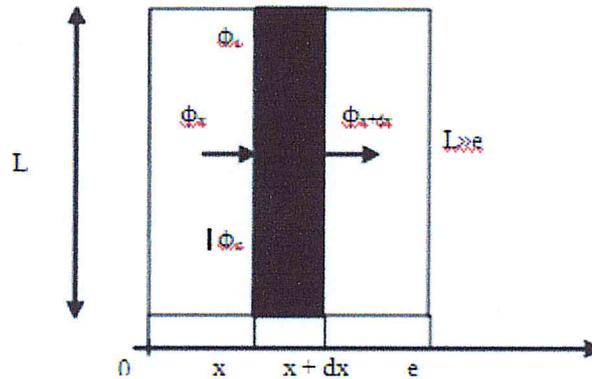
\dot{q} Densité volumique d'énergie générée (W m⁻³)

V Volume (m³)

5) TRASFERT DE CHALEUR PAR CONDUCTION

5.1) L'équation de la chaleur

Dans sa forme monodimensionnelle, elle d'écrit le transfert de chaleur unidirectionnel au travers d'un mur plan :



Considérons un système d'épaisseur dx dans la direction x et de section d'aire S normalement à la direction Ox . Le bilan d'énergie sur ce système s'écrit :

$$\varphi_x + \varphi_g = \varphi_{x+dx} + \varphi_{St}$$

$$\text{Avec : } \varphi_x = -\left(kS \frac{\partial T}{\partial x}\right)_x$$

$$\varphi_g = \dot{q} S dx$$

$$\varphi_{x+dx} = -\left(kS \frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+dx}$$

$$\varphi_{St} = \rho c S dx \frac{\partial T}{\partial t}$$

En reportant dans le bilan d'énergie et en divisant par dx nous obtenons :

$$\frac{\left(kS \frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+dx} - \left(kS \frac{\partial T}{\partial x}\right)_x}{dx} + \dot{q} S = \rho c S \frac{\partial T}{\partial t}$$

Soit :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(kS \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dot{q} S = \rho c S \frac{\partial T}{\partial t}$$

Et dans le cas tridimensionnel, nous obtenons l'équation de la chaleur dans le cas le plus général [2] :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.1)$$

Avec k la conductivité thermique (c'est une fonction de T positive et bornée).

\dot{q}

la source interne de chaleur (c'est une fonction bornée de T , x , y et z)

ρ

C'est la masse volumique (c'est un constant positif pour les solides)

c

C'est la chaleur massique (c'est un constant positif pour les solides)

Cette équation peut simplifier dans un certain nombre de cas :

- Si le milieu est isotrope : $k_x = k_y = k_z$
- S'il n'y a pas de génération d'énergie à l'intérieur du système : $\dot{q} = 0$
- Si le milieu est homogène, k n'est fonction que de T .

Les hypothèses a)+ b) +c) permettent d'écrire :

$$k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{dk}{dT} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

- Si de plus k est constant (écart modéré de température), nous obtenons

l'équation de Poisson :
$$a \nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.2)$$

Le rapport $a = \frac{k}{\rho c}$ est appelée la diffusivité thermique.

e) En régime permanent, nous obtenons l'équation de Laplace :

$$\nabla^2 T = 0 \quad (2.3)$$

5.2) Conditions aux limites spatiotemporelles

L'équation générale de la chaleur est une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre en espace et du premier ordre en temps. Elle admet en principe une infinité de solutions. Pour que le problème ait une solution unique, il est nécessaire de connaître la répartition des températures en tout point de l'espace à un temps pris pour origine et les lois de variations de T (ou de ses dérivées) sur les frontières du domaine étudié [3].

5.2.1) Condition initiale

C'est la distribution des températures à $t = 0$:

$$T(x, y, z, 0) = T_0(x, y, z)$$

5.2.2) Conditions aux limites

Nous ne signalerons que les plus fréquentes, elles traduisent le lien entre le milieu étudié et le milieu extérieur.

a) Température imposée (problème de Dirichlet) :

$T_s = f(M_s, t)$ avec M_s un point de la surface du système.

Cas particulier : surface isotherme ($T_s = \text{Cte}$).

b) Densité de flux imposée (problème de Neumann) :

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_s = f(M_s, t)$$

Cas particulier : surface adiabatique ou système isolé :

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_s = 0$$

c) Transfert linéaire (problème de Fourier) :

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_s = h(T_s - T_\infty)$$

Avec h coefficient d'échange thermique superficiel (en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$),

T_∞ température de référence du milieu extérieur.

De façon plus générale, on pourrait écrire :

$$T_s + \frac{\lambda}{h} \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_s = f(M_s, t)$$

d) Transfert à l'interface de deux solides

Si le **contact est parfait**, nous pouvons écrire :

- conservation du flux : $\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n}$

-égalité des températures : $T_1 = T_2$.

On peut linéariser cette expression dans deux cas.

1) T_s proche de T_p :

$$\varphi = h_r (T_s - T_p)$$

Avec h_r coefficient d'échange par rayonnement.

Dans le cas de **surfaces grises** :

$$h_r = 4A\sigma T_p^3$$

Avec σ constante de Stefan-Boltzmann.

2) T_p est très supérieur à T_s :

$$\varphi = \text{Cte}$$

Dans le cas de **surfaces grises** :

$$\varphi = -A\sigma T_p^4$$

Chapitre II

Généralités sur la méthode des différences
finies

Généralités sur la méthode des différences finies

1) Méthode des différences finies :

1.1) Introduction :

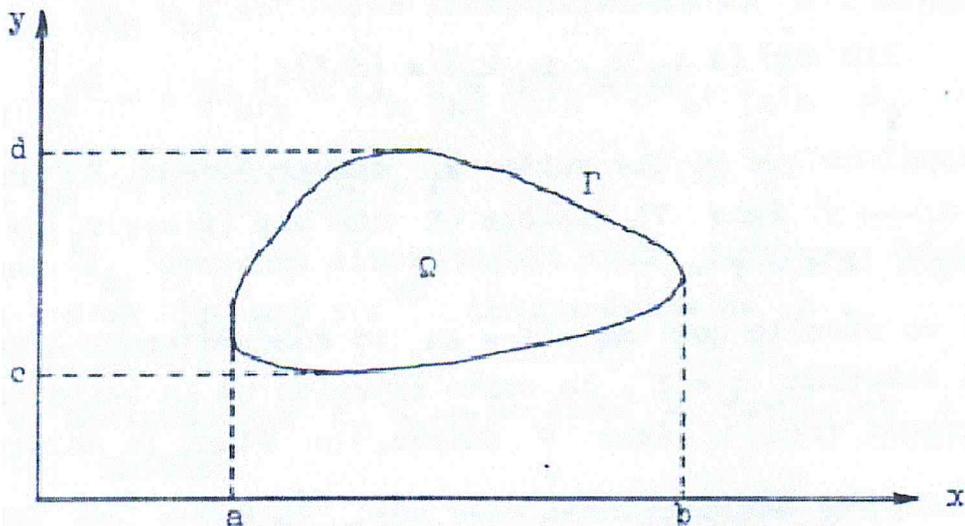
La méthode des différences finies est une méthode d'approximation des dérivées. Selon cette méthode, on cherche une solution approchée des équations différentielles, ou aux dérivées partielles.

1.2) Principe :

Le domaine de calcul est discrétisé en un nombre fini de points sur lesquels on approche les opérateurs de dérivation des équations modèles par des développements en série de Taylor tronquées à l'ordre de précision choisie [4].

1.3) Discrétisation du domaine :

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^2 , de frontière Γ



Posons $[a, b] = P_1(\Omega)$ et $[c, d] = P_2(\Omega)$

Ou P_1 et P_2 sont les opérateurs de projection respectivement sur la 1^{ère} et sur la 2^{ème} composante.

Considérons alors un pavé $[A, B] \times [C, D]$ tel que

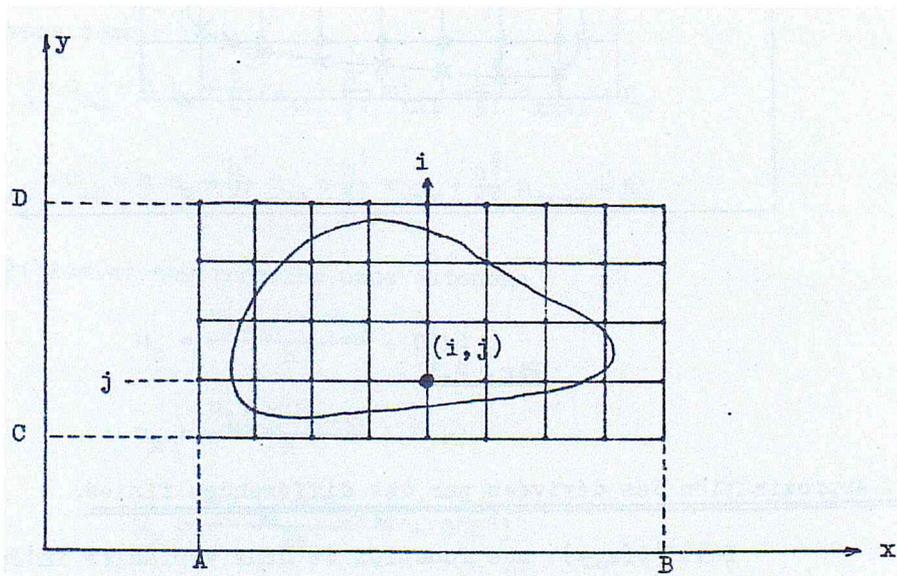
$$[a, b] \subset [A, B] \text{ et } [c, d] \subset [C, D]$$

Soient deux entiers M_1 et M_2 , nous obtenons deux paramètres de discrétisation

$$h = \frac{B - A}{M_1} \text{ et } k = \frac{D - C}{M_2}$$

Nous définissons ainsi un réseau de points de \mathbb{R}^2

$$R_{hk} = \left\{ M_{ij} \in \mathbb{R}^2 \mid M_{ij} = (A + ih, C + jk) ; i = 0 \dots M_1 ; j = 0 \dots M_2 \right\}$$



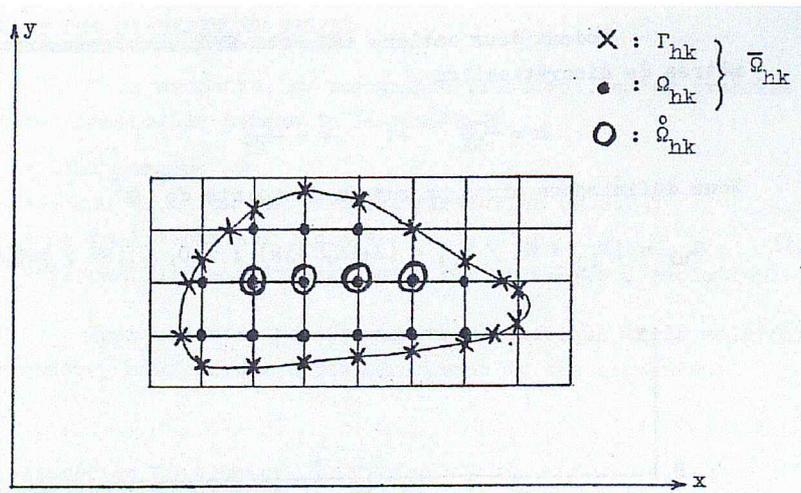
En général, on essaye que le réseau s'adapte au domaine Ω . Plus précisément, si le domaine Ω est un pavé $[a, b] \times [c, d]$, on prendra $A = a$, $B = b$, $C = c$, $D = d$.

On note Γ_{hk} = l'ensemble des points d'intersection de la frontière Γ et des droites du maillage [5]

$\Omega_{hk} = \Omega \cap R_{hk}$ L'ensemble des points $M_{ij} \in R_{hk}$ qui appartiennent à Ω

$$\overline{\Omega}_{hk} = \Omega_{hk} \cup \Gamma_{hk}$$

$\Omega_{hk}^0 = L$ l'ensemble des points M_{ij} tels que les 4 points de R_{hk} qui l'entourent appartiennent à Ω_{hk}



1.4) Approximation des dérivées par des différences finies :

Soit $u(x,y)$ une fonction de deux variables indépendantes, que nous supposons suffisamment différentiable. Si nous écrivons son développement de Taylor en un point $(x+h,y+k)$, nous avons

$$u(x+h, y+k) = u(x, y) + h \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + k \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + hk \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) + \frac{k^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{(n-1)} u(x, y) + R_n$$

$$\text{avec } R_n = \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{(n)} u(x + \xi h, y + \eta k) ; \quad \xi \in]0,1[, \quad \eta \in]0,1[$$

$$\text{Ou encore } R_n = o\left[(|h| + |k|)^n \right]$$

Aux points $M_{ij} = (i, j)$ de R_{hk} , nous noterons

$$u_{ij} = u(A + ih, C + jk)$$

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}(A + ih, C + jk)$$

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(A + ih, C + jk)$$

etc.....

Nous avons donc [4]

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} - hu_x + \frac{h^2}{2!}u_{xx} - \frac{h^3}{3!}u_{xxx} + \frac{h^4}{4!}u_{xxxx} + R_5 \quad (2.1.1)$$

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + hu_x + \frac{h^2}{2!}u_{xx} + \frac{h^3}{3!}u_{xxx} + \frac{h^4}{4!}u_{xxxx} + R'_5 \quad (2.1.2)$$

1.4.1) Dérivée première : $(\frac{\partial u}{\partial x})$

▪En retenant les deux premiers termes du développement de la relation (2.1.1), on obtient :

$$u_x = \frac{u_{ij} - u_{i-1j}}{h} + o(h) \quad (2.1.3)$$

Ceci signifie que la dérivée d'ordre 1, au point x_i , est approchée par différences finies régressives d'ordre 1.

▪En retenant les deux premiers termes du développement de la relation (2.1.2) on obtient :

$$u_x = \frac{u_{i+1j} - u_{ij}}{h} + o(h) \quad (2.1.4)$$

Ce qui signifie que la dérivée d'ordre 1, au point x_i , est approchée par différences finies progressives d'ordre 1[4].

En soustrayant la relation (1) de la relation (2) on obtient l'approximation par différences finies centrales d'ordre 2 :

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} - hu_x + R_2 \quad (1)$$

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + hu_x + R_2' \quad (2)$$

$$(2) - (1) \Rightarrow 2hu_x = u_{i+1,j} - u_{i-1,j} \Rightarrow u_x = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} + o(h^2) \quad (2.1.5)$$

1.4.2) Dérivée seconde : $(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})$

On additionnant les relations (3) et (4) on obtient l'approximation de la dérivée de deuxième ordre par différence finies centrées d'ordre 2 [5] :

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} - hu_x + \frac{h^2}{2!}u_{xx} - \frac{h^3}{3!}u_{xxx} + R_4 \quad (3)$$

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + hu_x + \frac{h^2}{2!}u_{xx} + \frac{h^3}{3!}u_{xxx} + R_4' \quad (4)$$

$$(3) + (4) \Rightarrow h^2 u_{xx} = u_{i-1,j} + u_{i+1,j} - 2u_{i,j} \Rightarrow u_{xx} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} + o(h^2) \quad (2.1.6)$$

1.4.3) Dérivée croisées : $(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y})$

Le principe est toujours basé sur le développement de Taylor [4].

En additionnant les relations (5) et (6) et en soustrayant la relation (7) et la relation (8) on obtient l'approximation par différences finies croisée :

$$u_{i+1,j+1} = u_{i,j} + hu_x + ku_y + hku_{xy} + \frac{h^2}{2}u_{xx} + \frac{k^2}{2}u_{yy} + R_3 \quad (5)$$

$$u_{i-1,j-1} = u_{i,j} - hu_x - ku_y + hku_{xy} + \frac{h^2}{2}u_{xx} + \frac{k^2}{2}u_{yy} + R_3' \quad (6)$$

$$u_{i+1,j-1} = u_{i,j} + hu_x - ku_y - hku_{xy} + \frac{h^2}{2}u_{xx} + \frac{k^2}{2}u_{yy} + R_3'' \quad (7)$$

$$u_{i-1,j+1} = u_{i,j} - hu_x + ku_y - hku_{xy} + \frac{h^2}{2}u_{xx} + \frac{k^2}{2}u_{yy} + R_3''' \quad (8)$$

$$(5) + (6) - (7) - (8) \Rightarrow 4hku_{xy} = u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j-1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1}$$

$$\Rightarrow u_{xy} = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}}{4hk} + o(h^2k^2) \quad (2.1.7)$$

1.4.4) Dérivée non linéaire : $\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right)$

Par la notion de dérivée de deux fonctions composées on a :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = k'(u)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}k(u)$$

On sait que : $k'(u) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial k}{\partial u}$

On remplace $k'(u)$ par sa formule on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial k}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}k(u) \quad (2.1.8)$$

Soit : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x_j} = \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2}$, $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \Big|_{x_j} = \frac{(u_{j+1} - u_j)^2}{h^2}$

Et $k(u) \Big|_{x_j} = k(u_j)$

Ou u_j est la valeur de la fonction u au point x_j .

•Par la définition de la dérivée on a :

$$\frac{\partial k}{\partial u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{k(u + \Delta u) - k(u)}{\Delta u} \quad (2.1.9)$$

•Par les formules de la dérivée première, on a :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x_j} \cong \frac{u_{j+1} - u_j}{h} \cong \frac{u_j - u_{j-1}}{h} \Rightarrow u_{j+1} - u_j \cong u_j - u_{j-1}$$

Donc
$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{u_j - u_{j-1}}{u_{j+1} - u_j} \right)^2 = 1 \quad (2.1.10)$$

• Si le pas de discrétisation est suffisamment petit (c-à-d $h \rightarrow 0$) et par définition de la continuité on a :

$$\lim_{x \rightarrow x_{j+1}} u(x) = \lim_{x \rightarrow x_j} u(x) = u(x_{j+1}) = u(x_j) \Rightarrow u_{j+1} - u_j \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \quad (2.1.11)$$

D'une façon analogue on peut écrire :
$$u_j - u_{j-1} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

A partir de (1), (2) et (3) on a :

$$\lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{k(u + \Delta u) - k(u)}{\Delta u} = \frac{1}{2} \left[\frac{k(u_{j+1}) - k(u_j)}{u_{j+1} - u_j} + \frac{k(u_j) - k(u_{j-1})}{u_j - u_{j-1}} \left(\frac{u_j - u_{j-1}}{u_{j+1} - u_j} \right)^2 \right]$$

Donc :
$$\left. \frac{\partial k}{\partial u} \right|_{x_j} = \frac{1}{2} \left[\frac{k(u_{j+1}) - k(u_j)}{u_{j+1} - u_j} + \frac{k(u_j) - k(u_{j-1})}{u_j - u_{j-1}} \left(\frac{u_j - u_{j-1}}{u_{j+1} - u_j} \right)^2 \right]$$

On remplace $\frac{\partial k}{\partial u}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$ par leurs approximations dans la formule (2.1.8), on

obtient :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial x} \left(k(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right|_{x_j} &= \frac{(u_{j+1} - u_j)^2}{2h^2} \left[\frac{k(u_{j+1}) - k(u_j)}{u_{j+1} - u_j} + \frac{k(u_j) - k(u_{j-1})}{u_j - u_{j-1}} \left(\frac{u_j - u_{j-1}}{u_{j+1} - u_j} \right)^2 \right] \\ &+ \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} k(u_j) \\ &= \frac{1}{2h^2} \left[k(u_{j+1})(u_{j+1} - u_j) - k(u_j)(u_{j+1} - u_j) + k(u_j)(u_j - u_{j-1}) \right. \\ &\quad \left. - k(u_{j-1})(u_j - u_{j-1}) + 2k(u_j)(u_{j+1} - u_j) - 2k(u_j)(u_j - u_{j-1}) \right] \\ &= \frac{1}{2h^2} \left[k(u_{j+1})(u_{j+1} - u_j) - k(u_j)(u_{j+1} - u_j) + k(u_j)(u_j - u_{j-1}) - k(u_{j-1})(u_j - u_{j-1}) \right] \end{aligned}$$

Finalement on trouve l'approximation suivante [6] :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x_j} = \frac{1}{2h^2} \left[[k(u_{j+1}) + k(u_j)](u_{j+1} - u_j) - [k(u_{j-1}) + k(u_j)](u_j - u_{j-1}) \right] + o(h^2) \quad (2.1.12)$$

1.5) Notion de consistance, stabilité et convergence :

1.5.1) Introduction : les équations aux dérivées partielles sont écrites d'une façon générale comme suit :

$$LU = f \quad (2.2.1)$$

Sur un domaine D de frontière Γ , où :

L : est une matrice des coefficients de la fonction u et leurs dérivées (u est la fonction à déterminer).

U : est un vecteur de la fonction u et leurs dérivées

f : est un vecteur des fonctions indépendantes de u.

1.5.2) convergence :

On cherche à calculer approximativement la solution $u(x,t)$ du problème $LU = f$ sur un domaine D de frontière Γ .

On choisit un ensemble discret de point D_h (réseau) $\in D + \Gamma$ et on pose le problème discret :

$$L_h U_h = f_h \quad (2.2.2)$$

sur D_h permettant de calculer les approximations u_h de $u(x,t)$ sur D_h .

On introduit l'espace vectoriel normé U_h des fonctions u_h définie sur D_h ,

Notons $[u]_h$: la solution exacte de u sur D_h .

On dira que u_h converge vers u sur D_h si :

$$\| [u]_h - u_h \|_{U_h} \rightarrow 0 \text{ ; quand } h \rightarrow 0$$

Si on a l'inégalité : $\| [u]_h - u_h \|_{U_h} \leq c.h^p$, avec c un constant

On dit que la convergence est d'ordre p en h .

1.5.3) consistance :

On introduit la norme $\| \cdot \|_{F_h}$ sur l'espace vectoriel F_h des fonctions $f^{(h)}$.

On dira que le problème (2.2.2) consiste à approcher le problème (2.2.1) si :

$$\| L_h [u]_h - f^{(h)} \|_{F_h} = \| \delta f^{(h)} \|_{F_h} \rightarrow 0 \text{ Quand } h \rightarrow 0$$

Si on a l'inégalité : $\| \delta f^{(h)} \|_{F_h} \leq \bar{c}h^p$, on dit que la consistance est d'ordre p en h .

1.5.4) stabilité :

$$\text{Soit : } L_h \cdot Z_h = f^{(h)} + \delta f^{(h)} \quad (2.2.3)$$

Le problème (2.2.2) est dit stable s'il existe 2 nombre $\delta > 0$ et $h_0 > 0$ tel que :

$$\forall h < h_0 \text{ et } \delta f^{(h)} \in F_h \text{ vérifiant } \| \delta f^{(h)} \|_{F_h} < \delta$$

le problème (2.2.3) admet une solution unique, et :

$$\| Z_h - u_h \|_{U_h} \leq \tau \| \delta f^{(h)} \|_{F_h}$$

avec τ un nombre indépendant de h .

• Si L_h est linéaire, alors :

le problème (2.2.2) est stable si : $\exists h_0 > 0 / h < h_0$ et $f^{(h)} \in F_h$ tel que :

$$\|u_h\|_{U_h} \leq \tau \|f^{(h)}\|_{F_h},$$

avec τ un nombre indépendant de h .

Théorème : si le schéma (2.2.2) est consistant et stable, alors il est convergent.

Si en plus la consistance est d'ordre p en h , alors la convergence est d'ordre p en h [5].

1.6) Avantages de la méthode :

- simplicité de mise en œuvre ;
- encombrement mémoire raisonnable (matrice de type bande) et temps de calcul raisonnable.

1.7) Inconvénients de la méthode :

- l'apparition d'instabilités numériques ;
- difficulté pour traiter les géométries plus complexes.

2) Méthodes itératives de résolution des systèmes d'équations linéaires :

Soit le système de n équations linéaires à n inconnues sous la forme matricielle

$$Ax=b$$

A l'aide de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

du vecteur des inconnues

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

et du vecteur des termes constants

$$b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$$

Pour résoudre ce système nous décrirons les deux algorithmes suivants :

2.1) Algorithme de JACOBI :

(0) : $X^{(0)}$ quelconque

$$(1) : x_i^{(k+1)} = \frac{\left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{i,j} x_j^{(k)} \right)}{a_{i,i}} \quad (i = \overline{1, n})$$

(2) : Arrêter si

$$|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| \leq \varepsilon, \quad (i = \overline{1, n}), \quad k=0,1,2,\dots$$

où ε est un paramètre de précision.

Remarque : dans certains cas il se peut que le processus diverge. Nous citerons ci après quelques conditions suffisantes mais pas nécessaires, pour lesquelles le processus converge si l'une d'elles est vérifiée.

$$1) \sum_{j=1}^n |\alpha_{i,j}| < 1 \quad (1 < i < n) \quad \text{avec } \alpha_{i,j} = \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}}$$

$$2) \sum_{i=1}^n |\alpha_{i,j}| < 1 \quad (1 < j < n)$$

$$3) |a_{ii}| > \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \quad (1 < i < n) \quad \text{et } (j \neq i)$$

Cette dernière condition suggère que les termes diagonaux de la matrice A sont fortement dominants. Il serait donc plus judicieux de procéder à des permutations sur les lignes et les colonnes afin de maximiser les éléments de la diagonale [7].

2.2) Algorithme de GAUSS SEIDEL :

(0) : $X^{(0)}$ quelconque

$$(1) : x_i^{(k+1)} = \frac{\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{i,j} x_j^{(k)} \right)}{a_{i,i}} \quad (i = \overline{1, n})$$

(2) : Arrêter si

$$|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| \leq \varepsilon, \quad (i = \overline{1, n}), \quad k=0,1,2,\dots$$

Remarque : La méthode de GAUSS SEIDEL converge si la condition

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \quad (1 < i < n) \text{ et } (j \neq i)$$

est vérifiée [7].

2) Méthode de Newton pour les Systèmes d'équations non linéaires :

Pour comprendre la méthodologie utilisée, considérons le système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

supposons que le point (x, y) est une approximation de la solution du système d'équations. Comment déterminer la correction $(\Delta x, \Delta y)$ qui améliorerait cette approximation ? Procédons comme dans le cas d'une équation à une variable. Dans les séries de Taylor associés à f et g , conservons les parties linéaires, puis annulons-les pour obtenir $(\Delta x, \Delta y)$. Les séries de Taylor sont :

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \frac{\Delta x}{1!} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\Delta y}{1!} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + \dots$$

$$g(x + \Delta x, y + \Delta y) = g(x, y) + \frac{\Delta x}{1!} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) + \frac{\Delta y}{1!} \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) + \dots$$

Les ... dénotent des termes au moins quadratiques. Donc,

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \cong f(x, y) + \frac{\Delta x}{1!} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\Delta y}{1!} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

$$g(x + \Delta x, y + \Delta y) \cong g(x, y) + \frac{\Delta x}{1!} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) + \frac{\Delta y}{1!} \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$$

Annulons les deuxièmes membres et cherchons la solution $(\Delta x, \Delta y)$ du système d'équations linéaires

$$\begin{cases} f + \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ g + \Delta x \frac{\partial g}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

dans lequel chaque fonction et chaque dérivée partielle est évaluée au point (x, y) .
Donc, le vecteur $(\Delta x, \Delta y)$ est solution du système :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x,y)} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}_{(x,y)}$$

La nouvelle approximation de la solution est $(x + \Delta x, y + \Delta y)$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x_n \\ \Delta y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x_n, y_n)}^{-1} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}_{(x_n, y_n)}$$

D'une manière générale, cherchons les racines d'une fonction $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. La méthode de Newton s'écrit sous la forme [voir la page suivante] :

$$X_{n+1} = \left(X - \left(\frac{\partial F}{\partial X} \right)^{-1} F \right) \Big|_{X_n}$$

Où

$\frac{\partial F}{\partial X} = \left(\frac{\partial F_i(X)}{\partial x_j} \right)$ est la matrice jacobienne de la fonction vectorielle F avec :

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)', \quad F(X) = (F_1(X), F_2(X), \dots, F_n(X))'$$

En pratique, il n'est ni nécessaire ni utile de calculer l'inverse de la matrice jacobienne. Cherchons plutôt la solution ΔX_n du système linéaire :

$$\frac{\partial F(X_n)}{\partial X} \Delta X_n = -F(X_n)$$

Alors l'itération est : $X_{n+1} = X_n + \Delta X_n$

C'est la méthode de Newton pour les systèmes d'équations non linéaires. Elle consiste à substituer un système d'équations linéaires à un système d'équations non linéaires [7].

Théorème de convergence :

Soit un sous-ensemble ouvert $C \in \mathbb{R}^n$, un ensemble convexe C_0 dont la fermeture est incluse dans C , et $F : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ différentiable pour tout $X \in C_0$ et continue pour tout $X \in C$.

Pour $X_0 \in C_0$, soit des nombres réels positifs r, α, β, γ et h tels que

$$B_r(X) = \{X \mid \|X - X_0\| < r\} \subseteq C_0, \quad h = \frac{\alpha\beta\gamma}{2} < 1 \quad \text{et} \quad r = \frac{\alpha}{1-h}$$

et supposons que la fonction vectorielle F vérifie les hypothèses ci-dessous.

