

UNIVERSITE SAAD DAHLAB BLIDA 1

Faculté de Technologie
Département de Mécanique

THESE DE DOCTORAT

en Génie Mécanique

Spécialité : Génie Mécanique

CONTROLE ACTIF DES VIBRATIONS DE PLAQUE COMPOSITES
MULTICOUCHES

Par

EZZRAIMI Madjid

Devant le jury composé de :

Mohammed OUALI	Professeur U. Blida 1	Président
Hichem FERDJANI	Professeur U. Blida 1	Examineur
Mohamed BOUAZIZ	Professeur ENP Alger	Examineur
Ali MAHIEDDINE	MCA UDB Khemis Miliana	Examineur
Mourad BACHENE	MCA UYF de Médéa	Examineur
Rachid TIBERKAK	MCA U. Blida 1	Directeur de Thèse

BLIDA, 2019

RESUME

Dans de nombreuses applications industrielles, le bruit ou les vibrations constituent un problème majeur. Les méthodes conventionnelles d'atténuation se limitent à amortir la perturbation par des techniques passives, par contre les techniques actives permettent de contrôler les vibrations à chaque instant par des actionneurs qui agissent sur la structure selon une loi de commande conçue pour minimiser l'intensité des vibrations indésirables.

Dans ce contexte, on présente une formulation d'une plaque sandwich intégrant une couche centrale élastique (isotrope ou composite) entre deux couches piézoélectriques (actionneurs et/ou capteurs), pouvant être considérée comme une structure intelligente (smart structure) et permettant le contrôle actif des vibrations.

En premier lieu, le contrôle statique de la déflexion est entrepris en mode actionneur, avec deux configurations de recouvrement des couches piézoélectriques, en recouvrement total et partiel (pastilles), et l'influence de la position des pastilles (patches) sur l'atténuation des vibrations est analysée.

Dans une deuxième étape, pour le contrôle actif des vibrations on utilise deux types de contrôleurs, le régulateur linéaire quadratique (LQR) et le régulateur proportionnel intégral dérivée (PID) avec différents paramètres de contrôle qui sont testés et comparés tout en tenant compte des deux configurations de recouvrement (total et partiel). Les résultats actuels montrent que les performances des pastilles sont aussi bonnes que celles du recouvrement total malgré un rapport de surface 1/3.

On remarque également que le contrôleur PID est plus efficace que le contrôleur LQR. Cependant, en utilisant l'algorithme d'optimisation par essaim particulière PSO (ou Particle Swarm Optimization), les paramètres du contrôle du deuxième sont optimisés pour atteindre presque les mêmes performances que celles du contrôleur PID.

Mots clés : méthode des éléments finis, plaques composites, vibrations, piézoélectricité, contrôle actif, LQR, PID, PSO.

ABSTRACT

In many industrial applications, noise or vibration is a major problem. Conventional mitigation methods of damping disturbance by passive techniques, on the other hand, the active techniques make it possible to control the vibrations at any moment by actuators which act on the structure according to a control law designed to minimize the intensity of the undesirable vibrations.

In this context, a formulation of a sandwich plate integrating an elastic central layer (isotropic or composite) between two piezoelectric layers (actuators and/or sensors), which can be taken as a smart (intelligent) structure and allowing active control vibrations is presented.

At First, the static control of the deflection by taking the two piezoelectric layers as actuators with two configurations of the total piezoelectric layer and patches is undertaken. Thus, the influence of patches position, for the second configuration, on the attenuation of vibrations is analyzed.

In a Second step, the active vibration control using two types of LQR (Quadratic Linear Regulator) and PID (proportional–integral–derivative controller) controllers with different control parameters is tested and compared for the two configurations (total piezoelectric layer and patches). It is demonstrated throughout the present results that the performances of the patches are almost as good as those of the total layer despite a ratio of the surfaces patches which is 1/3.

It is also noticed that the PID controller is more efficient than the LQR controller. But, if using the PSO (Particle Swarm Optimization) algorithm, the LQR's parameters are optimized and give almost the same performances as those of the PID controller.

Key words: Finite element method, composite plates, vibrations, piezoelectric, active control, LQR, PID, PSO.

ملخص

في العديد من التطبيقات الصناعية ، تعد الضوضاء أو الاهتزاز مشكلة كبيرة. طرق التخفيف التقليدية لتخميد الاضطراب بتقنيات سلبية ، من ناحية أخرى ، تسمح التقنيات النشطة بالتحكم في الاهتزازات في أي وقت من خلال المحركات التي تعمل على الهيكل وفقاً لقانون التحكم المصمم لتقليل شدة الاهتزازات. الاهتزازات غير المرغوب فيها.

في هذه الأطروحة ، نقدم صياغة لصفيحة سنديتس دمج طبقة مرنة مركزية (متناح أو مركب) بين طبقتين كهروضغية (مشغلات و / أو أجهزة استشعار) ، والتي يمكن اعتبارها بنية ذكية وتسمح بالتحكم في الاهتزازات النشطة.

أولاً ، التحكم الثابت في الانحراف عن طريق أخذ الطبقتين كهروضغية كمشغلين (وضع المحرك) مع توصيفين من طبقة كهروضغية ، بالتغطية الكامل والجزئي (الرقع) ، والتأثير يتم تحليل موقف الرقع على توهين الاهتزاز.

في الخطوة الثانية ، يتم اختبار ومراقبة التحكم في الاهتزاز النشط باستخدام نوعين من أجهزة التحكم LQR و PID مع معلمات تحكم مختلفة مع الأخذ في الاعتبار بالتغطية (الكلي والجزئي). في الخطوة الثانية ، يتم اختبار ومراقبة عنصر التحكم في الاهتزاز النشط باستخدام نوعين من وحدات التحكم LQR (منظم خطي تربيعي) و PID (مشتق منظم متكامل للمشتقات) مع معلمات تحكم مختلفة مع الأخذ في الحسبان بالتغطية (الكلي والجزئي) . تظهر النتائج الحالية أن أداء الرقعة يكاد يكون جيداً مثل أداء الانتعاش الكلي على الرغم من نسبة السطحية 3/1.

نلاحظ أيضاً أن وحدة تحكم PID أكثر كفاءة من وحدة تحكم LQR. ومع ذلك ، باستخدام خوارزمية (PSO) (Optimizer Swarm Optimization) ، يتم تحسين إعدادات التحكم الثانية ، وبالتالي فإن وحدة تحكم LQR لها نفس أداء وحدة تحكم PID.

كلمات البحث : طريقة العناصر المحدودة ، لوحات المركبة ، الاهتزاز ، الضخامة ، التحكم النشط ، LQR ، PID ، PSO.

REMERCIEMENTS

Je remercie ALLAH pour sa protection et son aide pour accomplir ce travail, et je le prie encore pour m'aider à apprendre plus.

Mes remerciements à mes directeurs de thèse Professeur AIAD Abdelkrim et Docteur TIBERKAK Rachid pour leurs soutiens, conseils, orientation et encouragement tout au long de ce projet.

Je remercie les honorables membres du jury qui ont donné de leur temps pour lire et examiner cette thèse.

Un sincère Merci au Pr OUALI Mohammed qui a accepté de présider le jury. Je remercie vivement le Pr FERDJANI Hichem, Pr BOUAZIZ Mohamed, Dr MAHIEDDINE Ali et Dr BACHENE Mourad pour l'intérêt qu'il ont porté à mon modeste travail en acceptant de faire partie du jury de ma soutenance.

Merci à mes parents et ma famille pour leur amour et leurs sacrifices, et pour m'avoir soutenu et supporté durant ces années.

Enfin, je tiens à remercier tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

TABLE DES MATIERES

RESUME	1
REMERCIEMENTS	4
TABLE DE MATIERES	5
LISTE ES FIGURES	8
LISTE DES TABLAUX	10
INTRODUCTION GENERALE	11
1. GENERALITES SUR PIEZOELCTRICITE et CONTROLE ACTIF	16
1.1. Introduction	16
1.2. Piézoélectricité	17
1.3. Notion du contrôle actif des vibrations	23
Conclusion	25
2. THEORIE DES PLAQUES POUR MATERIAUX ELASTIQUE ET PIEZOELECTRIQUE	26
2.1. Introduction	26
2.2. Champ de déplacement	26
2.3. Champ de déformation (relation déformation-déplacement)	29
2.4. Loi de comportement	31
2.5. Résultantes des forces et des moments et loi constitutive	33
2.5. Principe de Hamilton	34
2.5.1. Energie cinétique	34
2.5.2. Energie potentielle	35
2.5.3. Travail des efforts externes	37
2.6. Matériau composite	37
2.6.1. Champ de déplacement	38
2.6.2. Relations contraintes déformations	39
2.6.3. Equation constitutive d'un stratifié	43
2.7. Matériau piézoélectrique	45
2.7.1. Loi de comportement	45
2.7.2. Champ électrique	46

2.7.3.Energie cinétique	47
2.7.4.Energie potentielle	47
2.7.5.Travail pour plaque piézoélectrique	48
2.8. Plaque sandwich (multicouches)	49
2.8.1.Energie cinétique du sandwich	50
2.8.2.Energie potentielle du sandwich	51
2.8.3.Travail des efforts extérieurs	52
Conclusion	52
3. MODELISATION EN ELEMENTS FINIS	53
3.1. Introduction	53
3.2. Discrétisation de la géométrie	53
3.3. Fonctions d'interpolation	54
3.4.Approximation de la solution	56
3.4.1.Energie cinétique élémentaire	56
3.4.2.Energie potentielle élémentaire	56
3.4.3.Travail pour le sandwich	57
3.5.Matrices élémentaires	58
3.5.1.Matrice élémentaire de la masse	58
3.5.2.Matrice élémentaire de rigidité	58
3.6.Amortissement	61
Conclusion	63
4. ANALYSE D'UN SANDWICH PIEZOELCTRIQUE et ALGORITHMES DE CONTROLE ACTIF DES VIBRATIONS	64
4.1.Introduction	64
4.2.Analyse modale	64
4.3.Analyse dynamique	66
4.3.1.Excitation par actionneur piézoélectrique (mode actionneur)	67
4.3.2.Réponse d'un capteur piézoélectrique (mode capteur)	67
4.3.3.Résolution par la méthode de NEWMARK	67
4.4.Contrôle actif des vibrations	70
4.4.1.Réduction du modèle de représentation modale	70

4.4.2.Représentation d'état	71
4.4.3.Différents types de contrôleurs	72
4.4.4. Algorithme d'optimisation (PSO)	75
Conclusion	79
5. APPLICATIONS ET DISCUSSIONS	80
5.1. Introduction	80
5.2.Analyse modale et validation	80
5.2.1.Plaque élastique isotrope monocouche	80
5.2.2.Plaque sandwich élastique isotrope	81
5.2.3.Plaque en composite	81
5.2.4.Etude de l'influence des conditions aux limites	83
5.3. Atténuation statique de la déflexion (en mode actionneur)	85
5.3.1. Plaque sandwich encastree (CFFF)	86
5.3.2. Plaque sandwich en appuis simples (SSSS)	90
5.4. Control actif des vibrations	92
5.4.1. Control actif de la plaque encastree (CFFF)	92
5.4.2. Contrôle actif de la plaque en appuis simples (SSSS)	98
Conclusion	101
CONCLUSION GENERALE	102
LISTE DES SYMBOLES	104
REFERENCES	107

LISTE DES FIGURES

Fig.1.1. Illustration extraite du brevet de Lueg	17
Fig.1.2.Effet direct et inverse de la piézoélectricité	18
Fig.1.3. Organigramme des différentes classes cristallines	18
Fig.1.4. Schématisation des domaines : (a) avant polarisation, (b) pendant polarisation et (c) après polarisation	19
Fig.1.5. Effet piézo-électrique inverse : a) aucun voltage b) voltage de même polarité (contraction) c) de polarité opposée (expansion)	20
Fig.1.6.Représentation de mécanisme d'action par extension	21
Fig.1.7.Schéma d'une structure intelligente	23
Fig.1.8. Dispositif de contrôle actif de vibrations d'un empennage d'avion (a) détails, (b) dispositif général (documents ACX - NASA)	24
Fig.1.9. Retor SMART dans une tour d'essai (Revue de la force aérienne du canada Été 2008)	25
Fig.2.1. Géométries déformées et non déformées d'un bord d'une plaque	27
Fig.2.2.Déformation en présence du cisaillement transverse	28
Fig.2.3. Schéma d'une plaque stratifiée	38
Fig.2.4. Directions principales dans un pli	39
Fig.2.5. Changement de repère dans un pli	41
Fig.2.6.Plaque sandwich piézoélectrique	49
Fig.3.1.Elément de référence	53
Fig.4.1.Boucle du contrôleur LQR	74
Fig.4.2. Boucle du contrôleur PID	75

Fig.4.3. Principe de déplacement d'une particule	77
Fig.5.1. Les quatre premiers modes propres composite-CFFF	83
Fig.5.2. Les quatre premiers modes propres composite-SSSS	84
Fig.5.3. Plaque sandwich piézoélectrique	85
Fig.5.4. Déflexion en fonction du voltage	86
Fig.5.5. Influence des séquences d'empilement des fibres	87
Fig.5.6. Déflexion de la ligne centrale (CFFF) - Recouvrement total	88
Fig.5.7. Configuration A, B et C des pastilles (CFFF)	89
Fig.5.8. Déflexion de la ligne centrale (CFFF) – Pastilles	89
Fig.5.9. Déflexion de la ligne centrale (SSSS) - Recouvrement total	90
Fig.5.10. Configuration A, B et C des pastilles (SSSS)	91
Fig.5.11. Déflexion de la ligne centrale (SSSS) – Pastilles	91
Fig.5.12. Réponse pour: Force harmonique, CFFF, Recouvrement Total	94
Fig.5.13. Réponse pour: Force d'impulsion, CFFF, Recouvrement Total	95
Fig.5.14. Réponse pour: Force d'impulsion, CFFF, Patches	97
Fig.5.15. Réponse pour: Force d'impulsion, SSSS, Recouvrement Total	99
Fig.5.16. Réponse pour: Force d'impulsion, SSSS, Patches	100

LISTE DES TABLAUX

Tab.1.1. Applications des matériaux Piézoélectriques	19
Tab.1.2. Analogie entre les variables mécaniques et électriques	20
Tab.1.3. Grandeurs électriques, mécaniques et piézoélectriques	22
Tab.5.1. Les trois premières fréquences propres monocouche-isotrope-CFFF	81
Tab.5.2. Les quatre premières fréquences propres composite-CFFF	82
Tab.5.3. Les quatre premières fréquences propres composite-CFFF-SSSS	83
Tab.5.4. Propriétés des matériaux	85
Tab.5.5. Paramètres de contrôle pour le LQR et PID	92

INTRODUCTION GENERALE

Les vibrations structurales sont très indésirables puisqu'elles peuvent causer des problèmes tels que la fatigue structurale, la transmission des vibrations à d'autres systèmes, le bruit interne ou externe, etc. Néanmoins, il est possible de limiter leurs effets grâce, fondamentalement, à trois types de techniques. La première est la technique de suppression, utilisée surtout pour éliminer le bruit engendré par les vibrations et non les vibrations elles mêmes. La seconde est l'isolation qui consiste à éviter la transmission des vibrations d'un système à un autre sans pour autant éliminer les vibrations du système émetteur.

Finalement, le troisième groupe de techniques, dit d'atténuation, est utilisé pour diminuer l'amplitude des vibrations d'un système, utilisant généralement la piézoélectricité pour accomplir cette mission. Elles sont connues aussi par techniques de contrôle actif des vibrations, ces techniques permettent de repousser les limites de la maîtrise du comportement dynamique des structures tout en introduisant les critères de confort et de sécurité. L'intérêt principal des matériaux piézoélectriques est qu'ils couplent les grandeurs mécaniques et électriques, et permettent d'agir sur l'état mécanique d'une structure par modification du champ électrique appliqué à ces matériaux.

Les structures en poutre, plaque et coque sont des éléments structuraux de base dans la construction navale, automobile et aéronautique, etc. Le contrôle actif de ces structures permet de diminuer les risques de fatigue prématurée et d'augmenter leurs performances, et ouvre des perspectives dans un nouveau domaine des structures dites intelligentes. Une structure intelligente (smart structure) est une structure contenant des éléments piézoélectriques (actionneurs et/ou capteurs) collés ou intégrés et couplés par un système de contrôle.

Vue son importance, le contrôle actif des vibrations des structures à l'aide de capteurs et d'actionneurs piézoélectriques a fait l'objet de beaucoup d'attention dans plusieurs études.

Forward et Liu [1] ont été parmi les premiers à utiliser des capteurs et actionneurs piézoélectriques afin de contrôler les vibrations de structures flexibles. Par la suite, Bailey et Hubbard [2] ont utilisé un film de polymère piézoélectrique afin de contrôler les vibrations d'une poutre de type encastrée-libre.

Crawley et al [3] ont étudié le développement analytique et expérimental d'actionneurs piézoélectriques en tant qu'éléments de structures intelligentes, où des modèles analytiques statiques et dynamiques sont dérivés pour des actionneurs piézoélectriques qui sont liés à une structure élastique. Alors que dans leur deuxième article [4], le développement et la vérification expérimentale de l'actionnement par contrainte induite des composants de la plaque d'une structure intelligente sont présentés.

Hagood et al. [5] ont modélisé le couplage se produisant entre le piézoélectrique et la structure à contrôler. Par la suite, Dosch et al. [6] et Hagood et Anderson [7] ont démontré la possibilité d'utiliser un piézoélectrique à la fois comme capteur et comme actionneur. Les actionneurs et capteurs mis en œuvre dans les modèles sont généralement, soit des pastilles céramiques piézoélectrique (ou polymère), soit des "couches" piézoélectriques.

Dimitradis et al. [8] ont étudié le comportement de pastilles (patches) bidimensionnels en matériau piézoélectrique collées à la surface de structures élastiques et utilisées comme actionneurs de vibrations. Cette théorie est ensuite appliquée pour développer un modèle dynamique approximatif pour la réponse en vibration d'une plaque rectangulaire élastique simplement supportée. Her et al [9] présentent la solution analytique du déplacement en flexion d'une plaque simplement supportée, soumise au moment de flexion, en résolvant la théorie des plaques, et les effets de la taille et de l'emplacement des actionneurs piézoélectriques sur la réponse d'une plaque sont présentés dans une étude paramétrique.

Dans [10], Hwang et al. ont présenté une formulation par éléments finis pour le contrôle des vibrations d'une plaque stratifiée avec capteurs /ou actionneurs piézoélectriques et pour une plaque stratifiée sous le contrôle de rétroaction de vitesse négative, et les réponses temporelles directes sont calculées par la méthode Newmark. Une méthode par éléments finis basée sur la théorie classique des plaques stratifiées pour le contrôle actif de la vibration d'une plaque composite contenant des capteurs piézoélectriques et des actionneurs est développée par Lam et al [11], et l'analyse statique et la suppression des vibrations actives d'une plaque composite en porte-à-faux sont effectuées à titre d'exemple numérique pour vérifier le modèle proposé.

Liu et al [12] utilisent un simple algorithme de contrôle par rétroaction de vitesse négative couplant les effets piézoélectriques directs et inverses pour contrôler activement la réponse dynamique d'une structure via une boucle de contrôle fermée. Wang et al. Dans [13, 14], ont étudié dans le contrôle de la vibration des plaques composites piézoélectriques intelligentes à l'aide de la méthode classique de contrôle par rétroaction de vitesse négative. Ang et al [15] proposent d'utiliser la méthode de l'énergie totale pondérée pour sélectionner les matrices de pondération du régulateur quadratique linéaire **LQR** utilisé pour le contrôle de la vibration des plaques composites piézoélectriques intelligentes.