1. $\left\| \frac{\partial F(X)}{\partial X} - \frac{\partial F(Y)}{\partial X} \right\| \leq \gamma \|X - Y\|$ pour tout $X, Y \in C_0$

$$2. \left(\frac{\partial F(X)}{\partial X} \right)^{-1} \text{ existe et est tel que } \left\| \left(\frac{\partial F(X)}{\partial X} \right)^{-1} \right\| \leq \beta \text{ pour tout } X \in C_0$$

$$3. \left\| \left(\frac{\partial F(X_0)}{\partial X} \right)^{-1} F(X_0) \right\| \leq \alpha$$

Alors,

1. Pour la méthode de Newton appliquée à partir du point X_0 , chaque approximation

$$X_{n+1} = X_n - \left(\frac{\partial F(X_n)}{\partial X} \right)^{-1} F(X_n), \quad n=0,1,2,\dots$$

est bien définie et satisfait à

$$X_k \in \text{cl } B_r(X_0) = \{X \mid \|X - X_0\| \leq r\}, \text{ pour } k=0,1,2,\dots$$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} X_k = R$ avec $R \in \text{cl } B_r(X_0)$, $F(R) = 0$
3. la convergence de la méthode de Newton est au moins quadratique [7].

3.1) Algorithme de Newton pour les systèmes d'équations :

- (0) initiation : $n=0$.
- (1) Calcul de vecteur $F(X_n)$ et de la matrice $\frac{\partial F(X_n)}{\partial X}$
- (2) Résolution du système linéaire $\frac{\partial F(X_n)}{\partial X} \Delta X_n = -F(X_n)$
- (3) Calcul de X_{n+1} : $X_{n+1} = X_n + \Delta X_n$
- (4) Mise à jour de n : $n=n+1$.
- (5) Faire 1 à 4 jusqu'à...

Convergence

Au moins quadratique sous les hypothèses du théorème de convergence.

Nombre d'opération : à chaque itération on fait :

$2n^3/3$ opérations arithmétiques, $n^2 + n$ évaluations de fonctions.

3.2) Avantages

- Extension naturelle de la méthode de Newton pour une équation non linéaire.

3.3) Inconvénients :

- l'approximation initiale X_0 doit être choisie avec précision pour qu'il ait convergence.
- le travail de détermination des n^2 dérivées partielles de $\partial F / \partial X$ est généralement énorme.
- le nombre d'opération par itération est proportionnel à une puissance élevée de n [7].

Introduction :

Beaucoup de problèmes du transfert thermique rencontrés dans la pratique sont considérés comme étant unidimensionnelle, mais ce n'est pas toujours le cas. Parfois nous devons tenir compte du transfert thermique dans d'autres directions quand la variation de la température dans ces autres directions est significative.

1) Conduction unidimensionnelle non stationnaire :

Le problème en général s'écrit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + q(T, x, t) = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \\ \text{avec } x \in [a_1, b_1], \text{ et } t \in [0, \bar{T}] \\ T(x, 0) = f(x) \quad x \in [a_1, b_1] \\ T(a_1, t) = g_{a_1}(t) \quad t \in [0, \bar{T}] \\ T(b_1, t) = g_{b_1}(t) \quad t \in [0, \bar{T}] \end{array} \right\} \text{conditions aux limites}$$

où : T est la fonction de température

k est la fonction de la conductivité thermique

q est une fonction produite par la source interne de la chaleur.

Notre objectif, c'est de chercher à calculer approximativement la solution $T(x, t)$ du problème sur le domaine D où :

$$D = \{(x, t) \text{ avec } x \in [a_1, b_1], t \in [0, \bar{T}]\}$$

Pour cela, nous tenons à diviser l'intervalle $[a_1, b_1]$ en $(M_1 + 1)$ nœuds de coordonnées $x_i = a_1 + ih$ (pour $i = 0 \dots M_1$)

avec $M_1 = \frac{b_1 - a_1}{h}$ où h est le pas de discrétisation ou du maillage, le temps est

discrétisé en intervalles de pas constant τ

$$t_n = n\tau \quad (\text{pour } n = 0 \dots N) \text{ avec } N = \frac{\bar{T}}{\tau}$$

Au lieu de chercher la solution $T(x,t)$ sur le domaine D , on la cherche sur le domaine discrétisé D_h où :

$$D_h = \{(x_i, t_n) / x_i = a_1 + ih \ (i = 0 \dots M_1), t_n = n\tau \ (n = 0 \dots N)\}$$

On note par f_i la valeur de la fonction f au point x_i

$g_{a_i, n}$ la valeur de la fonction g_{a_i} au point t_n

$g_{b_i, n}$ la valeur de la fonction g_{b_i} au point t_n

La notation T_i^n est la température au point (x_i, t_n)

On cherche à calculer la température $T_i^n = T(x_i, t_n)$ pour $i = 1 \dots M_1 - 1$, et tout cela pour $n = 1 \dots N$.

Par la suite, nous allons voir deux schémas concernant la résolution du problème, le schéma explicite qui nous permet de calculer directement les valeurs de la température de différents niveaux, et le schéma implicite qui nous permet de calculer les valeurs de la température en passant par la résolution d'un système d'équations linéaires ou non linéaires [8].

1.1) Schéma explicite :

On écrit l'équation aux dérivées partielles aux points (x_i, t_n) :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial T(x_i, t_n)}{\partial x} \right) + q(T, x_i, t_n) = \rho c_p \frac{\partial T(x_i, t_n)}{\partial t} \quad (1.1)$$

Et par la méthode des différences finies on approche la dérivée seconde

$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial T(x_i, t_n)}{\partial x} \right)$ et la dérivée première $\frac{\partial T(x_i, t_n)}{\partial t}$ par les quotients

différentiels :

$$\frac{\partial T}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{(x_i, t_n)} = \frac{1}{2h^2} [(k(T_{i+1}^n) + k(T_i^n))(T_{i+1}^n - T_i^n) - (k(T_{i-1}^n) + k(T_i^n))(T_i^n - T_{i-1}^n)] + o(h^2)$$

qui est une approximation d'ordre 2 en h ,

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{(x_i, t_n)} = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\tau} + o(\tau) : \text{une approximation d'ordre 1 en } \tau$$

Dans ce qui suit ; nous allons remplacer les quotients différentiels par leurs approximations dans l'équation (1.1) :

$$\frac{1}{2h^2} [(k(T_{i+1}^n) + k(T_i^n))(T_{i+1}^n - T_i^n) - (k(T_{i-1}^n) + k(T_i^n))(T_i^n - T_{i-1}^n)] + q_i^n(T_i^n) = \rho c_p \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\tau}$$

Le pas suivant consiste à multiplier l'équation par $\frac{\tau}{\rho c_p}$ pour obtenir la nouvelle

équation qui serai ainsi :

$$\begin{aligned} & \frac{\tau}{\rho c_p} \frac{1}{2h^2} [(k(T_{i+1}^n) + k(T_i^n))(T_{i+1}^n - T_i^n) - (k(T_{i-1}^n) + k(T_i^n))(T_i^n - T_{i-1}^n)] \\ & + \frac{\tau}{\rho c_p} q_i^n(T_i^n) = T_i^{n+1} - T_i^n \end{aligned}$$

Posons $r = \frac{\tau}{h^2}$ et $R = \frac{1}{2 \rho c_p}$

Nous devons transférer T_i^n , cela nous mène vers le schéma final suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_i^{n+1} = rR [(k(T_{i+1}^n) + k(T_i^n))(T_{i+1}^n - T_i^n) - (k(T_{i-1}^n) + k(T_i^n))(T_i^n - T_{i-1}^n)] \\ \quad + \frac{\tau}{\rho c_p} q_i^n(T_i^n) + T_i^n \quad i = 1 \dots M_1 - 1 \} n = 0 \dots N - 1 \\ T_i^0 = f_i \quad i = 0 \dots M_1 \\ \left. \begin{array}{l} T_0^n = g_{a_1, n} \\ T_{M_1}^n = g_{b_1, n} \end{array} \right\} n = 1 \dots N \end{array} \right.$$

A partir de ce schéma, on peut calculer directement toutes les valeurs de T_i^n pour :

$i=0 \dots M_1$, et tout cela pour $n=1 \dots N$.

1.1.1) Consistance :

Grâce au développement de Taylor, on a pu obtenir les formules suivantes :

$$\frac{\partial T}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{(x_i, t_n)} = \frac{1}{2h^2} [(k(T_{i+1}^n) + k(T_i^n))(T_{i+1}^n - T_i^n) - (k(T_{i-1}^n) + k(T_i^n))(T_i^n - T_{i-1}^n)] + \frac{h^2}{4!} \frac{\partial^4 T(\bar{x}, t_n)}{\partial x^4}$$

$$\frac{dT(x_i, t_n)}{dt} = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\tau} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 T(x_i, \bar{t})}{\partial t^2}$$

A partir de ces formules ci-dessus, nous allons pouvoir écrire l'erreur de consistance comme suit :

$$\|\mathcal{F}^{(n)}\|_{F_h} = \left\| \frac{h^2}{4!} \frac{\partial^4 T(\bar{x}, t_n)}{\partial x^4} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 T(x_i, \bar{t})}{\partial t^2} \right\|$$

Comme $\tau = r h^2$, on peut réécrire l'erreur de consistance ainsi :

$$\|\mathcal{F}^{(n)}\|_{F_h} = \left\| \frac{h^2}{4!} \frac{\partial^4 T(\bar{x}, t_n)}{\partial x^4} - \frac{r h^2}{2} \frac{\partial^2 T(x_i, \bar{t})}{\partial t^2} \right\|$$

En utilisant l'équation précédente et les propriétés de la norme, on obtient l'inégalité suivante :

$$\|\mathcal{F}^{(n)}\|_{F_h} \leq \frac{h^2}{4!} \sup_x \left| \frac{\partial^4 T(\bar{x}, t_n)}{\partial x^4} \right| + \frac{r h^2}{2} \sup_i \left| \frac{\partial^2 T(x_i, \bar{t})}{\partial t^2} \right|$$

On met h^2 comme facteur commun, ce qui nous a donné la nouvelle inéquation suivante :

$$\|\mathcal{F}^{(n)}\|_{F_h} \leq \bar{c} h^2$$

avec :

$$\bar{c} = \frac{1}{4!} \left(\sup_x \left| \frac{\partial T(\bar{x}, t_n)}{\partial x} \right| \right) + \frac{r}{2} \sup_i \left| \frac{\partial T(x_i, \bar{t})}{\partial t} \right|$$

D'après la dernière inégalité, on aura, par conséquent la consistance d'ordre 2 en h.

1.1.2) Stabilité :

Soit la norme $\| \cdot \|_{U_h}$ définie sur l'espace vectoriel U_h des fonctions T_h (où T_h est la fonction de la température sur le domaine discret D_h), et la norme $\| \cdot \|_{F_h}$ définie sur l'espace vectoriel F_h des fonctions $f^{(h)}$.

Soit α la borne supérieure de la fonction $k(T)$ ($k(T) \leq \alpha$ avec $k(T) \geq 0$), et β la borne supérieure de la fonction $q(T)$

$$|q(T)| \leq \beta$$

$$\|T_{(h)}\|_{U_h} = \max_n (\max_i |T_i^n|)$$

$$\|f_{(h)}\|_{F_h} = \max_i |f_i| + \max_n |g_{a_i,n}| + \max_n |g_{b_i,n}| + \left| \frac{\beta}{\rho c_p} \right|$$

D'après le schéma explicite, on écrit la formule suivante après l'avoir simplifié :

$$\begin{aligned} T_i^{n+1} = & rR(k(T_{i+1}^n) + k(T_i^n))T_{i+1}^n + rR(k(T_{i-1}^n) + k(T_i^n))T_{i-1}^n \\ & + \left(1 - 2rRk(T_i^n) - rR(k(T_{i-1}^n) + k(T_{i+1}^n))\right)T_i^n + \frac{\tau q_i^n(T_i^n)}{\rho c_p} \end{aligned}$$

En passant à la valeur absolue de chaque terme de l'équation et si on choisit r qui vérifie

$$\left(1 - 2rRk(T_i^n) - rR(k(T_{i-1}^n) + k(T_{i+1}^n))\right) > 0, \text{ on aura l'inégalité suivante :}$$

$$\begin{aligned} |T_i^{n+1}| \leq & rR(k(T_{i+1}^n) + k(T_i^n))|T_{i+1}^n| + rR(k(T_{i-1}^n) + k(T_i^n))|T_{i-1}^n| \\ & + \left(1 - 2rRk(T_i^n) - rR(k(T_{i-1}^n) + k(T_{i+1}^n))\right)|T_i^n| + \left| \frac{\tau q_i^n(T_i^n)}{\rho c_p} \right| \end{aligned}$$

Comme $k(T) \leq \alpha$, alors on peut majorer $k(T)$ par α dans chaque terme de l'inéquation et si

$$1 - 4rR\alpha > 0 \Rightarrow r < \frac{1}{4R\alpha},$$

donc on écrit :

$$|T_i^{n+1}| \leq 2rR\alpha |T_{i+1}^n| + 2rR\alpha |T_{i-1}^n| + (1 - 4rR\alpha) |T_i^n| + \left| \frac{\tau \beta}{\rho c_p} \right|$$

Par la suite, en passant au maximum sur i de chaque terme, on obtient :

$$\max_i |T_i^{n+1}| \leq 2rR\alpha \max_i |T_{i+1}^n| + 2rR\alpha \max_i |T_{i-1}^n| + (1 - 4rR\alpha) \max_i |T_i^n| + \left| \frac{\tau \beta}{\rho c_p} \right|$$

Comme :

$$\max_i |T_{i+1}^n| = \max_i |T_{i-1}^n| = \max_i |T_i^n| \quad (\text{car ils sont au même niveau } n)$$

on aura l'inégalité suivante :

$$\max_i |T_i^{n+1}| \leq \max_i |T_i^n| + \left| \frac{\tau \beta}{\rho c_p} \right|$$

Si à chaque fois on fixe n ($n=0, 1, \dots, N-1$), on obtient le système d'inéquations suivant :

$$\begin{cases} \max_i |T_i^n| \leq \max_i |T_i^{n-1}| + \left| \frac{\tau \beta}{\rho c_p} \right| \\ \vdots \\ \max_i |T_i^1| \leq \max_i |T_i^0| + \left| \frac{\tau \beta}{\rho c_p} \right| \end{cases}$$

A partir de ce système d'inéquations, on déduit :

$$\max_n \left(\max_i |T_i^{n+1}| \right) \leq \max_i |T_i^0| + (n+1) \tau \left| \frac{\beta}{\rho c_p} \right|$$

On peut écrire :

$$\max_n \left(\max_i |T_i^{n+1}| \right) \leq \max_i |T_i^0| + N \tau \left| \frac{\beta}{\rho c_p} \right|$$

Grace à $T_i^0 = f_i$, $N \tau = \bar{T}$, nous avons l'inéquation suivante :

$$\max_n \left(\max_i |T_i^{n+1}| \right) \leq \max_i |f_i| + \bar{T} \left| \frac{\beta}{\rho c_p} \right|$$

Lorsque :

$$\max_i |f_i| \leq \|f^{(h)}\|_{F_h} \quad \left| \frac{\beta}{\rho c_p} \right| \leq \|f^{(h)}\|_{F_h}$$

on a :

$$\|T^{(h)}\|_{U_h} \leq (1 + \bar{T}) \|f^{(h)}\|_{F_h}$$

Et donc, le schéma explicite est stable pour $r < \frac{1}{4R\alpha}$

1.2) Schéma implicite :

On écrit l'équation aux dérivées partielles aux points (x_i, t_{n+1}) :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial T(x_i, t_{n+1})}{\partial x} \right) + q(T, x_i, t_{n+1}) = \rho c_p \frac{\partial T(x_i, t_{n+1})}{\partial t} \quad (1.2)$$

Et par la méthode des différences finies, on approche la dérivée seconde

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial T(x_i, t_{n+1})}{\partial x} \right), \text{ Et la dérivée première } \frac{\partial T(x_i, t_{n+1})}{\partial t} \text{ par les quotients}$$

différentiels :

$$\frac{\partial T}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{(x_i, t_{n+1})} = \frac{1}{2h^2} [(k(T_{i+1}^{n+1}) + k(T_i^{n+1}))(T_{i+1}^{n+1} - T_i^{n+1}) - (k(T_{i-1}^{n+1}) + k(T_i^{n+1}))(T_i^{n+1} - T_{i-1}^{n+1})] + o(h^2)$$

qui est une approximation d'ordre 2 en h,

$$\frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{(x_i, t_{n+1})} = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\tau} + o(\tau) : \text{ une approximation d'ordre 1 en } \tau$$

Dans ce qui suit, nous allons remplacer les quotients différentiels par leurs approximations dans l'équation (1.2) :

$$\frac{1}{2h^2} [(k(T_{i+1}^{n+1}) + k(T_i^{n+1}))(T_{i+1}^{n+1} - T_i^{n+1}) - (k(T_{i-1}^{n+1}) + k(T_i^{n+1}))(T_i^{n+1} - T_{i-1}^{n+1})] + q_i^{n+1} (T_i^{n+1}) = \rho c_p \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\tau}$$

Le pas suivant consiste à multiplier l'équation par $\frac{\tau}{\rho c_p}$ pour obtenir la nouvelle

équation qui serai ainsi :

$$\begin{aligned} & \frac{\tau}{\rho c_p} \frac{1}{2h^2} [(k(T_{i+1}^{n+1}) + k(T_i^{n+1}))(T_{i+1}^{n+1} - T_i^{n+1}) - (k(T_{i-1}^{n+1}) + k(T_i^{n+1}))(T_i^{n+1} - T_{i-1}^{n+1})] \\ & + \frac{\tau}{\rho c_p} q_i^{n+1} (T_i^{n+1}) = T_i^{n+1} - T_i^n \end{aligned}$$

$$\text{Posons } r = \frac{\tau}{h^2} \text{ et } R = \frac{1}{2 \rho c_p}$$

Nous devons transférer T_i^{n+1} , cela nous mène vers le schéma final suivant :

$$\begin{cases} rR [(k(T_{i+1}^{n+1}) + k(T_i^{n+1}))(T_{i+1}^{n+1} - T_i^{n+1}) - (k(T_{i-1}^{n+1}) + k(T_i^{n+1}))(T_i^{n+1} - T_{i-1}^{n+1})] \\ - T_i^{n+1} + \frac{\tau}{\rho c_p} q_i^{n+1} (T_i^{n+1}) = -T_i^n & i = 1 \dots M_1 - 1 \} n = 0 \dots N - 1 \\ T_i^0 = f_i & i = 0 \dots M_1 \\ \left. \begin{aligned} T_0^n &= g_{a_1, n} \\ T_{M_1}^n &= g_{b_1, n} \end{aligned} \right\} n = 1 \dots N \end{cases}$$

Pour n donné et si à chaque fois on fixe $i(i=1 \dots M_1-1)$, on obtient un système d'équations non linéaires, et pour calculer toutes les valeurs de la température T sur le domaine discret D_h , nous devons résoudre N fois ce système d'équations non linéaires.

1.2.1) Consistance : l'étude de la consistance pour le schéma implicite est faite d'une façon analogue que le schéma explicite.

1.2.2) Stabilité :

On utilise les mêmes normes que le schéma explicite.

D'après le schéma implicite, on écrit la formule suivante après l'avoir simplifié :

$$\begin{aligned} (1 + 2rRk(T_i^{n+1}) + rR(k(T_{i-1}^{n+1}) + k(T_{i+1}^{n+1})))T_i^{n+1} &= \frac{\tau}{\rho c_p} q_i^{n+1}(T_i^{n+1}) \\ &+ rR(k(T_{i-1}^{n+1}) + k(T_i^{n+1}))T_{i-1}^{n+1} + rR(k(T_{i+1}^{n+1}) + k(T_i^{n+1}))T_{i+1}^{n+1} + T_i^n \end{aligned}$$

En passant à la valeur absolue de chaque terme de l'équation et comme $k(T) \leq \alpha$, alors on peut écrire :

$$(1 + 4rR\alpha)|T_i^{n+1}| \leq \left| \frac{\tau \beta}{\rho c_p} \right| + 2rR\alpha|T_{i-1}^{n+1}| + 2rR\alpha|T_{i+1}^{n+1}| + |T_i^n|$$

En passant au maximum sur i de chaque terme, on obtient :

$$(1 + 4rR\alpha)\max_i |T_i^{n+1}| \leq 2rR\alpha \max_i |T_{i-1}^{n+1}| + 2rR\alpha \max_i |T_{i+1}^{n+1}| + \max_i |T_i^n| + \left| \frac{\tau \beta}{\rho c_p} \right|$$

Comme :

$$\max_i |T_i^{n+1}| = \max_i |T_{i-1}^{n+1}| = \max_i |T_{i+1}^{n+1}|$$

(car ils sont au même niveau n+1)

on aura l'inégalité suivante :

$$\max_i |T_i^{n+1}| \leq \max_i |T_i^n| + \tau \left| \frac{\beta}{\rho c_p} \right|$$

Si à chaque fois on fixe n (n=0,1,2,..., N-1), on obtient le système d'inéquations suivant :

$$\begin{cases} \max_i |T_i^n| \leq \max_i |T_i^{n-1}| + \left| \frac{\tau \beta}{\rho c_p} \right| \\ \vdots \\ \max_i |T_i^1| \leq \max_i |T_i^0| + \left| \frac{\tau \beta}{\rho c_p} \right| \end{cases}$$

A partir de ce système d'inéquations, on déduit :

$$\max_n \left(\max_i |T_i^{n+1}| \right) \leq \max_i |T_i^0| + (n+1) \tau \left| \frac{\beta}{\rho c_p} \right|$$

On peut écrire :

$$\max_n \left(\max_i |T_i^{n+1}| \right) \leq \max_i |T_i^0| + N \tau \left| \frac{\beta}{\rho c_p} \right|$$

Grace à $T_i^0 = f_i$ $N \tau = \bar{T}$, nous avons l'inéquation suivante :

$$\max_n \left(\max_i |T_i^{n+1}| \right) \leq \max_i |f_i| + \bar{T} \left| \frac{\beta}{\rho c_p} \right|$$

Lorsque :

$$\max_i |f_i| \leq \|f^{(h)}\|_{F_h} \quad \left| \frac{\beta}{\rho c_p} \right| \leq \|f^{(h)}\|_{F_h}$$

on a :

$$\|T_{(h)}\|_{U_h} \leq (1 + \bar{T}) \|f_{(h)}\|_{F_h}$$

Et donc, le schéma implicite est stable et ceci quelque soit r .

Cas particulier (conductivité constante) :

Ce qui caractérise ce cas est :

-La conductivité thermique est une constante k_0 .

-La source interne de chaleur donne une valeur constante de la chaleur q^0 .

Le problème s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} k_0 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) + q^0 = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \\ \text{avec } x \in [a_1, b_1] \text{ et } t \in [0, \bar{T}] \\ T(x, 0) = f(x) \quad x \in [a_1, b_1] \\ T(a_1, t) = g_{a_1}(t) \quad t \in [0, \bar{T}] \\ T(b_1, t) = g_{b_1}(t) \quad t \in [0, \bar{T}] \end{array} \right\} \text{conditions aux limites}$$

Dans ce cas nous obtenons les schémas suivants:

Schéma explicite :

Dans ce cas l'approximation de la dérivée seconde s'écrit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Big|_{(x_i, t_n)} = \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{h^2} + o(h^2)$$

Cette approximation nous permet d'écrire le schéma final suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_i^{n+1} = rRT_{i-1}^n + rRT_{i+1}^n + (1 - 2rR)T_i^n + \frac{\tau q^0}{\rho c_p} \quad i = 1 \dots M_1 - 1, n = 0 \dots N - 1 \\ T_i^0 = f_i \quad i = 0 \dots M_1 \\ T_0^n = g_{a_1, n} \\ T_{M_1}^n = g_{b_1, n} \end{array} \right\} n = 1 \dots N$$

avec $r = \frac{\tau}{h^2}$ et $R = \frac{k_0}{\rho c_p}$

Schéma implicite :

On considère l'approximation de la dérivée seconde à l'instant t_{n+1} :

$$\left. \frac{\partial T^2}{\partial x^2} \right|_{(x_i, t_{n+1})} = \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{h^2} + o(h^2)$$

Cette approximation nous permet d'écrire le schéma final suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -rRT_{i-1}^{n+1} - rRT_{i+1}^{n+1} + (1+2rR)T_i^{n+1} = T_i^n + \frac{\tau q^0}{\rho c_p} \quad i = 1 \dots M_1 - 1 \\ T_i^0 = f_i \quad i = 0 \dots M_1 \\ \left. \begin{array}{l} T_0^n = g_{a,n} \\ T_{M_1}^n = g_{b,n} \end{array} \right\} n = 1 \dots N \end{array} \right\} n = 0 \dots N - 1$$

avec $r = \frac{\tau}{h^2}$ et $R = \frac{k_0}{\rho c_p}$

Pour n donné et si à chaque fois on fixe $i(i=1 \dots M_1-1)$, on obtient un système d'équations linéaires d'ordre M_1-1 , qu'on peut écrire sous la forme matricielle suivante :

$$QX = d$$

où : Q est une matrice de dimension M_1-1 :

$$Q = \begin{pmatrix} 1+2rR & & -rR & & & & \\ & -rR & & 1+2rR & & -rR & \\ & & \ddots & & \ddots & & \ddots \\ & & & & & \ddots & & -rR \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & -rR & 1+2rR \end{pmatrix}$$

et d un vecteur de dimension M_1-1 :

$$d = \left(\frac{\tau q^0}{\rho c_p} + T_1^n + rRg_{a_1}^{n+1}, \frac{\tau q^0}{\rho c_p} + T_2^n, \dots, \frac{\tau q^0}{\rho c_p} + T_{M_1-2}^n, \frac{\tau q^0}{\rho c_p} + T_{M_1-1}^n + rRg_{b_1}^{n+1} \right)^T$$

X est le vecteur des inconnus de dimension M_1-1 :

$$X = (T_1^{n+1}, T_2^{n+1}, \dots, T_{M_1-2}^{n+1}, T_{M_1-1}^{n+1})^T$$

Pour calculer toutes les valeurs de la température T sur le domaine discret D_h , nous devons résoudre N fois ce système d'équations linéaires.

2) Conduction unidimensionnelle stationnaire :

C'est le cas où la fonction de la température ne dépend pas du temps.

Le problème en général s'écrit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + q(T, x) = 0 \\ \text{avec } x \in [a_1, b_1] \\ \left. \begin{array}{l} T(a_1) = c_1 \\ T(b_1) = c_2 \end{array} \right\} \text{conditions aux limites} \end{array} \right.$$

où : T est la fonction de température

k est la fonction de la conductivité thermique

q est une fonction produite par la source interne de la chaleur.

Notre objectif, c'est de chercher à calculer approximativement la solution T(x) du problème sur le domaine D où :

$$D = \{x \text{ avec } x \in [a_1, b_1]\}$$

Pour cela, nous tenons à diviser l'intervalle $[a_1, b_1]$ en $(M_1 + 1)$ nœuds de coordonnées $x_i = a_1 + ih$ (pour $i = 0 \dots M_1$)

avec $M_1 = \frac{b_1 - a_1}{h}$ où h est le pas de discrétisation ou du maillage.

Au lieu de chercher la solution $T(x)$ sur le domaine D , on la cherche sur le domaine discrétisé D_h où :

$$D_h = \{x_i / x_i = a_1 + ih \ (i = 0 \dots M_1)\}$$

La notation T_i est la température au point x_i

On cherche à calculer la température $T_i = T(x_i)$ pour $i = 1 \dots M_1 - 1$

On écrit l'équation aux dérivées partielles aux points x_i :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial T(x_i)}{\partial x} \right) + q(T, x_i) = 0 \quad (2)$$

Et par la méthode des différences finies on approche la dérivée seconde

$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial T(x_i)}{\partial x} \right)$ par le quotient différentiel :

$$\frac{\partial T}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{(x_i)} = \frac{1}{2h^2} [(k(T_{i+1}) + k(T_i))(T_{i+1} - T_i) - (k(T_{i-1}) + k(T_i))(T_i - T_{i-1})] + o(h^2)$$

qui est une approximation d'ordre 2 en h .

Dans ce qui suit : nous allons remplacer le quotient différentiel par son approximation dans l'équation (2) :

$$\frac{1}{2h^2} [(k(T_{i+1}) + k(T_i))(T_{i+1} - T_i) - (k(T_{i-1}) + k(T_i))(T_i - T_{i-1})] + q_i(T_i) = 0$$

Le pas suivant consiste à multiplier l'équation par $2h^2$ pour obtenir le schéma final

$$\text{suisant : } \begin{cases} [(k(T_{i+1}) + k(T_i))(T_{i+1} - T_i) - (k(T_{i-1}) + k(T_i))(T_i - T_{i-1})] + 2h^2 q_i(T_i) = 0 \\ i = 1 \dots M_1 - 1 \\ T_0 = c_1 \\ T_{M_1} = c_2 \end{cases}$$

Pour calculer toutes les valeurs de la température T sur le domaine discret D_h , nous devons résoudre ce système d'équations non linéaires.