Mahieddine dans [16] propose un modèle éléments finis des poutres piézoélectriques avec des couches partiellement décollées et analyse leur comportement vibratoire. Alors que Narwal [17] utilise le contrôleur LQR pour atténuer la vibration structurelle d'une structure en plaque reposant sur un support simple. Zemirline dans [18] propose la modélisation du comportement statique et dynamique des structures piézoélectriques tout en admettant l'effet de cisaillement, l'amortissement structural et le changement de la température ambiante. Dans [19], Bendine et al, ont étudié la modélisation et le contrôle actif de la vibration d'une plaque en matériau fonctionnellement gradué (FGM : Functionally Graded Material) avec des couches piézoélectriques liées à la surface supérieure et inférieure à l'aide du logiciel ANSYS.

Orientation du sujet :

Zhang et al. [20], ont développé un modèle d'éléments finis à couplage électromécanique de structures intelligentes, en considérant les vibrations générées par diverses perturbations, notamment les vibrations libres et forcées. Un contrôleur **PID** (Régulateur Proportionnel Intégral Dérivée) est mis en œuvre dans cette étude pour amortir les vibrations libres et forcées, en plus, du contrôleur LQR qui est aussi appliqué et comparé.

Dans l'article [20], les auteurs ont traité le contrôle actif d'une plaque piézoélectrique utilisant deux contrôleurs LQR et PID pour différents paramètres de contrôle, mais on note que les éléments piézoélectriques (capteurs et actionneurs) couvrent toute la surface supérieure et inférieure de la plaque (recouvrement total), alors que l'utilisation des pastilles (patches) en recouvrement partiel des éléments piézoélectriques (moins encombrantes que les premières) est autant intéressante, surtout explorant leurs dimensions et leurs position par rapport à l'atténuation des vibrations est un aspect important qui a fait le premier apport dans notre projet.

Suite à cette recherche bibliographique, on a remarqué aussi que les performances des contrôleurs LQR et PID dépendent directement de leurs paramètres de contrôle. D'autre part, suite à la vérification d'un grand nombre de paramètres de contrôles trouvés dans beaucoup d'articles par rapport à leur efficacité sur le contrôle, on constate que les performances du LQR sont inférieures par rapport au PID, donc on s'est intéressé à l'optimisation des paramètres de contrôle du LQR utilisant l'algorithme d'optimisation par essaim particulaire **PSO** (ou Particle Swarm Optimization) pour augmenter ces performances, c'est ce qui représente le deuxième apport de notre travail.

Pour accomplir ce travail, la thèse est organisée en plusieurs parties :

La première partie s'attache à rassembler les principes fondamentaux nécessaires à la compréhension des phénomènes mis en jeu. Une introduction aux matériaux piézoélectriques, historique de la piézoélectricité, un bref aperçu sur les structures intelligentes et sur le contrôle actif des vibrations qui sont présentés.

En chapitre 2, on présente la théorie de l'élasticité pour les matériaux homogènes, principalement on expose la formulation régissant le comportement d'une plaque élastique isotrope, composite et piézoélectrique en se basant sur les hypothèses de Mindlin qui tiennent compte de l'effet du cisaillement transverse, et qui se termine par la modélisation d'une plaque sandwich piézoélectrique faisant référence à une structure intelligente.

Dans le troisième chapitre, un élément fini plaque quadrilatérale à 9 nœuds avec 5 degrés de liberté par nœud qui prend en compte l'effet du cisaillement transversal, avec aussi un degré de liberté supplémentaire par nœud pour la couche piézoélectrique. Cet élément est utilisé pour discrétiser les expressions des énergies présentées en chapitre précédent, d'où les matrices élémentaires de masse, rigidité et le vecteur des forces nodales sont obtenues, et aboutissant à l'équation de mouvement.

Dans le chapitre 4, l'analyse d'une plaque sandwich piézoélectrique revient à traiter l'équation de mouvement régissant le comportement de la structure. On s'intéresse à faire une analyse modale en premier lieu, suivie de la présentation de la formulation pour l'atténuation des vibrations en mode actionneur, puis pour le contrôle actif des vibrations. Dans ce dernier cas, ce sont les contrôleurs LQR et PID qui sont exposés.

Le cinquième chapitre est consacré aux résultats et discussions. Une validation du modèle par une analyse modale en première étape. En deuxième étape, des applications sur le contrôle statique de la déflexion en mode actionneur avec deux configurations de la couche piézoélectrique, en recouvrement total et partiel (pastilles). Puis le contrôle actif des vibrations utilisant deux types de contrôleurs LQR et PID avec différents paramètres de contrôle qui a été testé et comparé. Et enfin, pour augmenter les performances du contrôleur LQR, ses paramètres du contrôle sont optimisés en utilisant l'algorithme d'optimisation par essaim particulaire PSO.

Le travail est terminé par une conclusion qui englobe les discussions des résultats obtenues, les remarques et les perspectives.

CHAPITRE 1

GENERALITES SUR PIEZOELCTRICITE et CONTROLE ACTIF

1.1. Introduction

Dans de nombreuses applications industrielles, le bruit ou les vibrations constituent un problème majeur. Les méthodes conventionnelles d'atténuation consistent à amortir la perturbation utilisant généralement des techniques passives. Ces techniques passives d'amortissement (contrôle passif) des vibrations structurales utilisent l'intégration ou l'ajout de matériaux ou systèmes, possédant des propriétés amortissantes, couplés à la structure de telle façon que les vibrations de la structure sont amorties passivement, c'est-à-dire, sans aucune intervention extérieure supplémentaire.

Dans le même contexte, les méthodes de contrôle actif apparaissent à priori plus adaptées. Leur principe est de générer un champ interférant avec le champ de la perturbation, le champ superposé doit donc être identique à celui de la perturbation en termes d'amplitude mais de phase opposée.

Le contrôle actif est un vieux concept qui a vu son origine dans le domaine acoustique dans les années trente avec le brevet de Lueg (en 1936) intitulé (Process of silencing sound oscillation) qui décrit le principe d'un dispositif de contrôle actif de bruit dans un conduit. Une des illustrations de ce brevet est donnée en Figure 1.1.

June 9, 1936.

P. LUEG

2,043,416

PROCESS OF SILENCING SOUND OSCILLATIONS

Filed March 8, 1934

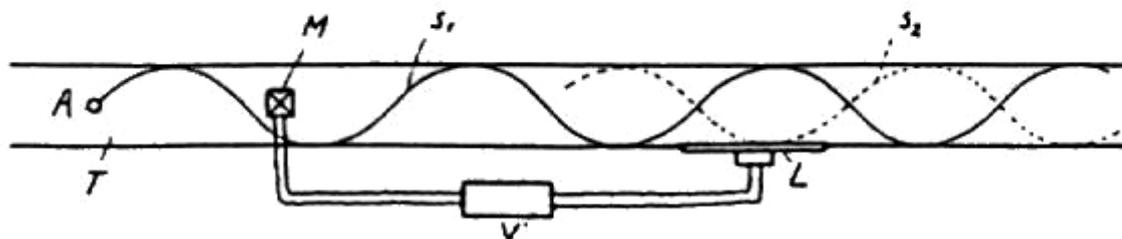


Fig.1.1. Illustration extraite du brevet de Lueg

Bien que ce concept soit ancien, l'application pratique ne date que du début des années quatre-vingt, avec les progrès atteints dans les domaines des matériaux, de l'informatique et du traitement des signaux. Il est maintenant possible de développer des structures intelligentes avec des capteurs et des actuateurs piézoélectriques intégrés pour effectuer le contrôle actif des vibrations [21].

Principalement, la piézoélectricité est utilisée pour contrôler le comportement dynamique des structures afin d'atténuer leurs vibrations, d'éviter la résonance et par conséquent les dommages ultérieurs. Parmi les matériaux intelligents les plus utilisés on peut citer les céramiques et polymères piézoélectriques [22].

1.2. Piézoélectricité

On attribue la découverte de la piézoélectricité à Pierre et Jacques Curie qui ont été les premiers à en faire l'étude en 1880, et la première application industrielle est apparue en 1916 avec le transducteur piézoélectrique mis au point par Paul Langevin [23].

Principe

La piézoélectricité (du grec *piezein*, presser) est la capacité de certains matériaux (cristaux, céramiques, polymères) de pouvoir transformer une énergie mécanique en une énergie électrique représentant l'effet piézoélectrique direct, et réciproquement une excitation électrique en déformation, c'est l'effet piézoélectrique inverse (Fig.1.2) [24].

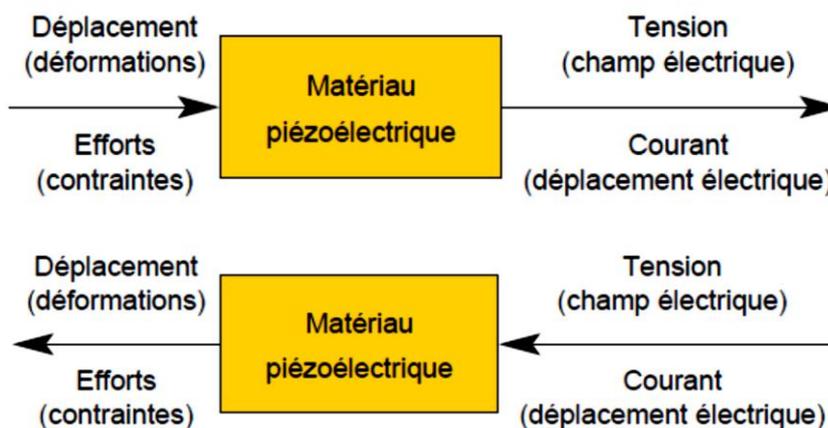


Fig.1.2.Effet direct et inverse de la piézoélectricité

L'effet piézoélectrique résulte principalement de l'existence de dipôles électriques internes, et parmi les 32 classes cristallines, 20 sont piézoélectriques (Fig.1.3) [25].

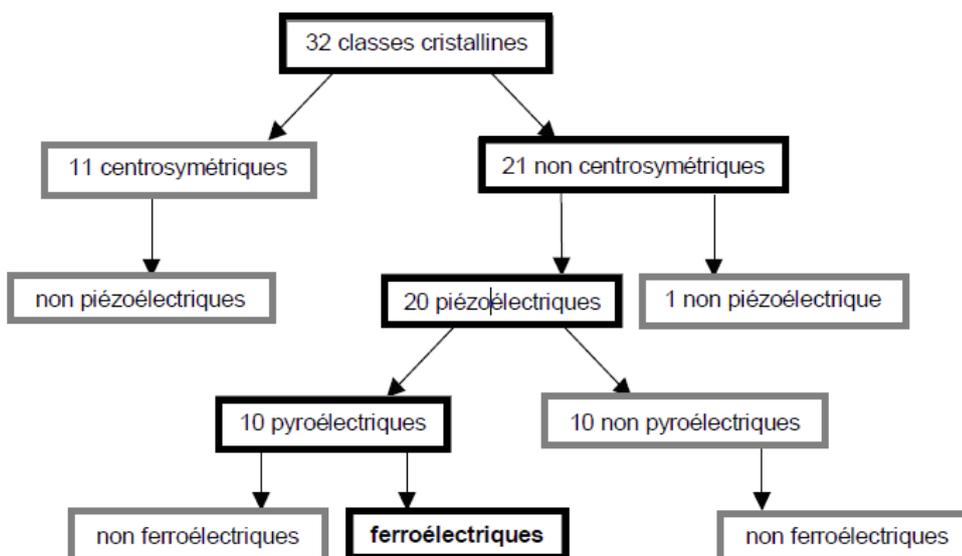


Fig.1.3. Organigramme des différentes classes cristallines

Polarisation :

Ainsi, à l'état naturel ou après élaboration, les dipôles électriques sont orientés de façon aléatoire et le matériau ne présente aucun effet piézoélectrique. Pour ce faire, il est nécessaire de procéder à une étape dite de polarisation qui consiste à appliquer un champ électrique intense afin d'orienter les polarisations des microcristaux dans la même direction [25].

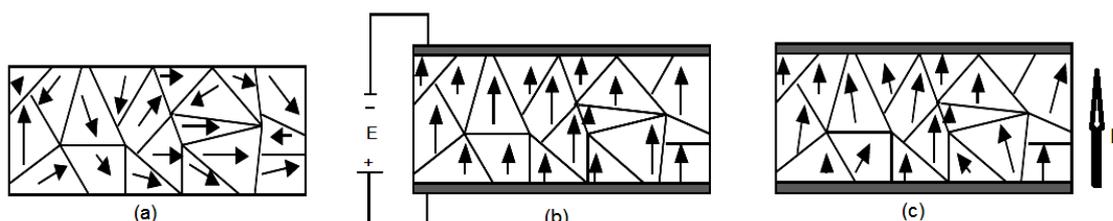


Fig.1.4. Schématisation des domaines

(a) avant polarisation, (b) pendant polarisation et (c) après polarisation

Il est possible de distinguer trois grandes classes d'application des matériaux piézoélectriques selon qu'il s'agisse de l'effet piézoélectrique direct et/ou inverse qui est mis en jeu [26, 27].

Tab.1.1. Applications des matériaux Piézoélectriques

Applications basées sur l'effet direct	Applications basées sur l'effet inverse	Applications basées sur Les deux effets
Microphone	Haut-parleur	Transducteur d'ultrasons de diagnostic (échographie)
Hydrophone	Bipeur	CND par ultrasons
Capteur de choc	Transducteur sonar	Détecteur de proximité
Accéléromètres	Nettoyage par ultrasons	Mesure de distances
Bouton poussoir	Relais	Gyroscopie
Allumage	Micro positionnement	Transformateur piézoélectrique
Capteur de pression ou de contraintes	Ajustement laser	
	Imprimante a jet d'encre	

Exploitant l'effet inverse de la piézoélectricité, et considérons la céramique piézoélectrique de la Figure 1.5. Un voltage appliqué aux bornes de la céramique piézoélectrique changera sa forme aussi longtemps que le voltage sera maintenu [28, 29].

Un voltage de même polarité induira une expansion de la céramique piézoélectrique selon l'axe de polarité et une contraction perpendiculaire à ce même axe (Fig.1.5.c). Par contre, une tension de polarité opposée induira une contraction de la céramique piézoélectrique selon l'axe de polarité et une expansion perpendiculaire à cet axe (Fig.1.5.b).

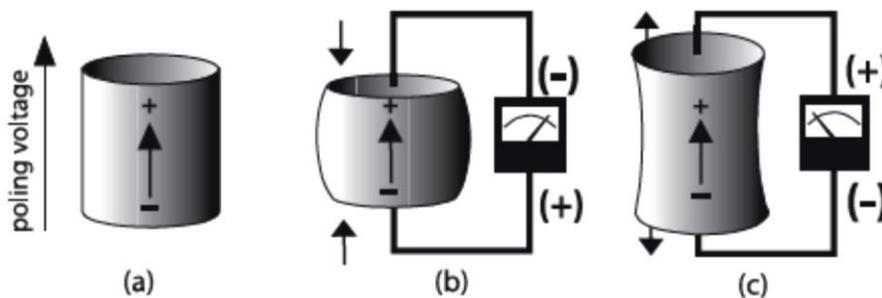


Fig.1.5. Effet piézo-électrique inverse a) aucun voltage
b) voltage de même polarité (contraction) c) de polarité opposée (expansion)

Dans les deux cas, la céramique piézoélectrique retournera à son état une fois le voltage externe relâché. L'explication est donnée en termes de déformation. Cette explication est valide dans le cas où la céramique est libre de se déformer.

Afin de faciliter la compréhension des phénomènes électriques à l'intérieur d'un corps piézoélectrique, une analogie peut se faire entre les comportements mécanique et électrique, alors on présente les différentes variables mécaniques et électriques.

Tab.1.2. Analogie entre les variables mécaniques et électriques

Mécanique		Electrique	
Variables	Unités	Variables	Unités
Déplacement	mètre	Potentiel	Volt
Force	Newton	Charge	Coulomb
Contrainte	Newton/metre ²	Déplacement electr	Coulomb/ metre ²
Déformation	Mètre/mètre	Champ électrique	Volt/mètre
Rigidité	Newton/mètre	Capacité	Coulomb/volt
Module de rigidité	Newton/metre ²	Module diélectrique	Coulomb/volt. mètre

L'intérêt principal des matériaux piézoélectriques est qu'ils couplent fortement les grandeurs mécaniques et électriques, et permettent d'agir sur l'état mécanique d'une structure par modification du champ électrique appliqué à ces matériaux.

Alors en plaçant une paire de céramiques piézoélectriques de façon symétrique de chaque côté de la structure on peut créer un effet de flexion en fournissant un voltage de même polarité pour une céramique et un voltage de polarité opposée pour l'autre céramique comme le montre la Figure 1.6, on dit qu'on est en mode actionneur [30].

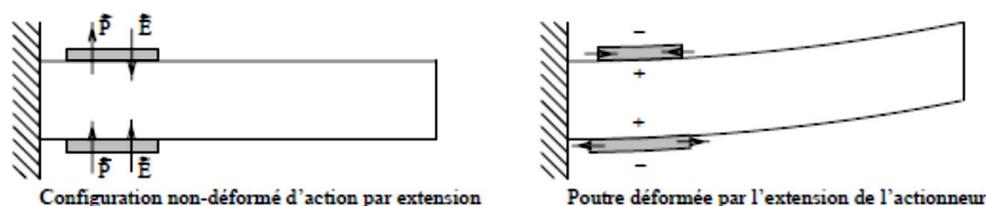


Fig.1.6.Représentation de mécanisme d'action par extension

Ces matériaux peuvent aussi être utilisés comme capteurs piézoélectriques permettant de fournir, à chaque instant, une valeur moyenne des déformations d'une région de la structure correspondant à la surface du capteur, donc une contrainte sur un matériau piézoélectrique entraîne l'apparition d'une tension entre les électrodes (effet direct de la piézoélectricité).

Les travaux fondamentaux de Tiersten [31] ont donné la base théorique du comportement d'une plaque piézoélectrique. Puis suite aux travaux de Lee [32], une simplification du modèle a été obtenue en utilisant les hypothèses de Kirchhoff dans le cas des plaques.

Dès lors, de nombreux chercheurs ont utilisé le modèle CLPT (Théorie classique des plaques stratifiées ou Classical Laminated Plate Theory en anglais) dans des modélisations analytiques et numériques de plaques piézoélectriques.

Pour un matériau piézoélectrique polarisé dans la direction de l'épaisseur (z), les lois de comportement sont [32, 33] :

L'effet direct de la piézoélectricité :

$$\{D\} = [e]\{\varepsilon\} + [d]^t \{E\} \quad (1.1)$$

L'effet inverse de la piézoélectricité :

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} - [e]^t \{E\} \quad (1.2)$$

Les différentes grandeurs physiques des deux formules précédentes peuvent être résumées par le tableau suivant.

Tab.1.3. Grandeurs électriques, mécaniques et piézoélectriques

Abréviation	Dénominations	Type	Dimension
D	Déplacement électrique ou induction (C/m ²)	électrique	(3x1)
E	Champ électrique (V/m ou N/C)		(3x1)
d ou ε	Permittivité électrique (F/m ou C·V ⁻¹ ·m ⁻¹)		(3x3)
β	Imperméabilité diélectrique (m/F)		(3x3)
ε ou S	Déformation	mécanique	(6x1)
σ ou T	Contrainte (N/m ²)		(6x1)
s	Compliance ou souplesse (m ² /N)		(6x1)
C ou E	Raideur ou Module de Young (N/m ²)		(6/6)
d	Constante piézoélectrique (reliant contrainte σ et l'induction D à E constant) (C/N ou m/V)	piézoélectrique	(3x6)
e	Constante piézoélectrique (reliant déformation ε et l'induction D à E constant) (C/m ² ou N/Vm)		(3x6)
g	Constante piézoélectrique (reliant contrainte σ et le champ E à D constant) (V.m/N ou m ² /C)		(3x6)
h	Constante piézoélectrique (reliant déformation ε et le champ E à D constant) (V/m ou N/C)		(3x6)

Une famille importante de céramiques piézoélectriques est celle des PZT (Oxyde de plomb, zirconium et titane ou Lead-Zirconate-Titanate en anglais) qui possèdent d'excellentes propriétés piézoélectriques, ainsi que les polymères PVDF (Polyfluorure de vinylidène ou Polyvinylidene fluoride en anglais), qui sont les matériaux les plus utilisés comme actionneurs et/ou capteurs [34].