2.1) Consistance :

Grâce au développement de Taylor, on a pu obtenir la formule suivante :

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right|_{(x_i)} = \frac{1}{2h^2} [(k(T_{i+1}) + k(T_i))(T_{i+1} - T_i) - (k(T_{i-1}) + k(T_i))(T_i - T_{i-1})] + \frac{h^2}{4!} \frac{\partial^4 T(\bar{x})}{\partial x^4}$$

A partir de cette formule ci-dessus, nous allons pouvoir écrire l'erreur de consistance comme suit :

$$\|\mathcal{E}^{(n)}\|_{F_h} = \left\| \frac{h^2}{4!} \frac{\partial^4 T(\bar{x})}{\partial x^4} \right\|$$

En utilisant l'équation précédente et les propriétés de la norme on obtient l'inégalité suivante :

$$\|\mathcal{E}^{(n)}\|_{F_h} \leq \frac{h^2}{4!} \sup_x \left| \frac{\partial^4 T(\bar{x})}{\partial x^4} \right|$$

On met h^2 comme facteur commun, ce qui nous a donné la nouvelle inéquation suivante :

$$\|\mathcal{E}^{(n)}\|_{F_h} \leq \bar{c} h^2$$

avec :

$$\bar{c} = \frac{1}{4!} \left(\sup_x \left| \frac{\partial^4 T(\bar{x})}{\partial x^4} \right| \right)$$

D'après la dernière inégalité, on aura, par conséquent la consistance d'ordre 2 en h.

Cas particulier (conductivité constante) :

Ce qui caractérise ce cas est :

-La conductivité thermique est une constante k_0 .

-La source interne de chaleur donne une valeur constante de la chaleur q^0 .

Le problème s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} k_0 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) + q^0 = 0 \\ \text{avec } x \in [a_1, b_1] \\ T(a_1) = c_1 \\ T(b_1) = c_2 \end{array} \right\} \text{conditions aux limites}$$

Dans ce cas, l'approximation de la dérivée seconde s'écrit :

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{(x_i)} = \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{h^2} + o(h^2)$$

Cette approximation nous permet d'écrire le schéma final suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{i-1} + T_{i+1} - 2T_i = \frac{-h^2 q^0}{k_0} \quad i = 1 \dots M_1 - 1 \\ T_0 = c_1 \\ T_{M_1} = c_2 \end{array} \right.$$

Si à chaque fois on fixe $i (i=1 \dots M_1-1)$, on obtient un système d'équations linéaires d'ordre M_1-1 , qu'on peut écrire sous la forme matricielle suivante :

$$QX = d$$

où : Q est une matrice de dimension M_1-1 :

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & -1 & 2 & \end{pmatrix}$$

et d un vecteur de dimension M_1-1 :

$$d = \left(\frac{h^2 q^0}{k_0} + c_1, \underbrace{\frac{h^2 q^0}{k_0}, \dots, \frac{h^2 q^0}{k_0}}_{(M_1-3), \text{fois}}, \frac{h^2 q^0}{k_0} + c_2 \right)^T$$

X est le vecteur des inconnus de dimension M_1-1 : $X = (T_1, \dots, T_{M_1-1})^T$

Pour calculer toutes les valeurs de la température T sur le domaine discret D_h , nous devons résoudre ce système d'équations linéaires.

3) Conduction bidimensionnelle non stationnaire :

Le problème en général s'écrit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) + q(T, x, y, t) = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \\ \text{avec } x \in [a_1, b_1], y \in [a_2, b_2], \text{ et } t \in [0, \bar{T}] \\ T(x, y, 0) = f(x, y) \quad x \in [a_1, b_1], y \in [a_2, b_2] \\ \left. \begin{array}{l} T(a_1, y, t) = g_{a_1}(y, t) \quad y \in [a_2, b_2], t \in [0, \bar{T}] \\ T(b_1, y, t) = g_{b_1}(y, t) \quad y \in [a_2, b_2], t \in [0, \bar{T}] \\ T(x, a_2, t) = g_{a_2}(x, t) \quad x \in [a_1, b_1], t \in [0, \bar{T}] \\ T(x, b_2, t) = g_{b_2}(x, t) \quad x \in [a_1, b_1], t \in [0, \bar{T}] \end{array} \right\} \text{conditions aux limites} \end{array} \right.$$

où : T est la fonction de température

k est la fonction de la conductivité thermique

q est une fonction produite par la source interne de la chaleur.

Notre objectif, c'est de chercher à calculer approximativement la solution $T(x, y, t)$ du problème sur le domaine D où :

$$D = \{(x, y, t) \text{ avec } x \in [a_1, b_1], y \in [a_2, b_2], t \in [0, \bar{T}]\}$$

Pour cela, nous tenons à diviser le domaine $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ en $(M_1 + 1) \times (M_2 + 1)$ nœuds de coordonnées $x_i = a_1 + ih, y_j = a_2 + jh$, (pour $i = 0 \dots M_1, j = 0 \dots M_2$)

avec $M_1 = \frac{b_1 - a_1}{h}$, et $M_2 = \frac{b_2 - a_2}{h}$ où h est le pas de discrétisation ou du maillage,

le temps est discrétisé en intervalles de pas constant τ

$$t_n = n\tau \quad (\text{pour } n = 0 \dots N) \quad \text{avec } N = \frac{t_0}{\tau}$$

Au lieu de chercher la solution $T(x,y,t)$ sur le domaine D , on la cherche sur le domaine discrétisé D_h où :

$$D_h = \left\{ \begin{array}{l} (x_i, y_j, t_n) / x_i = a_1 + ih \quad (i = 0 \dots M_1), \\ y_j = a_2 + jh \quad (j = 0 \dots M_2), t_n = n\tau \quad (n = 0 \dots N) \end{array} \right\}$$

On note par $f_{i,j}$ la valeur de la fonction f au point (x_i, y_j)

$g_{a_1}^j$ la valeur de la fonction g_{a_1} au point (y_j, t_n)

$g_{b_1}^j$ la valeur de la fonction g_{b_1} au point (y_j, t_n)

$g_{a_2}^i$ la valeur de la fonction g_{a_2} au point (x_i, t_n)

$g_{b_2}^i$ la valeur de la fonction g_{b_2} au point (x_i, t_n)

La notation $T_{i,j}^n$ est la température au point : (x_i, y_j, t_n)

On cherche à calculer la température $T_{i,j}^n = T(x_i, y_j, t_n)$ pour $i = 1 \dots M_1 - 1$,

$j = 1 \dots M_2 - 1$ et tout cela pour $n = 1 \dots N$.

Par la suite, nous allons voir deux schémas concernant la résolution du problème, le schéma explicite qui nous permet de calculer directement les valeurs de la température de différents niveaux, et le schéma implicite qui nous permet de calculer les valeurs de la température en passant par la résolution d'un système d'équations linéaires ou non linéaires.

3.1) Schéma explicite :

On écrit l'équation aux dérivées partielles aux points (x_i, y_j, t_n) :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial T(x_i, y_j, t_n)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k(T) \frac{\partial T(x_i, y_j, t_n)}{\partial y} \right) \\ & + q(T, x_i, y_j, t_n) = \rho c_p \frac{\partial T(x_i, y_j, t_n)}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Et par la méthode des différences finies on approche les dérivées secondes

$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial T(x_i, y_j, t_n)}{\partial x} \right)$, $\frac{\partial}{\partial y} \left(k(T) \frac{\partial T(x_i, y_j, t_n)}{\partial y} \right)$ et la dérivée première

$\frac{\partial T(x_i, y_j, t_n)}{\partial t}$ par les quotients différentiels :

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right|_{(x_i, y_j, t_n)} = \frac{1}{2h^2} [(k(T_{i+1,j}^n) + k(T_{i,j}^n))(T_{i+1,j}^n - T_{i,j}^n) - (k(T_{i-1,j}^n) + k(T_{i,j}^n))(T_{i,j}^n - T_{i-1,j}^n)] + o(h^2)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right|_{(x_i, y_j, t_n)} = \frac{1}{2h^2} [(k(T_{i,j+1}^n) + k(T_{i,j}^n))(T_{i,j+1}^n - T_{i,j}^n) - (k(T_{i,j-1}^n) + k(T_{i,j}^n))(T_{i,j}^n - T_{i,j-1}^n)] + o(h^2)$$

qui sont des approximations d'ordre 2 en h,

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{(x_i, y_j, t_n)} = \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\tau} + o(\tau) : \text{une approximation d'ordre 1 en } \tau$$

Dans ce qui suit ; nous allons remplacer les quotients différentiels par leurs approximations dans l'équation (1.1) :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2h^2} [(k(T_{i+1,j}^n) + k(T_{i,j}^n))(T_{i+1,j}^n - T_{i,j}^n) - (k(T_{i-1,j}^n) + k(T_{i,j}^n))(T_{i,j}^n - T_{i-1,j}^n)] \\ & + \frac{1}{2h^2} [(k(T_{i,j+1}^n) + k(T_{i,j}^n))(T_{i,j+1}^n - T_{i,j}^n) - (k(T_{i,j-1}^n) + k(T_{i,j}^n))(T_{i,j}^n - T_{i,j-1}^n)] \\ & + q_{i,j}^n(T_{i,j}^n) = \rho c_p \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\tau} \end{aligned}$$

Le pas suivant consiste à multiplier l'équation par $\frac{\tau}{\rho c_p}$ pour obtenir la nouvelle

équation qui serai ainsi [voir la page suivante] :

$$\begin{aligned} & \frac{\tau}{\rho c_p} \frac{1}{2h^2} [(k(T_{i+1,j}^n) + k(T_{i,j}^n))(T_{i+1,j}^n - T_{i,j}^n) - (k(T_{i-1,j}^n) + k(T_{i,j}^n))(T_{i,j}^n - T_{i-1,j}^n)] \\ & \quad + (k(T_{i,j+1}^n) + k(T_{i,j}^n))(T_{i,j+1}^n - T_{i,j}^n) - (k(T_{i,j-1}^n) + k(T_{i,j}^n))(T_{i,j}^n - T_{i,j-1}^n)] \\ & + \frac{\tau}{\rho c_p} q_{i,j}^n(T_{i,j}^n) = T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n \end{aligned}$$

Posons $r = \frac{\tau}{h^2}$ et $R = \frac{1}{2 \rho c_p}$

Nous devons transférer $T_{i,j}^n$, cela nous mène vers le schéma final suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{i,j}^{n+1} = rR[(k(T_{i+1,j}^n) + k(T_{i,j}^n))(T_{i+1,j}^n - T_{i,j}^n) - (k(T_{i-1,j}^n) + k(T_{i,j}^n))(T_{i,j}^n - T_{i-1,j}^n) \\ \quad + (k(T_{i,j+1}^n) + k(T_{i,j}^n))(T_{i,j+1}^n - T_{i,j}^n) - (k(T_{i,j-1}^n) + k(T_{i,j}^n))(T_{i,j}^n - T_{i,j-1}^n)] \\ \quad + \frac{\tau}{\rho c_p} q_{i,j}^n(T_{i,j}^n) + T_{i,j}^n \quad \begin{array}{l} i = 1 \dots M_1 - 1 \\ j = 1 \dots M_2 - 1 \end{array} \end{array} \right\} n = 0 \dots N - 1$$

$$\left. \begin{array}{l} T_{i,j}^0 = f_{i,j} \quad i = 0 \dots M_1, j = 0 \dots M_2 \\ T_{0,j}^n = g_{a_1,n}^j \quad j = 0 \dots M_2 \\ T_{i,0}^n = g_{a_2,n}^i \quad i = 0 \dots M_1 \\ T_{M_1,j}^n = g_{b_1,n}^j \quad j = 0 \dots M_2 \\ T_{i,M_2}^n = g_{b_2,n}^i \quad i = 0 \dots M_1 \end{array} \right\} n = 1 \dots N$$

A partir de ce schéma, on peut calculer directement toutes les valeurs de $T_{i,j}^n$ pour :
 $i=0 \dots M_1, j=0 \dots M_2$, et tout cela pour $n=1 \dots N$.

3.1.1) Consistance :

Grâce au développement de Taylor, on a pu obtenir les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{(x_i, y_j, t_n)} &= \frac{1}{2h^2} [(k(T_{i+1,j}^n) + k(T_{i,j}^n))(T_{i+1,j}^n - T_{i,j}^n) - (k(T_{i-1,j}^n) + k(T_{i,j}^n))(T_{i,j}^n - T_{i-1,j}^n)] \\ & \quad + \frac{h^2}{4!} \frac{\partial^4 T(\bar{x}, y_j, t_n)}{\partial x^4} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) \Big|_{(x_i, y_j, t_n)} = \frac{1}{2h^2} [(k(T_{i,j+1}^n) + k(T_{i,j}^n))(T_{i,j+1}^n - T_{i,j}^n) - (k(T_{i,j-1}^n) + k(T_{i,j}^n))(T_{i,j}^n - T_{i,j-1}^n)] + \frac{h^2}{4!} \frac{\partial^4 T(x_i, \bar{y}, t_n)}{\partial y^4}$$

$$\frac{dT(x_i, y_j, t_n)}{dt} = \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\tau} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 T(x_i, y_j, \bar{t})}{\partial t^2}$$

A partir de ces formules ci-dessus, nous allons pouvoir écrire l'erreur de consistance comme suit :

$$\|\mathcal{E}^{(n)}\|_{F_h} = \left\| \frac{h^2}{4!} \frac{\partial^4 T(\bar{x}, y_j, t_n)}{\partial x^4} + \frac{h^2}{4!} \frac{\partial^4 T(x_i, \bar{y}, t_n)}{\partial y^4} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 T(x_i, y_j, \bar{t})}{\partial t^2} \right\|$$

Comme $\tau = r h^2$, on peut réécrire l'erreur de consistance ainsi :

$$\|\mathcal{E}^{(n)}\|_{F_h} = \left\| \frac{h^2}{4!} \frac{\partial^4 T(\bar{x}, y_j, t_n)}{\partial x^4} + \frac{h^2}{4!} \frac{\partial^4 T(x_i, \bar{y}, t_n)}{\partial y^4} - \frac{r h^2}{2} \frac{\partial^2 T(x_i, y_j, \bar{t})}{\partial t^2} \right\|$$

En utilisant l'équation précédente et les propriétés de la norme on obtient l'inégalité suivante :

$$\|\mathcal{E}^{(n)}\|_{F_h} \leq \frac{h^2}{4!} \sup_x \left| \frac{\partial^4 T(\bar{x}, y_j, t_n)}{\partial x^4} \right| + \frac{h^2}{4!} \sup_y \left| \frac{\partial^4 T(x_i, \bar{y}, t_n)}{\partial y^4} \right| + \frac{r h^2}{2} \sup_i \left| \frac{\partial^2 T(x_i, y_j, \bar{t})}{\partial t^2} \right|$$

On met h^2 comme facteur commun, ce qui nous a donné la nouvelle inéquation suivante :

$$\|\mathcal{E}^{(n)}\|_{F_h} \leq \bar{c} h^2$$

avec :

$$\bar{c} = \frac{1}{4!} \left(\sup_x \left| \frac{\partial T(\bar{x}, y_j, t_n)}{\partial x} \right| + \sup_y \left| \frac{\partial T(x_i, \bar{y}, t_n)}{\partial y} \right| \right) + \frac{r}{2} \sup_i \left| \frac{\partial T(x_i, y_j, \bar{t})}{\partial t} \right|$$

D'après la dernière inégalité, on aura, par conséquent la consistance d'ordre 2 en h.

3.1.2) Stabilité :

Soit la norme $\| \cdot \|_{U_h}$ définie sur l'espace vectoriel U_h des fonctions T_h (où T_h est la fonction de la température sur le domaine discret D_h), et la norme $\| \cdot \|_{F_h}$ définie sur l'espace vectoriel F_h des fonctions $f^{(h)}$.

Soit α la borne supérieure de la fonction $k(T)$ ($k(T) \leq \alpha$ avec $k(T) \geq 0$), et β la borne supérieure de la fonction $q(T)$.

$$|q(T)| \leq \beta$$

$$\|T^{(h)}\|_{U_h} = \max_n (\max_{i,j} |T_{i,j}^n|)$$

$$\begin{aligned} \|f^{(h)}\|_{F_h} = & \max_{i,j} |f_{i,j}| + \max_n (\max_j |g_{a_1,n}^j|) + \max_n (\max_i |g_{a_2,n}^i|) \\ & + \max_n (\max_j |g_{b_1,n}^j|) + \max_n (\max_i |g_{b_2,n}^i|) + \left| \frac{\beta}{\rho c_p} \right| \end{aligned}$$

D'après le schéma explicite, on écrit la formule suivante après l'avoir simplifié :

$$\begin{aligned} T_{i,j}^{n+1} = & rR(k(T_{i+1,j}^n) + k(T_{i,j}^n))T_{i+1,j}^n + rR(k(T_{i-1,j}^n) + k(T_{i,j}^n))T_{i-1,j}^n \\ & + rR(k(T_{i,j+1}^n) + k(T_{i,j}^n))T_{i,j+1}^n + rR(k(T_{i,j-1}^n) + k(T_{i,j}^n))T_{i,j-1}^n \\ & + (1 - 4rRk(T_{i,j}^n) - rR(k(T_{i-1,j}^n) + k(T_{i+1,j}^n) + k(T_{i,j-1}^n) + k(T_{i,j+1}^n)))T_{i,j}^n \\ & + \frac{\tau q_{i,j}^n(T_{i,j}^n)}{\rho c_p} \end{aligned}$$

En passant à la valeur absolue de chaque terme de l'équation et si on choisit r qui vérifie

$$(1 - 4rRk(T_{i,j}^n) - rR(k(T_{i-1,j}^n) + k(T_{i+1,j}^n) + k(T_{i,j-1}^n) + k(T_{i,j+1}^n))) > 0$$

on aura l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}
|T_{i,j}^{n+1}| &\leq rR(k(T_{i+1,j}^n) + k(T_{i,j}^n))|T_{i+1,j}^n| + rR(k(T_{i-1,j}^n) + k(T_{i,j}^n))|T_{i-1,j}^n| \\
&\quad + rR(k(T_{i,j+1}^n) + k(T_{i,j}^n))|T_{i,j+1}^n| + rR(k(T_{i,j-1}^n) + k(T_{i,j}^n))|T_{i,j-1}^n| \\
&\quad + (1 - 4rRk(T_{i,j}^n) - rR(k(T_{i+1,j}^n) + k(T_{i-1,j}^n) + k(T_{i,j-1}^n) + k(T_{i,j+1}^n)))|T_{i,j}^n| \\
&\quad + \left| \frac{\tau q_{i,j}^n(T_{i,j}^n)}{\rho c_p} \right|
\end{aligned}$$

Comme $k(T) \leq \alpha$, alors on peut majorer $k(T)$ par α dans chaque terme de

l'inéquation et si $1 - 8rR\alpha > 0 \Rightarrow r < \frac{1}{8R\alpha}$, donc on écrit :

$$|T_{i,j}^{n+1}| \leq 2rR\alpha|T_{i+1,j}^n| + 2rR\alpha|T_{i-1,j}^n| + 2rR\alpha|T_{i,j+1}^n| + 2rR\alpha|T_{i,j-1}^n| + (1 - 8rR\alpha)|T_{i,j}^n| + \left| \frac{\tau \beta}{\rho c_p} \right|$$

Par la suite, en passant au maximum sur i, j de chaque terme, on obtient :

$$\begin{aligned}
\max_{i,j}|T_{i,j}^{n+1}| &\leq 2rR\alpha \max_{i,j}|T_{i+1,j}^n| + 2rR\alpha \max_{i,j}|T_{i-1,j}^n| + 2rR\alpha \max_{i,j}|T_{i,j+1}^n| + 2rR\alpha \max_{i,j}|T_{i,j-1}^n| \\
&\quad + (1 - 8rR\alpha) \max_{i,j}|T_{i,j}^n| + \left| \frac{\tau \beta}{\rho c_p} \right|
\end{aligned}$$

Comme :

$$\max_{i,j}|T_{i+1,j}^n| = \max_{i,j}|T_{i-1,j}^n| = \max_{i,j}|T_{i,j+1}^n| = \max_{i,j}|T_{i,j-1}^n| = \max_{i,j}|T_{i,j}^n|$$

(car ils sont au même niveau n).

on aura l'inégalité suivante :

$$\max_{i,j}|T_{i,j}^{n+1}| \leq \max_{i,j}|T_{i,j}^n| + \left| \frac{\tau \beta}{\rho c_p} \right|$$

Si à chaque fois on fixe n ($n=0,1,\dots, N-1$), on obtient le système d'inéquations suivant [voir la page suivante] :

$$\begin{cases} \max_{i,j} |T_{i,j}^n| \leq \max_{i,j} |T_{i,j}^{n-1}| + \left| \frac{\tau \beta}{\rho c_p} \right| \\ \vdots \\ \max_{i,j} |T_{i,j}^1| \leq \max_{i,j} |T_{i,j}^0| + \left| \frac{\tau \beta}{\rho c_p} \right| \end{cases}$$

A partir de ce système d'inéquations, on déduit :

$$\max_n \left(\max_{i,j} |T_{i,j}^{n+1}| \right) \leq \max_{i,j} |T_{i,j}^0| + (n+1) \tau \left| \frac{\beta}{\rho c_p} \right|$$

On peut écrire :

$$\max_n \left(\max_{i,j} |T_{i,j}^{n+1}| \right) \leq \max_{i,j} |T_{i,j}^0| + N \tau \left| \frac{\beta}{\rho c_p} \right|$$

Grace à $T_{i,j}^0 = f_{i,j}$ $N\tau = \bar{T}$, nous avons l'inéquation suivante :

$$\max_n \left(\max_{i,j} |T_{i,j}^{n+1}| \right) \leq \max_{i,j} |f_{i,j}| + \bar{T} \left| \frac{\beta}{\rho c_p} \right|$$

Lorsque :

$$\max_{i,j} |f_{i,j}| \leq \|f_{(h)}\|_{F_h} \quad \left| \frac{\beta}{\rho c_p} \right| \leq \|f_{(h)}\|_{F_h}$$

on a :

$$\|T_{(h)}\|_{U_h} \leq (1 + \bar{T}) \|f_{(h)}\|_{F_h}$$

Et donc, le schéma explicite est stable pour $r < \frac{1}{8R\alpha}$

3.2) Schéma implicite :

On écrit l'équation aux dérivées partielles aux points (x_i, y_j, t_{n+1}) :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial T(x_i, y_j, t_{n+1})}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k(T) \frac{\partial T(x_i, y_j, t_{n+1})}{\partial y} \right) \\ & + q(T, x_i, y_j, t_{n+1}) = \rho c_p \frac{\partial T(x_i, y_j, t_{n+1})}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Et par la méthode des différences finies on approche les dérivées secondes

$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial T(x_i, y_j, t_{n+1})}{\partial x} \right)$, $\frac{\partial}{\partial y} \left(k(T) \frac{\partial T(x_i, y_j, t_{n+1})}{\partial y} \right)$, Et la dérivée première

$\frac{\partial T(x_i, y_j, t_{n+1})}{\partial t}$ par les quotients différentiels :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right|_{(x_i, y_j, t_{n+1})} &= \frac{1}{2h^2} [(k(T_{i+1,j}^{n+1}) + k(T_{i,j}^{n+1}))(T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n+1}) - (k(T_{i-1,j}^{n+1}) + k(T_{i,j}^{n+1}))(T_{i,j}^{n+1} - T_{i-1,j}^{n+1})] \\ &+ o(h^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T}{\partial y} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right|_{(x_i, y_j, t_{n+1})} &= \frac{1}{2h^2} [(k(T_{i,j+1}^{n+1}) + k(T_{i,j}^{n+1}))(T_{i,j+1}^{n+1} - T_{i,j}^{n+1}) - (k(T_{i,j-1}^{n+1}) + k(T_{i,j}^{n+1}))(T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j-1}^{n+1})] \\ &+ o(h^2) \end{aligned}$$

qui sont des approximations d'ordre 2 en h,

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{(x_i, y_j, t_{n+1})} = \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\tau} + o(\tau) : \text{une approximation d'ordre 1 en } \tau$$

Dans ce qui suit : nous allons remplacer les quotients différentiels par leurs approximations dans l'équation (1.2) :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2h^2} [(k(T_{i+1,j}^{n+1}) + k(T_{i,j}^{n+1}))(T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n+1}) - (k(T_{i-1,j}^{n+1}) + k(T_{i,j}^{n+1}))(T_{i,j}^{n+1} - T_{i-1,j}^{n+1})] \\ & + \frac{1}{2h^2} [(k(T_{i,j+1}^{n+1}) + k(T_{i,j}^{n+1}))(T_{i,j+1}^{n+1} - T_{i,j}^{n+1}) - (k(T_{i,j-1}^{n+1}) + k(T_{i,j}^{n+1}))(T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j-1}^{n+1})] \\ & + q_{i,j}^{n+1}(T_{i,j}^{n+1}) = \rho c_p \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\tau} \end{aligned}$$

3.2.2) Stabilité :

On utilise les mêmes normes que le schéma explicite.

D'après le schéma implicite, on écrit la formule suivante après l'avoir simplifié :

$$\begin{aligned} (1 + 4rRk(T_{i,j}^{n+1}) + rR(k(T_{i-1,j}^{n+1}) + k(T_{i+1,j}^{n+1}) + k(T_{i,j-1}^{n+1}) + k(T_{i,j+1}^{n+1})))T_{i,j}^{n+1} &= \frac{\tau}{\rho c_p} q_{i,j}^{n+1} (T_{i,j}^{n+1}) \\ &+ rR(k(T_{i-1,j}^{n+1}) + k(T_{i,j}^{n+1}))T_{i-1,j}^{n+1} + rR(k(T_{i+1,j}^{n+1}) + k(T_{i,j}^{n+1}))T_{i+1,j}^{n+1} \\ &+ rR(k(T_{i,j-1}^{n+1}) + k(T_{i,j}^{n+1}))T_{i,j-1}^{n+1} + rR(k(T_{i,j+1}^{n+1}) + k(T_{i,j}^{n+1}))T_{i,j+1}^{n+1} + T_{i,j}^n \end{aligned}$$

En passant à la valeur absolue de chaque terme de l'équation et comme $k(T) \leq \alpha$, alors on peut écrire :

$$(1 + 8rR\alpha)|T_{i,j}^{n+1}| \leq \left| \frac{\tau \beta}{\rho c_p} \right| + 2rR\alpha|T_{i-1,j}^{n+1}| + 2rR\alpha|T_{i+1,j}^{n+1}| + 2rR\alpha|T_{i,j-1}^{n+1}| + 2rR\alpha|T_{i,j+1}^{n+1}| + |T_{i,j}^n|$$

Par la suite, en passant au maximum sur i, j de chaque terme, on obtient :

$$\begin{aligned} (1 + 8rR\alpha)\max_{i,j}|T_{i,j}^{n+1}| &\leq 2rR\alpha\max_{i,j}|T_{i-1,j}^{n+1}| + 2rR\alpha\max_{i,j}|T_{i+1,j}^{n+1}| + 2rR\alpha\max_{i,j}|T_{i,j-1}^{n+1}| \\ &+ 2rR\alpha\max_{i,j}|T_{i,j+1}^{n+1}| + \max_{i,j}|T_{i,j}^n| + \left| \frac{\tau \beta}{\rho c_p} \right| \end{aligned}$$

Comme :

$$\max_{i,j}|T_{i,j}^{n+1}| = \max_{i,j}|T_{i-1,j}^{n+1}| = \max_{i,j}|T_{i+1,j}^{n+1}| = \max_{i,j}|T_{i,j-1}^{n+1}| = \max_{i,j}|T_{i,j+1}^{n+1}|$$

(Car ils sont au même niveau $n+1$).

on aura l'inégalité suivante :

$$\max_{i,j}|T_{i,j}^{n+1}| \leq \max_{i,j}|T_{i,j}^n| + \tau \left| \frac{\beta}{\rho c_p} \right|$$

Si à chaque fois on fixe n ($n=0,1,2,\dots, N-1$), on obtient le système d'inéquations suivant [voir la page suivante] :

$$\begin{cases} \max_{i,j} |T_{i,j}^n| \leq \max_{i,j} |T_{i,j}^{n-1}| + \left| \frac{\tau \beta}{\rho c_p} \right| \\ \vdots \\ \max_{i,j} |T_{i,j}^1| \leq \max_{i,j} |T_{i,j}^0| + \left| \frac{\tau \beta}{\rho c_p} \right| \end{cases}$$

A partir de ce système d'inéquations, on déduit :

$$\max_n \left(\max_{i,j} |T_{i,j}^{n+1}| \right) \leq \max_{i,j} |T_{i,j}^0| + (n+1) \tau \left| \frac{\beta}{\rho c_p} \right|$$

On peut écrire :

$$\max_n \left(\max_{i,j} |T_{i,j}^{n+1}| \right) \leq \max_{i,j} |T_{i,j}^0| + N \tau \left| \frac{\beta}{\rho c_p} \right|$$

Grace à $T_{i,j}^0 = f_{i,j}$ $N \tau = \bar{T}$, nous avons l'inéquation suivante :

$$\max_n \left(\max_{i,j} |T_{i,j}^{n+1}| \right) \leq \max_{i,j} |f_{i,j}| + \bar{T} \left| \frac{\beta}{\rho c_p} \right|$$

Lorsque :

$$\max_{i,j} |f_{i,j}| \leq \|f_{(h)}\|_{F_h} \quad \left| \frac{\beta}{\rho c_p} \right| \leq \|f_{(h)}\|_{F_h}$$

on a :

$$\|T_{(h)}\|_{U_h} \leq (1 + \bar{T}) \|f_{(h)}\|_{F_h}$$

Et donc, le schéma implicite est stable et ceci quelque soit r.