1.3. Notion du contrôle actif des vibrations

Les techniques actives permettent, de contrôler les vibrations à chaque instant par des actionneurs qui agissent sur la structure selon une loi de commande conçue pour minimiser une mesure (capteur) de l'intensité des vibrations indésirables, ce qui constitue le principe du contrôle actif des vibrations. Alors une structure contenant des actionneurs et capteurs collés ou intégrés et couplés par un système de contrôle est dite intelligente [30].

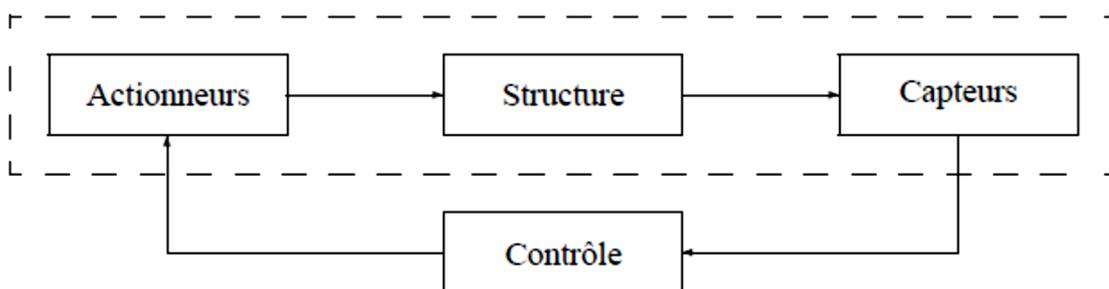


Fig.1.7. Schéma d'une structure intelligente

Cette conception consiste à choisir les actionneurs, capteurs et systèmes de contrôle. Les actionneurs et capteurs sont, généralement, fabriqués à partir de matériaux piézoélectriques capables de fournir une action, générée par le couplage naturel de leurs déformations ou contraintes avec différents facteurs externes comme des champs électrique ou magnétique.

Forward et Liu [35] ont été parmi les premiers à utiliser des capteurs et actionneurs piézoélectriques afin de contrôler les vibrations de structures flexibles, et leurs travaux consistaient en l'utilisation d'un actionneur piézoélectrique attaché à la surface de la structure couplé à une jauge de contrainte piézoélectrique

Beaucoup d'applications industrielles de plus en plus complexes ont été réalisées. On en cite quelques unes ; la présence de vibrations dans les ailes d'avion est un problème bien connu en aéroélasticité. Certains angles de vols induisent, des phénomènes vibratoires importants en bout d'aile qui diminuent la durée de vie de la structure par un phénomène de fatigue accélérée.

Les figures suivantes (a) et (b) présentent les travaux qui sont menés sur contrôle actif d'un empennage de F18, en utilisant des transducteurs piézoélectriques comme capteurs et comme actionneurs [36].

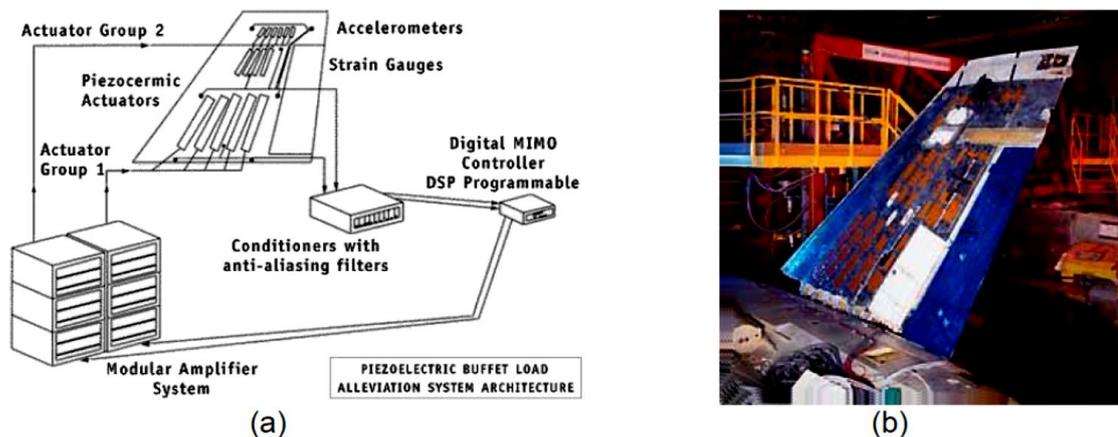


Fig.1.8. Dispositif de contrôle actif de vibrations d'un empennage d'avion
(a) détails, (b) dispositif général (documents ACX - NASA)

Une autre application dans le domaine des aéronefs. L'approche active directe supprime les vibrations à la source pour un hélicoptère, dans le rotor principal.

La technologie du rotor commandé par des matériaux intelligents (Smart Material Actuated Rotor Technology) est un projet mené par Boeing dont les buts envisagés prévoient une diminution de 80 % des vibrations, une diminution de 10 décibels (dB) du bruit généré par l'interaction des tourbillons des pales à l'atterrissage, un gain de 10 % des performances du rotor et un alignement automatique des pales en vol.

Les essais effectués dans une tour illustrée en figure suivante, ont donné des résultats prometteurs.



Fig.1.9. Rotor SMART dans une tour d'essai
(Revue de la force aérienne du Canada Été 2008)

Conclusion :

Dans ce chapitre, on a exposé l'historique et les principes fondamentaux nécessaires à la compréhension des phénomènes de la piézoélectricité, ainsi qu'un aperçu sur les structures intelligentes et sur le contrôle actif des vibrations. Il est nécessaire d'entamer les bases théoriques pour la modélisation des différents éléments d'une structure intelligente, notamment, la partie à contrôler (plaque isotrope ou orthotrope), et les outils de contrôle (capteurs et actionneurs) en matériau piézoélectrique.

CHAPITRE 2

THEORIE DES PLAQUES MATERIAUX ELASTIQUE ET PIEZOELECTRIQUE

2.1. Introduction

Dans cette partie, on présente la théorie de l'élasticité pour les matériaux isotropes. Principalement les équations régissant le comportement d'une plaque élastique isotrope, composite et piézoélectrique en se basant sur les hypothèses de Mindlin, et suivi par la modélisation d'une plaque sandwich piézoélectrique, qui regroupe les éléments de base de la structure intelligente permettant le contrôle actif des vibrations.

Une plaque est un solide défini par une surface de référence plane (plan $x y$) et par une épaisseur notée h petite par rapport aux autres dimensions, à savoir la longueur et la largeur. Suivant l'ordre de grandeur de la dimension h relativement aux deux autres, on introduit l'adjectif mince ou épaisse à une plaque. Cependant, ce qualificatif n'importe pas seulement une caractéristique géométrique, mais définit aussi un rôle particulier des déformations dites de cisaillement transversal.

2.2. Champ de déplacement

Les hypothèses de base de la théorie des plaques résident dans l'expression des déplacements en tout point M d'une plaque sous la forme de polynômes en z .

La théorie classique utilise un schéma de déformation du premier degré, et le champ de déplacements est alors donné par [37] :

$$\begin{cases} U(x, y, z, t) = u(x, y, t) + z \cdot \theta_x(x, y, t) \\ V(x, y, z, t) = v(x, y, t) + z \cdot \theta_y(x, y, t) \\ W(x, y, z, t) = w(x, y, t) \end{cases} \quad (2.1)$$

Avec :

u et v : Déplacement membrane dans la direction x et y respectivement.

w : Déplacement transversal.

θ_x et θ_y : Rotation par rapport à x et y respectivement.

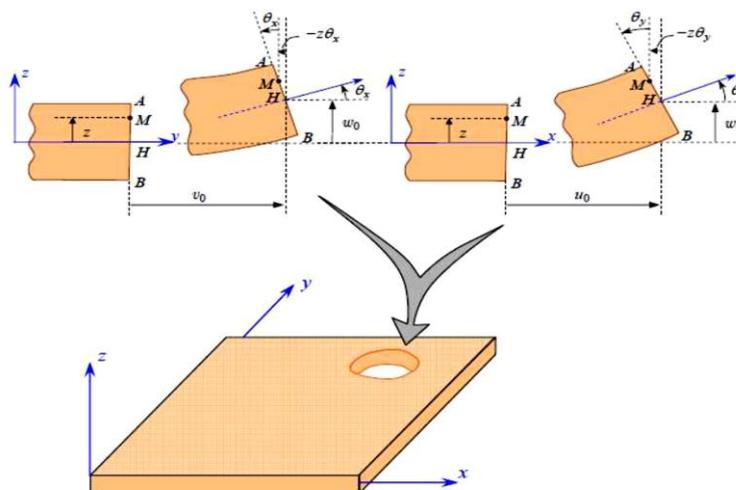


Fig.2.1. Géométries déformées et non déformées d'un bord d'une plaque [37]

Les éléments de plaques en flexion de type déplacement pouvant être classés en deux catégories, celle basée sur la théorie de Kirchhoff, ainsi que de Hencky-Mindlin-Reissner.

a/ les éléments basés sur la théorie de Kirchhoff, dite théorie classique de plaque (ou CLPT Classical Lamination Plate Theory). En principe, les mieux adaptés à la modélisation des plaques minces. Leur formulation ne nécessite que l'approximation des composantes de déplacement : $u(x, y); v(x, y); w(x, y)$.

L'hypothèse principale de la théorie CLPT est que les sections droites normales au plan médian avant déformation restent droites et perpendiculaires à la surface moyenne après déformation (Fig.2.1). Cette hypothèse implique la négligence des déformations dues au cisaillement transverse.

Dans ce cas [37, 38, 39] :

$$\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{et} \quad \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial y}$$

b/ les éléments basés sur la théorie de Hencky-Mindlin-Reissner, dite théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (ou FSDT First order Shear Deformation Theory) [37, 38, 39], sont les mieux adaptés dans les cas de plaque plus épaisse ($h/L > 0.1$). Leur formulation est basée sur une approximation des variables indépendantes :

$$u(x, y); v(x, y); w(x, y); \theta_x(x, y); \theta_y(x, y).$$

Dans ce cas les déformations dues au cisaillement transverse ne sont pas négligées, c-a-d les sections droites après déformation ne restent pas perpendiculaires au plan neutre (Fig.2.2).

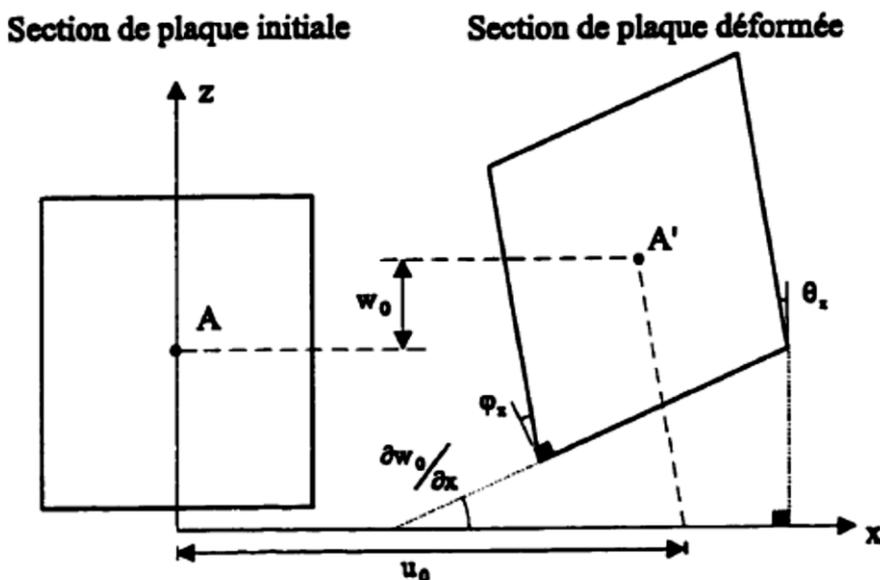


Fig.2.2. Déformation en présence du cisaillement transverse

Dans ce cas :

$$\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x \quad \text{et} \quad \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_y$$

Où ;

φ_x : Rotation de cisaillement des sections normales à 'axe x

φ_y : Rotation de cisaillement des sections normales à 'axe y

θ_x et θ_y : Rotation totale par rapport à x et y respectivement

On adopte le modèle FSDT, et sous forme matricielle on peut l'écrire comme suit :

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = [L]\{u\} \quad (2.2)$$

$[L]$: Opérateur de localisation des variables

Ou sous forme plus explicite :

$$\begin{aligned} \{U\} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} \\ &= [L_t]\{u\} + z \cdot [L_r]\{u\} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Avec ;

L'indice t et r: désigne les variables de translation et de rotation respectivement.

2.3. Champ de déformation (relation déformation-déplacement)

Pour une structure en plaque élastique et en faibles déformations on a [37, 38, 40]:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + z \cdot \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} + z \cdot \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + z \cdot \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \\ \theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

A partir du champ de déplacement choisi, la déflexion transversale de la plaque est constante dans la direction de l'épaisseur, et par conséquent $\varepsilon_z = \partial w / \partial z = 0$.

Sous forme matricielle, on a :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & z \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & z \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & z \frac{\partial}{\partial y} & z \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = [D_u] \{u\} \quad (2.5)$$

Où :

$[D_u]$: Operateur différentiel des déplacements

Avec le vecteur de déformation qui peut être séparé en deux composantes comme suit :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{mf} \\ \varepsilon_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\beta\} + z\{\chi\} \\ \{\gamma\} \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

Où :

mf : indice pour effet membrane et flexion.

c : indice pour effet cisaillement.

$\{\varepsilon_{mf}\}$: déformations dues aux effets membrane et flexion

$\{\varepsilon_c\}$: déformations dues aux cisaillement

Pour l'effet membrane on a :

$$\{\beta\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = [D_{um}] \{u\} \quad (2.7)$$

L'effet de flexion :

$$\{\chi\} = z \{\bar{\chi}\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ 0 \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} = z \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = [D_{uf}] \{u\} \quad (2.8)$$

L'effet de cisaillement :

$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = [D_{uc}] \{u\} \quad (2.9)$$

2.4. Loi de comportement

Dans un problème bidimensionnel d'élasticité, et en état de contrainte plane ou la contrainte dans la direction de l'épaisseur de la plaque est très faible comparativement aux deux autres directions (σ_z très petite devant σ_x et σ_y), avec les hypothèses suivantes [28, 37, 38, 41] :

- matériau isotrope
- sections planes restant planes après déformation
- contrainte plane ($\sigma_z = 0$)

On a :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \cdot \varepsilon_y) \\ \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \cdot \varepsilon_x) \\ 0 \\ \frac{E}{2(1+\nu)} \cdot \gamma_{xy} \\ \frac{E}{2(1+\nu)} \cdot \gamma_{xz} \\ \frac{E}{2(1+\nu)} \cdot \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

Sous forme matricielle :

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = [C] \{\varepsilon\} \quad (2.11)$$

On peut la séparer en deux composantes comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{mf} \\ \sigma_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [C_{mf}] & 0 \\ 0 & [C_c] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{mf} \\ \varepsilon_c \end{Bmatrix}$$

avec :

$$\begin{bmatrix} [C_{mf}] & 0 \\ 0 & [C_c] \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Où ;

$\{\sigma_{mf}\}$: contraintes dues aux effets membrane et flexion

$\{\sigma_c\}$: contraintes dues aux cisaillement

2.5. Résultantes des forces et des moments et loi constitutive

Les différents efforts sont présentés en trois classes [28, 37, 38], résultantes en membrane, moments de flexion et de torsion et résultantes en cisaillement.

Les résultantes en membrane :

$$\begin{aligned}
 \{N(x, y)\} &= \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \{\sigma_{mf}\} dz = \int_{-h/2}^{+h/2} ([C_{mf}] \{\varepsilon_{mf}\}) dz \\
 &= \int_{-h/2}^{+h/2} ([C_{mf}] (\{\beta\} + z\{\chi\})) dz \\
 &= \int_{-h/2}^{+h/2} [C_{mf}] \{\beta\} dz + \int_{-h/2}^{+h/2} z [C_{mf}] \{\chi\} dz \\
 &= [H_m] \{\beta\} + [H_{mf}] \{\chi\}
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Où;

$$[H_m] = \int_{-h/2}^{+h/2} [C_{mf}] dz \quad \text{et} \quad [H_{mf}] = \int_{-h/2}^{+h/2} z [C_{mf}] dz \tag{2.14}$$

Les moments de flexion et de torsion :

$$\begin{aligned}
 \{M(x, y)\} &= \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} z \{\sigma_{mf}\} dz = \int_{-h/2}^{+h/2} z ([C_{mf}] \{\varepsilon_{mf}\}) dz \\
 &= \int_{-h/2}^{+h/2} z ([C_{mf}] (\{\beta\} + z\{\chi\})) dz \\
 &= \int_{-h/2}^{+h/2} z [C_{mf}] \{\beta\} dz + \int_{-h/2}^{+h/2} z^2 [C_{mf}] \{\chi\} dz \\
 &= [H_{mf}] \{\beta\} + [H_f] \{\chi\}
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Où;

$$[H_f] = \int_{-h/2}^{+h/2} z^2 [C_{mf}] dz \tag{2.16}$$

Les résultantes en cisaillement :

$$\begin{aligned} \{Q(x, y)\} &= \begin{Bmatrix} Q_{xx} \\ Q_{yy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \{\sigma_c\} dz = \int_{-h/2}^{+h/2} ([C_c]\{\varepsilon_c\}) dz \\ &= \int_{-h/2}^{+h/2} ([C_c]\{\gamma\}) dz = [H_c]\{\gamma\} \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\text{Où; } [H_c] = \int_{-h/2}^{+h/2} [C_c] dz \quad (2.18)$$

Loi constitutive est résumée par :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \\ Q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_m & H_{mf} & 0 \\ H_{mf} & H_f & 0 \\ 0 & 0 & H_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta \\ \chi \\ \gamma \end{Bmatrix} = [H] \begin{Bmatrix} \beta \\ \chi \\ \gamma \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

2.5. Principe de Hamilton

Le principe de Hamilton est appliqué pour déterminer les expressions des énergies cinétique E_c , de déformation ou potentielle E_p et le travail T des efforts externes dans la plaque [31, 38, 42].