Cas particulier (conductivité constante) :

Ce qui caractérise ce cas est :

-La conductivité thermique est une constante k_0 .

-La source interne de chaleur donne une valeur constante de la chaleur q^0 .

Le problème s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} k_0 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + q^0 = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \\ \text{avec } x \in [a_1, b_1], y \in [a_2, b_2], \text{ et } t \in [0, \bar{T}] \\ T(x, y, 0) = f(x, y) \quad x \in [a_1, b_1], y \in [a_2, b_2] \\ \left. \begin{array}{l} T(a_1, y, t) = g_{a_1}(y, t) \quad y \in [a_2, b_2], t \in [0, \bar{T}] \\ T(b_1, y, t) = g_{b_1}(y, t) \quad y \in [a_2, b_2], t \in [0, \bar{T}] \\ T(x, a_2, t) = g_{a_2}(x, t) \quad x \in [a_1, b_1], t \in [0, \bar{T}] \\ T(x, b_2, t) = g_{b_2}(x, t) \quad x \in [a_1, b_1], t \in [0, \bar{T}] \end{array} \right\} \text{conditions aux limites} \end{array} \right.$$

Dans ce cas nous obtenons les schémas suivants:

Schéma explicite :

Dans ce cas, les approximations des dérivées secondes s'écrivent :

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{(x_i, y_j, t_n)} = \frac{T_{i+1, j}^n - 2T_{i, j}^n + T_{i-1, j}^n}{h^2} + o(h^2)$$

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right|_{(x_i, y_j, t_n)} = \frac{T_{i, j+1}^n - 2T_{i, j}^n + T_{i, j-1}^n}{h^2} + o(h^2)$$

Posons $r = \frac{\tau}{h^2}$ et $R = \frac{k_0}{\rho c_p}$

Ces approximations nous permettent d'écrire le schéma final suivant [voir la page suivante] :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{i,j}^{n+1} = rRT_{i-1,j}^n + rRT_{i+1,j}^n + rRT_{i,j-1}^n + (1-4rR)T_{i,j}^n + rRT_{i,j+1}^n + \frac{\tau q^0}{\rho c_p} \\ \left. \begin{array}{l} i = 1 \dots M_1 - 1 \\ j = 1 \dots M_2 - 1 \end{array} \right\} n = 0 \dots N - 1 \\ T_{i,j}^0 = f_{i,j} \quad i = 0 \dots M_1, j = 0 \dots M_2 \\ \left. \begin{array}{l} T_{0,j}^n = g_{a_1,n}^j \quad j = 0 \dots M_2 \\ T_{i,0}^n = g_{a_2,n}^i \quad i = 0 \dots M_1 \\ T_{M_1,j}^n = g_{b_1,n}^j \quad j = 0 \dots M_2 \\ T_{i,M_2}^n = g_{b_2,n}^i \quad i = 0 \dots M_1 \end{array} \right\} n = 1 \dots N \end{array} \right.$$

Schéma implicite :

On considère les approximations des dérivées secondes à l'instant t_{n+1} :

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{(x_i, y_j, t_{n+1})} = \frac{T_{i+1,j}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i-1,j}^{n+1}}{h^2} + o(h^2)$$

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right|_{(x_i, y_j, t_{n+1})} = \frac{T_{i,j+1}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1}}{h^2} + o(h^2)$$

Posons $r = \frac{\tau}{h^2}$ et $R = \frac{k_0}{\rho c_p}$

Ces approximations nous permettent d'écrire le schéma final suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -rRT_{i-1,j}^{n+1} - rRT_{i+1,j}^{n+1} - rRT_{i,j-1}^{n+1} + (1+4rR)T_{i,j}^{n+1} - rRT_{i,j+1}^{n+1} = T_{i,j}^n + \frac{\tau q^0}{\rho c_p} \\ \left. \begin{array}{l} i = 1 \dots M_1 - 1 \\ j = 1 \dots M_2 - 1 \end{array} \right\} n = 0 \dots N - 1 \\ T_{i,j}^0 = f_{i,j} \quad i = 0 \dots M_1, j = 0 \dots M_2 \\ \left. \begin{array}{l} T_{0,j}^n = g_{a_1,n}^j \quad j = 0 \dots M_2 \\ T_{i,0}^n = g_{a_2,n}^i \quad i = 0 \dots M_1 \\ T_{M_1,j}^n = g_{b_1,n}^j \quad j = 0 \dots M_2 \\ T_{i,M_2}^n = g_{b_2,n}^i \quad i = 0 \dots M_1 \end{array} \right\} n = 1 \dots N \end{array} \right.$$

Pour n donné et si à chaque fois on fixe $i(i=1\dots M_1-1), j(j=1\dots M_2-1)$, on obtient un système d'équations linéaires d'ordre $(M_1 - 1) \times (M_2 - 1)$, qu'on peut écrire sous la forme matricielle suivante :

$$QX = d$$

a) **La forme de la matrice principale Q :**

On peut écrire Q de la façon suivante :

$$Q = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & \cdots & A_{1,M_1-1} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & \cdots & A_{2,M_1-1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ A_{M_1-1,1} & A_{M_1-1,2} & \cdots & \cdots & A_{M_1-1,M_1-1} \end{pmatrix}$$

avec $A_{i,j}$ sont des matrices carrées $(M_2-1) \times (M_2-1)$.

a.1) **La forme des matrices $A_{i,i}$ ($i=1\dots M_1-1$) :**

$$\begin{aligned} A_{i,i}[j, j] &= 1 + 4rR & (j = 1\dots M_2 - 1) \\ A_{i,i}[j, j-1] &= -rR & (j = 2\dots M_2 - 1) \\ A_{i,i}[j, j+1] &= -rR & (j = 1\dots M_2 - 2) \\ A_{i,i}[j, l] &= 0 & (\text{pour } l \neq j, l \neq j-1 \text{ et } l \neq j+1) \end{aligned}$$

a.2) **La forme des matrices $A_{i,i-1}$ ($i=2\dots M_1-1$) :**

$$\begin{aligned} A_{i,i-1}[j, j] &= -rR & (j = 1\dots M_2 - 1) \\ A_{i,i-1}[j, l] &= 0 & (\text{pour } l \neq j) \end{aligned}$$

a.3) **La forme des matrices $A_{i,i+1}$ ($i=1\dots M_1-2$) :**

$$\begin{aligned} A_{i,i+1}[j, j] &= -rR & (j = 1\dots M_2 - 1) \\ A_{i,i+1}[j, l] &= 0 & (\text{pour } l \neq j) \end{aligned}$$

a.4) La forme des matrices $A_{i,j}$ (pour $j \neq i, j \neq i-1$ et $j \neq i+1$) : sont des matrices nulles.

b) La forme du vecteur d :

La forme générale du vecteur d est :

$$d = (d_1, \dots, d_i, \dots, d_{M_1-1})^T$$

b.1) la forme du vecteur d_1 :

$$d_1 = \left(\begin{array}{c} \frac{\tau q^0}{\rho c_p} + rRg_{a_1, n+1}^1 + rRg_{a_2, n+1}^1 + T_{1,1}^n, \frac{\tau q^0}{\rho c_p} + rRg_{a_1, n+1}^2 + T_{1,2}^n, \dots \\ \frac{\tau q^0}{\rho c_p} + rRg_{a_1, n+1}^{M_2-2} + T_{1, M_2-2}^n, \frac{\tau q^0}{\rho c_p} + rRg_{a_1, n+1}^{M_3-1} + rRg_{b_2, n+1}^1 + T_{1, M_2-1}^n \end{array} \right)^T$$

b.2) la forme du vecteur d_i :

$$d_i = \left(\frac{\tau q^0}{\rho c_p} + rRg_{a_2, n+1}^i + T_{i,1}^n, \frac{\tau q^0}{\rho c_p} + T_{i,2}^n, \dots, \frac{\tau q^0}{\rho c_p} + T_{i, M_2-2}^n, \frac{\tau q^0}{\rho c_p} + rRg_{b_2, n+1}^i + T_{i, M_2-1}^n \right)^T$$

b.3) la forme du vecteur d_{M_1-1} :

$$d_{M_1-1} = \left(\begin{array}{c} \frac{\tau q^0}{\rho c_p} + rRg_{b_1, n+1}^1 + rRg_{a_2, n+1}^{M_1-1} + T_{M_1-1,1}^n, \frac{\tau q^0}{\rho c_p} + rRg_{b_1, n+1}^2 + T_{M_1-1,2}^n, \dots \\ \frac{\tau q^0}{\rho c_p} + rRg_{b_1, n+1}^{M_2-2} + T_{M_1-1, M_2-2}^n, \frac{\tau q^0}{\rho c_p} + rRg_{b_1, n+1}^{M_2-1} + rRg_{b_2, n+1}^{M_1-1} + T_{M_1-1, M_2-1}^n \end{array} \right)^T$$

c) La forme du vecteur X :

La forme générale du vecteur des inconnus X est :

$$X = (T_1, \dots, T_i, \dots, T_{M_1-1})^T$$

où :

$$T_i = (T_{i,1}^n, \dots, T_{i, M_2-1}^n)^T$$

Pour calculer toutes les valeurs de la température T sur le domaine discret D_h , nous devons résoudre N fois ce système d'équations linéaires.

4) Conduction bidimensionnelle stationnaire :

C'est le cas où la fonction de la température ne dépend pas du temps.

Le problème en général s'écrit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) + q(T, x, y, t) = 0 \\ \text{avec } x \in [a_1, b_1], y \in [a_2, b_2] \\ \left. \begin{array}{l} T(a_1, y) = g_{a_1}(y) \quad y \in [a_2, b_2] \\ T(b_1, y) = g_{b_1}(y) \quad y \in [a_2, b_2] \\ T(x, a_2) = g_{a_2}(x) \quad x \in [a_1, b_1] \\ T(x, b_2) = g_{b_2}(x) \quad x \in [a_1, b_1] \end{array} \right\} \text{conditions aux limites} \end{array} \right.$$

où : T est la fonction de température

k est la fonction de la conductivité thermique

q est une fonction produite par la source interne de la chaleur.

Notre objectif, c'est de chercher à calculer approximativement la solution T(x,y) du problème sur le domaine D où :

$$D = \{(x, y) \text{ avec } x \in [a_1, b_1], y \in [a_2, b_2]\}$$

Pour cela, nous tenons à diviser le domaine $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ en $(M_1 + 1) \times (M_2 + 1)$ nœuds de coordonnées $x_i = a_1 + ih, y_j = a_2 + jh$ (pour $i = 0 \dots M_1, j = 0 \dots M_2$)

avec $M_1 = \frac{b_1 - a_1}{h}, M_2 = \frac{b_2 - a_2}{h}$ où h est le pas de discrétisation ou du maillage.

Au lieu de chercher la solution T(x,y) sur le domaine D, on la cherche sur le domaine discrétisé D_h où

$$D_h = \{(x_i, y_j) / x_i = a_1 + ih \ (i = 0 \dots M_1), y_j = a_2 + jh \ (j = 0 \dots M_2)\}$$

$g_{a_1}^j$ La valeur de la fonction g_{a_1} au point y_j

$g_{b_1}^j$ La valeur de la fonction g_{b_1} au point y_j

$g_{a_2}^i$ La valeur de la fonction g_{a_2} au point x_i

$g_{b_2}^i$ La valeur de la fonction g_{b_2} au point x_i

La notation $T_{i,j}$ est la température au point (x_i, y_j)

On cherche à calculer la température $T_{i,j} = T(x_i, y_j)$ pour $i = 1 \dots M_1 - 1$,

$j = 1 \dots M_2 - 1$

On écrit l'équation aux dérivées partielles aux points (x_i, y_j) :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial T(x_i, y_j)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k(T) \frac{\partial T(x_i, y_j)}{\partial y} \right) + q(T, x_i, y_j) = 0 \quad (2)$$

Et par la méthode des différences finies on approche les dérivées secondes

$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial T(x_i, y_j)}{\partial x} \right)$, $\frac{\partial}{\partial y} \left(k(T) \frac{\partial T(x_i, y_j)}{\partial y} \right)$ par les quotients différentiels :

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right|_{(x_i, y_j)} = \frac{1}{2h^2} [(k(T_{i+1,j}) + k(T_{i,j}))(T_{i+1,j} - T_{i,j}) - (k(T_{i-1,j}) + k(T_{i,j}))(T_{i,j} - T_{i-1,j})] + o(h^2)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right|_{(x_i, y_j)} = \frac{1}{2h^2} [(k(T_{i,j+1}) + k(T_{i,j}))(T_{i,j+1} - T_{i,j}) - (k(T_{i,j-1}) + k(T_{i,j}))(T_{i,j} - T_{i,j-1})] + o(h^2)$$

qui sont des approximations d'ordre 2 en h.

Dans ce qui suit : nous allons remplacer les quotients différentiels par leurs approximations dans l'équation (2) :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2h^2} [(k(T_{i+1,j}) + k(T_{i,j}))(T_{i+1,j} - T_{i,j}) - (k(T_{i-1,j}) + k(T_{i,j}))(T_{i,j} - T_{i-1,j})] \\ & + \frac{1}{2h^2} [(k(T_{i,j+1}) + k(T_{i,j}))(T_{i,j+1} - T_{i,j}) - (k(T_{i,j-1}) + k(T_{i,j}))(T_{i,j} - T_{i,j-1})] + q_{i,j}(T_{i,j}) = 0 \end{aligned}$$

Le pas suivant consiste à multiplier l'équation par $2h^2$ pour obtenir le schéma final

$$\text{suivant : } \begin{cases} (k(T_{i+1,j}) + k(T_{i,j}))(T_{i+1,j} - T_{i,j}) - (k(T_{i-1,j}) + k(T_{i,j}))(T_{i,j} - T_{i-1,j}) \\ + (k(T_{i,j+1}) + k(T_{i,j}))(T_{i,j+1} - T_{i,j}) - (k(T_{i,j-1}) + k(T_{i,j}))(T_{i,j} - T_{i,j-1}) \\ + 2h^2 q_{i,j}(T_{i,j}) = 0 & i = 1 \dots M_1 - 1, j = 1 \dots M_2 - 1 \\ T_{0,j} = g_{a_1}^j & j = 0 \dots M_2 \\ T_{i,0} = g_{a_2}^i & i = 0 \dots M_1, \\ T_{M_1,j} = g_{b_1}^j & j = 0 \dots M_2 \\ T_{i,M_2} = g_{b_2}^i & i = 0 \dots M_1 \end{cases}$$

Pour calculer toutes les valeurs de la température T sur le domaine discret D_h , nous devons résoudre ce système d'équations non linéaires.

4.1) Consistance :

Grâce au développement de Taylor, on a pu obtenir les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{(x_i, y_j)} &= \frac{1}{2h^2} [(k(T_{i+1,j}) + k(T_{i,j}))(T_{i+1,j} - T_{i,j}) - (k(T_{i-1,j}) + k(T_{i,j}))(T_{i,j} - T_{i-1,j})] \\ &\quad + \frac{h^2}{4!} \frac{\partial^4 T(\bar{x}, y_j)}{\partial x^4} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) \Big|_{(x_i, y_j)} &= \frac{1}{2h^2} [(k(T_{i,j+1}) + k(T_{i,j}))(T_{i,j+1} - T_{i,j}) - (k(T_{i,j-1}) + k(T_{i,j}))(T_{i,j} - T_{i,j-1})] \\ &\quad + \frac{h^2}{4!} \frac{\partial^4 T(x_i, \bar{y})}{\partial y^4} \end{aligned}$$

A partir de ces formules ci-dessus, nous allons pouvoir écrire l'erreur de consistance comme suit :

$$\| \mathcal{f}^{(n)} \|_{F_h} = \left\| \frac{h^2}{4!} \frac{\partial^4 T(\bar{x}, y_j)}{\partial x^4} + \frac{h^2}{4!} \frac{\partial^4 T(x_i, \bar{y})}{\partial y^4} \right\|$$

En utilisant l'équation précédente et les propriétés de la norme on obtient l'inégalité suivante [voir la page suivante] :

$$\|\delta f^{(n)}\|_{F_h} \leq \frac{h^2}{4!} \sup_x \left| \frac{\partial^4 T(\bar{x}, y_j)}{\partial x^4} \right| + \frac{h^2}{4!} \sup_y \left| \frac{\partial^4 T(x_i, \bar{y})}{\partial y^4} \right|$$

On met h^2 comme facteur commun, ce qui nous a donné la nouvelle inéquation suivante :

$$\|\delta f^{(n)}\|_{F_h} \leq \bar{c} h^2$$

avec :

$$\bar{c} = \frac{1}{4!} \left(\sup_x \left| \frac{\partial T(\bar{x}, y_j)}{\partial x} \right| + \sup_y \left| \frac{\partial T(x_i, \bar{y})}{\partial y} \right| \right)$$

D'après la dernière inégalité, on aura, par conséquent la consistance d'ordre 2 en h .

Cas particulier (conductivité constante) :

Ce qui caractérise ce cas est :

-La conductivité thermique est une constante k_0 .

-La source interne de chaleur donne une valeur constante de la chaleur q^0 .

Le problème s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} k_0 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + q^0 = 0 \\ \text{avec } x \in [a_1, b_1], y \in [a_2, b_2] \\ \left. \begin{array}{l} T(a_1, y) = g_{a_1}(y) \quad y \in [a_2, b_2] \\ T(b_1, y) = g_{b_1}(y) \quad y \in [a_2, b_2] \\ T(x, a_2) = g_{a_2}(x) \quad x \in [a_1, b_1] \\ T(x, b_2) = g_{b_2}(x) \quad x \in [a_1, b_1] \end{array} \right\} \text{conditions aux limites} \end{array} \right.$$

Dans ce cas, les approximations des dérivées secondes s'écrivent :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Big|_{(x_i, y_j)} = \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{h^2} + o(h^2)$$

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right|_{(x_i, y_j)} = \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{h^2} + o(h^2)$$

Ces approximations nous permettent d'écrire le schéma final suivant :

$$\begin{cases} T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} + T_{i,j+1} = \frac{-h^2 q^0}{k_0} & i = 1 \dots M_1 - 1, j = 1 \dots M_2 - 1 \\ T_{0,j} = g_{a_1}^j & j = 0 \dots M_2 \\ T_{i,0} = g_{a_2}^i & i = 0 \dots M_1 \\ T_{M_1,j} = g_{b_1}^j & j = 0 \dots M_2 \\ T_{i,M_2} = g_{b_2}^i & i = 0 \dots M_1 \end{cases}$$

Si à chaque fois on fixe $i(i=1 \dots M_1-1), j(j=1 \dots M_2-1)$, on obtient un système d'équations linéaires d'ordre $(M_1 - 1) \times (M_2 - 1)$, qu'on peut écrire sous la forme matricielle suivante :

$$QX = d$$

a) La forme de la matrice principale Q :

On peut écrire Q de la façon suivante :

$$Q = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & \cdots & A_{1,M_1-1} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & \cdots & A_{2,M_1-1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ A_{M_1-1,1} & A_{M_1-1,2} & \cdots & \cdots & A_{M_1-1,M_1-1} \end{pmatrix}$$

avec $A_{i,j}$ sont des matrices carrées $(M_2-1) \times (M_2-1)$.

a.1) La forme des matrices $A_{i,i}$ ($i=1...M_1-1$) :

$$\begin{aligned} A_{i,i}[j, j] &= -4 & (j = 1...M_2 - 1) \\ A_{i,i}[j, j-1] &= 1 & (j = 2...M_2 - 1) \\ A_{i,i}[j, j+1] &= 1 & (j = 1...M_2 - 2) \\ A_{i,i}[j, l] &= 0 & (\text{pour } l \neq j, l \neq j-1 \text{ et } l \neq j+1) \end{aligned}$$

a.2) La forme des matrices $A_{i,i-1}$ ($i=2...M_1-1$) :

$$\begin{aligned} A_{i,i-1}[j, j] &= 1 & (j = 1...M_2 - 1) \\ A_{i,i-1}[j, l] &= 0 & (\text{pour } l \neq j) \end{aligned}$$

a.3) La forme des matrices $A_{i,i+1}$ ($i=1...M_1-2$) :

$$\begin{aligned} A_{i,i+1}[j, j] &= 1 & (j = 1...M_2 - 1) \\ A_{i,i+1}[j, l] &= 0 & (\text{pour } l \neq j) \end{aligned}$$

a.4) La forme des matrices $A_{i,j}$ (pour $j \neq i$, $j \neq i-1$ et $j \neq i+1$) : sont des matrices nulles.

b) La forme du vecteur d :

La forme générale du vecteur d est :

$$d = (d_1, \dots, d_i, \dots, d_{M_1-1})^T$$

b.1) la forme du vecteur d_1 :

$$d_1 = \left(\frac{-h^2 q^0}{k_0} - g_{a_1}^1 - g_{a_2}^1, \frac{-h^2 q^0}{k_0} - g_{a_1}^2, \dots, \frac{-h^2 q^0}{k_0} - g_{a_1}^{M_2-2}, \frac{-h^2 q^0}{k_0} - g_{a_1}^{M_2-1} - g_{b_2}^1 \right)^T$$

b.2) la forme du vecteur d_i :

$$d_i = \left(\frac{-h^2 q^0}{k_0} - g_{a_2}^i, \underbrace{\frac{-h^2 q^0}{k_0}}_{(M_2-3) \text{ fois}}, \frac{-h^2 q^0}{k_0} - g_{b_2}^i \right)^T$$

b.3) la forme du vecteur d_{M_1-1} :

$$d_{M_1-1} = \left(\frac{-h^2 q^0}{k_0} - g_{b_1}^1 - g_{a_2}^{M_1-1}, \frac{-h^2 q^0}{k_0} - g_{b_1}^2, \dots, \frac{-h^2 q^0}{k_0} - g_{b_1}^{M_3-2}, \frac{-h^2 q^0}{k_0} - g_{b_1}^{M_2-1} - g_{b_2}^{M_1-1} \right)^T$$

c) La forme du vecteur X :

La forme générale du vecteur des inconnus X est :

$$X = (T_1, \dots, T_i, \dots, T_{M_1-1})^T$$

où :

$$T_i = (T_{i,1}, \dots, T_{i,j}, \dots, T_{i,M_2-1})^T$$

Pour calculer toutes les valeurs de la température T sur le domaine discret D_h , nous devons résoudre ce système d'équations linéaires.

5) Conduction tridimensionnelle non stationnaire :

Le problème en général s'écrit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q(T, x, y, z, t) = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \\ \text{avec } x \in [a_1, b_1], y \in [a_2, b_2], z \in [a_3, b_3] \text{ et } t \in [0, \bar{T}] \\ T(x, y, z, 0) = f(x, y, z) \quad x \in [a_1, b_1], y \in [a_2, b_2], z \in [a_3, b_3] \\ T(a_1, y, z, t) = g_{a_1}(y, z, t) \quad y \in [a_2, b_2], z \in [a_3, b_3], t \in [0, \bar{T}] \\ T(b_1, y, z, t) = g_{b_1}(y, z, t) \quad y \in [a_2, b_2], z \in [a_3, b_3], t \in [0, \bar{T}] \\ T(x, a_2, z, t) = g_{a_2}(x, z, t) \quad x \in [a_1, b_1], z \in [a_3, b_3], t \in [0, \bar{T}] \\ T(x, b_2, z, t) = g_{b_2}(x, z, t) \quad x \in [a_1, b_1], z \in [a_3, b_3], t \in [0, \bar{T}] \\ T(x, y, a_3, t) = g_{a_3}(x, y, t) \quad x \in [a_1, b_1], y \in [a_2, b_2], t \in [0, \bar{T}] \\ T(x, y, b_3, t) = g_{b_3}(x, y, t) \quad x \in [a_1, b_1], y \in [a_2, b_2], t \in [0, \bar{T}] \end{array} \right. \text{conditions aux limites}$$

où : T est la fonction de température

k est la fonction de la conductivité thermique

q est une fonction produite par la source interne de la chaleur.

Notre objectif, c'est de chercher à calculer approximativement la solution $T(x,y,z,t)$ du problème sur le domaine D où :

$$D = \{x, y, z, t) \text{ avec } x \in [a_1, b_1], y \in [a_2, b_2], z \in [a_3, b_3], t \in [0, \bar{T}]\}$$

Pour cela, nous tenons à diviser le domaine $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ en

$(M_1 + 1) \times (M_2 + 1) \times (M_3 + 1)$ nœuds de coordonnées

$$x_i = a_1 + ih, y_j = a_2 + jh, z_l = a_3 + lh, \text{ (pour } i = 0 \dots M_1, j = 0 \dots M_2, l = 0 \dots M_3)$$

avec $M_1 = \frac{b_1 - a_1}{h}, M_2 = \frac{b_2 - a_2}{h}$ et $M_3 = \frac{b_3 - a_3}{h}$ où h est le pas de discrétisation

ou du maillage, le temps est discrétisé en intervalles de pas constant τ

$$t_n = n\tau \text{ (pour } n = 0 \dots N) \text{ Avec } N = \frac{\bar{T}}{\tau}$$

Au lieu de chercher la solution $T(x,y,z,t)$ sur le domaine D , on la cherche sur le domaine discrétisé D_h où :

$$D_h = \left\{ (x_i, y_j, z_l, t_n) / \begin{array}{l} x_i = a_1 + ih \text{ (} i = 0 \dots M_1), y_j = a_2 + jh \text{ (} j = 0 \dots M_2), \\ z_l = a_3 + lh \text{ (} l = 0 \dots M_3), t_n = n\tau \text{ (} n = 0 \dots N) \end{array} \right\}$$

On note par $f_{i,j,l}$ la valeur de la fonction f au point (x_i, y_j, z_l)

$g_{a_1}^{j,l}$ la valeur de la fonction g_{a_1} au point (y_j, z_l, t_n)

$g_{b_1}^{j,l}$ la valeur de la fonction g_{b_1} au point (y_j, z_l, t_n)

$g_{a_2}^{i,l}$ la valeur de la fonction g_{a_2} au point (x_i, z_l, t_n)

$g_{b_2}^{i,l}$ la valeur de la fonction g_{b_2} au point (x_i, z_l, t_n)

$g_{a_3}^{i,j}$ la valeur de la fonction g_{a_3} au point (x_i, y_j, t_n)

$g_{b_3}^{i,j}$ la valeur de la fonction g_{b_3} au point (x_i, y_j, t_n)

La notation $T_{i,j,l}^n$ est la température au point (x_i, y_j, z_l, t_n)

On cherche à calculer la température $T_{i,j,l}^n = T(x_i, y_j, z_l, t_n)$ pour $i = 1 \dots M_1 - 1$,

$j = 1 \dots M_2 - 1$, et $l = 1 \dots M_3 - 1$ et tout cela pour $n = 1 \dots N$.

Par la suite, nous allons voir deux schémas concernant la résolution du problème, le schéma explicite qui nous permet de calculer directement les valeurs de la température de différents niveaux, et le schéma implicite qui nous permet de calculer les valeurs de la température en passant par la résolution d'un système d'équations linéaires ou non linéaires.