Donc le mouvement réel d'une plaque est celui qui rend stationnaire la fonction de Hamilton suivante :

$$\delta \int (E_c - E_p + T) dt = 0 \quad (2.20)$$

2.5.1. Energie cinétique

L'énergie cinétique s'écrit par [38, 42] :

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} \rho \int_v \{\dot{U}\}^t \{\dot{U}\} dv = \frac{1}{2} \rho \int_v \{\dot{u}\}^t [L]^t [L] \{\dot{u}\} dv = \\ &= \frac{1}{2} \rho \int_v \{\dot{u}\}^t \left([L_t]^t [L_t] - z \left([L_r]^t [L_t] + [L_t]^t [L_r] \right) + z^2 \left([L_r]^t [L_r] \right) \right) \{\dot{u}\} dv \end{aligned} \quad (2.21)$$

En intégrant dans la direction de l'épaisseur z entre $-h/2$ et $h/2$, on obtient :

$$E_c = \frac{1}{2} \rho \int_s \{\dot{u}\}^t \left(h \cdot [L_t]^t [L_t] + \left(\frac{h^3}{12} \right) \cdot ([L_r]^t [L_r]) \right) \{\dot{u}\} ds \quad (2.22)$$

$$E_c = \frac{1}{2} \int_s \{\dot{u}\}^t [\bar{m}_e] \{\dot{u}\} ds \quad (2.23)$$

Par identification entre (2.23) et (2.22) on obtient :

$$[\bar{m}_e] = \rho \cdot \begin{bmatrix} h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h^3/12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h^3/12 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

2.5.2. Energie potentielle

C'est l'énergie de déformation qui est donnée par [42, 42, 38] :

$$E_p = \frac{1}{2} \int_v \{\sigma\} \{\varepsilon\}^t dv = \frac{1}{2} \int_v \{\varepsilon\}^t [C] \{\varepsilon\} dv \quad (2.25)$$

Cette énergie comporte quatre parties:

$$E_p = E_{membrane} + E_{flexion} + E_{membrane-flexion} + E_{cisaillement} \quad (2.26)$$

Effet membrane :

$$E_{membrane} = \frac{1}{2} \int_v \{\beta\}^t [C_{mf}] \{\beta\} dv \quad (2.27)$$

En intégrant selon l'épaisseur z de $-h/2$ à $h/2$ on obtient :

$$E_{membrane} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot \int_s \{\beta\}^t [C_{mf}] \{\beta\} ds = \frac{1}{2} \cdot \int_s \{\beta\}^t [H_m] \{\beta\} ds \quad (2.28)$$

$$Ou [H_m] = h [C_{mf}]$$

Effet de la flexion :

$$E_{flexion} = \frac{1}{2} \int_v \{\chi\}^t [C_{mf}] \{\chi\} dv \quad (2.29)$$

En intégrant par rapport à z :

$$E_{flexion} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h^3}{12} \right) \cdot \int_s \{\bar{\chi}\}^t [C_{mf}] \{\bar{\chi}\} ds = \frac{1}{2} \cdot \int_s \{\bar{\chi}\}^t [H_f] \{\bar{\chi}\} ds \quad (2.30)$$

$$Ou [H_f] = \frac{h^3}{12} [C_{mf}]$$

Effet couplage membrane-flexion :

$$E_{membrane-flexion} = \frac{1}{2} \int_v \left(\{\beta\}^t [C_{mf}] \{\chi\} + \{\chi\}^t [C_{mf}] \{\beta\} \right) dv \quad (2.31)$$

Après intégration par rapport à z , et à cause de la symétrie on a :

$$E_{membrane-flexion} = 0 \quad (2.32)$$

Effet de cisaillement :

$$E_{cisaillement} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \int_v \{\gamma\}^t [C_c] \{\gamma\} dv \quad (2.33)$$

Par intégration on aura :

$$E_{cisaillement} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot h \cdot \int_s \{\gamma\}^t [C_c] \{\gamma\} ds = \frac{1}{2} \cdot \int_s \{\gamma\}^t [H_c] \{\gamma\} ds \quad (2.34)$$

$$Ou [H_c] = k \cdot h \cdot [C_c]$$

Où ;

k : facteur de correction due au cisaillement

2.5.3. Travail des efforts externes

Le travail peut être écrit pour différents types d'efforts :

$$T = \int_V \{U\}^t \{F\} dv + \int_S \{U\}^t \{f\} ds + \{U\}^t \{P\} \quad (2.35)$$

Avec ;

$\{F\}$: forces volumiques

$\{f\}$: forces surfaciques

$\{P\}$: forces ponctuelles

2.6. Matériau composite

Un matériau composite est constitué de l'assemblage de deux matériaux de natures différentes (matrice et renfort), se complétant et permettant d'aboutir à un matériau dont l'ensemble des performances est supérieur à celui des composants pris séparément. Ils peuvent être classés suivant la forme des composants (composites à fibres, composites à particules) ou suivant la nature des composants (composite à matrice organique, métallique, minérale,....etc.).

On appelle maintenant de façon courante "matériaux composites" des arrangements de fibres, les **renforts** qui sont noyés dans une **matrice** dont la résistance mécanique est beaucoup plus faible. La matrice assure la cohésion et l'orientation des fibres, elle permet également de transmettre les sollicitations auxquelles sont soumises les pièces. Les renforts, sous forme de fibres (fibres de verre, fibres de carbone, etc.), contribuent à améliorer la résistance mécanique et la rigidité de la pièce dans laquelle ils sont incorporés.

Dans la conception des pièces en matériaux composites, on utilise généralement la technique de stratification qui consiste à élaborer ces pièces par superposition des plis ou des couches (empilement de monocouches ayant chacune une orientation propre) (Fig.2.3). L'objet d'une telle technique est de réaliser une structure résistante et rigide couplée avec un poids minimum (résistance spécifique et rigidité spécifique élevée). L'optimisation de la résistance et de la rigidité peut être obtenue par le contrôle de l'orientation des fibres et l'ordre d'empilement de ces dernières [37, 44].

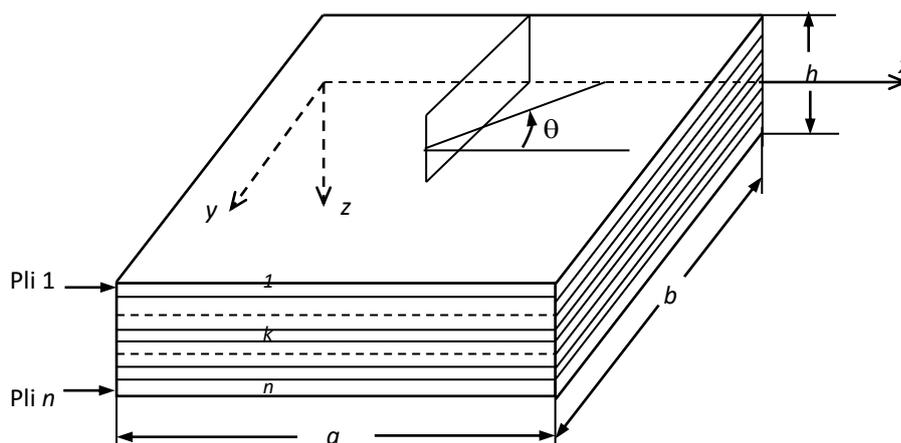


Fig.2.3. Schéma d'une plaque stratifiée

Avantages des matériaux composites :

- Bonnes propriétés mécaniques
- Gain de masse
- Mise en forme de pièces complexes (principe du moulage) et réduction du nombre d'interfaces (boulonnage, rivetage et soudure sur structures métalliques)
- Grande résistance à la fatigue
- Faible vieillissement sous l'action de l'humidité, de la chaleur, de la corrosion

Tout au moins les matériaux composites ont des inconvénients:

- Vieillissement sous l'action de l'eau et de la température
- Tenue à l'impact moyenne par rapport aux métalliques
- Coût parfois prohibitifs (temps et coût études et mise en œuvre), le gain en coût est surtout valable pour des grandes séries.

2.6.1. Champ de déplacement

On considère un stratifié possédant n plis d'orientations différentes. On définit un système de référence (x, y, z) situé sur la surface moyenne de la plaque dont l'axe z correspond à la direction suivant l'épaisseur.

Les hypothèses rapportées aux plaques homogènes restent valables aux plaques stratifiées (section 2.2), mais on ajoute que les différentes couches composites restent parfaitement collées.

Alors le champ de déplacement reprend la même forme :

$$\begin{cases} U(x, y, z, t) = u(x, y, t) + z \cdot \theta_x(x, y, t) \\ V(x, y, z, t) = v(x, y, t) + z \cdot \theta_y(x, y, t) \\ W(x, y, z, t) = w(x, y, t) \end{cases} \quad (2.36)$$

2.6.2. Relations contraintes déformations

Il est nécessaire d'exprimer cette relation pour chaque pli k à cause de la discontinuité des contraintes inter-laminaires. Par souci de simplification, on définit un système d'axes principal (local) (1,2,3) dont l'axe (1) correspond à la direction longitudinale des fibres.

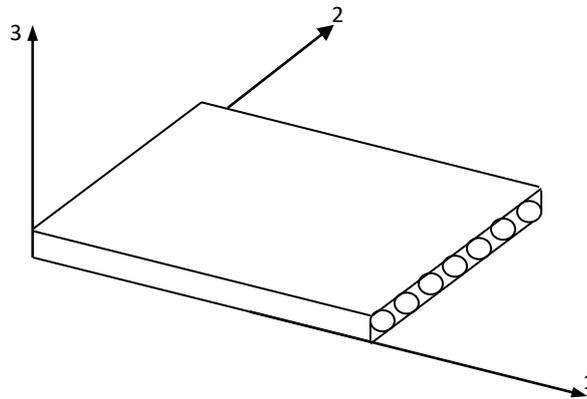


Fig.2.4. Directions principales dans un pli

La relation contrainte déformation par rapport à ce système d'axe s'écrit [37, 44] :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & Q_{66} & 0 & 0 \\ & Sym & & Q_{44} & 0 \\ & & & & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix}_k \quad (2.37)$$

Avec :

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad , \quad Q_{12} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad , \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (2.38)$$

$$Q_{66} = G_{12} \quad , \quad Q_{44} = G_{23} \quad , \quad Q_{55} = G_{13}$$

Ou sous forme contractée:

$$\{\sigma_{123}\}_k = [Q] \{\varepsilon_{123}\}_k \quad (2.39)$$

Où :

E_1 : Module de Young longitudinal.

E_2 : Module de Young transversal.

G_{12} : Module de cisaillement longitudinal.

G_{13}, G_{23} : Modules de cisaillement transversaux.

ν_{12}, ν_{21} : Coefficients de Poisson.

$[Q]$: et la matrice de rigidité réduite exprimée dans les axes principaux (1,2,3).

Pour faire l'étude du comportement élastique de l'ensemble du stratifié, il est nécessaire d'exprimer la relation (2.39) par rapport au système global d'axes (x, y, z) , cette opération est effectuée en faisant intervenir les matrices de changement de base des contraintes et des déformations.

Soit donc pour le champ des contraintes:

$$\{\sigma\}_{xyz}^k = [T]^{-1} \{\sigma\}_{123}^k \quad (2.40)$$

Où ;

$[T]$: est la matrice de changement de base des contraintes, elle est donnée par l'expression suivante :

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & -\cos \theta \sin \theta & 0 & 0 \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & \cos \theta \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 \cos \theta \sin \theta & -2 \cos \theta \sin \theta & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

θ : est l'angle que fait le repère (1,2) avec le repère (x, y).

Il est à noter que le changement de base est effectué en faisant une rotation $-\theta$ autour de la direction 3 (Fig.2.3).

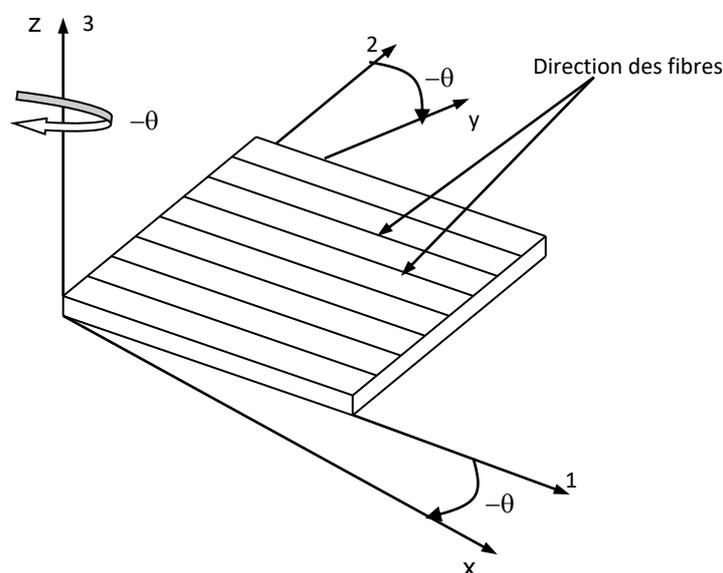


Fig.2.5. Changement de repère dans un pli

L'expression du champ des déformations par rapport au repère (x, y, z) s'écrit:

$$\{\varepsilon\}_{xyz}^k = [T']^{-1} \{\varepsilon\}_{123}^k \quad (2.42)$$

Où ;

$[T']^{-1}$: est la matrice de changement de base des déformations

Elle est donnée par :

$$[T'] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & -2 \cos \theta \sin \theta & 0 & 0 \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 2 \cos \theta \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cos \theta \sin \theta & -\cos \theta \sin \theta & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

Par substitution de (2.39) et (2.42) dans (2.40), la relation contrainte déformation devient:

$$\{\sigma\}_{xyz}^k = [\bar{Q}] \{\varepsilon\}_{xyz}^k \quad (2.44)$$

Où ;

$[\bar{Q}]$: est la matrice de rigidité réduite d'un composite unidirectionnel ou orthotrope, en dehors de ses axes principaux (x, y, z) .

$$[\bar{Q}] = [T]^{-1} [Q] [T'] \quad (2.45)$$

Sous la forme développée, cette relation est donnée par:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ & & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ & Sym & & \bar{Q}_{44} & 0 \\ & & & & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}_k \quad (2.46)$$

Les éléments de la matrice de rigidité $[\bar{Q}]$ s'écrivent en fonction des coefficients de la matrice dans les axes principaux $[Q]$ et de l'angle θ .

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta \\
\bar{Q}_{12} &= Q_{12} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) + (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\
\bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos^3 \theta \sin \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\
\bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta + (2Q_{11} + 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\
\bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos \theta \sin^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\
\bar{Q}_{66} &= (Q_{11} - 2Q_{12} + Q_{22} - 2Q_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\
\bar{Q}_{44} &= Q_{55} \sin^2 \theta + Q_{44} \cos^2 \theta \\
\bar{Q}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44}) \sin \theta \cos \theta \\
\bar{Q}_{55} &= Q_{44} \sin^2 \theta + Q_{55} \cos^2 \theta
\end{aligned} \tag{2.47}$$

2.6.3. Equation constitutive d'un stratifié

La combinaison des résultantes des forces et des moments conduit à reformuler l'équation constitutive du stratifié décrivant le comportement mécanique avec prise en charge de l'effet de cisaillement transverse [37, 44] :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ & & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ & & & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ & & & & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ & & Sym & & & D_{66} & 0 & 0 \\ & & & & & & F_{44} & F_{45} \\ & & & & & & & F_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \\ \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \tag{2.48}$$

Ou sous forme contractée:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \\ Q \end{Bmatrix} = [H] \begin{Bmatrix} \beta \\ \chi \\ \gamma \end{Bmatrix} \tag{2.49}$$

Avec :

$$[H] = \begin{bmatrix} [A] & [B] & 0 \\ [B] & [D] & 0 \\ 0 & 0 & [F] \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

Les coefficients de la matrice d'extension $[A]$, de la matrice de couplage $[B]$ et de la matrice de flexion $[D]$ sont définis comme suit:

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\bar{Q}_{ij})_k (1, z, z^2) dz, \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (2.51)$$

Où ;

$$\begin{aligned} [A_{ij}] &= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\bar{Q}_{ij}) dz = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij} (z_k - z_{k-1}) \\ [B_{ij}] &= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\bar{Q}_{ij}) z dz = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij} (z_k^2 - z_{k-1}^2) \\ [D_{ij}] &= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\bar{Q}_{ij}) z^2 dz = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij} (z_k^3 - z_{k-1}^3) \end{aligned} \quad (2.52)$$

Les coefficients de la matrice de cisaillement $[F]$ sont définis par:

$$[F_{ij}] = \alpha_{ij} \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\bar{Q}_{ij})_k dz, \quad i, j = 4, 5 \quad (2.53)$$

Où ;

α_{ij} sont les facteurs de correction en cisaillement permettant d'améliorer la théorie des plaques stratifiées avec cisaillement transverse.

La détermination de ses facteurs a fait l'objet de plusieurs recherches, on cite Whitney [43, 67]. On note que Timoshenko, Reissner et Mindlin ont pris ces facteurs égaux à 2/3, 5/6 et $\pi^2/12$ respectivement. Il a été remarqué que le facteur 5/6 donne les résultats les plus satisfaisantes.

2.7. Matériau piézoélectrique

Dans le domaine de dynamique des structures, la piézoélectricité sert surtout à la détection de déformation ou de déplacement ainsi qu'au contrôle actif des vibrations.

De ce fait, en intégrant des éléments piézoélectrique dans une structure, il devient possible non seulement de mesurer les contraintes ou des déformations en utilisant ces matériaux comme capteurs (c'est ce que l'on nomme l'effet piézoélectrique direct), mais aussi lorsque l'on soumet ces cristaux à un champ électrique ils se déforment et permet d'imposer des contraintes par lesquelles on contrôle des déformations et déplacements (actionneur), représentant l'effet piézoélectrique inverse.

Afin de faciliter la compréhension des phénomènes électriques à l'intérieur d'un corps piézoélectrique, une analogie peut se faire entre les comportements mécanique et électrique.

2.7.1. Loi de comportement

Pour un matériau piézoélectrique polarisé dans la direction de l'épaisseur (z), ce type de céramique polarisé est un matériau transversalement isotrope, et les lois de comportement sont données par [31,32, 33] :

L'effet direct de la piézoélectricité :

$$\begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & e_{15} \\ e_{15} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} \quad (2.54)$$

$$\text{ou} \quad \{D\} = \begin{bmatrix} e_{mf} \\ e_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{mf} \\ \varepsilon_c \end{Bmatrix} + [d] \{E\}$$

Avec :

$\{D\}$: vecteur des déplacements électriques

$\{\varepsilon\}$: vecteur de déformations

$\{E\}$:vecteur des champs électriques

$[e]$:matrice des constantes piézoélectriques ou de couplage piezo-mécanique

$[d]$:matrice de permittivité électrique

L'effet inverse de la piézoélectricité :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 \\ C_{21} & C_{11} & C_{13} & 0 \\ C_{31} & C_{31} & C_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{66} \\ & & & 0 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{15} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix}$$

$$\text{ou} \quad \begin{Bmatrix} \sigma_{mf} \\ \sigma_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [C_{mf}] & 0 \\ 0 & [C_c] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{mf} \\ \varepsilon_c \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} [e_{mf}]^t \\ [e_c]^t \end{bmatrix} \{E\}$$

(2.55)

Avec :

$$C_{66} = (C_{11} - C_{12}) / 2$$

$\{\sigma\}$:vecteur de contraintes

$[C]$:matrice des constante élastique

2.7.2. Champ électrique

Le champ électrique $\{E\}$ est le gradient du potentiel électrique $\{\phi\}$, et puisque l'épaisseur des couches piézoélectriques (actionneur / capteur) étant très petite, alors les fonctions de potentiel électrique présentent des variations linéaires en fonction de Z.

Dans ce cas, le champ électrique $\{E\}$ est constant suivant l'épaisseur h_p [32, 45, 46] :

$$\begin{aligned} E_x &= E_y = 0 \\ E_z &= -\frac{\phi}{h_p} \end{aligned} \quad (2.56)$$

Sous forme matricielle :

$$\{E\} = \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/h_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi \end{Bmatrix} = [D_\phi] \{\phi\} \quad (2.57)$$

2.7.3. Energie cinétique

L'énergie cinétique de la couche piézoélectrique a la même forme que celle d'un matériau purement élastique, donnée par :

$$E_c = \frac{1}{2} \rho_p \int_s \{\dot{U}\}^t \{\dot{U}\} ds = \frac{1}{2} \int_s \{\dot{u}\}^t [\bar{m}_p] \{\dot{u}\} ds \quad (2.58)$$

Avec :

$$[\bar{m}_p] = \rho_p \cdot \begin{bmatrix} h_p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_p^3/12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_p^3/12 \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

2.7.4. Energie potentielle

Par contre l'énergie potentielle est différente à cause de l'effet piézoélectrique, donc pour un milieu continu, elle comporte initialement une partie élastique et une autre électrique [16, 18, 47] :

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2} \int_v \{\sigma\}^t \{\varepsilon\} dv - \frac{1}{2} \int_v \{D\}^t \{E\} dv \\ &= E_{p-elastic} - E_{p-electric} \end{aligned} \quad (2.60)$$

En substituant les expressions (2.54) et (2.55) dans (2.60), on obtient :

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2} \int_v \{\varepsilon\}^t [C] \{\varepsilon\} dv - \frac{1}{2} \int_v \left(\{\varepsilon\}^t [e] \{E\} + \{E\}^t [e] \{\varepsilon\} \right) dv - \frac{1}{2} \int_v \{E\}^t [d] \{E\} dv \\ &= E_{p-elastic} - E_{p-piezoelectrique} - E_{p-dielectrique} \end{aligned} \quad (2.61)$$

La composante élastique de cette énergie a aussi la même forme que celle d'une couche élastique, mais avec la différence de la matrice $[C]$, car dans ce cas, le matériau est transversalement isotrope.