5.1) Schéma explicite :

On écrit l'équation aux dérivées partielles aux points (x_i, y_j, z_l, t_n) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial T(x_i, y_j, z_l, t_n)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k(T) \frac{\partial T(x_i, y_j, z_l, t_n)}{\partial y} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(k(T) \frac{\partial T(x_i, y_j, z_l, t_n)}{\partial z} \right) + q(T, x_i, y_j, z_l, t_n) = \rho c_p \frac{\partial T(x_i, y_j, z_l, t_n)}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Et par la méthode des différences finies on approche les dérivées secondes

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial T(x_i, y_j, z_l, t_n)}{\partial x} \right), \frac{\partial}{\partial y} \left(k(T) \frac{\partial T(x_i, y_j, z_l, t_n)}{\partial y} \right), \text{ et } \frac{\partial}{\partial z} \left(k(T) \frac{\partial T(x_i, y_j, z_l, t_n)}{\partial z} \right)$$

et la dérivée première $\frac{\partial T(x_i, y_j, z_l, t_n)}{\partial t}$ par les quotients différentiels :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right|_{(x_i, y_j, z_l, t_n)} &= \frac{1}{2h^2} [(k(T_{i+1,j,l}^n) + k(T_{i,j,l}^n))(T_{i+1,j,l}^n - T_{i,j,l}^n) \\ &\quad - (k(T_{i-1,j,l}^n) + k(T_{i,j,l}^n))(T_{i,j,l}^n - T_{i-1,j,l}^n)] + o(h^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T}{\partial y} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right|_{(x_i, y_j, z_l, t_n)} &= \frac{1}{2h^2} [(k(T_{i,j+1,l}^n) + k(T_{i,j,l}^n))(T_{i,j+1,l}^n - T_{i,j,l}^n) \\ &\quad - (k(T_{i,j-1,l}^n) + k(T_{i,j,l}^n))(T_{i,j,l}^n - T_{i,j-1,l}^n)] + o(h^2) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial z} \right) \Big|_{(x_i, y_j, z_l, t_n)} = \frac{1}{2h^2} \left[(k(T_{i,j,l+1}^n) + k(T_{i,j,l}^n))(T_{i,j,l+1}^n - T_{i,j,l}^n) \right. \\ \left. - (k(T_{i,j,l-1}^n) + k(T_{i,j,l}^n))(T_{i,j,l}^n - T_{i,j,l-1}^n) \right] + o(h^2)$$

qui sont des approximations d'ordre 2 en h,

$$\frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{(x_i, y_j, z_l, t_n)} = \frac{T_{i,j,l}^{n+1} - T_{i,j,l}^n}{\tau} + o(\tau) : \text{une approximation d'ordre 1 en } \tau$$

Dans ce qui suit ; nous allons remplacer les quotients différentiels par leurs approximations dans l'équation (1.1) :

$$\frac{1}{2h^2} \left[(k(T_{i+1,j,l}^n) + k(T_{i,j,l}^n))(T_{i+1,j,l}^n - T_{i,j,l}^n) - (k(T_{i-1,j,l}^n) + k(T_{i,j,l}^n))(T_{i,j,l}^n - T_{i-1,j,l}^n) \right] \\ + \frac{1}{2h^2} \left[(k(T_{i,j+1,l}^n) + k(T_{i,j,l}^n))(T_{i,j+1,l}^n - T_{i,j,l}^n) - (k(T_{i,j-1,l}^n) + k(T_{i,j,l}^n))(T_{i,j,l}^n - T_{i,j-1,l}^n) \right] \\ + \frac{1}{2h^2} \left[(k(T_{i,j,l+1}^n) + k(T_{i,j,l}^n))(T_{i,j,l+1}^n - T_{i,j,l}^n) - (k(T_{i,j,l-1}^n) + k(T_{i,j,l}^n))(T_{i,j,l}^n - T_{i,j,l-1}^n) \right] \\ + q_{i,j,l}^n(T_{i,j,l}^n) = \rho c_p \frac{T_{i,j,l}^{n+1} - T_{i,j,l}^n}{\tau}$$

Le pas suivant consiste à multiplier l'équation par $\frac{\tau}{\rho c_p}$ pour obtenir la nouvelle

équation qui serai ainsi :

$$\frac{\tau}{\rho c_p} \frac{1}{2h^2} \left[(k(T_{i+1,j,l}^n) + k(T_{i,j,l}^n))(T_{i+1,j,l}^n - T_{i,j,l}^n) - (k(T_{i-1,j,l}^n) + k(T_{i,j,l}^n))(T_{i,j,l}^n - T_{i-1,j,l}^n) \right. \\ \left. + (k(T_{i,j+1,l}^n) + k(T_{i,j,l}^n))(T_{i,j+1,l}^n - T_{i,j,l}^n) - (k(T_{i,j-1,l}^n) + k(T_{i,j,l}^n))(T_{i,j,l}^n - T_{i,j-1,l}^n) \right. \\ \left. + (k(T_{i,j,l+1}^n) + k(T_{i,j,l}^n))(T_{i,j,l+1}^n - T_{i,j,l}^n) - (k(T_{i,j,l-1}^n) + k(T_{i,j,l}^n))(T_{i,j,l}^n - T_{i,j,l-1}^n) \right] \\ + \frac{\tau}{\rho c_p} q_{i,j,l}^n(T_{i,j,l}^n) = T_{i,j,l}^{n+1} - T_{i,j,l}^n$$

$$\text{Posons } r = \frac{\tau}{h^2} \text{ et } R = \frac{1}{2 \rho c_p}$$

Nous devons transférer $T_{i,j,l}^n$, cela nous mène vers le schéma final suivant [voir la page suivante] :

$$\left\{ \begin{array}{l}
T_{i,j,l}^{n+1} = rR \left[\left(k(T_{i+1,j,l}^n) + k(T_{i,j,l}^n) \right) (T_{i+1,j,l}^n - T_{i,j,l}^n) - \left(k(T_{i-1,j,l}^n) + k(T_{i,j,l}^n) \right) (T_{i,j,l}^n - T_{i-1,j,l}^n) \right. \\
\quad + \left. \left(k(T_{i,j+1,l}^n) + k(T_{i,j,l}^n) \right) (T_{i,j+1,l}^n - T_{i,j,l}^n) - \left(k(T_{i,j-1,l}^n) + k(T_{i,j,l}^n) \right) (T_{i,j,l}^n - T_{i,j-1,l}^n) \right. \\
\quad + \left. \left(k(T_{i,j,l+1}^n) + k(T_{i,j,l}^n) \right) (T_{i,j,l+1}^n - T_{i,j,l}^n) - \left(k(T_{i,j,l-1}^n) + k(T_{i,j,l}^n) \right) (T_{i,j,l}^n - T_{i,j,l-1}^n) \right] \\
+ \frac{\tau}{\rho c_p} q_{i,j,l}^n (T_{i,j,l}^n) + T_{i,j,l}^n \quad \left. \begin{array}{l} i = 1 \dots M_1 - 1 \\ j = 1 \dots M_2 - 1 \\ l = 1 \dots M_3 - 1 \end{array} \right\} n = 0 \dots N - 1 \\
\left. \begin{array}{l}
T_{i,j,l}^0 = f_{i,j,l} \quad i = 0 \dots M_1, j = 0 \dots M_2, l = 0 \dots M_3 \\
T_{0,j,l}^n = g_{a_1,n}^{j,l} \quad j = 0 \dots M_2, l = 0 \dots M_3 \\
T_{i,0,l}^n = g_{a_2,n}^{i,l} \quad i = 0 \dots M_1, l = 0 \dots M_3 \\
T_{i,j,0}^n = g_{a_3,n}^{i,j} \quad i = 0 \dots M_1, j = 0 \dots M_2 \\
T_{M_1,j,l}^n = g_{b_1,n}^{j,l} \quad j = 0 \dots M_2, l = 0 \dots M_3 \\
T_{i,M_2,l}^n = g_{b_2,n}^{i,l} \quad i = 0 \dots M_1, l = 0 \dots M_3 \\
T_{i,j,M_3}^n = g_{b_3,n}^{i,j} \quad i = 0 \dots M_1, j = 0 \dots M_2
\end{array} \right\} n = 1 \dots N
\end{array} \right.$$

A partir de ce schéma, on peut calculer directement toutes les valeurs de $T_{i,j,l}^n$ pour :

$i=0 \dots M_1, j=0 \dots M_2, l=0 \dots M_3$, et tout cela pour $n=1 \dots N$.

5.1.1) Consistance :

Grâce au développement de Taylor, on a pu obtenir les formules suivantes :

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right|_{(x_i, y_j, z_l, t_n)} = \frac{1}{2h^2} \left[\left(k(T_{i+1,j,l}^n) + k(T_{i,j,l}^n) \right) (T_{i+1,j,l}^n - T_{i,j,l}^n) \right. \\
\left. - \left(k(T_{i-1,j,l}^n) + k(T_{i,j,l}^n) \right) (T_{i,j,l}^n - T_{i-1,j,l}^n) \right] + \frac{h^2}{4!} \frac{\partial^4 T(x_i, y_j, z_l, t_n)}{\partial x^4}$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right|_{(x_i, y_j, z_l, t_n)} = \frac{1}{2h^2} \left[\left(k(T_{i,j+1,l}^n) + k(T_{i,j,l}^n) \right) (T_{i,j+1,l}^n - T_{i,j,l}^n) \right. \\
\left. - \left(k(T_{i,j-1,l}^n) + k(T_{i,j,l}^n) \right) (T_{i,j,l}^n - T_{i,j-1,l}^n) \right] + \frac{h^2}{4!} \frac{\partial^4 T(x_i, \bar{y}_j, z_l, t_n)}{\partial y^4}$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right|_{(x_i, y_j, z_l, t_n)} = \frac{1}{2h^2} \left[\left(k(T_{i,j,l+1}^n) + k(T_{i,j,l}^n) \right) (T_{i,j,l+1}^n - T_{i,j,l}^n) \right. \\
\left. - \left(k(T_{i,j,l-1}^n) + k(T_{i,j,l}^n) \right) (T_{i,j,l}^n - T_{i,j,l-1}^n) \right] + \frac{h^2}{4!} \frac{\partial^4 T(x_i, y_j, \bar{z}_l, t_n)}{\partial z^4}$$

$$\frac{dT(x_i, y_j, z_l, t_n)}{dt} = \frac{T_{i,j,l}^{n+1} - T_{i,j,l}^{n+1}}{\tau} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 T(x_i, y_j, z_l, \bar{t})}{\partial t^2}$$

A partir de ces formules ci-dessus, nous allons pouvoir écrire l'erreur de consistance comme suit :

$$\|\mathcal{E}^{(n)}\|_{F_h} = \left\| \frac{h^2}{4!} \frac{\partial^4 T(\bar{x}, y_j, z_l, t_n)}{\partial x^4} + \frac{h^2}{4!} \frac{\partial^4 T(x_i, \bar{y}, z_l, t_n)}{\partial y^4} + \frac{h^2}{4!} \frac{\partial^4 T(x_i, y_j, \bar{z}, t_n)}{\partial z^4} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 T(x_i, y_j, z_l, \bar{t})}{\partial t^2} \right\|$$

Comme $\tau = r h^2$, on peut réécrire l'erreur de consistance ainsi :

$$\|\mathcal{E}^{(n)}\|_{F_h} = \left\| \frac{h^2}{4!} \frac{\partial^4 T(\bar{x}, y_j, z_l, t_n)}{\partial x^4} + \frac{h^2}{4!} \frac{\partial^4 T(x_i, \bar{y}, z_l, t_n)}{\partial y^4} + \frac{h^2}{4!} \frac{\partial^4 T(x_i, y_j, \bar{z}, t_n)}{\partial z^4} - \frac{r h^2}{2} \frac{\partial^2 T(x_i, y_j, z_l, \bar{t})}{\partial t^2} \right\|$$

En utilisant l'équation précédente et les propriétés de la norme on obtient l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{E}^{(n)}\|_{F_h} &\leq \frac{h^2}{4!} \sup_x \left| \frac{\partial^4 T(\bar{x}, y_j, z_l, t_n)}{\partial x^4} \right| + \frac{h^2}{4!} \sup_y \left| \frac{\partial^4 T(x_i, \bar{y}, z_l, t_n)}{\partial y^4} \right| \\ &\quad + \frac{h^2}{4!} \sup_z \left| \frac{\partial^4 T(x_i, y_j, \bar{z}, t_n)}{\partial z^4} \right| + \frac{r h^2}{2} \sup_t \left| \frac{\partial^2 T(x_i, y_j, z_l, \bar{t})}{\partial t^2} \right| \end{aligned}$$

On met h^2 comme facteur commun, ce qui nous a donné la nouvelle inéquation suivante :

$$\|\mathcal{E}^{(n)}\|_{F_h} \leq \bar{c} h^2$$

avec :

$$\begin{aligned} \bar{c} &= \frac{1}{4!} \left(\sup_x \left| \frac{\partial T(\bar{x}, y_j, z_l, t_n)}{\partial x} \right| + \sup_y \left| \frac{\partial T(x_i, \bar{y}, z_l, t_n)}{\partial y} \right| + \sup_z \left| \frac{\partial T(x_i, y_j, \bar{z}, t_n)}{\partial z} \right| \right) \\ &\quad + \frac{r}{2} \sup_t \left| \frac{\partial T(x_i, y_j, z_l, \bar{t})}{\partial t} \right| \end{aligned}$$

D'après la dernière inégalité, on aura, par conséquent la consistance d'ordre 2 en h .

5.1.2) Stabilité :

Soit la norme $\| \cdot \|_{U_h}$ définie sur l'espace vectoriel U_h des fonctions T_h (où T_h est la fonction de la température sur le domaine discret D_h), et la norme $\| \cdot \|_{F_h}$ définie sur l'espace vectoriel F_h des fonctions $f^{(h)}$.

Soit α la borne supérieure de la fonction $k(T)$ ($k(T) \leq \alpha$ avec $k(T) \geq 0$), et β la borne supérieure de la fonction $q(T)$.

$$|q(T)| \leq \beta$$

$$\|T_{(h)}\|_{U_h} = \max_n (\max_{i,j,l} |T_{i,j,l}^n|)$$

$$\begin{aligned} \|f_{(h)}\|_{F_h} = & \max_{i,j,l} |f_{i,j,l}| + \max_n (\max_{j,l} |g_{a_1,n}^{j,l}|) + \max_n (\max_{i,l} |g_{a_2,n}^{i,l}|) + \max_n (\max_{i,j} |g_{a_3,n}^{i,j}|) \\ & + \max_n (\max_{j,l} |g_{b_1,n}^{j,l}|) + \max_n (\max_{i,l} |g_{b_2,n}^{i,l}|) + \max_n (\max_{i,j} |g_{b_3,n}^{i,j}|) + \left| \frac{\beta}{\rho c_p} \right| \end{aligned}$$

D'après le schéma explicite, on écrit la formule suivante après l'avoir simplifié :

$$\begin{aligned} T_{i,j,l}^{n+1} = & rR(k(T_{i+1,j,l}^n) + k(T_{i,j,l}^n))T_{i+1,j,l}^n + rR(k(T_{i-1,j,l}^n) + k(T_{i,j,l}^n))T_{i-1,j,l}^n \\ & + rR(k(T_{i,j+1,l}^n) + k(T_{i,j,l}^n))T_{i,j+1,l}^n + rR(k(T_{i,j-1,l}^n) + k(T_{i,j,l}^n))T_{i,j-1,l}^n \\ & + rR(k(T_{i,j,l+1}^n) + k(T_{i,j,l}^n))T_{i,j,l+1}^n + rR(k(T_{i,j,l-1}^n) + k(T_{i,j,l}^n))T_{i,j,l-1}^n \\ & + \left(1 - 6rRk(T_{i,j,l}^n) - rR \left(\begin{aligned} & k(T_{i-1,j,l}^n) + k(T_{i+1,j,l}^n) + k(T_{i,j-1,l}^n) \\ & + k(T_{i,j+1,l}^n) + k(T_{i,j,l-1}^n) + k(T_{i,j,l+1}^n) \end{aligned} \right) \right) T_{i,j,l}^n \\ & + \frac{\tau q_{i,j,l}^n(T_{i,j,l}^n)}{\rho c_p} \end{aligned}$$

En passant à la valeur absolue de chaque terme de l'équation et si on choisit r qui vérifie

$$(1 - 6rRk(T_{i,j,l}^n) - rR(k(T_{i-1,j,l}^n) + k(T_{i+1,j,l}^n) + k(T_{i,j-1,l}^n) + k(T_{i,j+1,l}^n) + k(T_{i,j,l-1}^n) + k(T_{i,j,l+1}^n))) > 0$$

on aura l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}
|T_{i,j,l}^{n+1}| \leq & rR(k(T_{i+1,j,l}^n) + k(T_{i,j,l}^n))|T_{i+1,j,l}^n| + rR(k(T_{i-1,j,l}^n) + k(T_{i,j,l}^n))|T_{i-1,j,l}^n| \\
& + rR(k(T_{i,j+1,l}^n) + k(T_{i,j,l}^n))|T_{i,j+1,l}^n| + rR(k(T_{i,j-1,l}^n) + k(T_{i,j,l}^n))|T_{i,j-1,l}^n| \\
& + rR(k(T_{i,j,l+1}^n) + k(T_{i,j,l}^n))|T_{i,j,l+1}^n| + rR(k(T_{i,j,l-1}^n) + k(T_{i,j,l}^n))|T_{i,j,l-1}^n| \\
& + \left(1 - 6rRk(T_{i,j,l}^n) - rR \left(\begin{array}{l} k(T_{i-1,j,l}^n) + k(T_{i+1,j,l}^n) + k(T_{i,j-1,l}^n) \\ + k(T_{i,j+1,l}^n) + k(T_{i,j,l-1}^n) + k(T_{i,j,l+1}^n) \end{array} \right) \right) |T_{i,j,l}^n| \\
& + \left| \frac{\tau q_{i,j,l}^n(T_{i,j,l}^n)}{\rho c_p} \right|
\end{aligned}$$

Comme $k(T) \leq \alpha$, alors on peut majorer $k(T)$ par α dans chaque terme de l'inéquation et si

$$1 - 12rR\alpha > 0 \Rightarrow r < \frac{1}{12R\alpha},$$

donc on écrit :

$$\begin{aligned}
|T_{i,j,l}^{n+1}| \leq & 2rR\alpha |T_{i+1,j,l}^n| + 2rR\alpha |T_{i-1,j,l}^n| + 2rR\alpha |T_{i,j+1,l}^n| + 2rR\alpha |T_{i,j-1,l}^n| + 2rR\alpha |T_{i,j,l+1}^n| \\
& + 2rR\alpha |T_{i,j,l-1}^n| + (1 - 12rR\alpha) |T_{i,j,l}^n| + \left| \frac{\tau \beta}{\rho c_p} \right|
\end{aligned}$$

Par la suite, en passant au maximum sur i, j et l de chaque terme, on obtient :

$$\begin{aligned}
\max_{i,j,l} |T_{i,j,l}^{n+1}| \leq & 2rR\alpha \max_{i,j,l} |T_{i+1,j,l}^n| + 2rR\alpha \max_{i,j,l} |T_{i-1,j,l}^n| + 2rR\alpha \max_{i,j,l} |T_{i,j+1,l}^n| + 2rR\alpha \max_{i,j,l} |T_{i,j-1,l}^n| \\
& + 2rR\alpha \max_{i,j,l} |T_{i,j,l+1}^n| + 2rR\alpha \max_{i,j,l} |T_{i,j,l-1}^n| + (1 - 12rR\alpha) \max_{i,j,l} |T_{i,j,l}^n| + \left| \frac{\tau \beta}{\rho c_p} \right|
\end{aligned}$$

Comme :

$$\begin{aligned}
\max_{i,j,l} |T_{i+1,j,l}^n| &= \max_{i,j,l} |T_{i-1,j,l}^n| = \max_{i,j,l} |T_{i,j+1,l}^n| = \max_{i,j,l} |T_{i,j-1,l}^n| = \max_{i,j,l} |T_{i,j,l+1}^n| \\
&= \max_{i,j,l} |T_{i,j,l-1}^n| = \max_{i,j,l} |T_{i,j,l}^n|
\end{aligned}$$

(car ils sont au même niveau n).

on aura l'inégalité suivante :

$$\max_{i,j,l} |T_{i,j,l}^{n+1}| \leq \max_{i,j,l} |T_{i,j,l}^n| + \left| \frac{\tau \beta}{\rho c_p} \right|$$

Si à chaque fois on fixe n (n=0,1,..., N-1), on obtient le système d'inéquations suivant :

$$\begin{cases} \max_{i,j,l} |T_{i,j,l}^n| \leq \max_{i,j,l} |T_{i,j,l}^{n-1}| + \left| \frac{\tau \beta}{\rho c_p} \right| \\ \vdots \\ \max_{i,j,l} |T_{i,j,l}^1| \leq \max_{i,j,l} |T_{i,j,l}^0| + \left| \frac{\tau \beta}{\rho c_p} \right| \end{cases}$$

A partir de ce système d'inéquations, on déduit :

$$\max_n \left(\max_{i,j,l} |T_{i,j,l}^{n+1}| \right) \leq \max_{i,j,l} |T_{i,j,l}^0| + (n+1)\tau \left| \frac{\beta}{\rho c_p} \right|$$

On peut écrire :

$$\max_n \left(\max_{i,j,l} |T_{i,j,l}^{n+1}| \right) \leq \max_{i,j,l} |T_{i,j,l}^0| + N\tau \left| \frac{\beta}{\rho c_p} \right|$$

Grace à $T_{i,j,l}^0 = f_{i,j,l}$ $N\tau = \bar{T}$, nous avons l'inéquation suivante :

$$\max_n \left(\max_{i,j,l} |T_{i,j,l}^{n+1}| \right) \leq \max_{i,j,l} |f_{i,j,l}| + \bar{T} \left| \frac{\beta}{\rho c_p} \right|$$

Lorsque :

$$\max_{i,j,l} |f_{i,j,l}| \leq \|f_{(h)}\|_{F_h} \quad \left| \frac{\beta}{\rho c_p} \right| \leq \|f_{(h)}\|_{F_h}$$

on a :

$$\|T^{(h)}\|_{U_h} \leq (1 + \bar{T}) \|f^{(h)}\|_{F_h}$$

Et donc, le schéma explicite est stable pour $r < \frac{1}{12R\alpha}$

5.2) Schéma implicite :

On écrit l'équation aux dérivées partielles aux points (x_i, y_j, z_l, t_{n+1}) :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial T(x_i, y_j, z_l, t_{n+1})}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k(T) \frac{\partial T(x_i, y_j, z_l, t_{n+1})}{\partial y} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left(k(T) \frac{\partial T(x_i, y_j, z_l, t_{n+1})}{\partial z} \right) + q(T, x_i, y_j, z_l, t_{n+1}) = \rho c_p \frac{\partial T(x_i, y_j, z_l, t_{n+1})}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Et par la méthode des différences finies on approche les dérivées secondes

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial T(x_i, y_j, z_l, t_{n+1})}{\partial x} \right), \frac{\partial}{\partial y} \left(k(T) \frac{\partial T(x_i, y_j, z_l, t_{n+1})}{\partial y} \right), \\ & \text{et } \frac{\partial}{\partial z} \left(k(T) \frac{\partial T(x_i, y_j, z_l, t_{n+1})}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad \text{et la dérivée première}$$

$\frac{\partial T(x_i, y_j, z_l, t_{n+1})}{\partial t}$ par les quotients différentiels :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{(x_i, y_j, z_l, t_{n+1})} &= \frac{1}{2h^2} [(k(T_{i+1,j,l}^{n+1}) + k(T_{i,j,l}^{n+1})) (T_{i+1,j,l}^{n+1} - T_{i,j,l}^{n+1}) \\ & - (k(T_{i-1,j,l}^{n+1}) + k(T_{i,j,l}^{n+1})) (T_{i,j,l}^{n+1} - T_{i-1,j,l}^{n+1})] + o(h^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial y} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) \Big|_{(x_i, y_j, z_l, t_{n+1})} &= \frac{1}{2h^2} [(k(T_{i,j+1,l}^{n+1}) + k(T_{i,j,l}^{n+1})) (T_{i,j+1,l}^{n+1} - T_{i,j,l}^{n+1}) \\ & - (k(T_{i,j-1,l}^{n+1}) + k(T_{i,j,l}^{n+1})) (T_{i,j,l}^{n+1} - T_{i,j-1,l}^{n+1})] + o(h^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial z} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial z} \right) \Big|_{(x_i, y_j, z_l, t_{n+1})} &= \frac{1}{2h^2} [(k(T_{i,j,l+1}^{n+1}) + k(T_{i,j,l}^{n+1})) (T_{i,j,l+1}^{n+1} - T_{i,j,l}^{n+1}) \\ & - (k(T_{i,j,l-1}^{n+1}) + k(T_{i,j,l}^{n+1})) (T_{i,j,l}^{n+1} - T_{i,j,l-1}^{n+1})] + o(h^2) \end{aligned}$$

qui sont des approximations d'ordre 2 en h ,

$$\frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{(x_i, y_j, z_l, t_{n+1})} = \frac{T_{i,j,l}^{n+1} - T_{i,j,l}^n}{\tau} + o(\tau) : \text{une approximation d'ordre 1 en } \tau.$$

Dans ce qui suit, nous allons remplacer les quotients différentiels par leurs approximations dans l'équation (1.2) :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2h^2} [(k(T_{i+1,j,l}^{n+1}) + k(T_{i,j,l}^{n+1}))(T_{i+1,j,l}^{n+1} - T_{i,j,l}^{n+1}) - (k(T_{i-1,j,l}^{n+1}) + k(T_{i,j,l}^{n+1}))(T_{i,j,l}^{n+1} - T_{i-1,j,l}^{n+1})] \\ & + \frac{1}{2h^2} [(k(T_{i,j+1,l}^{n+1}) + k(T_{i,j,l}^{n+1}))(T_{i,j+1,l}^{n+1} - T_{i,j,l}^{n+1}) - (k(T_{i,j-1,l}^{n+1}) + k(T_{i,j,l}^{n+1}))(T_{i,j,l}^{n+1} - T_{i,j-1,l}^{n+1})] \\ & + \frac{1}{2h^2} [(k(T_{i,j,l+1}^{n+1}) + k(T_{i,j,l}^{n+1}))(T_{i,j,l+1}^{n+1} - T_{i,j,l}^{n+1}) - (k(T_{i,j,l-1}^{n+1}) + k(T_{i,j,l}^{n+1}))(T_{i,j,l}^{n+1} - T_{i,j,l-1}^{n+1})] \\ & + q_{i,j,l}^{n+1}(T_{i,j,l}^{n+1}) = \rho c_p \frac{T_{i,j,l}^{n+1} - T_{i,j,l}^n}{\tau} \end{aligned}$$

Le pas suivant consiste à multiplier l'équation par $\frac{\tau}{\rho c_p}$ pour obtenir la nouvelle

équation qui serai ainsi :

$$\begin{aligned} & \frac{\tau}{\rho c_p} \frac{1}{2h^2} [(k(T_{i+1,j,l}^{n+1}) + k(T_{i,j,l}^{n+1}))(T_{i+1,j,l}^{n+1} - T_{i,j,l}^{n+1}) - (k(T_{i-1,j,l}^{n+1}) + k(T_{i,j,l}^{n+1}))(T_{i,j,l}^{n+1} - T_{i-1,j,l}^{n+1})] \\ & + (k(T_{i,j+1,l}^{n+1}) + k(T_{i,j,l}^{n+1}))(T_{i,j+1,l}^{n+1} - T_{i,j,l}^{n+1}) - (k(T_{i,j-1,l}^{n+1}) + k(T_{i,j,l}^{n+1}))(T_{i,j,l}^{n+1} - T_{i,j-1,l}^{n+1}) \\ & + (k(T_{i,j,l+1}^{n+1}) + k(T_{i,j,l}^{n+1}))(T_{i,j,l+1}^{n+1} - T_{i,j,l}^{n+1}) - (k(T_{i,j,l-1}^{n+1}) + k(T_{i,j,l}^{n+1}))(T_{i,j,l}^{n+1} - T_{i,j,l-1}^{n+1})] \\ & + \frac{\tau}{\rho c_p} q_{i,j,l}^{n+1}(T_{i,j,l}^{n+1}) = T_{i,j,l}^{n+1} - T_{i,j,l}^n \end{aligned}$$

$$\text{Posons } r = \frac{\tau}{h^2} \text{ et } R = \frac{1}{2 \rho c_p}$$

Nous devons transférer $T_{i,j,l}^{n+1}$, cela nous mène vers le schéma final suivant

[Voir la page suivante] :

$$\left. \begin{aligned}
& rR \left[\left(k(T_{i+1,j,l}^{n+1}) + k(T_{i,j,l}^{n+1}) \right) \left(T_{i+1,j,l}^{n+1} - T_{i,j,l}^{n+1} \right) - \left(k(T_{i-1,j,l}^{n+1}) + k(T_{i,j,l}^{n+1}) \right) \left(T_{i,j,l}^{n+1} - T_{i-1,j,l}^{n+1} \right) \right. \\
& \quad + \left(k(T_{i,j+1,l}^{n+1}) + k(T_{i,j,l}^{n+1}) \right) \left(T_{i,j+1,l}^{n+1} - T_{i,j,l}^{n+1} \right) - \left(k(T_{i,j-1,l}^{n+1}) + k(T_{i,j,l}^{n+1}) \right) \left(T_{i,j,l}^{n+1} - T_{i,j-1,l}^{n+1} \right) \\
& \quad \left. + \left(k(T_{i,j,l+1}^{n+1}) + k(T_{i,j,l}^{n+1}) \right) \left(T_{i,j,l+1}^{n+1} - T_{i,j,l}^{n+1} \right) - \left(k(T_{i,j,l-1}^{n+1}) + k(T_{i,j,l}^{n+1}) \right) \left(T_{i,j,l}^{n+1} - T_{i,j,l-1}^{n+1} \right) \right] \\
& - T_{i,j,l}^{n+1} + \frac{\tau}{\rho c_p} q_{i,j,l}^{n+1} (T_{i,j,l}^{n+1}) = -T_{i,j,l}^n \quad \left. \begin{array}{l} i = 1 \dots M_1 - 1 \\ j = 1 \dots M_2 - 1 \\ l = 1 \dots M_3 - 1 \end{array} \right\} n = 0 \dots N - 1 \\
& \left. \begin{array}{l} T_{i,j,l}^0 = f_{i,j,l} \quad i = 0 \dots M_1, j = 0 \dots M_2, l = 0 \dots M_3 \\ T_{0,j,l}^n = g_{a_1,n}^{j,l} \quad j = 0 \dots M_2, l = 0 \dots M_3 \\ T_{i,0,l}^n = g_{a_2,n}^{i,l} \quad i = 0 \dots M_1, l = 0 \dots M_3 \\ T_{i,j,0}^n = g_{a_3,n}^{i,j} \quad i = 0 \dots M_1, j = 0 \dots M_2 \\ T_{M_1,j,l}^n = g_{b_1,n}^{j,l} \quad j = 0 \dots M_2, l = 0 \dots M_3 \\ T_{i,M_2,l}^n = g_{b_2,n}^{i,l} \quad i = 0 \dots M_1, l = 0 \dots M_3 \\ T_{i,j,M_3}^n = g_{b_3,n}^{i,j} \quad i = 0 \dots M_1, j = 0 \dots M_2 \end{array} \right\} n = 1 \dots N
\end{aligned}
\right.$$

Pour n donné et si à chaque fois on fixe $i(i=1 \dots M_1-1), j(j=1 \dots M_2-1)$

et $l(l=1 \dots M_3-1)$, on obtient un système d'équations non linéaires.