La deuxième composante est l'énergie potentielle piézoélectrique qui représente le couplage électromécanique, donnée par :

$$E_{p-piezoelctrique} = -\frac{1}{2} \int_v \left(\begin{aligned} & \{\beta\}^t [e_{mf}]^t \{E\} + \{E\}^t [e_{mf}]^t \{\beta\} + \{\chi\}^t [e_{mf}]^t \{E\} + \\ & + \{E\}^t [e_{mf}]^t \{\chi\} + \{\gamma\}^t [e_c]^t \{E\} + \{E\}^t [e_c]^t \{\gamma\} \end{aligned} \right) dv \quad (2.62)$$

Sachant que l'effet de cisaillement pour cette dernière est nulle étant donnée que $E_x = E_y = 0$, et en intégrant suivant l'épaisseur on obtient :

$$E_{p-piezoelctrique} = -\frac{1}{2} \int_s h_p \left(\{\beta\}^t [e_{mf}]^t \{E\} + \{E\}^t [e_{mf}]^t \{\beta\} \right) ds \quad (2.63)$$

Alors que la composante diélectrique de l'énergie potentielle est donnée par :

$$E_{p-dielectrique} = -\frac{1}{2} \int_s h_p \{E\}^t [d]^t \{E\} ds \quad (2.64)$$

2.7.5. Travail pour plaque piézoélectrique

Le travail des efforts externes comporte aussi deux parties, une mécanique et l'autre électrique.

$$T = T_{meccanique} + T_{electrique} \quad (2.65)$$

Pour la première composante on reprend la relation (2.35), par contre la deuxième est donnée par :

$$T_{electrique} = -\int_s \{\phi\}^t \{D\} ds \quad (2.66)$$

Où ;

$\{\phi\}$: Potentielle électrique

$\{D\}$: Charge électrique surfacique ou déplacement électrique

2.8. Plaque sandwich (multicouches)

L'importance de cette partie est d'aboutir à l'étude d'une plaque sandwich piézoélectrique jouant le rôle d'une structure intelligente permettant le contrôle actif des vibrations.

La formulation traite un sandwich intégrant une couche centrale élastique (isotrope ou composite) entre deux sous couches piézoélectriques de même épaisseur (en rôles d'actionneurs et/ou capteurs).

On adopte les hypothèses suivantes [28, 37] :

- l'épaisseur de l'âme (couche centrale) est plus élevée que celles des deux peaux (sous couches piézoélectriques).
- Le déplacement de l'âme (u et v) suivant les directions x et y sont des fonctions linéaires de z .
- Le déplacement transverse (w) est indépendant de z , d'où la déformation ε_z est négligeable.

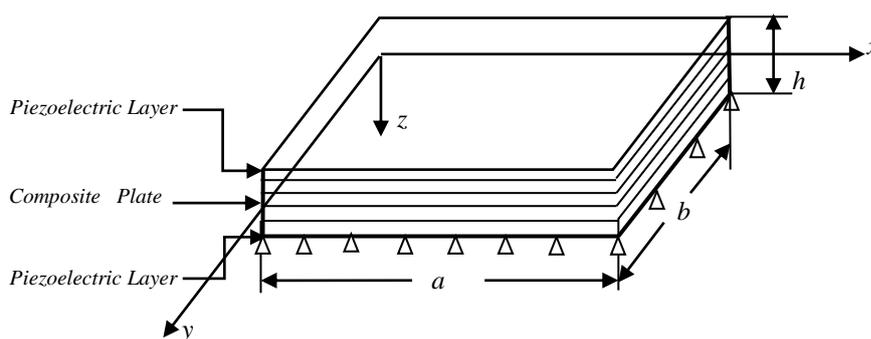


Fig.2.6. Plaque sandwich piézoélectrique

L'hypothèse de Mindlin pour le premier ordre d'approximation tenant compte du cisaillement transverse est maintenue, ainsi on reprend les mêmes relations pour le champ des déplacements (2.2) et des déformations (2.4).

2.8.1. Energie cinétique du sandwich

Elle prend la même forme de l'expression (2.14), mais avec la participation de l'âme et des deux peaux.

$$E_c = \frac{1}{2} \rho_v \int_v \{\dot{u}\}^t \left([L_t]^t [L_t] - z \left([L_r]^t [L_t] + [L_t]^t [L_r] \right) + z^2 \left([L_r]^t [L_r] \right) \right) \{\dot{u}\} dv \quad (2.67)$$

En intégrant dans l'intervalle $\left[-\frac{h_c}{2}, +\frac{h_c}{2} \right]$ pour l'âme (cœur), dans l'intervalle $\left[-\frac{h_c}{2} - h_p, -\frac{h_c}{2} \right]$ pour la couche piézoélectrique inférieure, et dans l'intervalle $\left[+\frac{h_c}{2}, +\frac{h_c}{2} + h_p \right]$ pour la couche supérieure, on obtient :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_s \{\dot{u}\}^t [\bar{m}_s] \{\dot{u}\} ds \quad (2.68)$$

$$[\bar{m}_s] = \begin{bmatrix} m1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m2+m3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m2+m3 \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

Avec :

$$m1 = \rho_c \cdot h_c + 2 \cdot \rho_p \cdot h_p$$

$$m2 = \rho_c \cdot \frac{h_c^3}{12}$$

$$m3 = \rho_p \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\left(\frac{h_c}{2} + h_p \right)^3 - \left(\frac{h_c}{2} \right)^3 \right)$$

Où ;

s : indice pour plaque Sandwich

h_c : épaisseur du cœur (l'âme)

h_p : épaisseur de la sous-couche piézoélectrique

2.8.2. Energie potentielle du sandwich

Elle prend la même forme que la relation (2.61), mais avec l'apport des trois sous couches.

$$\begin{aligned}
 E_p &= \frac{1}{2} \int_v \{\varepsilon\}^t [C] \{\varepsilon\} dv - \frac{1}{2} \int_v \left(\{\varepsilon\}^t [e]^t \{E\} + \{E\}^t [e] \{\varepsilon\} \right) dv - \frac{1}{2} \int_v \{E\}^t [D] \{E\} dv \\
 &= E_{p\text{-elastique}} - E_{p\text{-piezoelctrique}} - E_{p\text{-dielectrique}}
 \end{aligned} \quad (2.70)$$

Pour la composante élastique, on a :

$$\begin{aligned}
 E_{elastique} &= \frac{1}{2} \int_s \{\beta\}^t [H_m] \{\beta\} ds + \frac{1}{2} \int_s \{\bar{\chi}\}^t [H_f] \{\bar{\chi}\} ds + \frac{1}{2} \int_s \{\gamma\}^t [H_c] \{\gamma\} ds \\
 &= E_{membrane} + E_{flexion} + E_{cisaillement}
 \end{aligned} \quad (2.71)$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 [H_m] &= h_c [C_{mf}]_{coeur} + 2h_p [C_{mf}]_{piezo} \\
 [H_f] &= \frac{h_c^3}{12} [C_{mf}]_{coeur} + \frac{2}{3} \cdot \left(\left(\frac{h_c}{2} + h_p \right)^3 - \left(\frac{h_c}{2} \right)^3 \right) [C_{mf}]_{piezo} \\
 [H_c] &= k \cdot h_c \cdot [C_c]_{coeur}
 \end{aligned} \quad (2.72)$$

La composante piézoélectrique du sandwich est l'apport que des deux sous-couches piézoélectriques, et c'est donnée par :

$$E_{piezoelctrique} = -\frac{1}{2} \int_s 2 \cdot h_p \cdot \left(\{\beta\}^t [e_{mf}]^t \{E\} + \{E\}^t [e_{mf}] \{\beta\} \right) ds \quad (2.73)$$

La même remarque sur la partie diélectrique :

$$E_{dielectrique} = -\frac{1}{2} \int_s 2 \cdot h_p \cdot \{E\}^t [d]^t \{E\} ds \quad (2.74)$$

2.8.3. Travail des efforts extérieurs

Le travail des efforts externes comporte aussi deux parties, une mécanique et l'autre électrique.

$$T = T_{m\acute{e}canique} + T_{\acute{e}lectrique} \quad (2.75)$$

Pour la première composante on reprend la relation (2.28) :

$$T_{m\acute{e}canique} = \int_v \{U\}^t \{F\} dv + \int_s \{U\}^t \{f\} ds + \{U\}^t \{P\} \quad (2.76)$$

Par contre la deuxième est donnée par :

$$T_{\acute{e}lectrique} = - \int_s \{\phi\}^t \{D\} ds \quad (2.77)$$

Conclusion

Dans cette partie, on a déterminé les équations régissant le comportement d'une plaque élastique isotrope, composite et piézoélectrique, aussi pour une plaque sandwich piézoélectrique. Les relations des énergies cinétiques et potentielles, ainsi que le travail des efforts externes mécaniques et électriques sont développées. Ces relations seront discrétisées par des éléments finis permettant la détermination des matrices élémentaires du système.

CHAPITRE 3

MODELISATION EN ELEMENTS FINIS

3.1. Introduction

La méthode des éléments finis est très utilisée dans le domaine de la mécanique et surtout pour la modélisation des structures. Le principe est de ramener un problème de milieu continu à des problèmes discrets en un nombre fini d'équations. Donc ça consiste à discrétiser la structure en un nombre fini d'éléments interconnectés entre eux par des nœuds.

Un élément finis est utilisé pour discrétiser le milieu, et les expressions des énergies présentées en chapitre précédent seront approximées, alors les matrices élémentaires de masse, rigidité et le vecteur des forces nodales peuvent être obtenues, et aboutissant à l'équation de mouvement régissant le comportement dynamique de la structure.

3.2. Discrétisation de la géométrie

Pour la discrétisation, on opte pour un élément fini quadrilatère isoparamétrique à 9 nœuds et à 5 degrés de liberté par nœud (3 déplacements u v w et 2 rotations θ_x et θ_y) [40, 42, 43, 48, 49].

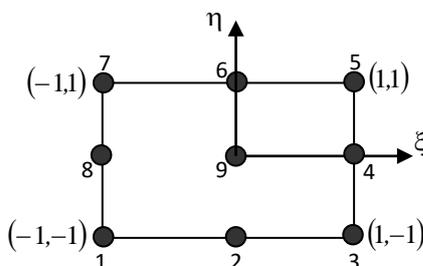


Fig.3.1.Elément de référence

3.3. Fonctions d'interpolation

Les variables du problème peuvent être exprimées selon l'approximation nodale suivante :

$$\begin{aligned}
 u &= \sum_{i=1}^{nn} N_i \cdot u_i \\
 v &= \sum_{i=1}^{nn} N_i \cdot v_i \\
 w &= \sum_{i=1}^{nn} N_i \cdot w_i \\
 \theta_x &= \sum_{i=1}^{nn} N_i \cdot \theta_{xi} \\
 \theta_y &= \sum_{i=1}^{nn} N_i \cdot \theta_{yi}
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Où :

N_i : fonctions d'interpolation

nn : nombre de nœuds par élément

Les fonctions d'interpolation doivent être choisies de manière à ce qu'elles vérifient la continuité inter élémentaires [40, 42, 48, 50].

Pour les nœuds de sommets :

$$\begin{aligned}
 \xi_i &= \pm 1, \eta_i = \pm 1 \\
 N_i &= \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)\xi\eta
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Pour les nœuds d'interfaces :

$$\begin{aligned}
 N_i &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_i)\eta\eta_i \quad a \quad \xi_i = 0, \eta_i = \pm 1 \\
 N_i &= \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 + \xi\xi_i)\xi\xi_i \quad a \quad \xi_i = \pm 1, \eta_i = 0
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Pour le nœud du centre :

$$\begin{aligned}
 \xi_i &= 0, \eta_i = 0 \\
 N_i &= (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Les relations (3.1) sont réorganisées sous forme matricielle comme :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^m \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

$$\{u\} = [N_u] \{\bar{u}\} \quad (3.6)$$

Où ;

$\{\bar{u}\}$: vecteur de déplacements nodaux

Les dérivées d'une fonction (exemple N) par rapport au système naturel (ξ, η) en fonction des dérivées par rapport au système cartésien (x, y) sont données par [42, 43 , 50] :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

D'où :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

Avec $[J]$: matrice Jacobiene de la transformation des coordonnées cartésiennes aux coordonnées naturelle, et inversement.

L'utilisation des coordonnées naturelles simplifie le domaine sur lequel les intégrales sont définies, et les éléments de surfaces sont exprimées par :

$$ds = dx \cdot dy = \det[J] \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (3.9)$$

Un degré de liberté électrique pour la partie piézoélectrique est ajouté. Etant donné que le potentiel électrique est constant sur la surface des couches piézoélectriques, alors l'interpolation du potentiel électrique est donné par [51] :

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{nn} \begin{bmatrix} N_{\phi i} & 0 & 0 \\ 0 & N_{\phi i} & 0 \\ 0 & 0 & N_{\phi i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{\phi}_i \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

Où ;

$\{\phi\}$: vecteur des potentiels électriques

$\{\bar{\phi}\}$: vecteur des potentiels électriques nodaux

$[N_{\phi i}]$: matrice d'interpolation, c'est une matrice identité de dimension 9x9

3.4.Approximation de la solution

Pour obtenir les expressions approximatives et discrètes des énergies, on introduit les expressions d'interpolation nodale (3.6) et (3.10) dans les relations de chaque composante des énergies exposées en chapitre précédent.

3.4.1.Energie cinétique élémentaire

On reprend l'expression (2.68) de l'énergie, et en substituant la dérivée de la relation (3.6), on obtient :

$$\{\dot{u}\} = [N_u] \{\bar{\dot{u}}\} \quad (3.11)$$

$$E_c = \frac{1}{2} \rho \int_s \{\dot{U}\}^t \{\dot{U}\} ds = \frac{1}{2} \int_s \{\bar{\dot{u}}\}^t [N_u]^t [\bar{m}_s] [N_u] \{\dot{u}\} ds \quad (3.12)$$

3.4.2.Energie potentielle élémentaire

Pour une plaque sandwich piézoélectrique, l'énergie potentielle est aussi composée de trois parties comme c'est motionné en relation (2.70).

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2} \int_v \{\varepsilon\}^t [C] \{\varepsilon\} dv - \frac{1}{2} \int_v \left(\{\varepsilon\}^t [e]^t \{E\} + \{E\}^t [e] \{\varepsilon\} \right) dv - \frac{1}{2} \int_v \{E\}^t [D] \{E\} dv \\ &= E_{p-élastique} \quad - \quad E_{p-piezoelectrique} \quad - \quad E_{p-dielectrique} \end{aligned} \quad (3.13)$$

a-Energie potentielle élastique

A partir de la relation (2.71), et en substituant les expressions des approximations des relations (3.6), (2.7), (2.8) et (2.9), on aura :

$$\begin{aligned}
 E_{p-élastique} = \frac{1}{2} \int_s \{\bar{u}\}^T & \left([N_u]^T [D_{um}]^T [H_m] [D_{um}] [N_u] \right. \\
 & + [N_u]^T [D_{uf}]^T [H_f] [D_{uf}] [N_u] \\
 & - [N_u]^T [D_{um}]^T [H_{mf}] [D_{uf}] [N_u] \\
 & - [N_u]^T [D_{uf}]^T [H_{mf}] [D_{um}] [N_u] \\
 & \left. + [N_u]^T [D_{uc}]^T [H_c] [D_{uc}] [N_u] \right) \{\bar{u}\} ds
 \end{aligned} \quad (3.14)$$

b-Energie potentielle piézoélectrique

On reprend l'expression (2.73), et en substituant les expressions des approximations des relations (3.6), (2.7) et (3.10), l'énergie devienne :

$$\begin{aligned}
 E_{piezoélectrique} = -\frac{1}{2} \int_s 2 \cdot h_p \cdot \{\bar{u}\}^t & \left([N_u]^t [D_{um}]^t [e_{mf}]^t [D_\phi] [N_\phi] \right) \{\bar{\phi}\} ds \\
 -\frac{1}{2} \int_s 2 \cdot h_p \cdot \{\bar{\phi}\}^t & \left([D_\phi]^t [N_\phi]^t [e_{mf}]^t [N_u] [D_{um}] \right) \{\bar{u}\} ds
 \end{aligned} \quad (3.15)$$

c- Energie potentielle diélectrique

Cette énergie est la participation des couches piézoélectriques présentée dans l'expression (2.74), et en substituant les expressions des approximations de la relation (3.10) :

$$E_{p-dielectrique} = -\frac{1}{2} (2h_p) \int_s \{\bar{\phi}\}^T [N_\phi]^T [D_\phi]^T [d] [D_\phi] [N_\phi] \{\bar{\phi}\} ds \quad (3.16)$$

3.4.3. Travail des efforts

Le travail des efforts dans une plaque sandwich piézoélectrique est de deux natures, une composante mécanique, et une deuxième électrique.

Travail mécanique

On reprend l'expression (2.76), en tenant compte de la relation (3.6), le travail mécanique peut être écrit comme suit :

$$T_{mecanique} = \int_v (h_c + 2h_p) \{\bar{u}\}^t [N_u]^t \{F\} dv + \int_s \{\bar{u}\}^t [N_u]^t \{f\} ds + \{\bar{u}\}^t [N_u]^t \{P\} \quad (3.17)$$

Travail électrique

Le travail électrique est le produit du chargement des actionneurs :

$$T_{electrique} = \int_s \{\bar{\phi}\}^t [N_\phi]^t [D] ds \quad (3.18)$$

3.5. Matrices élémentaires

On reprend les expressions discrètes des énergies cinétique, potentielle et du travail pour déterminer les expressions de la matrice élémentaire de la masse et de la rigidité et du vecteur des efforts externes respectivement.

3.5.1. Matrice élémentaire de la masse

L'expression de l'énergie cinétique de la relation (3.12) peut être réécrite comme :

$$E_{cinetique} = \frac{1}{2} \{\dot{\bar{u}}\}^T [M]_{ele} \{\dot{\bar{u}}\} \quad (3.19)$$

Par identification entre (3.12) et (3.19), la matrice de masse est [52] :

$$[M]_{ele} = \int_s [N_u]^T [\bar{m}_s] [N_u] ds \quad (3.20)$$

3.5.2. Matrice élémentaire de rigidité

L'énergie potentielle pour une plaque sandwich piézoélectrique comporte trois parties, une élastique, piézoélectrique et une troisième diélectrique, ce qui donnent une matrice élémentaire pour chaque partie respectivement.

a- Matrice de rigidité élastique

L'énergie potentielle de la relation (3.14) est réécrite sous la forme suivante :

$$E_{elastique} = \frac{1}{2} \{\bar{u}\}^T [K_{uu}]_{ele} \{\bar{u}\} \quad (3.21)$$

Par identification entre les relations (3.14) et (3.21) on obtient [52] :

$$\begin{aligned} [K_{uu}]_{ele} = & \sum_i h_i \int_s [N_u]^T [D_{um}]^T [C_{mf}] [D_{um}] [N_u] ds \\ & + \sum_i \left(\frac{h_i^3}{12} + z_i h_i \right) \int_s [N_u]^T [D_{uf}]^T [C_{mf}] [D_{uf}] [N_u] ds \\ & - \sum_i (z_i h_i) \int_s [N_u]^T [D_{um}]^T [C_{mf}] [D_{uf}] [N_u] ds \\ & - \sum_i (z_i h_i) \int_s [N_u]^T [D_{uf}]^T [C_{mf}] [D_{um}] [N_u] ds \\ & + \sum_i (k h_i) \int_s [N_u]^T [D_{uc}]^T [C_c] [D_{uc}] [N_u] ds \end{aligned} \quad (3.22)$$

Où ;

z_i : est la position par rapport au plan moyen de la i^{ime} couche

b- Matrice de rigidité piézoélectrique

Cette partie représente le couplage électromécanique, et en écrivant l'expression (3.15) sous la forme :

$$E_{piezoelctrique} = \frac{1}{2} \{\bar{u}\}^T [K_{u\phi}]_{ele} \{\bar{\phi}\} + \frac{1}{2} \{\bar{\phi}\}^T [K_{\phi u}]_{ele} \{\bar{u}\} \quad (3.23)$$

Par identification, on a [52] :

$$\begin{aligned} [K_{u\phi}]_{ele} = & - \sum_i h_i \int_s [N_u]^T [D_{um}]^T [e_{mf}] [D_{\phi}] [N_{\phi}] ds \\ & - \sum_i (z_i h_i) \int_s [N_u]^T [D_{uf}]^T [e_{mf}] [D_{\phi}] [N_{\phi}] ds \end{aligned} \quad (3.24)$$

Où;

$[K_{\phi u}]_{ele} = [K_{u\phi}]_{ele}^T$: est la composante de la matrice de rigidité due au couplage piézo-mécanique.

b- Matrice de rigidité diélectrique

Cette matrice représente l'effet de la partie électrique de l'énergie, et par identification de la relation (2.44) avec l'expression suivante :

$$E_{dielectrique} = \frac{1}{2} \{\bar{\phi}\}^T [K_{\phi\phi}]_{ele} \{\bar{\phi}\} \quad (3.25)$$

On obtient [52] :

$$[K_{\phi\phi}]_{ele} = -\sum_i h_i \int_s [N_\phi]^T [D_\phi]^T [d] [D_\phi] [N_\phi] ds \quad (3.26)$$

Alors la combinaison de toutes les composantes, on aura la matrice de rigidité élémentaire d'une plaque sandwich piézoélectrique suivante :

$$\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\phi} \\ K_{\phi u} & K_{\phi\phi}_{ele} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Les matrices élémentaires sont exprimées sous forme d'intégrale, et chaque terme fait l'objet d'intégration numérique utilisant la quadrature de GAUSS [43, 50].