Pour calculer toutes les valeurs de la température T sur le domaine discret D_h , nous devons résoudre N fois ce système d'équations non linéaires.

5.2.1) Consistance : l'étude de la consistance pour le schéma implicite est faite d'une façon analogue que le schéma explicite.

5.2.2) Stabilité :

On utilise les mêmes normes que le schéma explicite.

D'après le schéma implicite, on écrit la formule suivante après l'avoir simplifié :

$$\left(1 + 6rRk(T_{i,j,l}^{n+1}) + rR \left(\begin{array}{l} k(T_{i-1,j,l}^{n+1}) + k(T_{i+1,j,l}^{n+1}) + k(T_{i,j-1,l}^{n+1}) \\ + k(T_{i,j+1,l}^{n+1}) + k(T_{i,j,l-1}^{n+1}) + k(T_{i,j,l+1}^{n+1}) \end{array} \right) \right) T_{i,j,l}^{n+1} = \frac{\tau}{\rho c_p} q_{i,j,l}^{n+1} (T_{i,j,l}^{n+1}) \\
+ rR \left(k(T_{i-1,j,l}^{n+1}) + k(T_{i,j,l}^{n+1}) \right) T_{i-1,j,l}^{n+1} + rR \left(k(T_{i+1,j,l}^{n+1}) + k(T_{i,j,l}^{n+1}) \right) T_{i+1,j,l}^{n+1} \\
+ rR \left(k(T_{i,j-1,l}^{n+1}) + k(T_{i,j,l}^{n+1}) \right) T_{i,j-1,l}^{n+1} + rR \left(k(T_{i,j+1,l}^{n+1}) + k(T_{i,j,l}^{n+1}) \right) T_{i,j+1,l}^{n+1} \\
+ rR \left(k(T_{i,j,l-1}^{n+1}) + k(T_{i,j,l}^{n+1}) \right) T_{i,j,l-1}^{n+1} + rR \left(k(T_{i,j,l+1}^{n+1}) + k(T_{i,j,l}^{n+1}) \right) T_{i,j,l+1}^{n+1} + T_{i,j,l}^n$$

En passant à la valeur absolue de chaque terme de l'équation et comme $k(T) \leq \alpha$, alors on peut écrire :

$$(1 + 12rR\alpha) |T_{i,j,l}^{n+1}| \leq \left| \frac{\tau \beta}{\rho c_p} \right| + 2rR\alpha |T_{i-1,j,l}^{n+1}| + 2rR\alpha |T_{i+1,j,l}^{n+1}| + 2rR\alpha |T_{i,j-1,l}^{n+1}| \\ + 2rR\alpha |T_{i,j+1,l}^{n+1}| + 2rR\alpha |T_{i,j,l-1}^{n+1}| + 2rR\alpha |T_{i,j,l+1}^{n+1}| + |T_{i,j,l}^n|$$

Par la suite, en passant au maximum sur i, j et l de chaque terme, on obtient :

$$(1 + 12rR\alpha) \max_{i,j,l} |T_{i,j,l}^{n+1}| \leq 2rR\alpha \max_{i,j,l} |T_{i-1,j,l}^{n+1}| + 2rR\alpha \max_{i,j,l} |T_{i+1,j,l}^{n+1}| + 2rR\alpha \max_{i,j,l} |T_{i,j-1,l}^{n+1}| \\ + 2rR\alpha \max_{i,j,l} |T_{i,j+1,l}^{n+1}| + 2rR\alpha \max_{i,j,l} |T_{i,j,l-1}^{n+1}| + 2rR\alpha \max_{i,j,l} |T_{i,j,l+1}^{n+1}| + \max_{i,j,l} |T_{i,j,l}^n| + \left| \frac{\tau \beta}{\rho c_p} \right|$$

Comme :

$$\max_{i,j,l} |T_{i,j,l}^{n+1}| = \max_{i,j,l} |T_{i-1,j,l}^{n+1}| = \max_{i,j,l} |T_{i+1,j,l}^{n+1}| = \max_{i,j,l} |T_{i,j-1,l}^{n+1}| = \max_{i,j,l} |T_{i,j+1,l}^{n+1}| \\ = \max_{i,j,l} |T_{i,j,l-1}^{n+1}| = \max_{i,j,l} |T_{i,j,l+1}^{n+1}|$$

(car ils sont au même niveau $n+1$).

on aura l'inégalité suivante :

$$\max_{i,j,l} |T_{i,j,l}^{n+1}| \leq \max_{i,j,l} |T_{i,j,l}^n| + \tau \left| \frac{\beta}{\rho c_p} \right|$$

Si à chaque fois on fixe n ($n=0,1,2,\dots, N-1$), on obtient le système d'inéquations

suisant :

$$\begin{cases} \max_{i,j,l} |T_{i,j,l}^n| \leq \max_{i,j,l} |T_{i,j,l}^{n-1}| + \left| \frac{\tau \beta}{\rho c_p} \right| \\ \vdots \\ \max_{i,j,l} |T_{i,j,l}^1| \leq \max_{i,j,l} |T_{i,j,l}^0| + \left| \frac{\tau \beta}{\rho c_p} \right| \end{cases}$$

A partir de ce système d'inéquations, on déduit :

$$\max_n \left(\max_{i,j,l} |T_{i,j,l}^{n+1}| \right) \leq \max_{i,j,l} |T_{i,j,l}^0| + (n+1)\tau \left| \frac{\beta}{\rho c_p} \right|$$

On peut écrire :

$$\max_n \left(\max_{i,j,l} |T_{i,j,l}^{n+1}| \right) \leq \max_{i,j,l} |T_{i,j,l}^0| + N\tau \left| \frac{\beta}{\rho c_p} \right|$$

Grace à $T_{i,j,l}^0 = f_{i,j,l}$ $N\tau = \bar{T}$, nous avons l'inéquation suivante :

$$\max_n \left(\max_{i,j,l} |T_{i,j,l}^{n+1}| \right) \leq \max_{i,j,l} |f_{i,j,l}| + \bar{T} \left| \frac{\beta}{\rho c_p} \right|$$

Lorsque :

$$\max_{i,j,l} |f_{i,j,l}| \leq \|f_{(h)}\|_{F_h} \quad \left| \frac{\beta}{\rho c_p} \right| \leq \|f_{(h)}\|_{F_h}$$

on a :

$$\|T_{(h)}\|_{U_h} \leq (1 + \bar{T}) \|f_{(h)}\|_{F_h}$$

Et donc, le schéma implicite est stable et ceci quelque soit r.

Cas particulier (conductivité constante) :

Ce qui caractérise ce cas est :

-La conductivité thermique est une constante k_0 .

-La source interne de chaleur donne une valeur constante de la chaleur q^0 .

Le problème s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 k_0 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + q^0 = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \\
 \text{avec } x \in [a_1, b_1], y \in [a_2, b_2], z \in [a_3, b_3] \text{ et } t \in [0, \bar{T}] \\
 T(x, y, z, 0) = f(x, y, z) \quad x \in [a_1, b_1], y \in [a_2, b_2], z \in [a_3, b_3] \\
 T(a_1, y, z, t) = g_{a_1}(y, z, t) \quad y \in [a_2, b_2], z \in [a_3, b_3], t \in [0, \bar{T}] \\
 T(b_1, y, z, t) = g_{b_1}(y, z, t) \quad y \in [a_2, b_2], z \in [a_3, b_3], t \in [0, \bar{T}] \\
 T(x, a_2, z, t) = g_{a_2}(x, z, t) \quad x \in [a_1, b_1], z \in [a_3, b_3], t \in [0, \bar{T}] \\
 T(x, b_2, z, t) = g_{b_2}(x, z, t) \quad x \in [a_1, b_1], z \in [a_3, b_3], t \in [0, \bar{T}] \\
 T(x, y, a_3, t) = g_{a_3}(x, y, t) \quad x \in [a_1, b_1], y \in [a_2, b_2], t \in [0, \bar{T}] \\
 T(x, y, b_3, t) = g_{b_3}(x, y, t) \quad x \in [a_1, b_1], y \in [a_2, b_2], t \in [0, \bar{T}]
 \end{array} \right. \text{conditions aux limites}$$

Dans ce cas nous obtenons les schémas suivants :

Schéma explicite :

Les approximations des dérivées secondes s'écrivent :

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{(x_i, y_j, z_l, t_n)} = \frac{T_{i+1, j, l}^n - 2T_{i, j, l}^n + T_{i-1, j, l}^n}{h^2} + o(h^2)$$

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right|_{(x_i, y_j, z_l, t_n)} = \frac{T_{i, j+1, l}^n - 2T_{i, j, l}^n + T_{i, j-1, l}^n}{h^2} + o(h^2)$$

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right|_{(x_i, y_j, z_l, t_n)} = \frac{T_{i, j, l+1}^n - 2T_{i, j, l}^n + T_{i, j, l-1}^n}{h^2} + o(h^2)$$

Posons $r = \frac{\tau}{h^2}$ et $R = \frac{k_0}{\rho c_p}$

Ces approximations nous permettent d'écrire le schéma final suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{i,j,l}^{n+1} = rRT_{i-1,j,l}^n + rRT_{i+1,j,l}^n + rRT_{i,j-1,l}^n + (1-6rR)T_{i,j,l}^n + rRT_{i,j+1,l}^n + rRT_{i,j,l-1}^n + rRT_{i,j,l+1}^n \\ \quad + \frac{\tau q^0}{\rho c_p} \quad \left. \begin{array}{l} i = 1 \dots M_1 - 1 \\ j = 1 \dots M_2 - 1 \\ l = 1 \dots M_3 - 1 \end{array} \right\} n = 0 \dots N - 1 \\ \\ T_{i,j,l}^0 = f_{i,j,l} \quad i = 0 \dots M_1, j = 0 \dots M_2, l = 0 \dots M_3 \\ \left. \begin{array}{l} T_{0,j,l}^n = g_{a_1,n}^{j,l} \quad j = 0 \dots M_2, l = 0 \dots M_3 \\ T_{i,0,l}^n = g_{a_2,n}^{i,l} \quad i = 0 \dots M_1, l = 0 \dots M_3 \\ T_{i,j,0}^n = g_{a_3,n}^{i,j} \quad i = 0 \dots M_1, j = 0 \dots M_2 \\ T_{M_1,j,l}^n = g_{b_1,n}^{j,l} \quad j = 0 \dots M_2, l = 0 \dots M_3 \\ T_{i,M_2,l}^n = g_{b_2,n}^{i,l} \quad i = 0 \dots M_1, l = 0 \dots M_3 \\ T_{i,j,M_3}^n = g_{b_3,n}^{i,j} \quad i = 0 \dots M_1, j = 0 \dots M_2 \end{array} \right\} n = 1 \dots N \end{array} \right.$$

Schéma implicite :

On considère les approximations des dérivées secondes à l'instant t_{n+1} :

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{(x_i, y_j, z_l, t_{n+1})} = \frac{T_{i+1,j,l}^{n+1} - 2T_{i,j,l}^{n+1} + T_{i-1,j,l}^{n+1}}{h^2} + o(h^2)$$

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right|_{(x_i, y_j, z_l, t_{n+1})} = \frac{T_{i,j+1,l}^{n+1} - 2T_{i,j,l}^{n+1} + T_{i,j-1,l}^{n+1}}{h^2} + o(h^2)$$

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right|_{(x_i, y_j, z_l, t_{n+1})} = \frac{T_{i,j,l+1}^{n+1} - 2T_{i,j,l}^{n+1} + T_{i,j,l-1}^{n+1}}{h^2} + o(h^2)$$

Posons $r = \frac{\tau}{h^2}$ et $R = \frac{k_0}{\rho c_p}$

Ces approximations nous permettent d'écrire le schéma final suivant [voir la page suivante] :

$$\left\{ \begin{array}{l} -rRT_{i-1,j,l}^{n+1} - rRT_{i+1,j,l}^{n+1} - rRT_{i,j-1,l}^{n+1} + (1+6rR)T_{i,j,l}^{n+1} - rRT_{i,j+1,l}^{n+1} - rRT_{i,j,l-1}^{n+1} - rRT_{i,j,l+1}^{n+1} = T_{i,j,l}^n \\ + \frac{\tau q^0}{\rho c_p} \quad \left. \begin{array}{l} i = 1 \dots M_1 - 1 \\ j = 1 \dots M_2 - 1 \\ l = 1 \dots M_3 - 1 \end{array} \right\} n = 0 \dots N - 1 \\ \\ T_{i,j,l}^0 = f_{i,j,l} \quad i = 0 \dots M_1, j = 0 \dots M_2, l = 0 \dots M_3 \\ T_{0,j,l}^n = g_{a_1,n}^{j,l} \quad j = 0 \dots M_2, l = 0 \dots M_3 \\ T_{i,0,l}^n = g_{a_2,n}^{i,l} \quad i = 0 \dots M_1, l = 0 \dots M_3 \\ T_{i,j,0}^n = g_{a_3,n}^{i,j} \quad i = 0 \dots M_1, j = 0 \dots M_2 \\ T_{M_1,j,l}^n = g_{b_1,n}^{j,l} \quad j = 0 \dots M_2, l = 0 \dots M_3 \\ T_{i,M_2,l}^n = g_{b_2,n}^{i,l} \quad i = 0 \dots M_1, l = 0 \dots M_3 \\ T_{i,j,M_3}^n = g_{b_3,n}^{i,j} \quad i = 0 \dots M_1, j = 0 \dots M_2 \end{array} \right\} n = 1 \dots N$$

Pour n donné et si à chaque fois on fixe $i(i=1 \dots M_1-1), j(j=1 \dots M_2-1)$ et $l(l=1 \dots M_3-1)$, on obtient un système d'équations linéaires d'ordre $(M_1 - 1) \times (M_2 - 1) \times (M_3 - 1)$, qu'on peut écrire sous la forme matricielle suivante :

$$QX = d$$

c) **La forme de la matrice principale Q :**

On peut écrire Q de la façon suivante :

$$Q = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & \dots & A_{1,M_1-1} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & \dots & A_{2,M_1-1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ A_{M_1-1,1} & A_{M_1-1,2} & \dots & \dots & A_{M_1-1,M_1-1} \end{pmatrix}$$

où les éléments de la matrice Q sont également des matrices de la forme :

$$A_{i,j} = \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & \dots & \dots & B_{1,M_2-1} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & \dots & \dots & B_{2,M_2-1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ B_{M_2-1,1} & B_{M_2-1,2} & \dots & \dots & B_{M_2-1,M_2-1} \end{pmatrix}$$

avec $B_{m,n}$ sont des matrices carrées $(M_3-1) \times (M_3-1)$.

a.1) La forme des matrices $A_{i,i}$ ($i=1 \dots M_1-1$) :

a.1.1) La forme des matrices $B_{k,k}$ ($k=1 \dots M_2-1$) :

$$\begin{aligned} B_{k,k}[m,m] &= 1 + 6rR & (m = 1 \dots M_3 - 1) \\ B_{k,k}[m,m-1] &= -rR & (m = 2 \dots M_3 - 1) \\ B_{k,k}[m,m+1] &= -rR & (m = 1 \dots M_3 - 2) \\ B_{k,k}[m,n] &= 0 & (\text{pour } n \neq m, n \neq m-1 \text{ et } n \neq m+1) \end{aligned}$$

a.1.2) La forme des matrices $B_{k,k-1}$ ($k=2 \dots M_2-1$) :

$$\begin{aligned} B_{k,k-1}[m,m] &= -rR & (m = 1 \dots M_3 - 1) \\ B_{k,k-1}[m,n] &= 0 & (\text{pour } n \neq m) \end{aligned}$$

a.1.3) La forme des matrices $B_{k,k+1}$ ($k=1 \dots M_2-2$) :

$$\begin{aligned} B_{k,k+1}[m,m] &= -rR & (m = 1 \dots M_3 - 1) \\ B_{k,k+1}[m,n] &= 0 & (\text{pour } n \neq m) \end{aligned}$$

a.1.4) La forme des matrices $B_{k,l}$ (pour $l \neq k, l \neq k-1$ et $l \neq k+1$) : sont des matrices nulles.

a.2) La forme des matrices $A_{i,i-1}$ ($i=2 \dots M_1-1$) :

a.2.1) La forme des matrices $B_{k,k}$ ($k=1 \dots M_2-1$) :

$$\begin{aligned} B_{k,k}[m,m] &= -rR & (m = 1 \dots M_3 - 1) \\ B_{k,k}[m,n] &= 0 & (\text{pour } n \neq m) \end{aligned}$$

a.2.2) La forme des matrices $B_{k,l}$ (pour $l \neq k$) : sont des matrices nulles.

a.3) La forme des matrices $A_{i,i+1}$ ($i=1...M_1-2$) :

a.3.1) La forme des matrices $B_{k,k}$ ($k=1...M_2-1$) :

$$\begin{aligned} B_{k,k}[m,m] &= -rR \quad (m = 1...M_3 - 1) \\ B_{k,k}[m,n] &= 0 \quad (\text{pour } n \neq m) \end{aligned}$$

a.3.2) La forme des matrices $B_{k,l}$: sont des matrices nulles pour $l \neq k$.

a.4) La forme des matrices $A_{i,j}$ (pour $j \neq i, j \neq i-1$ et $j \neq i+1$) : $B_{k,l}$ sont des matrices nulles pour $k=1...M_2-1$ et $l=1...M_2-1$

d) La forme du vecteur d :

La forme générale du vecteur d est :

$$d = (d_1, \dots, d_i, \dots, d_{M_1-1})^T$$

b.1) la forme du vecteur d_1 :

La forme générale du vecteur d_1 est :

$$d_1 = (d_{1,1}, \dots, d_{1,j}, \dots, d_{1,M_2-1})^T$$

où $d_{1,1}$ s'écrit comme suit :

$$d_{1,1} = \left(\begin{array}{c} \frac{\tau q^0}{\rho c_p} + rRg_{a_1,n+1}^{1,1} + rRg_{a_2,n+1}^{1,1} + rRg_{a_3,n+1}^{1,1} + T_{1,1,1}^n, \frac{\tau q^0}{\rho c_p} + rRg_{a_1,n+1}^{1,2} + rRg_{a_2,n+1}^{1,2} + T_{1,1,2}^n, \dots, \\ \frac{\tau q^0}{\rho c_p} + rRg_{a_1,n+1}^{1,M_3-2} + rRg_{a_2,n+1}^{1,M_3-2} + T_{1,1,M_3-2}^n, \frac{\tau q^0}{\rho c_p} + rRg_{a_1,n+1}^{1,M_3-1} + rRg_{a_2,n+1}^{1,M_3-1} + rRg_{b_3,n+1}^{1,1} + T_{1,1,M_3-1}^n \end{array} \right)^T$$

et $d_{1,j}$ s'écrit :

$$d_{1,j} = \left(\begin{array}{c} \frac{\tau q^0}{\rho c_p} + rRg_{a_1,n+1}^{j,1} + rRg_{a_3,n+1}^{1,j} + T_{1,j,1}^n, \frac{\tau q^0}{\rho c_p} + rRg_{a_1,n+1}^{j,2} + T_{1,j,2}^n, \dots, \\ \frac{\tau q^0}{\rho c_p} + rRg_{a_1,n+1}^{j,M_3-2} + T_{1,j,M_3-2}^n, \frac{\tau q^0}{\rho c_p} + rRg_{a_1,n+1}^{j,M_3-1} + rRg_{b_3,n+1}^{1,j} + T_{1,j,M_3-1}^n \end{array} \right)^T$$

aussi :

$$d_{i,M_2-1} = \left(\begin{array}{l} \frac{\tau q^0}{\rho c_p} + rRg_{a_1, n+1}^{M_2-1,1} + rRg_{b_2, n+1}^{1,1} + rRg_{c_3, n+1}^{M_2-1,1} + T_{i, M_2-1, 1}^n, \frac{\tau q^0}{\rho c_p} + rRg_{a_1, n+1}^{M_2-1,2} + rRg_{b_2, n+1}^{1,2} + T_{i, M_2-1, 2}^n, \dots; \\ \frac{\tau q^0}{\rho c_p} + rRg_{a_1, n+1}^{M_2-1, M_3-2} + rRg_{b_2, n+1}^{1, M_3-2} + T_{i, M_2-1, M_3-2}^n, \frac{\tau q^0}{\rho c_p} + rRg_{a_1, n+1}^{M_2-1, M_3-1} + rRg_{b_2, n+1}^{1, M_3-1} + rRg_{c_3, n+1}^{M_2-1, M_3-1} + T_{i, M_2-1, M_3-1}^n \end{array} \right)^T$$

b.2) la forme du vecteur d_i :

La forme générale du vecteur d_i est :

$$d_i = (d_{i,1}, \dots, d_{i,j}, \dots, d_{i,M_2-1})^T$$

où $d_{i,1}$ s'écrit comme suit :

$$d_{i,1} = \left(\begin{array}{l} \frac{\tau q^0}{\rho c_p} + rRg_{a_2, n+1}^{i,1} + rRg_{a_3, n+1}^{i,1} + T_{i,1,1}^n, \frac{\tau q^0}{\rho c_p} + rRg_{a_2, n+1}^{i,2} + T_{i,1,2}^n, \dots, \\ \frac{\tau q^0}{\rho c_p} + rRg_{a_2, n+1}^{i, M_3-2} + T_{i,1, M_3-2}^n, \frac{\tau q^0}{\rho c_p} + rRg_{a_2, n+1}^{i, M_3-1} + rRg_{b_3, n+1}^{i,1} + T_{i,1, M_3-1}^n \end{array} \right)^T$$

et $d_{i,j}$ s'écrit :

$$d_{i,j} = \left(\begin{array}{l} \frac{\tau q^0}{\rho c_p} + rRg_{a_3, n+1}^{i,j} + T_{i,j,1}^n, \frac{\tau q^0}{\rho c_p} + T_{i,j,2}^n, \dots \\ \frac{\tau q^0}{\rho c_p} + T_{i,j, M_3-2}^n, \frac{\tau q^0}{\rho c_p} + rRg_{b_3, n+1}^{i,j} + T_{i,j, M_3-1}^n \end{array} \right)^T$$

aussi :

$$d_{i, M_2-1} = \left(\begin{array}{l} \frac{\tau q^0}{\rho c_p} + rRg_{b_2, n+1}^{i,1} + rRg_{a_3, n+1}^{i, M_2-1} + T_{i, M_2-1, 1}^n, \frac{\tau q^0}{\rho c_p} + rRg_{b_2, n+1}^{i,2} + T_{i, M_2-1, 2}^n, \dots \\ \frac{\tau q^0}{\rho c_p} + rRg_{b_2, n+1}^{i, M_3-2} + T_{i, M_2-1, M_3-2}^n, \frac{\tau q^0}{\rho c_p} + rRg_{b_2, n+1}^{i, M_3-1} + rRg_{b_3, n+1}^{i, M_2-1} + T_{i, M_2-1, M_3-1}^n \end{array} \right)^T$$

b.3) la forme du vecteur d_{M_1-1} :

La forme générale du vecteur d_{M_1-1} est :

$$d_{M_1-1} = (d_{M_1-1,1}, \dots, d_{M_1-1,j}, \dots, d_{M_1-1,M_2-1})^T$$

où $d_{M_1-1,1}$ s'écrit comme suit :

$$d_{M_1-1,1} = \left(\begin{array}{l} \frac{\tau q^0}{\rho c_p} + rRg_{a_1,n+1}^{M_1-1,1} + rRg_{a_2,n+1}^{M_1-1,1} + rRg_{a_3,n+1}^{M_1-1,1} + T_{M_1-1,1,1}^n, \frac{\tau q^0}{\rho c_p} + rRg_{a_1,n+1}^{M_1-1,2} + rRg_{a_2,n+1}^{M_1-1,2} + T_{M_1-1,1,2}^n, \dots \\ \frac{\tau q^0}{\rho c_p} + rRg_{a_1,n+1}^{M_1-1,M_3-2} + rRg_{a_2,n+1}^{M_1-1,M_3-2} + T_{M_1-1,1,M_3-2}^n, \frac{\tau q^0}{\rho c_p} + rRg_{a_1,n+1}^{M_1-1,M_3-1} + rRg_{a_2,n+1}^{M_1-1,M_3-1} + rRg_{a_3,n+1}^{M_1-1,M_3-1} + T_{M_1-1,1,M_3-1}^n \end{array} \right)^T$$

et $d_{M_1-1,j}$ s'écrit :

$$d_{M_1-1,j} = \left(\begin{array}{l} \frac{\tau q^0}{\rho c_p} + rRg_{b_1,n+1}^{j,1} + rRg_{a_3,n+1}^{M_1-1,j} + T_{M_1-1,j,1}^n, \frac{\tau q^0}{\rho c_p} + rRg_{b_1,n+1}^{j,2} + T_{M_1-1,j,2}^n, \dots \\ \frac{\tau q^0}{\rho c_p} + rRg_{b_1,n+1}^{j,M_3-2} + T_{M_1-1,j,M_3-2}^n, \frac{\tau q^0}{\rho c_p} + rRg_{b_1,n+1}^{j,M_3-1} + rRg_{b_3,n+1}^{M_1-1,j} + T_{M_1-1,j,M_3-1}^n \end{array} \right)^T$$

aussi :

$$d_{M_1-1,M_2-1} = \left(\begin{array}{l} \frac{\tau q^0}{\rho c_p} + rRg_{a_1,n+1}^{M_2-1,1} + rRg_{a_2,n+1}^{M_2-1,1} + rRg_{a_3,n+1}^{M_2-1,M_2-1} + T_{M_1-1,M_2-1,1}^n, \frac{\tau q^0}{\rho c_p} + rRg_{a_1,n+1}^{M_2-1,2} + rRg_{a_2,n+1}^{M_2-1,2} + T_{M_1-1,M_2-1,2}^n, \dots \\ \frac{\tau q^0}{\rho c_p} + rRg_{a_1,n+1}^{M_2-1,M_3-2} + rRg_{a_2,n+1}^{M_2-1,M_3-2} + T_{M_1-1,M_2-1,M_3-2}^n, \frac{\tau q^0}{\rho c_p} + rRg_{a_1,n+1}^{M_2-1,M_3-1} + rRg_{a_2,n+1}^{M_2-1,M_3-1} + rRg_{a_3,n+1}^{M_2-1,M_3-1} + T_{M_1-1,M_2-1,M_3-1}^n \end{array} \right)^T$$

e) La forme du vecteur X :

La forme générale du vecteur des inconnus X est :

$$X = (T_1, \dots, T_i, \dots, T_{M_1-1})^T$$

où :

$$T_i = (T_{i,1}, \dots, T_{i,j}, \dots, T_{i,M_2-1})^T$$

avec :

$$T_{i,j} = (T_{i,j,1}^{n+1}, \dots, T_{i,j,l}^{n+1}, \dots, T_{i,j,M_3-1}^{n+1})^T$$

Pour calculer toutes les valeurs de la température T sur le domaine discret D_h , nous devons résoudre N fois ce système d'équations linéaires.