Une fois les matrices élémentaires calculées, un processus d'assemblage est suivi pour obtenir les matrices globales du système, et l'équation de mouvement régissant le comportement de la plaque piézoélectrique est présentée.

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\phi} \\ K_{\phi u} & K_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ Q \end{Bmatrix} \quad (3.29)$$

Où ;

$\{F\}$: vecteur de forces extérieures

$\{Q\}$: vecteur de charge électrique

3.6. Amortissement

Les modèles de comportement représentant les phénomènes de dissipation d'énergie sont souvent mal connus et il n'est pas possible de les décrire explicitement au niveau élémentaire. C'est pourquoi les modèles les plus utilisés sont les modèles qui permettent de reproduire les principaux effets sur les structures, on peut citer essentiellement [18, 53, 54] :

- l'amortissement visqueux : énergie dissipée proportionnelle à la vitesse du mouvement,
- l'amortissement hystérétique (dit aussi amortissement structural) : énergie dissipée proportionnelle au déplacement telle que la force d'amortissement est de signe opposée à celui de la vitesse.
- l'amortissement proportionnel : La matrice d'amortissement est exprimée comme une combinaison linéaire des matrices de masse et de raideur.

Ce dernier type dit aussi de Rayleigh, permet de définir la matrice d'amortissement comme une combinaison linéaire des matrices de rigidité et de masse, et décrite sous la forme suivante [18, 53, 54] :

$$[C] = \bar{\alpha}[M] + \bar{\beta}[K] \quad (3.30)$$

Ou;

$\bar{\alpha}$: coefficient de proportionnalité de la masse

$\bar{\beta}$: coefficient de proportionnalité de la rigidité

Cet amortissement est le plus utilisé pour plusieurs avantages :

- Facile à mettre en œuvre après avoir assemblé les matrices de rigidité et de masse.
- Son succès est attaché aux méthodes d'analyse par recombinaison modale à partir d'une base des modes propres.

Les propriétés d'orthogonalité des modes propres solution du problème aux valeurs propres, se traduisent par la diagonalisation simultanée dans le passage en coordonnées modales généralisées de :

$$\begin{aligned} \{V\}^T [M] \{V\} &= [\bar{M}] \\ \text{et } \{V\}^T [K] \{V\} &= [\bar{K}] \end{aligned} \quad (3.31)$$

Où;

$[V]$: matrice des modes propres

Alors l'amortissement de Rayleigh est une condition suffisante pour diagonaliser la matrice $[C]$ par :

$$\{V\}^T [C] \{V\} = [\bar{C}] \quad (3.32)$$

Avec;

$[\bar{M}]$, $[\bar{K}]$ et $[\bar{C}]$ sont diagonales

Ce qui permet de diagonaliser le système d'équation de mouvement d'une structure par :

$$[\bar{M}] \{\ddot{q}\} + [\bar{C}] \{\dot{q}\} + [\bar{K}] \{q\} = \{V\}^T \{F(t)\} \quad (3.33)$$

Trois cas d'identification simples sont présentés ici pour illustrer, les effets induits par cette modélisation [18, 53, 54] :

- amortissement proportionnel aux caractéristiques d'inertie :
 $\bar{\alpha} = 0, \bar{\beta} = \bar{\beta}_i$, dans ce cas les modes élevés seront très peu amortis et les modes basse fréquence très amortis.
- amortissement proportionnel aux caractéristiques de rigidité :
 $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_j, \bar{\beta} = 0$, dans ce cas aussi les modes élevés seront très amortis.
- amortissement proportionnel complet : $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_j, \bar{\beta} = \bar{\beta}_i$.

Conclusion

Un élément fini a été utilisé pour discrétiser le milieu, et les expressions des énergies sont approximées, permettant l'obtention des matrices élémentaires de masse, rigidité et le vecteur des forces nodales. L'opération de l'assemblage permet d'obtenir les matrices globales, et d'aboutir à l'équation de mouvement régissant le comportement de la plaque piézoélectrique. C'est l'analyse de cette équation de mouvement pour une analyse modale, analyse statique (en mode actionneur) et une analyse dynamique en contrôle actif des vibrations qui fera l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE 4

ANLYSE D'UN SANDWICH PIEZOELCTRIQUE ALGORITHMES DE CONTROLE ACTIF DES VIBRATIONS

4.1. Introduction

L'analyse d'une plaque sandwich piézoélectrique revient à traiter l'équation de mouvement régissant son comportement dynamique.

Donc on s'intéresse à faire une analyse modale et dynamique de la structure, suivi de la présentation de la formulation pour l'atténuation des vibrations en mode actionneur, puis la formulation pour le contrôle actif utilisant les contrôleurs LQR et PID qui est exposé, et on termine par la présentation de l'algorithme PSO qui permet l'optimisation des paramètres de contrôle.

4.2. Analyse modale

En résolvant l'équation de mouvement régissant le comportement des structures, pour une plaque monocouche ou plaque sandwich, on peut obtenir la réponse modale et dynamique.

L'analyse modale caractérise la vibration libre d'une structure, et permet de déterminer les fréquences propres de vibrations (valeurs propres) et les déformées modales (vecteurs propres) de cette structure.

L'analyse modale d'une plaque piézoélectrique peut suivre les mêmes étapes que celles pour une plaque purement isotrope à quelques détails près. Donc, si aucune force externes n'est appliquée sur la structure, l'équation de mouvement se réduit à :

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\phi} \\ K_{\phi u} & K_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

La solution est écrite sous la forme suivante :

$$\{u(t)\} = \{\psi\} e^{j\omega t} \quad (4.2)$$

et

$$\{\phi(t)\} = \{\varphi\} e^{j\omega t} \quad (4.3)$$

Où ;

ω : Valeur propre

$\{\psi\}$ et $\{\varphi\}$: les vecteurs propres

Substituant l'expression (4.2) et (4.3) dans la relation (4.1), on obtient l'équation caractéristique du problème aux valeurs propres suivant :

$$\left(\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\phi} \\ K_{\phi u} & K_{\phi\phi} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \psi \\ \varphi \end{Bmatrix} e^{j\omega t} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

D'où :

$$\left(\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\phi} \\ K_{\phi u} & K_{\phi\phi} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \psi \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

Le nombre de solutions est égal à la dimension des matrices M et K, et l'équation caractéristique (4.5) peut être séparée en deux parties, une partie élastique et l'autre électrique qui sont présentées comme suit [22] :

$$[K_{uu}]\{\psi\} + [K_{u\phi}]\{\varphi\} - \omega^2 [M]\{\psi\} = \{0\} \quad (4.6)$$

Et :

$$\{K_{\phi u}\}\{\psi\} + [K_{\phi\phi}]\{\varphi\} = \{0\} \quad (4.7)$$

Pour diminuer la taille du système à résoudre, on tire $\{\varphi\}$ de l'équation électrique (4.7) :

$$\{\varphi\} = -[K_{\phi\phi}]^{-1} \{K_{\phi u}\} \{\psi\} \quad (4.8)$$

En substituant cette dernière expression dans la relation (4.6), et après factorisation on aura la nouvelle équation caractéristique du problème aux valeurs propres suivante :

$$\left([\tilde{K}] - \omega^2 [M] \right) \{\psi\} = \{0\} \quad (4.9)$$

Avec :

$$[\tilde{K}] = [K_{uu}] - [K_{u\phi}] [K_{\phi\phi}]^{-1} [K_{\phi u}] \quad (4.10)$$

Dans notre cas, on utilise la méthode des itérations sur sous espace, qui permet de calculer les premiers valeurs propres qui sont les plus importantes [48], donc on évite la détermination de toutes les fréquences à la fois surtout pour un problème de grande taille pour lequel, le calcul sera très long et très coûteux.

4.3. Analyse dynamique

Cette analyse permet l'étude des vibrations d'une structure sous chargement externe, et l'équation de mouvement d'une plaque sandwich piézoélectrique est données par :

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\phi} \\ K_{\phi u} & K_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ Q \end{Bmatrix} \quad (4.11)$$

Les éléments piézoélectriques peuvent être utilisés soit comme capteur (effet directe de la piézoélectricité), ou autant qu'actionneur (effet inverse de la piézoélectricité). Dépendant de leur utilisation, les conditions aux limites électriques sont différentes.

4.3.1. Excitation par actionneur piézoélectrique (mode actionneur)

Dans ce cas il n'existe que des actionneurs sur la plaque sandwich, alors le vecteur des potentiels $\{\phi\}$ est imposé (connu) constituant l'excitation des actionneurs, alors cette excitation est transférée de même côté que le vecteur forces extérieures, ça revient à modifier le vecteur de force dans l'équation de mouvement.

Et la relation (4.11) devienne :

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K_{uu}]\{u\} = \{F_u\} - [K_{u\phi}]\{\phi_a\} \quad (4.14)$$

4.3.2. Réponse d'un capteur piézoélectrique (mode capteur)

Dans ce cas, il n'existe que des capteurs sur la plaque sandwich, alors le vecteur des potentiels électriques reste inconnu dans l'équation de mouvement. Par conséquent le vecteur d'excitation ne comporte que les efforts mécaniques. On note aussi qu'aucune charge n'est accumulée sur les couches piézoélectriques, et pour la couche de capteur, la charge appliquée ($\{Q\} = \{0\}$) est nulle [56]. Donc l'équation de mouvement devienne :

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\phi} \\ K_{\phi u} & K_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.15)$$

4.3.3. Résolution par la méthode de NEWMARK

Dans les sections précédentes, nous avons déduit les équations du mouvement pour les structures intelligentes à travers l'équation (4.14) et (4.15). Elles sont des équations différentielles du second ordre par rapport au temps.

En 1959 Newmark, a proposé l'algorithme (le schéma d'intégration de Newmark) le plus populaire pour la résolution des problèmes dans la dynamique des structures.

Cette méthode (méthode implicite) est utilisée très fréquemment dans l'analyse dynamique en raison de la réduction des coûts par rapport au temps de calcul résultant d'un pas de temps plus ou moins grand [50].

Pour l'équation de mouvement en forme générale :

$$[M]\{a\} + [C]\{v\} + [K]\{x\} = \{F(t)\} \quad (4.16)$$

Le principe de l'algorithme de Newmark est basé sur la prédiction et correction, ça consiste à prédire la vitesse et la position et de calculer l'accélération, ensuite les corrigées pour la nouvelle itération.

Dans cet algorithme, les interpolations relient les positions, les vitesses, et les accélérations de l'étape (itération) n à l'étape $n+1$. Ces paramètres à l'étape $n+1$ sont donnés en développement en série de Taylor tronquée par [44, 50] :

$$v_{n+1} = v_n + (1 - \gamma) a_n \Delta t + \gamma a_{n+1} \Delta t \quad (4.17)$$

$$x_{n+1} = x_n + v_n \Delta t + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) a_n \Delta t^2 + \beta a_{n+1} \Delta t^2 \quad (4.18)$$

Où ;

x_n , v_n et a_n : sont respectivement les vecteurs des positions, des vitesses, et des accélérations à l'étape n

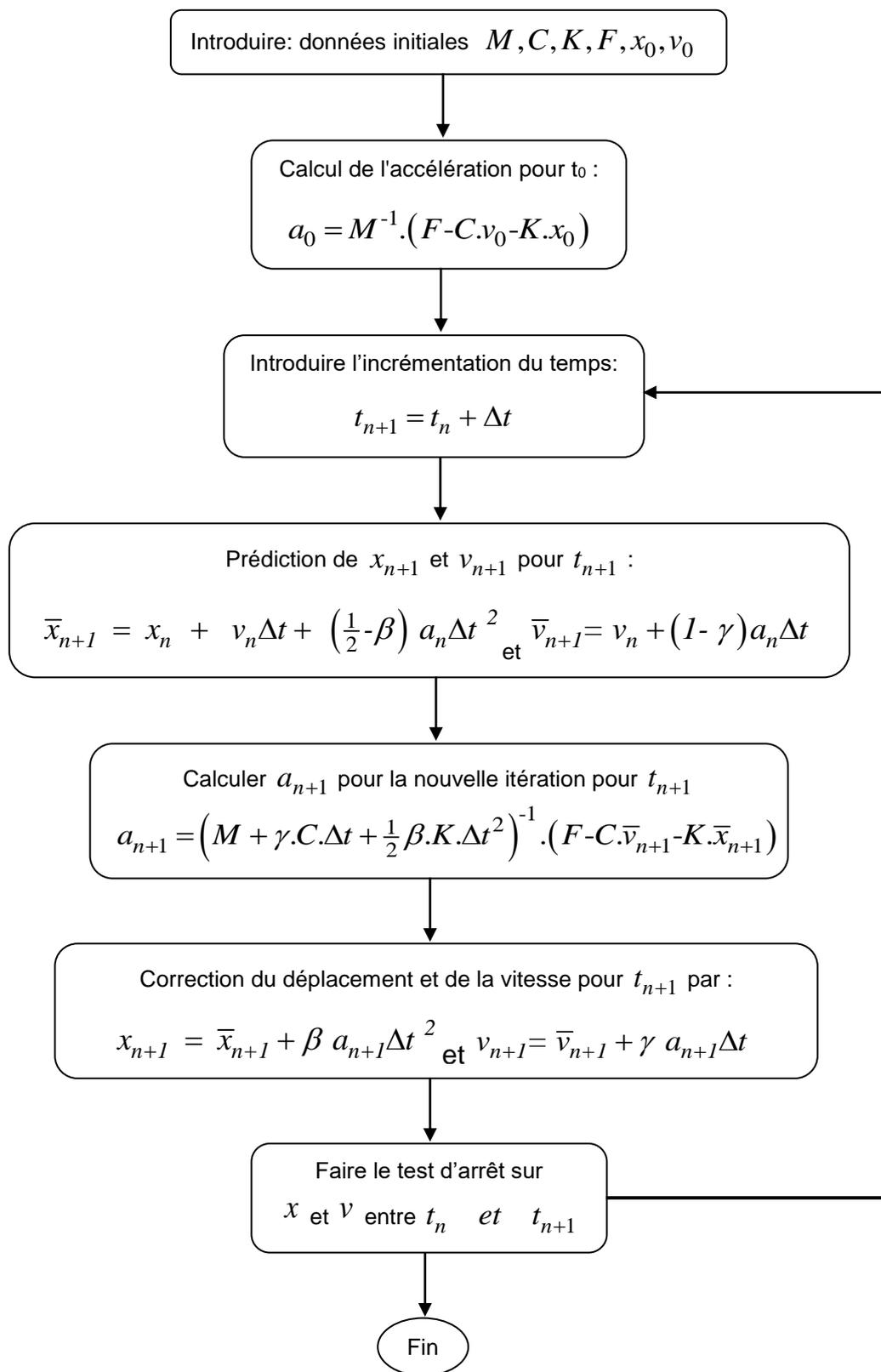
Δt : est l'incrément du temps.

β et γ : sont les paramètres qui définissent la méthode.

Cette méthode est implicite, et sa stabilité est garantie pour $2\beta \geq \gamma \geq \frac{1}{2}$, ce qui signifie que la taille du pas de temps n'affectera pas la stabilité de la solution [50].

Newmark a initialement proposé comme schéma inconditionnellement stable, la méthode d'accélération moyenne constante (aussi appelée règle trapézoïdale), dans lequel les valeurs couramment utilisées $\beta = \frac{1}{4}$ et $\gamma = \frac{1}{2}$ [18, 44, 50].

La résolution de la relation (4.16) par l'algorithme de Newmark peut être résumé par l'organigramme suivant.



4.4. Contrôle actif des vibrations

Le principe du contrôle actif des vibrations est de contrôler les vibrations à chaque instant par des actionneurs qui agissent sur la structure selon une loi de commande (algorithme de contrôle) conçue pour minimiser une mesure (capteur) de l'intensité des vibrations indésirables.

La théorie du contrôle classique est basée explicitement sur la relation entrée/sortie, en utilisant la fonction de transfert du système pour la mise au point du contrôleur.

Par contre, la modélisation des systèmes en contrôle moderne, surtout pour le contrôle de type rétroaction (feedback), repose sur la description des systèmes en termes de variables d'état par l'approche d'espace d'états (state space approach) [20, 57].

4.4.1. Réduction du modèle et représentation modale

Pour la plus part des structures, seulement les premiers modes propres sont important (suffisant) pour présenter la réponse vibratoire, donc un modèle réduit (tronqué) de la matrice des vecteurs propres qui retient que les (r) premiers modes est utilisé [50, 58, 59].

$$\{q\}_r = [V]_r^T \{u\} \quad (4.19)$$

Avec ;

$[V]_r$: matrice des r premiers modes propres

$\{q\}$: vecteur de déplacement modal

Substituant l'équation (4.19) dans les relations (4.14) et (4.15), on obtient la représentation modale comme suit [58, 59] :

$$[\overline{M}] \left\{ \ddot{q} \right\}_r + [\overline{C}] \left\{ \dot{q} \right\}_r + [\overline{K}_{uu}] \{q\}_r = [V]_r^T \{F_u\} - [V]_r^T [K_{u\phi}] \{\phi_a\} \quad (4.17)$$

$$\{\phi_s\} = -[K_{\phi\phi}]^{-1} [K_{\phi u}] [V]_r \{q\}_r \quad (4.20)$$

Où: s : indice désigne capteur (sensor)

a : indice désigne actionneur (actuator)

4.4.2. Représentation d'état

En automatique, une représentation d'état permet de modéliser un système dynamique en utilisant des variables d'état. Cette représentation donne l'état du système à n'importe quel instant futur si l'on connaît son état à l'instant initial.

Variables d'état :

Un système peut être entièrement décrit à l'aide d'un ensemble de variables. Ces variables sont des grandeurs qui le plus souvent ont une signification physique, et qui sont assemblés dans un vecteur, alors que le nombre de variables d'état représente l'ordre du système.

On note aussi, que les variables d'état permettent une représentation interne et externe des systèmes dans le domaine temporel, alors que la fonction de transfert et l'équation différentielle correspondant à une représentation externe seulement (relation entrée/sortie).

Cette dernière théorie est basée sur un modèle construit à partir d'un système d'équations différentielles de premier ordre constituant une équation différentielle matricielle.

La représentation d'état de tout système s'écrit de la manière matricielle suivante [20, 57, 58, 59] :

$$\begin{cases} \left\{ \dot{X}(t) \right\} = [A]\{X(t)\} + [B]\{u(t)\} \\ \left\{ Y(t) \right\} = [C]\{X(t)\} \end{cases} \quad (4.21)$$

Avec;

$\{X(t)\}$: les variables d'état ou vecteur d'état

$\{Y(t)\}$: vecteur de sortie

$\{u(t)\}$: vecteur d'entrée ou de commande

$[A]$: matrice d'état du système

$[B]$: matrice de commande

$[C]$: matrice de sortie

Pour notre système, les différents éléments de cette représentation sont :

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} q \\ \bullet \\ q \end{Bmatrix}_r, \quad \{Y\} = \{\phi_s\}, \quad \{u\} = \{\phi_a\} \quad (4.22)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\overline{M}_{uu} \overline{K}_{uu} & -\overline{M}_{uu} \overline{C}_{uu} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 \\ -\overline{M}_{uu} V_r^T K_{u\phi} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} -K_{\phi\phi} K_{\phi u} V_r & 0 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

4.4.3. Différents types de contrôleurs

Les techniques actives permettent de contrôler les vibrations à chaque instant par des actionneurs qui agissent sur la structure selon une loi de commande conçue pour minimiser une mesure quelconque de l'intensité des vibrations indésirables.

La performance du système de contrôle actif est fortement dépendante de l'algorithme de contrôle utilisé pour traiter les informations fournies par les capteurs afin de déterminer les signaux de commande envoyés aux actionneurs.

a-Contrôle par rétroaction directe

Ce type de contrôle est classique et simple, il consiste à envoyer le signal du capteur amplifié par un gain à l'actionneur, et la loi de commande peut être écrite en fonction d'un gain par rapport à la position et la vitesse [57, 58, 59].

Pour la rétroaction de position on a :

$$\{u(t)\} = -G\{Y(t)\} \quad (4.26)$$

Et pour la rétroaction de vitesse :

$$\{u(t)\} = -\bar{G}\{\dot{Y}(t)\} \quad (4.27)$$

Ou ;

G et \bar{G} : les gains de contrôle

b-Régulateur Linéaire Quadratique

Le contrôleur optimal LQR cherche une entrée optimale en minimisant la fonction de cout suivante [20, 30, 57, 60] :

$$J_{LQR} = \frac{1}{2} \int (X^T Q X + u^T R u) dt \quad (4.28)$$

Où ;

Q et R : sont la matrice de pondération (sortie) et le vecteur de commande (entrée) respectivement.

Dans ce cas la loi de contrôle qui minimise la fonction J est donnée par :

$$u(t) = -GX(t) \quad (4.20)$$

Avec :

$$G = R^{-1}B^T P \quad (4.30)$$

Où;

G : est la matrice de gain du contrôle optimale

P : est la matrice solution de l'équation de RICCATI

L'équation de RICCATI est donnée par [20, 30, 57, 60, 61] :

$$A^T P + PA + \bar{Q} - PBR^{-1}B^T P = 0 \quad (4.31)$$

Avec : $\bar{Q} = C^T Q C$

Alors la boucle fermée du contrôleur LQR devienne :

$$\begin{cases} \dot{X} = (A - BG)X \\ Y = CX \end{cases} \quad (4.32)$$

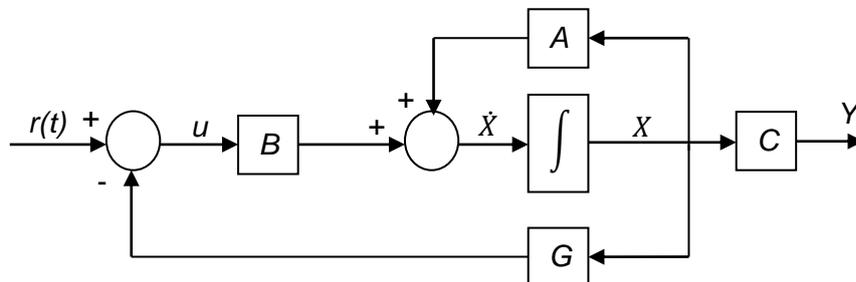


Fig.4.1. Boucle du contrôleur LQR [52]

Il est à noter que dans l'application de la suppression des vibrations, nous avons besoin que le signal de sortie mesuré soit égal à zéro, ce qui signifie que le signal de référence $r(t)$ est nul ici [20].

c-Régulateur Proportionnel Intégral Dérivée (PID)

Le régulateur PID, appelé aussi correcteur PID est un système de contrôle permettant d'améliorer les performances d'un système ou procédé en boucle fermée. C'est le régulateur le plus utilisé dans l'industrie où ses qualités de correction s'appliquent à de multiples grandeurs physiques.

Dans notre cas, le contrôleur par rétroaction PID est réalisé par l'application du voltage sur l'actionneur à travers le vecteur de control $u(t)$ en se basant sur l'erreur de sortie $e(t)$ qui est donnée par :

$$e(t) = -Y(t) = -CX(t) \quad (4.33)$$

Donc la stratégie du PID est de définir le vecteur control $u(t)$ en une sommation du : proportionnel, intégral et dérivée du vecteur erreur de sortie $e(t)$ comme suit [20, 30, 57] :

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int e(t) dt + K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (4.34)$$

où;

K_p, K_i et K_d : sont le proportionnel gain, l'intégral gain et le dérivatif gain respectivement.

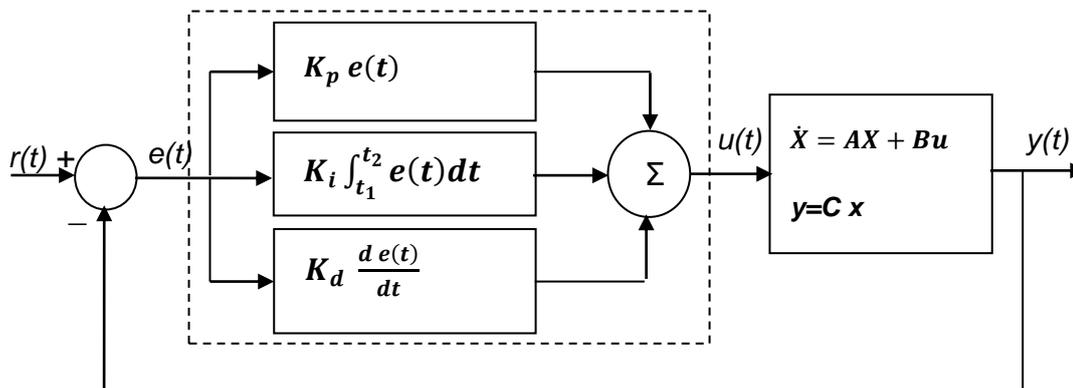


Fig.4.2. Boucle du contrôleur PID [52]

4.4.4. Algorithme d'optimisation par essaim particulaire (PSO)

On constate que les performances des contrôleurs LQR et PID utilisés pour le contrôle actif des vibrations des structures, dépendent directement de leurs paramètres de contrôle (R et Q pour le LQR; K_p , K_i et K_d pour le PID).

Ces derniers sont sélectionnés à partir des articles, permettent l'atténuation des vibrations avec une efficacité acceptable mais pas forcément optimale. Par exemple on remarque que la performance du LQR est moins bonne que celle du PID malgré le grand nombre de paramètres testés dans les articles, d'où l'idée d'optimiser les paramètres de contrôle du LQR pour augmenter ces performances, alors l'utilisation d'un algorithme d'optimisation s'impose.

L'optimisation est une branche des mathématiques qui permet de résoudre des problèmes en déterminant le *meilleur* élément d'un ensemble selon certains critères prédéfinis, et l'optimisation par essaim particulaire (PSO : Particle Swarm Optimization) entre dans cette famille d'algorithmes.

En 1995, James Kennedy et Russel Eberhart [62], s'inspirent du monde du vivant lors des simulations informatiques de vols groupés d'oiseaux pour mettre en place la méthode PSO.

Principe

La PSO se base essentiellement sur la collaboration des individus entre eux, la particule la plus proche de l'optimum communique aux autres sa position pour qu'elles modifient leur trajectoire. Cette idée veut qu'un groupe d'individus peu intelligents puisse posséder une organisation globale complexe [62].

On voit alors que la bio-inspiration à l'origine de l'optimisation par essaim particulière ressort dans l'algorithme sous la forme d'une intelligence collective :

- coordination du groupe,
- instinct individuel,
- et interaction locale entre les individus.

Composantes de la PSO

Pour être en mesure d'utiliser la PSO, il est indispensable de définir un espace de recherche composé de particules et une fonction "objectif" à optimiser (la meilleure solution). La méthode de l'algorithme consiste alors à déplacer ces particules de telle sorte qu'elles trouvent l'optimum, elles doivent disposer [62, 63].

- de données relatives à leurs positions
- de la meilleure position qu'elles ont rencontrées.
- de la meilleure position rencontrée par leur voisinage (voisinage : c'est le sous-ensemble de particules qui interagit directement avec la particule).
- de leur vitesse qui leur permet de se déplacer et de changer de position au fil des itérations.

On se rend compte, en accord avec Maurice Clerc et Patrick Siarry [64], que l'évolution d'une particule est finalement une combinaison de trois types de comportements :

- *égoïste* (suivre sa voie suivant sa vitesse actuelle),

- *conservateur* (revenir en arrière en prenant en compte sa meilleure performance)

- et *panurgien* (suivre aveuglement le meilleur de tous en considérant sa performance).

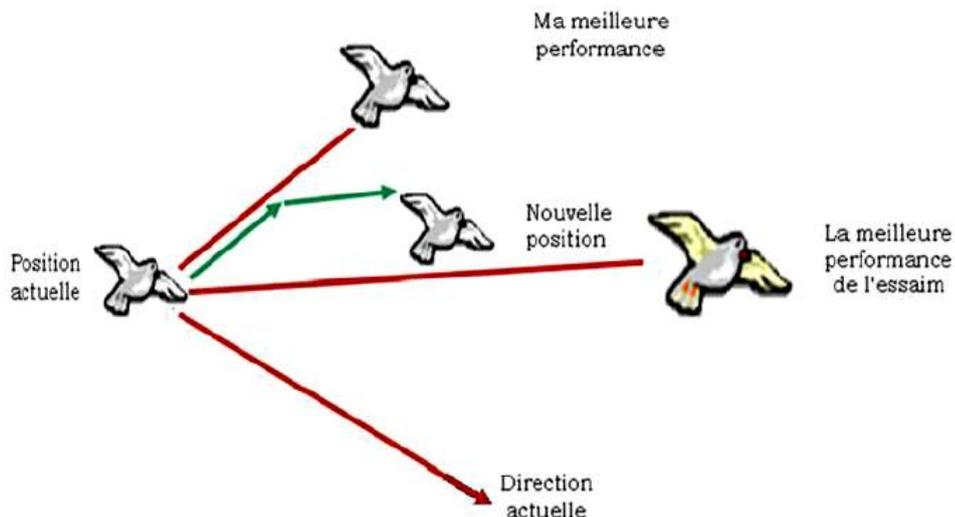


Fig.4.3. Principe de déplacement d'une particule

Algorithme du PSO

L'algorithme de base de la PSO travaille sur une population appelée essaim de solutions possibles, elles mêmes appelées particules. Initialement ces particules sont placées aléatoirement dans l'espace de recherche de la fonction objectif.

A chaque itération, les particules se déplacent en prenant en compte leur meilleure position (*meilleur local*) (la qualité de sa position est déterminée par la valeur de la fonction objective en ce point), mais aussi la meilleure position de leur voisinage (*meilleur global*). Notons qu'à chaque élément de la population on associe une *vitesse* (cependant il est plus approprié de parler de direction de déplacement) qui rectifie la direction du déplacement. De cette manière l'essaim est guidé vers les meilleures solutions [62, 63, 65].

Dans les faits, pour chaque particule, on génère X_0 et V_0 au début de notre algorithme, et on calcul la nouvelle vitesse à partir de la formule suivante :

$$V_{k+1} = c_1 * V_k + c_2 * (X_{p-best} - X_k) + c_3 * (X_{voisin-best} - X_k) \quad (4.35)$$

On peut ensuite déterminer la position suivante de cette particule grâce à la vitesse que l'on vient de calculer :

$$X_{k+1} = X_k + V_{k+1} \quad (4.36)$$

Où ;

V_{k+1} et V_k : sont les vitesses de la particule aux itérations k et $k+1$.

X_{p-best} : est la meilleure position de la particule

$X_{voisin-best}$: est la meilleure position de son voisinage à l'itération k

X_k : est la position de la particule à l'itération k

c_1 : L'amplitude de mouvement, et qui contrôle l'impact de la vitesse (direction de déplacement) précédente sur la vitesse courante.

c_2 et c_3 : représentent les coefficients de confiance qui pondèrent respectivement l'instinct conservateur et mimétique d'une particule.

Résumé de l'algorithme [66]

Le processus de mise à jour du PSO

Pour chaque pas de temps t faire

 pour chaque particule i dans l'essaim faire

 mettre à jour la position X en utilisant les relations (4.36) et (4.37)

 calculer l'aptitude (best) des particules / (fonction objective) $f(X)$

 mettre à jour X_{p-best} et $X_{voisin-best}$

 fin pour

fin pour

Le critère d'arrêt peut être l'optimum global, c'est la valeur minimale qu'on veut atteindre, dans notre cas c'est l'amplitude des vibrations qui est fixée à une valeur acceptable par l'utilisateur (idéalement zéro). Par contre, si on estime que le temps de calcul est trop long, on peut fixer le nombre maximum d'itération comme critère d'arrêt.

Les éléments du PSO par rapport à notre application :

- la fonction objective à minimiser est l'amplitude des vibrations
- la taille de la population est fixée à 200
- le nombre d'itérations est fixé à 100
- les valeurs limites supérieures et inférieures des variables de décision sont prises par rapport à la plus petite et la plus grande valeur trouvées dans les articles pour les deux paramètres de contrôle R et Q du contrôleur LQR.

Conclusion

Dans cette partie, on a traité l'équation de mouvement régissant le comportement d'une plaque sandwich piézoélectrique sous toutes ces coutures. Donc, on a exposé la formulation et les algorithmes pour faire notamment :

- * l'analyse modale
- *Le contrôle des vibrations en mode actionneur
- *Le contrôle actif des vibrations utilisant les contrôleurs LQR et PID
- *Le contrôle actif des vibrations utilisant des paramètres de contrôle optimisés par l'algorithme PSO

Le prochain chapitre explore toutes ces possibilités par des applications et discute les résultats pour différentes configurations.

CHAPITRE 5

APPLICATIONS ET DISCUSIONS

5.1. Introduction

Avant de procéder à toute analyse éléments finis du comportement et du contrôle de la plaque composite piézoélectrique, on doit d'abord s'assurer du bon déroulement de notre programme EF (en Fortran et Matlab).

Premièrement, on effectue une analyse modale d'une plaque monocouche et sandwich sans éléments piézoélectriques. En deuxième lieu, la validation de notre modèle numérique avec celui de la littérature concernant le contrôle statique (en mode actionneur) en tenant compte des deux configurations du recouvrement total et partiel des éléments piézoélectriques.

Dans la troisième partie, le contrôle actif des vibrations utilisant deux type de contrôleurs le LQR et PID avec différents paramètres de contrôles sera testé et comparé pour les deux configurations du recouvrement. Puis on optimise les paramètres de contrôle par l'algorithme PSO pour augmenter les performances du contrôleur LQR.

5.2. Analyse modale et validation

L'analyse modale caractérise la vibration libre d'une structure, et permet de déterminer les fréquences propres de vibrations (valeurs propres) et les déformées modales (vecteurs propres) de cette structure.

5.2.1. Plaque élastique isotrope monocouche

La première application concerne une plaque isotrope élastique simplement appuyée sur les quatre cotés (SSSS), de dimensions $a*b*h$ ($a=2000\text{mm}$, $b=1500\text{mm}$ et $h=10\text{mm}$), avec les propriétés mécaniques suivantes :

$$E=200\text{GPa}, \rho=7800\text{kg/m}^3, \nu=0.3$$

Les trois premières fréquences propres sont calculées et comparées avec ceux calculées avec le logiciel ANSYS (voir Tab.5.1).

Tab.5.1. Les trois premières fréquences propres monocouche-isotrope-SSSS

Fréquences Hz	ANSYS	Présent (15 éléments)	Différence en %
Mode 1	16.75	17.13	2.2
Mode 2	35.88	35.63	0.70
Mode 3	50.68	50.01	1.3

On remarque que les fréquences sont très proches, et la différence maximale est de 2%, qui est acceptable, malgré le maillage grossier (maillage en 15 éléments seulement).

5.2.2. Plaque sandwich élastique isotrope

Pour le même matériau et les mêmes conditions aux limites (SSSS) que l'application précédente, on veut vérifier notre programme par rapport à une plaque sandwich. Donc on prend une plaque à couche centrale (cœur) d'une épaisseur h ($h=8\text{mm}$) avec deux sous-couches d'épaisseur h_p ($h_p=1\text{mm}$) chacune, qui sera comparée avec une plaque équivalente d'épaisseur $h+2*h_p$.

Après calcul, les fréquences propres des deux configurations sont exactement les mêmes, preuve du bon déroulement du programme pour le cas d'une plaque sandwich, ce qui permet d'utiliser le sandwich avec des sous couches piézoélectriques par la suite.

5.2.3. Plaque en composite

Notre programme traite aussi les plaques en matériaux composites. Dans ce cas, on considère une plaque composite en graphite-époxy (T300/976), de séquence d'empilement de plies (-45/45/-45/45), d'épaisseur de 0.25mm chacune, de dimensions de $a*b$ ($a=200\text{mm}$ et $b=200\text{mm}$). La plaque est encadrée d'un seul côté et libre des trois autres (CFFF), de propriétés mécaniques :

$$\begin{array}{lll}
 E_{11} = 150\text{GPa} & G_{12} = G_{13} = 7.1\text{GPa} & \nu_{23} = 0.3 \\
 E_{22} = E_{33} = 9\text{GPa} & G_{23} = 2.5\text{GPa} & \nu_{12} = \nu_{13} = 0.3
 \end{array}
 \quad \rho = 1600\text{Kg} / \text{m}^3$$

Cette structure a été utilisée aussi par Lam et al dans [11], et les fréquences propres sont présentées sur le tableau suivant (Tab.5.2).

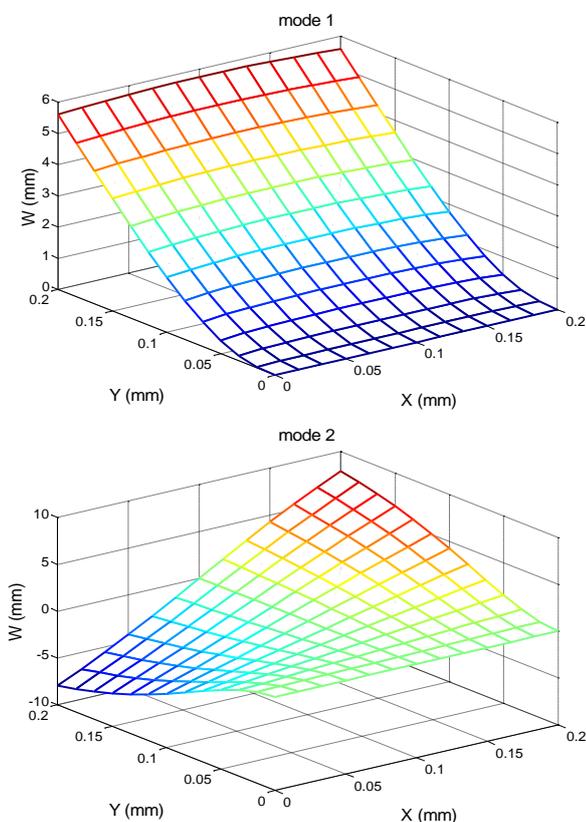
Tab.5.2. Les quatre premières fréquences propres :
composite-CFFF

Fréquences Hz	Article LAM et al [11]	Présent	Différence en %
Mode 1	21.4657	21.4307	0.16
Mode 2	63.3491	63.0758	0.43
Mode 3	130.8221	129.1594	1.27
Mode 4	182.4224	182.1370	0.15

Les fréquences sont très proches, et la différence maximale est de 1% environ, et qui est acceptable.