6) Conduction tridimensionnelle stationnaire :

C'est le cas où la fonction de la température ne dépend pas du temps,

Le problème en général s'écrit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q(T, x, y, z) = 0 \\ \text{avec } x \in [a_1, b_1], y \in [a_2, b_2] \text{ et } z \in [a_3, b_3] \\ \left. \begin{array}{l} T(a_1, y, z) = g_{a_1}(y, z) \quad y \in [a_2, b_2], z \in [a_3, b_3] \\ T(b_1, y, z) = g_{b_1}(y, z) \quad y \in [a_2, b_2], z \in [a_3, b_3] \\ T(x, a_2, z) = g_{a_2}(x, z) \quad x \in [a_1, b_1], z \in [a_3, b_3] \\ T(x, b_2, z) = g_{b_2}(x, z) \quad x \in [a_1, b_1], z \in [a_3, b_3] \\ T(x, y, a_3) = g_{a_3}(x, y) \quad x \in [a_1, b_1], y \in [a_2, b_2] \\ T(x, y, b_3) = g_{b_3}(x, y) \quad x \in [a_1, b_1], y \in [a_2, b_2] \end{array} \right\} \text{conditions aux limites} \end{array} \right.$$

Où : T est la fonction de température

k est la fonction de la conductivité thermique

q est une fonction produite par la source interne de la chaleur.

Notre objectif, c'est de chercher à calculer approximativement la solution $T(x,y,z)$ du problème sur le domaine D où $D = \{(x, y, z) \text{ avec } x \in [a_1, b_1], y \in [a_2, b_2], z \in [a_3, b_3]\}$

Pour cela, nous tenons à diviser le domaine $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ en

$(M_1 + 1) \times (M_2 + 1) \times (M_3 + 1)$ nœuds de coordonnées

$x_i = a_1 + ih, y_j = a_2 + jh, z_l = a_3 + lh$, (pour $i = 0 \dots M_1, j = 0 \dots M_2, l = 0 \dots M_3$)

avec $M_1 = \frac{b_1 - a_1}{h}, M_2 = \frac{b_2 - a_2}{h}$ et $M_3 = \frac{b_3 - a_3}{h}$ où h est le pas de discrétisation

ou du maillage.

Au lieu de chercher la solution $T(x,y,z)$ sur le domaine D , on la cherche sur le domaine discrétisé D_h où

$$D_h = \left\{ (x_i, y_j, z_l) / \begin{array}{l} x_i = a_1 + ih \ (i = 0 \dots M_1), y_j = a_2 + jh \ (j = 0 \dots M_2), \\ z_l = a_3 + lh \ (l = 0 \dots M_3) \end{array} \right\}$$

$g_{a_1}^{j,l}$ La valeur de la fonction g_{a_1} au point (y_j, z_l)

$g_{b_1}^{j,l}$ La valeur de la fonction g_{b_1} au point (y_j, z_l)

$g_{a_2}^{i,l}$ La valeur de la fonction g_{a_2} au point (x_i, z_l)

$g_{b_2}^{i,l}$ La valeur de la fonction g_{b_2} au point (x_i, z_l)

$g_{a_3}^{i,j}$ La valeur de la fonction g_{a_3} au point (x_i, y_j)

$g_{b_3}^{i,j}$ La valeur de la fonction g_{b_3} au point (x_i, y_j)

La notation $T_{i,j,l}$ est la température au point (x_i, y_j, z_l)

On cherche à calculer la température $T_{i,j,l} = T(x_i, y_j, z_l)$ pour $i = 1 \dots M_1 - 1,$

$j = 1 \dots M_2 - 1,$ et $l = 1 \dots M_3 - 1.$

On écrit l'équation aux dérivées partielles aux points (x_i, y_j, z_l) :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial T(x_i, y_j, z_l)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k(T) \frac{\partial T(x_i, y_j, z_l)}{\partial y} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left(k(T) \frac{\partial T(x_i, y_j, z_l)}{\partial z} \right) + q(T, x_i, y_j, z_l) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

et par la méthode des différences finies on approche les dérivées secondes

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial T(x_i, y_j, z_l)}{\partial x} \right), \frac{\partial}{\partial y} \left(k(T) \frac{\partial T(x_i, y_j, z_l)}{\partial y} \right), \text{ et } \frac{\partial}{\partial z} \left(k(T) \frac{\partial T(x_i, y_j, z_l)}{\partial z} \right) \text{ par les}$$

quotients différentiels :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right|_{(x_i, y_j, z_l)} &= \frac{1}{2h^2} [(k(T_{i+1,j,l}) + k(T_{i,j,l}))(T_{i+1,j,l} - T_{i,j,l}) \\ &\quad - (k(T_{i-1,j,l}) + k(T_{i,j,l}))(T_{i,j,l} - T_{i-1,j,l})] + o(h^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T}{\partial y} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right|_{(x_i, y_j, z_l)} &= \frac{1}{2h^2} [(k(T_{i,j+1,l}) + k(T_{i,j,l}))(T_{i,j+1,l} - T_{i,j,l}) \\ &\quad - (k(T_{i,j-1,l}) + k(T_{i,j,l}))(T_{i,j,l} - T_{i,j-1,l})] + o(h^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T}{\partial z} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right|_{(x_i, y_j, z_l)} &= \frac{1}{2h^2} [(k(T_{i,j,l+1}) + k(T_{i,j,l}))(T_{i,j,l+1} - T_{i,j,l}) \\ &\quad - (k(T_{i,j,l-1}) + k(T_{i,j,l}))(T_{i,j,l} - T_{i,j,l-1})] + o(h^2) \end{aligned}$$

qui sont des approximations d'ordre 2 en h.

Dans ce qui suit : nous allons remplacer les quotients différentiels par leurs approximations dans l'équation (2) :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2h^2} [(k(T_{i+1,j,l}) + k(T_{i,j,l}))(T_{i+1,j,l} - T_{i,j,l}) - (k(T_{i-1,j,l}) + k(T_{i,j,l}))(T_{i,j,l} - T_{i-1,j,l})] \\ & + \frac{1}{2h^2} [(k(T_{i,j+1,l}) + k(T_{i,j,l}))(T_{i,j+1,l} - T_{i,j,l}) - (k(T_{i,j-1,l}) + k(T_{i,j,l}))(T_{i,j,l} - T_{i,j-1,l})] \\ & + \frac{1}{2h^2} [(k(T_{i,j,l+1}) + k(T_{i,j,l}))(T_{i,j,l+1} - T_{i,j,l}) - (k(T_{i,j,l-1}) + k(T_{i,j,l}))(T_{i,j,l} - T_{i,j,l-1})] + q_{i,j,l}(T_{i,j,l}) = 0 \end{aligned}$$

Le pas suivant consiste à multiplier l'équation par $2h^2$ pour obtenir le schéma final

$$\text{suivant : } \begin{cases} [(k(T_{i+1,j,l}) + k(T_{i,j,l}))(T_{i+1,j,l} - T_{i,j,l}) - (k(T_{i-1,j,l}) + k(T_{i,j,l}))(T_{i,j,l} - T_{i-1,j,l}) \\ + (k(T_{i,j+1,l}) + k(T_{i,j,l}))(T_{i,j+1,l} - T_{i,j,l}) - (k(T_{i,j-1,l}) + k(T_{i,j,l}))(T_{i,j,l} - T_{i,j-1,l}) \\ + (k(T_{i,j,l+1}) + k(T_{i,j,l}))(T_{i,j,l+1} - T_{i,j,l}) - (k(T_{i,j,l-1}) + k(T_{i,j,l}))(T_{i,j,l} - T_{i,j,l-1})] \\ + 2h^2 q_{i,j,l}(T_{i,j,l}) = 0 \quad i = 1..M_1 - 1, j = 1..M_2 - 1, l = 1..M_3 - 1 \\ T_{0,j,l} = g_{a_1}^{j,l} \quad j = 0..M_2, l = 0..M_3 \\ T_{i,0,l} = g_{a_2}^{i,l} \quad i = 0..M_1, l = 0..M_3 \\ T_{i,j,0} = g_{a_3}^{i,j} \quad i = 0..M_1, j = 0..M_2 \\ T_{M_1,j,l} = g_{b_1}^{j,l} \quad j = 0..M_2, l = 0..M_3 \\ T_{i,M_2,l} = g_{b_2}^{i,l} \quad i = 0..M_1, l = 0..M_3 \\ T_{i,j,M_3} = g_{b_3}^{i,j} \quad i = 0..M_1, j = 0..M_2 \end{cases}$$

Pour calculer toutes les valeurs de la température T sur le domaine discret D_h , nous devons résoudre ce système d'équations non linéaires.

6.1) Consistance :

Grâce au développement de Taylor, on a pu obtenir les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right|_{(x_i, y_j, z_l)} &= \frac{1}{2h^2} [(k(T_{i+1,j,l}) + k(T_{i,j,l}))(T_{i+1,j,l} - T_{i,j,l}) \\ &\quad - (k(T_{i-1,j,l}) + k(T_{i,j,l}))(T_{i,j,l} - T_{i-1,j,l})] + \frac{h^2}{4!} \frac{\partial^4 T(\bar{x}, y_j, z_l)}{\partial x^4} \\ \left. \frac{\partial T}{\partial y} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right|_{(x_i, y_j, z_l)} &= \frac{1}{2h^2} [(k(T_{i,j+1,l}) + k(T_{i,j,l}))(T_{i,j+1,l} - T_{i,j,l}) \\ &\quad - (k(T_{i,j-1,l}) + k(T_{i,j,l}))(T_{i,j,l} - T_{i,j-1,l})] + \frac{h^2}{4!} \frac{\partial^4 T(x_i, \bar{y}, z_l)}{\partial y^4} \\ \left. \frac{\partial T}{\partial z} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right|_{(x_i, y_j, z_l)} &= \frac{1}{2h^2} [(k(T_{i,j,l+1}) + k(T_{i,j,l}))(T_{i,j,l+1} - T_{i,j,l}) \\ &\quad - (k(T_{i,j,l-1}) + k(T_{i,j,l}))(T_{i,j,l} - T_{i,j,l-1})] + \frac{h^2}{4!} \frac{\partial^4 T(x_i, y_j, \bar{z})}{\partial z^4} \end{aligned}$$

A partir de ces formules ci-dessus, nous allons pouvoir écrire l'erreur de consistance comme suit :

$$\|\delta f^{(n)}\|_{F_h} = \left\| \frac{h^2}{4!} \frac{\partial^4 T(\bar{x}, y_j, z_l)}{\partial x^4} + \frac{h^2}{4!} \frac{\partial^4 T(x_i, \bar{y}, z_l)}{\partial y^4} + \frac{h^2}{4!} \frac{\partial^4 T(x_i, y_j, \bar{z})}{\partial z^4} \right\|$$

En utilisant l'équation précédente et les propriétés de la norme on obtient l'inégalité suivante :

$$\|\delta f^{(n)}\|_{F_h} \leq \frac{h^2}{4!} \sup_x \left| \frac{\partial^4 T(\bar{x}, y_j, z_l)}{\partial x^4} \right| + \frac{h^2}{4!} \sup_y \left| \frac{\partial^4 T(x_i, \bar{y}, z_l)}{\partial y^4} \right| + \frac{h^2}{4!} \sup_z \left| \frac{\partial^4 T(x_i, y_j, \bar{z})}{\partial z^4} \right|$$

On met h^2 comme facteur commun, ce qui nous a donné la nouvelle inéquation suivante :

$$\|\delta f^{(n)}\|_{F_h} \leq \bar{c} h^2$$

avec :

$$\bar{c} = \frac{1}{4!} \left(\sup_x \left| \frac{\partial T(\bar{x}, y_j, z_l)}{\partial x} \right| + \sup_y \left| \frac{\partial T(x_i, \bar{y}, z_l)}{\partial y} \right| + \sup_z \left| \frac{\partial T(x_i, y_j, \bar{z})}{\partial z} \right| \right)$$

D'après la dernière inégalité, on aura, par conséquent la consistance d'ordre 2 en h .

Cas particulier (conductivité constante) :

Ce qui caractérise ce cas est :

- La conductivité thermique est une constante k_0 .
- La source interne de chaleur donne une valeur constante de la chaleur q^0 .

Le problème s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} k_0 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + q^0 = 0 \\ \text{avec } x \in [a_1, b_1], y \in [a_2, b_2] \text{ et } z \in [a_3, b_3] \\ \left. \begin{array}{l} T(a_1, y, z) = g_{a_1}(y, z) \quad y \in [a_2, b_2], z \in [a_3, b_3] \\ T(b_1, y, z) = g_{b_1}(y, z) \quad y \in [a_2, b_2], z \in [a_3, b_3] \\ T(x, a_2, z) = g_{a_2}(x, z) \quad x \in [a_1, b_1], z \in [a_3, b_3] \\ T(x, b_2, z) = g_{b_2}(x, z) \quad x \in [a_1, b_1], z \in [a_3, b_3] \\ T(x, y, a_3) = g_{a_3}(x, y) \quad x \in [a_1, b_1], y \in [a_2, b_2] \\ T(x, y, b_3) = g_{b_3}(x, y) \quad x \in [a_1, b_1], y \in [a_2, b_2] \end{array} \right\} \text{conditions aux limites} \end{array} \right.$$

Dans ce cas, les approximations des dérivées secondes s'écrivent :

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{(x_i, y_j, z_l)} = \frac{T_{i+1, j, l} - 2T_{i, j, l} + T_{i-1, j, l}}{h^2} + o(h^2)$$

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right|_{(x_i, y_j, z_l)} = \frac{T_{i, j+1, l} - 2T_{i, j, l} + T_{i, j-1, l}}{h^2} + o(h^2)$$

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right|_{(x_i, y_j, z_l)} = \frac{T_{i, j, l+1} - 2T_{i, j, l} + T_{i, j, l-1}}{h^2} + o(h^2)$$

Ces approximations nous permettent d'écrire le schéma final suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{i-1, j, l} + T_{i+1, j, l} + T_{i, j-1, l} - 6T_{i, j, l} + T_{i, j+1, l} + T_{i, j, l-1} + T_{i, j, l+1} = \frac{-h^2 q^0}{k_0} \\ \quad \quad \quad i = 1 \dots M_1 - 1, j = 1 \dots M_2 - 1, l = 1 \dots M_3 - 1 \\ T_{0, j, l} = g_{a_1}^{j, l} \quad j = 0 \dots M_2, l = 0 \dots M_3 \\ T_{i, 0, l} = g_{a_2}^{i, l} \quad i = 0 \dots M_1, l = 0 \dots M_3 \\ T_{i, j, 0} = g_{a_3}^{i, j} \quad i = 0 \dots M_1, j = 0 \dots M_2 \\ T_{M_1, j, l} = g_{b_1}^{j, l} \quad j = 0 \dots M_2, l = 0 \dots M_3 \\ T_{i, M_2, l} = g_{b_2}^{i, l} \quad i = 0 \dots M_1, l = 0 \dots M_3 \\ T_{i, j, M_3} = g_{b_3}^{i, j} \quad i = 0 \dots M_1, j = 0 \dots M_2 \end{array} \right.$$

Si à chaque fois on fixe $i(i=1\dots M_1-1), j(j=1\dots M_2-1)$ et $l(l=1\dots M_3-1)$, on obtient un système d'équations linéaires d'ordre $(M_1-1) \times (M_2-1) \times (M_3-1)$, qu'on peut écrire sous la forme matricielle suivante :

$$QX = d$$

c) La forme de la matrice principale Q :

On peut écrire Q de la façon suivante :

$$Q = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & \cdots & A_{1,M_1-1} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & \cdots & A_{2,M_1-1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ A_{M_1-1,1} & A_{M_1-1,2} & \cdots & \cdots & A_{M_1-1,M_1-1} \end{pmatrix}$$

où les éléments de la matrice Q sont également des matrices de la forme :

$$A_{i,j} = \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & \cdots & \cdots & B_{1,M_2-1} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & \cdots & \cdots & B_{2,M_2-1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ B_{M_2-1,1} & B_{M_2-1,2} & \cdots & \cdots & B_{M_2-1,M_2-1} \end{pmatrix}$$

avec $B_{m,n}$ sont des matrices carrées $(M_3-1) \times (M_3-1)$.

a.1) La forme des matrices $A_{i,i}$ ($i=1\dots M_1-1$) :

a.1.1) La forme des matrices $B_{k,k}$ ($k=1\dots M_2-1$) :

$$\begin{aligned} B_{k,k}[m,m] &= -6 & (m = 1\dots M_3 - 1) \\ B_{k,k}[m,m-1] &= 1 & (m = 2\dots M_3 - 1) \\ B_{k,k}[m,m+1] &= 1 & (m = 1\dots M_3 - 2) \\ B_{k,k}[m,n] &= 0 & (\text{pour } n \neq m, n \neq m-1 \text{ et } n \neq m+1) \end{aligned}$$

a.1.2) La forme des matrices $B_{k,k-1}$ ($k=2\dots M_2-1$) :

$$\begin{aligned} B_{k,k-1}[m,m] &= 1 & (m = 1\dots M_3 - 1) \\ B_{k,k-1}[m,n] &= 0 & (\text{pour } n \neq m) \end{aligned}$$

a.1.3) La forme des matrices $B_{k,k+1}$ ($k=1\dots M_2-2$) :

$$\begin{aligned} B_{k,k+1}[m,m] &= 1 & (m = 1\dots M_3 - 1) \\ B_{k,k+1}[m,n] &= 0 & (\text{pour } n \neq m) \end{aligned}$$

a.1.4) La forme des matrices $B_{k,l}$ (pour $l \neq k$, $l \neq k-1$ et $l \neq k+1$) : sont des matrices nulles.

a.2) La forme des matrices $A_{i,i-1}$ ($i=2\dots M_1-1$) :

a.2.1) La forme des matrices $B_{k,k}$ ($k=1\dots M_2-1$) :

$$\begin{aligned} B_{k,k}[m,m] &= 1 & (m = 1\dots M_3 - 1) \\ B_{k,k}[m,n] &= 0 & (\text{pour } n \neq m) \end{aligned}$$

a.2.2) La forme des matrices $B_{k,l}$ (pour $l \neq k$) : sont des matrices nulles.

a.3) La forme des matrices $A_{i,i+1}$ ($i=1\dots M_1-2$) :

a.3.1) La forme des matrices $B_{k,k}$ ($k=1\dots M_2-1$) :

$$\begin{aligned} B_{k,k}[m,m] &= 1 & (m = 1\dots M_3 - 1) \\ B_{k,k}[m,n] &= 0 & (\text{pour } n \neq m) \end{aligned}$$

a.3.2) La forme des matrices $B_{k,l}$: sont des matrices nulles pour $l \neq k$.

a.4) La forme des matrices $A_{i,j}$ (pour $j \neq i$, $j \neq i-1$ et $j \neq i+1$) : $B_{k,l}$ sont des matrices nulles pour $k=1\dots M_2-1$ et $l=1\dots M_2-1$.

b) La forme du vecteur d :

La forme générale du vecteur d est : $d = (d_1, \dots, d_i, \dots, d_{M_1-1})^T$

b.1) la forme du vecteur d_1 :

La forme générale du vecteur d_1 est :

$$d_1 = (d_{1,1}, \dots, d_{1,j}, \dots, d_{1,M_2-1})^T$$

où $d_{1,1}$ s'écrit comme suit :

$$d_{1,1} = \left(\begin{array}{l} \frac{-h^2 q^0}{k_0} - g_{a_1}^{1,1} - g_{a_2}^{1,1} - g_{a_3}^{1,1}, \frac{-h^2 q^0}{k_0} - g_{a_1}^{1,2} - g_{a_2}^{1,2}, \dots \\ \frac{-h^2 q^0}{k_0} - g_{a_1}^{1,M_3-2} - g_{a_2}^{1,M_3-2}, \frac{-h^2 q^0}{k_0} - g_{a_1}^{1,M_3-1} - g_{a_2}^{1,M_3-1} - g_{b_3}^{1,1} \end{array} \right)^T$$

et $d_{1,j}$ s'écrit :

$$d_{1,j} = \left(\begin{array}{l} \frac{-h^2 q^0}{k_0} - g_{a_1}^{j,1} - g_{a_3}^{j,1}, \frac{-h^2 q^0}{k_0} - g_{a_1}^{j,2}, \dots \\ \frac{-h^2 q^0}{k_0} - g_{a_1}^{j,M_3-2}, \frac{-h^2 q^0}{k_0} - g_{a_1}^{j,M_3-1} - g_{b_3}^{1,j} \end{array} \right)^T$$

aussi :

$$d_{1,M_2-1} = \left(\begin{array}{l} \frac{-h^2 q^0}{k_0} - g_{a_1}^{M_2-1,1} - g_{b_2}^{1,1} - g_{a_3}^{1,M_2-1}, \frac{-h^2 q^0}{k_0} - g_{a_1}^{M_2-1,2} - g_{b_2}^{1,2}, \dots \\ \frac{-h^2 q^0}{k_0} - g_{a_1}^{M_2-1,M_3-2} - g_{b_2}^{1,M_3-2}, \frac{-h^2 q^0}{k_0} - g_{a_1}^{M_2-1,M_3-1} - g_{b_2}^{1,M_3-1} - g_{b_3}^{1,M_2-1} \end{array} \right)^T$$

b.2) la forme vecteur d_i :

La forme générale du vecteur d_i est :

$$d_i = (d_{i,1}, \dots, d_{i,j}, \dots, d_{i,M_2-1})^T$$

où $d_{i,1}$ s'écrit comme suit :

$$d_{i,1} = \left(\begin{array}{c} \frac{-h^2 q^0}{k_0} - g_{a_2}^{i,1} - g_{a_3}^{i,1}, \frac{-h^2 q^0}{k_0} - g_{a_2}^{i,2}, \dots \\ \frac{-h^2 q^0}{k_0} - g_{a_2}^{i,M_3-2}, \frac{-h^2 q^0}{k_0} - g_{a_2}^{i,M_3-1} - g_{b_3}^{i,1} \end{array} \right)^T$$

et $d_{i,j}$ s'écrit :

$$d_{i,j} = \left(\begin{array}{c} \frac{-h^2 q^0}{k_0} - g_{a_3}^{i,j}, \underbrace{\frac{-h^2 q^0}{k_0}}_{(M_3-3) \text{ fois}}, \frac{-h^2 q^0}{k_0} - g_{b_3}^{i,j} \end{array} \right)^T$$

aussi :

$$d_{i,M_2-1} = \left(\begin{array}{c} \frac{-h^2 q^0}{k_0} - g_{b_2}^{i,1} - g_{a_3}^{i,M_2-1}, \frac{-h^2 q^0}{k_0} - g_{b_2}^{i,2}, \dots \\ \frac{-h^2 q^0}{k_0} - g_{b_2}^{i,M_3-2}, \frac{-h^2 q^0}{k_0} - g_{b_2}^{i,M_3-1} - g_{b_3}^{i,M_2-1} \end{array} \right)^T$$

b.3) la forme du vecteur d_{M_1-1} :

La forme générale du vecteur d_{M_1-1} est :

$$d_{M_1-1} = (d_{M_1-1,1}, \dots, d_{M_1-1,j}, \dots, d_{M_1-1,M_2-1})^T$$

où $d_{M_1-1,1}$ s'écrit comme suit :

$$d_{M_1-1,1} = \left(\begin{array}{c} \frac{-h^2 q^0}{k_0} - g_{b_1}^{1,1} - g_{a_2}^{M_1-1,1} - g_{a_3}^{M_1-1,1}, \frac{-h^2 q^0}{k_0} - g_{b_1}^{1,2} - g_{a_2}^{M_1-1,2}, \dots \\ \frac{-h^2 q^0}{k_0} - g_{b_1}^{1,M_3-2} - g_{a_2}^{M_1-1,M_3-2}, \frac{-h^2 q^0}{k_0} - g_{b_1}^{1,M_3-1} - g_{a_2}^{M_1-1,M_3-1} - g_{b_3}^{M_1-1,1} \end{array} \right)^T$$

Chapitre IV

Organigrammes et applications numériques

Organigrammes et applications numériques

Nous allons étudier un problème de diffusion de la chaleur en dimension 1, 2 et 3 en utilisant l'approximation par différences finies. Pour chacun des cas nous donnerons un organigramme et des résultats numériques.

1) Approximation numérique de la solution de l'équation de la chaleur en dimension 1 par un schéma explicite :

On considère le problème suivant :

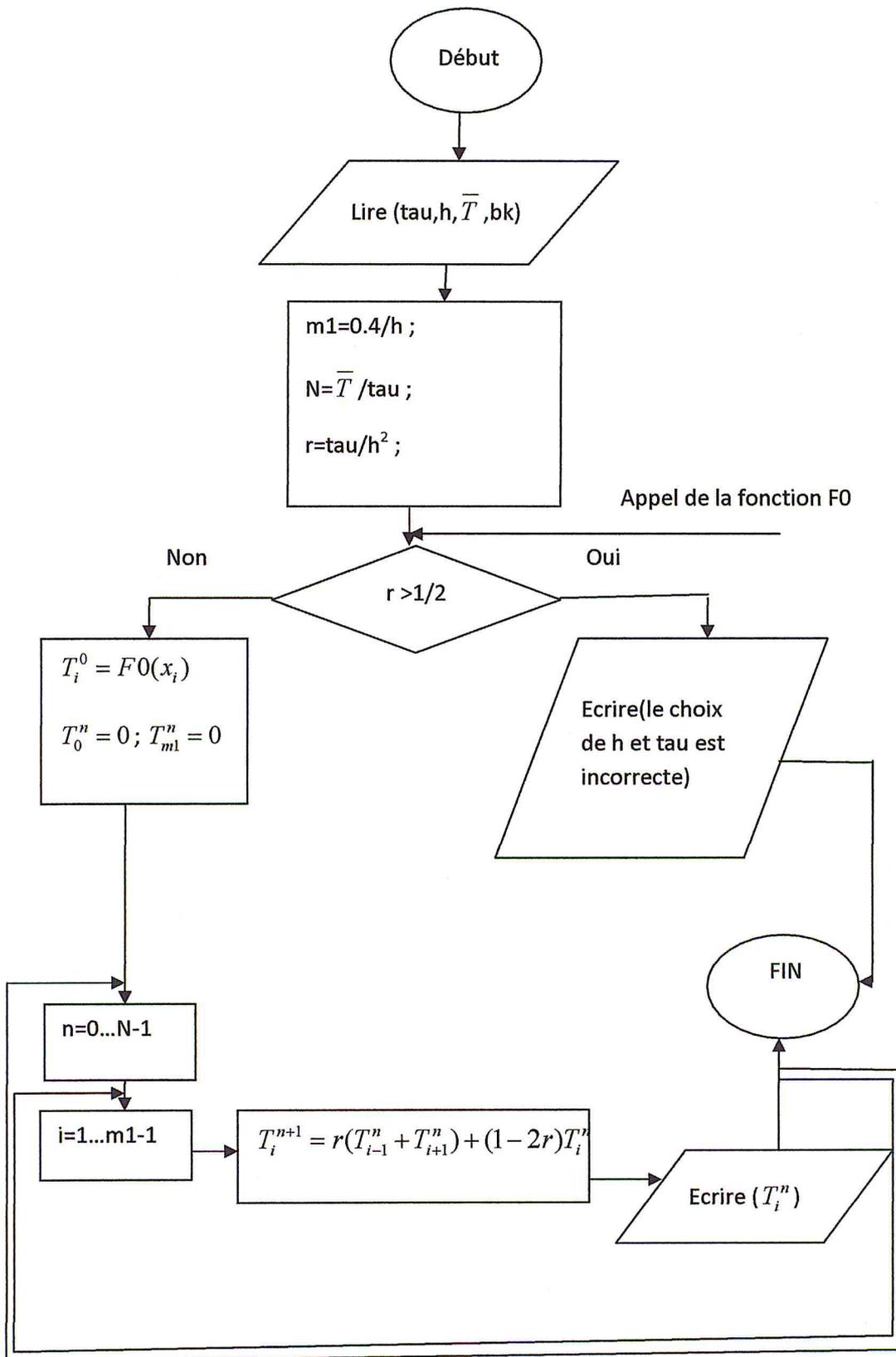
$$(p1) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial T}{\partial t}(x,t) \\ \text{avec } x \in [0,1], t \in [0, \bar{T}] \\ T(x,0) = f(x) \quad x \in [0,1] \\ T(0,t) = T(1,t) = 0 \quad t \in [0, \bar{T}] \end{cases}$$

C'est-à-dire $\rho c_p = 1, k_0 = 1$ et $q^0 = 0$, en utilisant ces données et suivant ce qui a été fait dans la résolution du problème générale (conduction unidimensionnelle) on obtient le schéma final suivant :

$$\begin{cases} T_i^{n+1} = rT_{i-1}^n + rT_{i+1}^n + (1-2r)T_i^n & i = 1 \dots M_1 - 1 \\ T_i^0 = f_i & i = 0 \dots M_1 \\ \left. \begin{matrix} T_0^n = 0 \\ T_{M_1}^n = 0 \end{matrix} \right\} n = 1 \dots N \end{cases}$$

avec $r = \frac{\tau}{h^2}$.

Ce qui peut se traduire par l'organigramme suivant [voir la page suivante] :



- Où : τ est le pas de discrétisation du temps
- \bar{T} désigne la longueur de l'intervalle du temps
- $m1$ désigne le nombre de subdivisions du réseau on a $h=1/m1$
- r est un paramètre de stabilité
- $F0$ est une fonction pour calculer les valeurs f_i ; $i=0\dots m1$
- T_i^n est la température au point x_i à l'instant $t=n$.

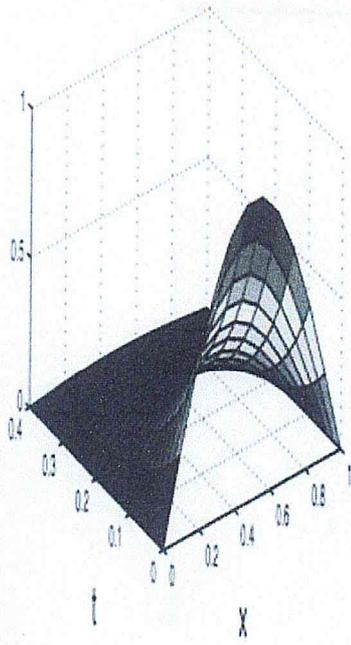
Résultats numériques : voici un exemple de résultat sur $[0,1]$ pour $f(x) = \sin(\pi x)$,
 $\tau = 0.05$, $h = 1/7$ et $\bar{T} = 0.4$

point x_i Temps	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6
0.05	0.260429	0.469278	0.585180	0.585180	0.469278	0.260429
0.1	0.156317	0.281674	0.351242	0.351242	0.281674	0.156317
0.15	0.093826	0.169069	0.210826	0.210826	0.169069	0.093826
0.2	0.056317	0.101480	0.126544	0.126544	0.101480	0.056317
0.25	0.033803	0.060911	0.075955	0.075955	0.060911	0.033803
0.3	0.020289	0.036560	0.045590	0.045590	0.036560	0.020289
0.35	0.012178	0.021944	0.027364	0.027364	0.021944	0.012178
0.4	0.007309	0.013171	0.016425	0.0164250	0.013171	0.007309

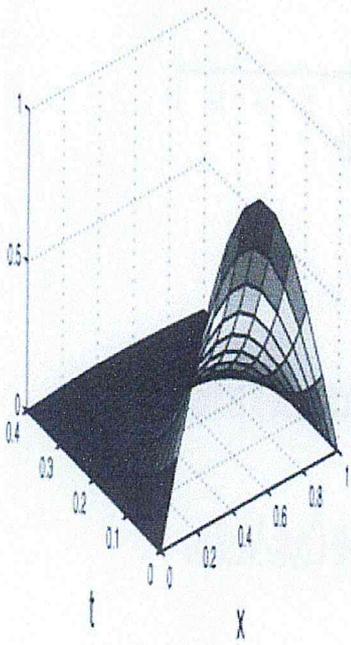
Tableau-1

la solution exacte de (p1) est $T(x,t) = \sin(\pi x)e^{-\pi^2 t}$, donc les résultats peuvent être représentés par les courbes suivantes[voir la page suivante] :

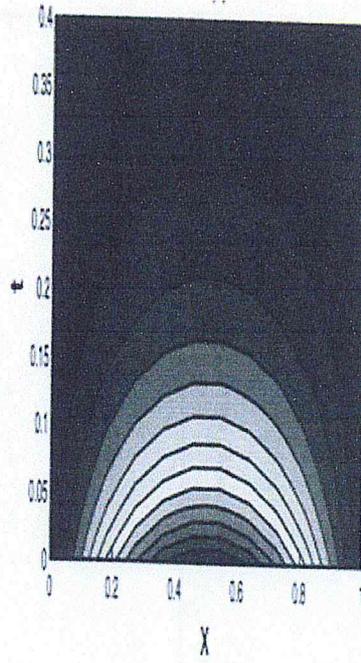
Solution Approché



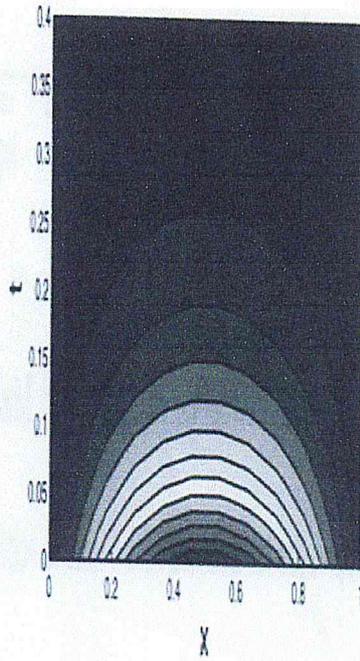
Solution Exacte



Solution Approché



Solution Exacte



2) Approximation numérique de la solution de l'équation de la chaleur en dimension 2 par un schéma explicite :

On considère le problème suivant :

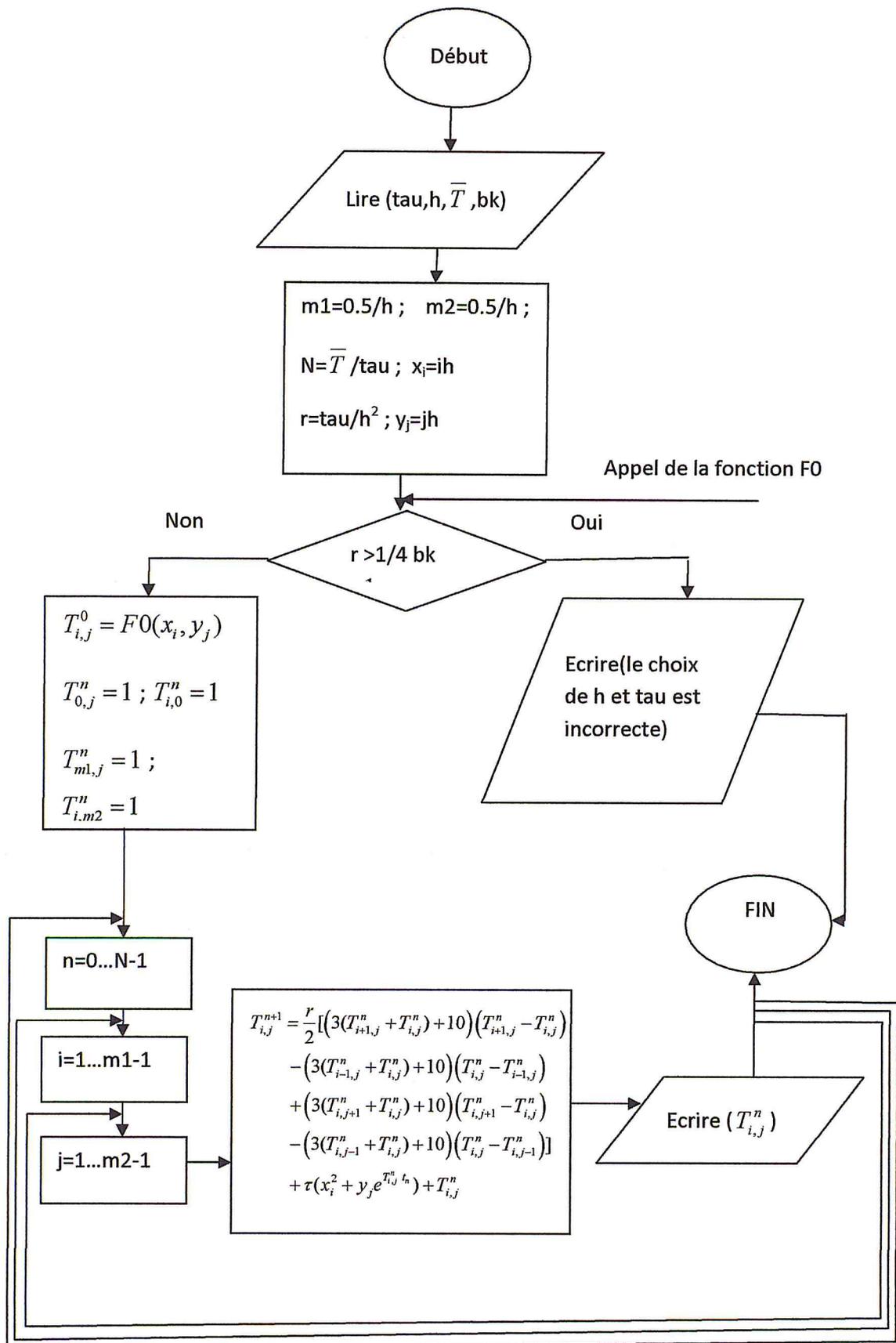
$$(p2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left((3T+5) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left((3T+5) \frac{\partial T}{\partial y} \right) + (x^2 + ye^{T'}) = \frac{\partial T}{\partial t} \\ \text{avec } x \in [0, 0.5], y \in [0, 0.5], \text{ et } t \in [0, \bar{T}] \\ T(x, y, 0) = f(x, y) \quad x \in [0, 0.5], y \in [0, 0.5] \\ T(0, y, t) = T(0.5, y, t) = 1 \quad y \in [0, 0.5], t \in [0, \bar{T}] \\ T(x, 0, t) = T(x, 0.5, t) = 1 \quad x \in [0, 0.5], t \in [0, \bar{T}] \end{array} \right.$$

C'est-à-dire $\rho c_p = 1, k(T) = 3T + 5$ et $q(x, y, t, T) = x^2 + ye^{T'}$, en utilisant ces données et suivant ce qui a été fait dans la résolution du problème générale (conduction bidimensionnelle) on obtient le schéma final suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{i,j}^{n+1} = \frac{r}{2} [(3(T_{i+1,j}^n + T_{i,j}^n) + 10)(T_{i+1,j}^n - T_{i,j}^n) - (3(T_{i-1,j}^n + T_{i,j}^n) + 10)(T_{i,j}^n - T_{i-1,j}^n) \\ \quad + (3(T_{i,j+1}^n + T_{i,j}^n) + 10)(T_{i,j+1}^n - T_{i,j}^n) - (3(T_{i,j-1}^n + T_{i,j}^n) + 10)(T_{i,j}^n - T_{i,j-1}^n)] \\ \quad + \tau(x_i^2 + y_j e^{T_{i,j}^n t_n}) + T_{i,j}^n \quad \left. \begin{array}{l} i = 1 \dots M_1 - 1 \\ j = 1 \dots M_2 - 1 \end{array} \right\} n = 0 \dots N - 1 \\ T_{i,j}^0 = f_{i,j} \quad i = 0 \dots M_1, j = 0 \dots M_2 \\ T_{0,j}^n = T_{i,0}^n = T_{M_1,j}^n = T_{i,M_2}^n = 1 \quad i = 0 \dots M_1, j = 0 \dots M_2 \} n = 1 \dots N$$

avec $r = \frac{\tau}{h^2}$

Ce qui peut se traduire par l'organigramme suivant [voir la page suivante] :



Où : b_k est la borne supérieure de la fonction $k(T)$

$T_{i,j}^n$ est la température au point x_i, y_j à l'instant $t=n$.

Résultats numériques : voici un exemple de résultat pour $f(x, y) = \sin(\pi xy)$,

$\tau = 0.05$, $h = 0.1$ et $\bar{T} = 0.5$

Temps ij		0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
		i=1	j=1	1.00022	1.00023	1.00024	1.00025	1.00026	1.00027	1.00028	1.00030
j=2	1.00039		1.00041	1.00043	1.00045	1.00047	1.00049	1.00051	1.00054	1.00056	1.00059
j=3	1.00048		1.00050	1.00052	1.00055	1.00057	1.00060	1.00063	1.00065	1.00069	1.00072
j=4	1.00039		1.00041	1.00043	1.00045	1.00047	1.00050	1.00052	1.00055	1.00057	1.00060
i=2	j=1	1.00035	1.00036	1.00038	1.00039	1.00041	1.00042	1.00044	1.00046	1.00048	1.00050
	j=2	1.00061	1.00063	1.00066	1.00069	1.00072	1.00075	1.00078	1.00081	1.00085	1.00089
	j=3	1.00072	1.00075	1.00078	1.00082	1.00085	1.00089	1.00093	1.00097	1.00101	1.00106
	j=4	1.00057	1.00060	1.00063	1.00065	1.00068	1.00072	1.00075	1.00078	1.00082	1.00086
i=3	j=1	1.00039	1.00040	1.00042	1.00043	1.00045	1.00046	1.00048	1.00050	1.00052	1.00054
	j=2	1.00066	1.00069	1.00071	1.00074	1.00077	1.00080	1.00083	1.00087	1.00090	1.00094
	j=3	1.00077	1.00080	1.00083	1.00087	1.00090	1.00094	1.00098	1.00102	1.00107	1.00111
	j=4	1.00061	1.00064	1.00067	1.00069	1.00072	1.00076	1.00079	1.00082	1.00086	1.00090
i=4	j=1	1.00030	1.00031	1.00032	1.00033	1.00034	1.00036	1.00037	1.00038	1.00039	1.00041
	j=2	1.00050	1.00052	1.00054	1.00057	1.00058	1.00060	1.00062	1.00064	1.00067	1.00070
	j=3	1.00058	1.00061	1.00063	1.00065	1.00068	1.00071	1.00073	1.00076	1.00079	1.00083
	j=4	1.00048	1.00050	1.00052	1.00054	1.00056	1.00058	1.00061	1.00063	1.00066	1.00068

Tableau-2

3) Approximation numérique de la solution de l'équation de la chaleur en dimension 3 :

On considère le problème suivant :

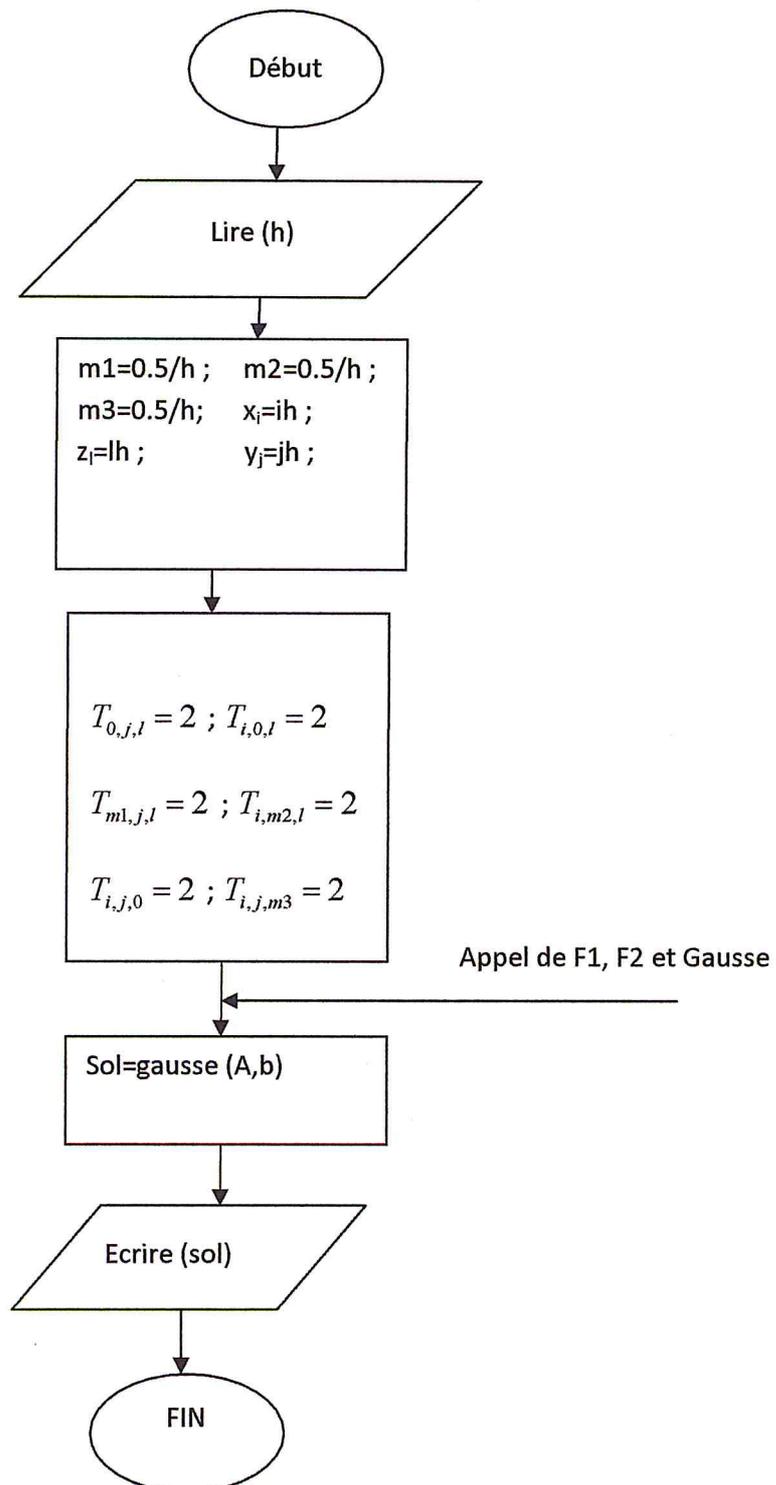
$$(p3) \left\{ \begin{array}{l} 3 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + 20 = 0 \\ \text{avec } x \in [0, 0.5], y \in [0, 0.5], z \in [0, 0.5] \\ \left. \begin{array}{l} T(0, y, z) = T(x, 0, z) \\ = T(x, y, 0) = T(0.5, y, z) \\ = T(x, 0.5, z) = T(x, y, 0.5) = 2 \end{array} \right\} x \in [0, 0.5], y \in [0, 0.5], z \in [0, 0.5]$$

C'est-à-dire $k_0 = 3$ et $q^0 = 20$, en utilisant ces données et suivant ce qui à été fait dans la résolution du problème générale (conduction tridimensionnelle) on obtient le schéma final suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{i-1,j,l} + T_{i+1,j,l} + T_{i,j-1,l} - 6T_{i,j,l} + T_{i,j+1,l} + T_{i,j,l-1} + T_{i,j,l+1} = \frac{-20h^2}{3} \\ i = 1 \dots M_1 - 1, j = 1 \dots M_2 - 1, l = 1 \dots M_3 - 1 \\ T_{0,j,l} = T_{i,0,l} = T_{i,j,0} = T_{M_1,j,l} = T_{i,M_2,l} = T_{i,j,M_3} = 2 \quad i = 0 \dots M_1, j = 0 \dots M_2, l = 0 \dots M_3 \end{array} \right.$$

qu'on peut écrire comme un système linéaire.

La résolution de ce problème peut se traduire par l'organigramme suivant [voir la page suivante] :



Où : F1 et F2 sont des fonctions pour calculer la matrice A et le vecteur b

Gausse designe une fonction de résolution des systèmes linéaires

$T_{i,j,l}$ est la température au point x_i, y_j et z_l à l'instant $t=n$.

Résultats numériques : voici un exemple de résultat pour $h = 0.1$

i,j \ i		i			
		i=1	i=2	i=3	i=4
j=1	l=1	2.03274	2.04327	2.04327	2.03274
	l=2	2.04327	2.05847	2.05847	2.04327
	l=3	2.04327	2.05847	2.05847	2.04327
	l=4	2.03247	2.04327	2.04327	2.03274
j=2	l=1	2.04327	2.05847	2.05847	2.04327
	l=2	2.05847	2.08070	2.08070	2.05847
	l=3	2.05847	2.08070	2.08070	2.05847
	l=4	2.04327	2.05847	2.05847	2.04327
j=3	l=1	2.04327	2.05847	2.05847	2.04327
	l=2	2.05847	2.08070	2.08070	2.05847
	l=3	2.05847	2.08070	2.08070	2.05847
	l=4	2.04327	2.05847	2.05847	2.04327
j=4	l=1	2.03274	2.04327	2.04327	2.03274
	l=2	2.04327	2.05847	2.05847	2.04327
	l=3	2.04327	2.05847	2.05847	2.04327
	l=4	2.03274	2.04327	2.04327	2.03274

Tableau-3

Remarque : pour le programme, on a utilisé le langage DELPHI et pour plus de détaille, je vous invite à voir le CD.

```

program transfert_thermique;
uses
SysUtils;
type
mat=array of array of real;
tvect=array of real;
tvv=array of tvect;
ttvv=array of tvv;
tvtv=array of tvect;
tmat=array of array of mat;
ttmat=array of array of tmat;
var
tpb:integer;
procedure unidimensionnelle;
var
h,a1,b1,t1,tau,rho,cp,a,b,k0,q0:real;
pb:integer;
procedure implicite1;
var
mm1,c1,c2:real;
m1,i1,i2:integer;
data:mat;
x,b,sol:tvect;
begin
writeln('donner l"intervalle de variation des x
(a1 et b1)');readln(a1);readln(b1);
writeln('donner le pas de discrétisation sur les
axes x (h)');readln(h);
writeln('donner les paramertres k0 et q0
');readln(k0);readln(q0);
writeln('donner les parametres des conditions
aux limites c1 et c2');readln(c1);readln(c2);
mm1:=(b1-a1)/h; m1:=round(mm1);
setlength(x,m1-1);
setlength(data,(m1-1),(m1-1));
for i1:=0 to m1-2 do
data[i1,i1]:=2;
for i1:=0 to m1-3 do
data[i1,i1+1]:=-1;
for i1:=1 to m1-2 do
data[i1,i1-1]:=-1;
setlength(b,(m1-1));
b[0]:=(h*h*q0)/k0+c1;
for i1:=1 to m1-3 do
b[i1]:=(h*h*q0)/k0;
b[m1-2]:=(h*h*q0)/k0+c2;
sol:=Gausse (data,b);affiche_vect2_uni(sol);
end;
procedure explicite2;
var
mm1,mm4,pr,gr:real;
m1,m4,i1,i2:integer;
x,t:tvect;
temp:tvv;
function f (r1:real):real;
var r2:real;
begin
r2:={r1 }sin(3.141592654*r1);
f:=r2;
end;
function gal(r1:real):real;

```

```

var r2:real;
begin
r2:=0;
ga1:=r2;
end;
function gb1(r1:real):real;
var r2:real;
begin
r2:=0;
gb1:=r2;
end;
begin
writeln('donner l"intervalle de variation des x
(a1 et b1)');readln(a1);readln(b1);

writeln('donner l"intervalle de variation de
temps (t1)');readln(t1);

writeln('donner le pas de discrétisation sur les
axes x (h)');readln(h);

writeln('donner le pas de discrétisation du
temps (tau)');readln(tau);

writeln('donner les parametres rho et
cp');readln(rho);readln(cp);

writeln('donner les paramertres k0 et q0
');readln(k0);readln(q0);

mm1:=(b1-a1)/h;          mm4:=t1/tau;
gr:=k0/(rho*cp);

m1:=round(mm1);
m4:=round(mm4);      pr:=tau/(h*h);

setlength(x,m1+1);      setlength(t,m4+1);

for i1:=0 to m1 do
x[i1]:=a1+i1*h;

for i2:=0 to m4 do
t[i2]:=i2*tau;

setlength (temp,m4+1);

for i1:=0 to m4 do
setlength (temp[i1],m1+1);

for i1:=0 to m1 do
(temp[0])[i1]:=f(x[i1]);

for i1:=1 to m4 do
(temp[i1])[0]:=ga1(t[i1]);

for i1:=1 to m4 do
(temp[i1])[m1]:=gb1(t[i1]);

if (pr>1/(2*gr))then
begin
writeln('la condition de stabilite n est pas
verifier ',pr,'>',1/(2*gr),
' essayer pour un autre valeur de tau et
h');readln;

end;

if (pr <1/(2*gr) )then
begin
for i2:=0 to m4-1 do

begin
for i1:=1 to m1-1 do

(temp[i2+1])[i1]:=gr*pr*(temp[i2])[i1-
1]+gr*pr*(temp[i2])[i1+1]

+(1-
2*gr*pr)*(temp[i2])[i1]+(q0*tau)/(rho*cp);

end;

for i2:=1 to m4 do

begin
writeln('la val au niveau n=',i2,'est:');readln;
affiche_vect_uni(temp[i2]);

end;

end;

end;

procedure exemple_generale_explicite;
var

```

```

mm1,mm4,gr,pr,max,borne:real;
m1,m4,i1,i2:integer;
x,t:tvect;
temp:tvv;
function k (r1:real):real;
var r2:real;
begin
r2:=a*r1+b;
k:=r2;
end;
function q (r1,r2,r3:real):real;
var r4:real;
begin
r4:=r1+r2*r2+exp(r3);
q:=r4;
end;
function f (r1:real):real;
var r2:real;
begin
r2:=r1;
f:=r2;
end;
function gal(r1:real):real;
var r2:real;
begin
r2:=1;
gal:=r2;
end;
function gb1(r1:real):real;
var r2:real;
begin
r2:=1;
gb1:=r2;
end;
end;
begin
writeln('donner l"intervalle de variation des x
(a1 et b1)');readln(a1);readln(b1);
writeln('donner l"intervalle de variation de
temps (t1)');readln(t1);
writeln('donner le pas de discrétisation sur les
axes x et y (h)');readln(h);
writeln('donner le pas de discrétisation du
temps (tau)');readln(tau);
writeln('donner les parametres rho et
cp');readln(rho);readln(cp);
writeln('donner les coefficients de la fonction
k (a et b)');readln(a);readln(b);
mm1:=(b1-a1)/h;          mm4:=t1/tau;
gr:=1/(2*rho*cp);
m1:=round(mm1);
m4:=round(mm4);  pr:=tau/(h*h);
setlength(x,m1+1);      setlength(t,m4+1);
for i1:=0 to m1 do
x[i1]:=a1+i1*h;
for i2:=0 to m4 do
t[i2]:=i2*tau;
setlength (temp,m4+1);
for i1:=0 to m4 do
setlength (temp[i1],m1+1);
for i1:=0 to m1 do
(temp[0])[i1]:=f(x[i1]);
max:=-500;
for i1:=0 to m1 do
begin
if((temp[0])[i1]>max)then
max:=(temp[0])[i1];

```

Conclusion

Au cours de cette présente étude nous avons surtout tenté de résoudre l'équation générale de la conduction thermique avec des conditions aux limites imposées par l'approximation des différences finies.

Dans le premier chapitre, nous avons explicité certaines conceptions du transfert thermiques et la modélisation du problème de la conduction thermique.

Dans le deuxième chapitre, nous avons abordé des :

- 1- Méthode des différences finies
- 2- Méthodes itératives pour résoudre un système d'équations linéaires
- 3- La méthode de Newton pour résoudre un système d'équations non linéaires.

Dans le troisième chapitre, nous avons traité de la résolution de l'équation de la chaleur en dimension 1, en dimension 2 et en dimension 3.

Dans cette partie, nous avons distingué deux cas :

I- Cas non stationnaire : dans lequel nous avons deux schémas :

I.1.-le schéma explicite dont nous avons étudié la consistance et la stabilité, permet de calculer directement les valeurs de températures des différents niveaux.

I.2 -le schéma implicite dont nous avons étudié la consistance et la stabilité, nous permet de calculer les valeurs de températures des différents niveaux, en traitant la résolution des systèmes d'équations linéaires ou non linéaires.

II cas stationnaire : dans la résolution du problème, on se retrouve devant un système d'équations linéaires ou non linéaires qu'il faut résoudre aussi. Dans cette partie également, nous avons étudié la consistance.

Dans le dernier chapitre, nous avons élaboré des organigrammes et des applications numériques, tout comme nous avons construit un programme en Delphi.

On a constaté que la résolution des systèmes linéaires dans le programme est limité à l'ordre 8000*8000 ceci est du principalement à la capacité de l'ordinateur.

Toutes fois ce mémoire ouvre la voie à d'autres travaux scientifiques tels que :

- La résolution de l'équation de la chaleur pour un milieu non isotrope :

$$k_x \neq k_y \neq k_z.$$

- La résolution de l'équation de la chaleur pour d'autres conditions aux limites (convection et rayonnement).
- La résolution de l'équation de la chaleur en coordonnées cylindriques et en coordonnées sphériques.

Bibliographie

- [1] Sanjeev Chandra et autres, www.mhhe.com/cengel/ (2002).
- [2] Gosse J, «Guide technique de thermique», Edition Dunod (1981).
- [3] Alain Degiovanni, Transmission de l'énergie thermique, Techniques de l'ingénieur (BE 8 200).
- [4] Thomas.J.W, Numerical partial differential equations: finite difference methods, Springer Edition (1995).
- [5] Moise Sibony et Jean claude Mardon, Approximations et équations différentielles, Edition Hermann (1984).
- [6] A.Le Pourhiet, Résolution numérique des équations aux dérivées partielles, Edition Cépadués (1988).
- [7] Jean-Guy Dion et Rolland Gaudet, Méthodes d'analyse numérique, édition Modulo (1996).
- [8] John H.Lienhard IV et John H.Lienhard V, A heat transfer textbook, Third Edition (2004).