Ce composite sera utilisé comme partie centrale de la plaque sandwich entre les deux sous-couches piézoélectriques.

Et les modes propres sont tracés sur la figure suivante.



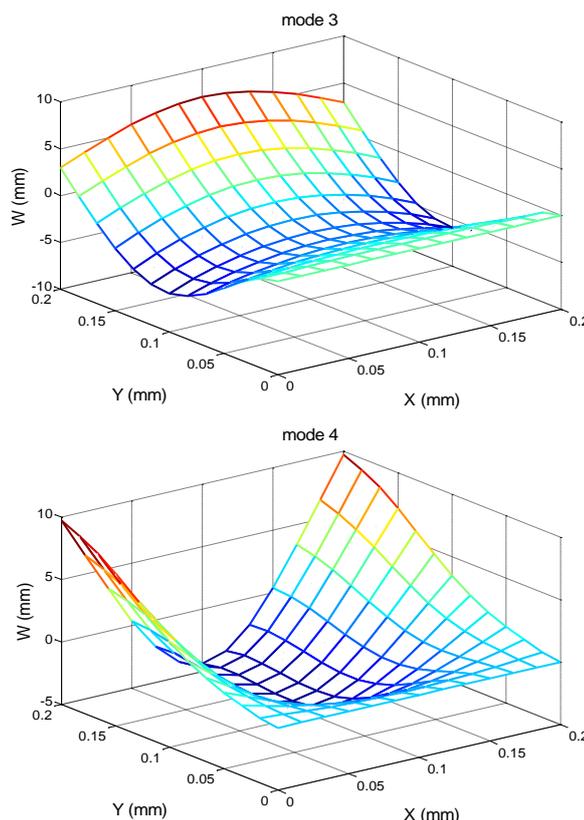


Fig.5.1. Les quatre premiers modes propres : composite-CFFF

5.2.4. Etude de l'influence des conditions aux limites

On reprend la même plaque en composite, mais avec des conditions aux limites différentes, c'est simplement appuyée sur les quatre cotés (SSSS). Les fréquences propres sont présentées sur le tableau suivant (Tab.5.3).

Tab.5.3. Les quatre premières fréquences propres
composite-CFFF-SSSS

Fréquences Hz	CFFF	SSSS
Mode 1	21.4307	140.7237
Mode 2	63.0758	337.2233
Mode 3	129.1594	562.1681
Mode 4	182.1369	651.3380

Les fréquences propres ont augmenté considérablement, c.-à-d. que la plaque en conditions limites SSSS devienne plus rigide qu'une plaque CFFF.

Alors que les quatre premiers modes propres sont illustrés sur la figure suivante.

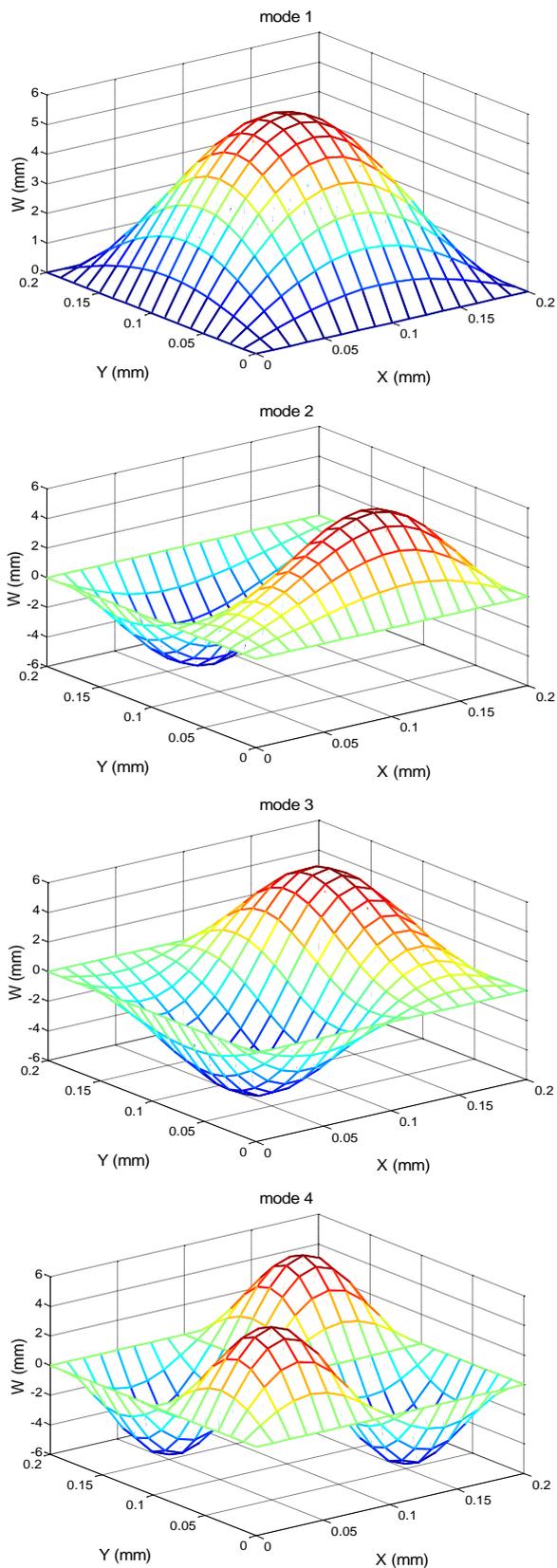


Fig.5.2. Les quatre premiers modes propres : composite-SSSS

5.3. Contrôle statique de la déflexion (mode actionneur)

On va traiter une plaque sandwich de dimensions $a*b$ ($200*200\text{mm}^2$) avec une couche centrale (cœur) en composite (graphite-époxy T300/976) d'une épaisseur totale de h ($h=1\text{mm}$), avec deux sous-couches piézoélectriques (PZTG1195N) d'épaisseur h_p chacune ($h_p=0.1\text{mm}$).

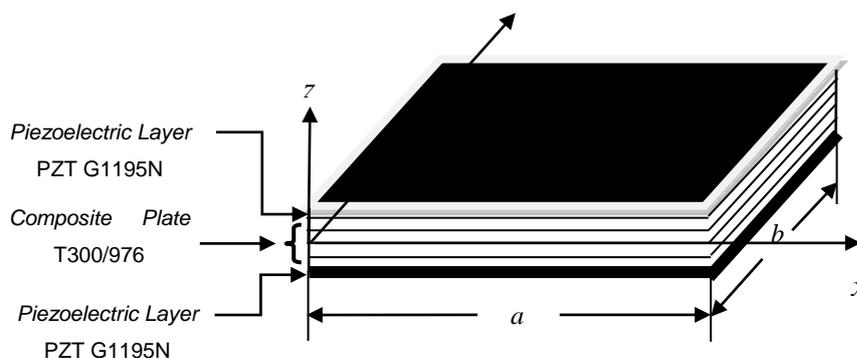


Fig.5.3. Plaque sandwich piézoélectrique

Dans ce cas, les deux sous-couches piézoélectriques sont présent comme actionneurs, on est donc en mode actionneur. Des tensions sont appliquées sur leurs deux surfaces libres supérieure et inférieure. Les propriétés des deux matériaux sont présentées dans le tableau suivant (Tab.5.4).

Tab.5.4. Propriétés des matériaux

Propriétés	PZT G1195N	T300/976	
Modules de Young (GPa)	E_{11}	63.0	150
	$E_{22} = E_{33}$	63.0	9
Coefficients de Poisson	ν_{23}	0.3	0.3
	$\nu_{12} = \nu_{13}$	0.3	0.3
Module de cisaillement (GPa)	$G_{12} = G_{13}$	24.2	7.1
	G_{23}	24.2	2.5
Masse volumique (Kg/m ³)	ρ	7600	1600
Constantes piézoélectriques (m/V)		254 10^{-12}	
Permittivité électrique (F/ m)	$\epsilon_{11} = \epsilon_{22}$	15.3 10^{-9}	
	ϵ_{33}	15.0 10^{-9}	

5.3.1. Plaque sandwich encadrée-libre (CFFF)

La structure est présentée sur la figure 5.3. Plusieurs applications sont effectuées tout en tenant compte de différents types de chargement mécanique et électrique.

a- Influence de la variation du voltage

La structure n'est sollicitée que par chargement électrique (effet inverse de la piézoélectricité), donc sans chargement mécanique. La déflexion du point P (l'extrémité de la ligne centrale de la plaque : $x=a$, $y=b/2$) sous l'effet de la variation du voltage appliqué sur les actionneurs (de 0 V à 50 V) est tracée sur le figure suivante (Fig.5.4).

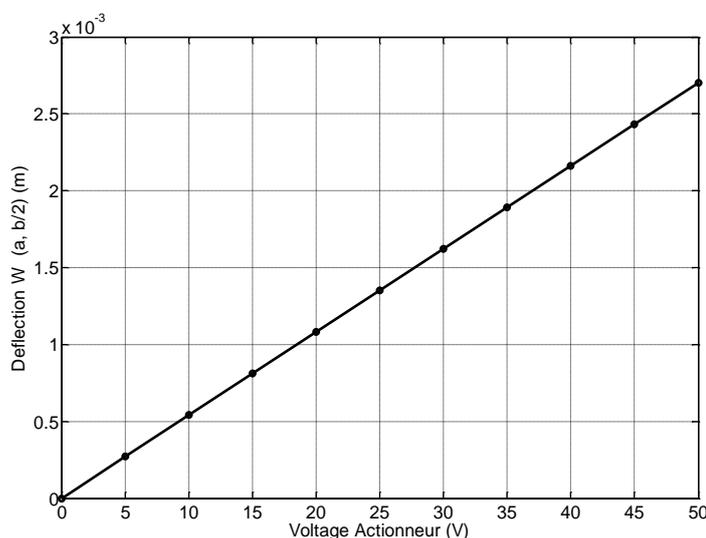


Fig.5.4. Déflexion du point P en fonction du voltage

On remarque que la déflexion est proportionnelle au voltage appliqué, et pour un voltage de 50V la déflexion est presque de 3 mm.

b- Influence des séquences d'empilement des fibres

On utilise la même structure avec les mêmes conditions aux limites et de chargement mais avec une variation des séquences d'empilements pour le composite (la partie centrale du sandwich). On prend différentes configurations de séquences d'empilement (-45/45/-45/45), (-30/30/-30/30), et (-15/15/-15/15).

Les déflexions au point P sont présentées sur la figure suivante.

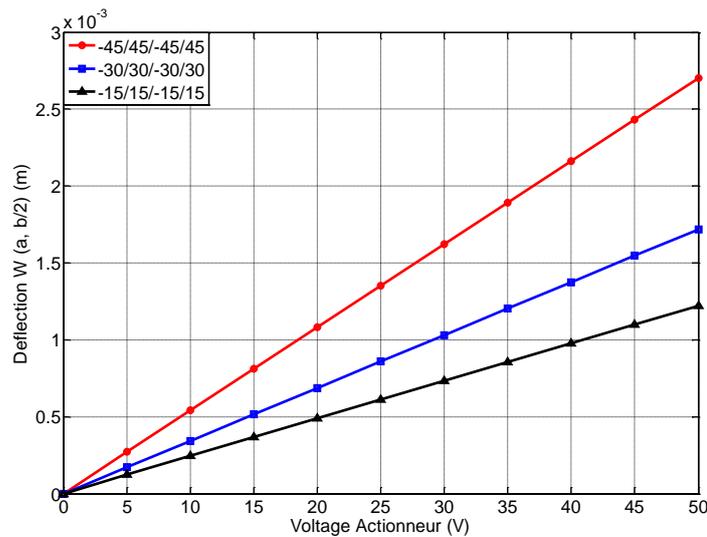


Fig.5.5. Influence des séquences d'empilement des fibres

On remarque que la déflexion est toujours proportionnelle au voltage appliqué, mais elle est sensible à la configuration d'angle. La déflexion maximale passe de 3mm pour la première configuration à 1.2mm pour la dernière.

c- Atténuation de la déflexion avec chargement mécanique

Dans ce cas, on reprend la même structure précédente avec une séquences d'empilement de (-45/45/-45/45), sollicitée initialement par une charge mécanique uniforme sur toute la surface de 100 Pa. La déflexion de la ligne centrale de la plaque ($x=0 - a, y=b/2$) pour différents valeurs du potentiels électriques est tracée sur la figure (5.6).

De la figure (5.6), on remarque que la déflexion maximale au point P était à 2.7mm sous l'effet de la charge mécanique seulement, puis les actionneurs ont atténué la flèche graduellement jusqu'à une valeur acceptable de 0.0583 mm correspondant à un voltage appliqué de 50V.

En comparant notre figure par rapport à celle de la référence [11], on remarque que la similitude est parfaite, ce qui confirme et valide les résultats obtenus à partir de notre programme.

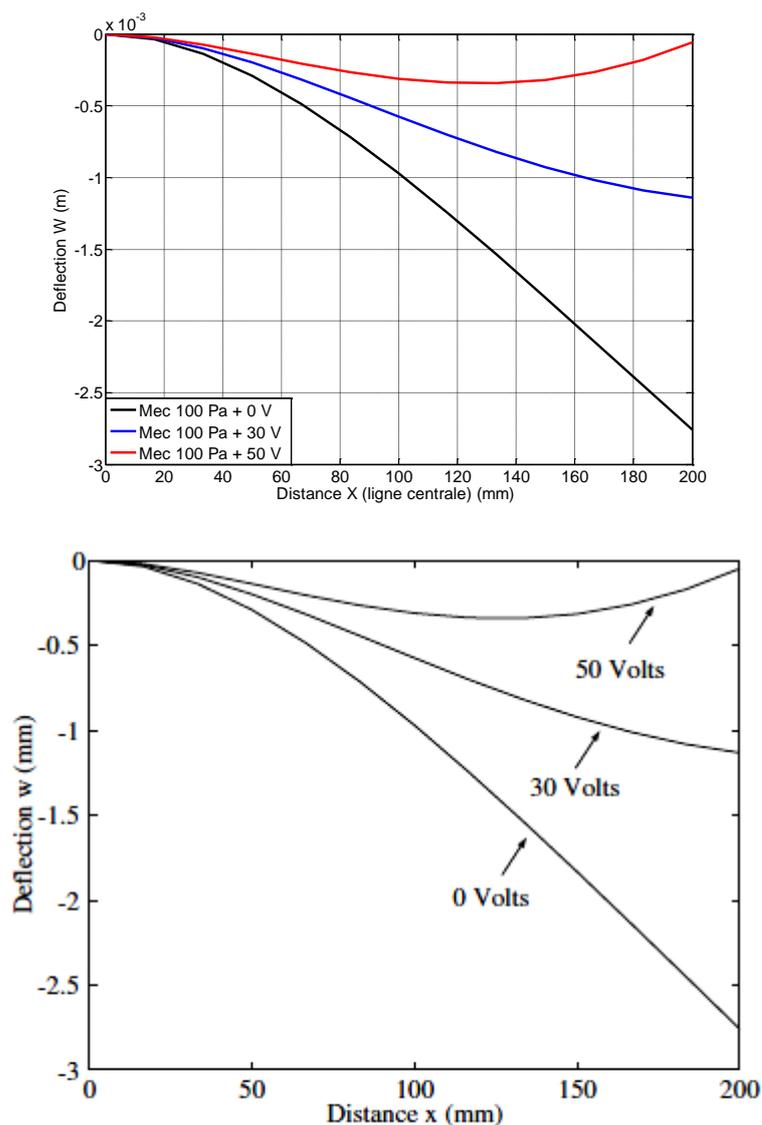


Figure 6. The centerline deflection under uniform load and different actuator input voltages. [11]

Fig.5.6. Déflexion de la ligne centrale (CFFF) - Recouvrement total

d- Recouvrement partiel des éléments piézoélectriques (pastilles)

La même structure est utilisée pour cette application aussi, mais on utilise des pastilles (des parties des sous-couches piézoélectriques) au lieu d'un recouvrement total des éléments piézoélectriques utilisé dans les applications précédentes.

Trois configurations de position pour les pastilles sont choisies (Voir Fig.5.7).

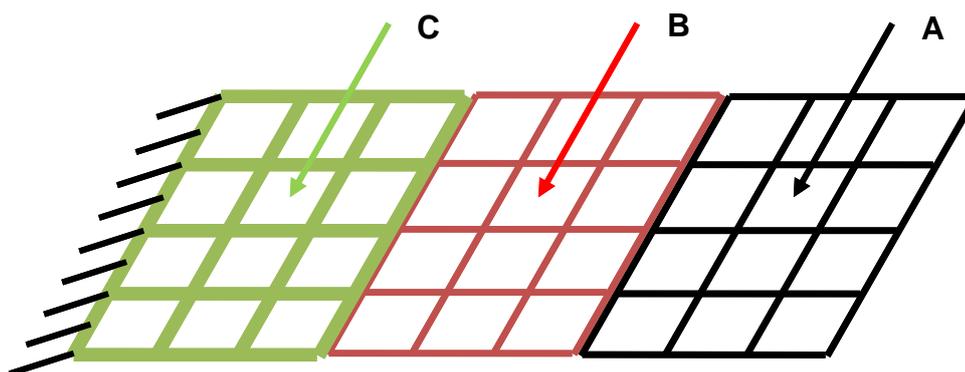


Fig.5.7. Configuration A, B et C des pastilles (CFFF)

La déflexion de la ligne centrale de la plaque pour différentes configurations de pastilles et pour des valeurs du potentiel de 0V et 80V sont présentées.

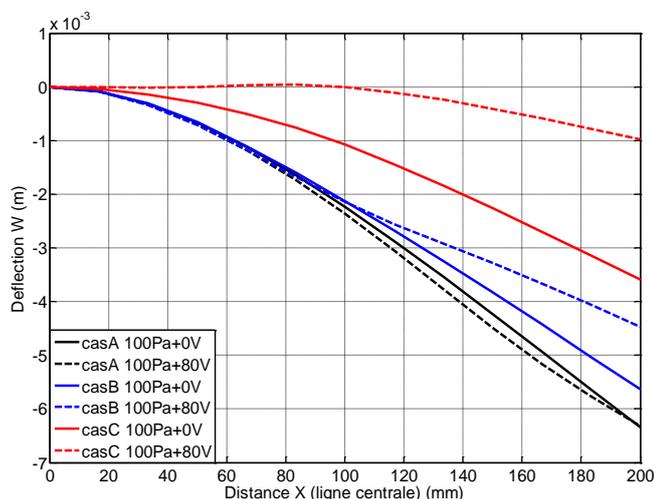


Fig.5.8. Déflexion de la ligne centrale (CFFF) – Pastilles

De la figure précédente, on remarque que la configuration C présente une meilleur atténuation de la déflexion par rapport à la configuration B et A, et la déflexion maximale au pont P est passée de 3.594mm à 0.979mm.

Il est à noter aussi que la pastille en configuration C malgré le 1/3 de dimension par rapport au recouvrement total pour l'application précédente, elle peut atteindre presque les mêmes performances (en terme d'atténuation de la déflexion), mais en utilisant plus de puissance de 80V (Fig.5.8) pour la pastille contre moins de 50V pour l'autre (Fig.5.6).

5.3.2. Plaque sandwich en appuis simples (SSSS)

On reprend la même structure avec les mêmes données des matériaux, même séquences d'empilement et le même chargement mécanique (charge uniforme de 100Pa), mais avec des conditions aux limites différentes (SSSS).

a-Recouvrement total des éléments piézoélectriques

Dans ce premier cas, les éléments piézoélectriques recouvrent toute la surface de la plaque.

La figure suivante montre la déflexion de la ligne centrale de la plaque pour différentes valeurs du potentiel électrique.

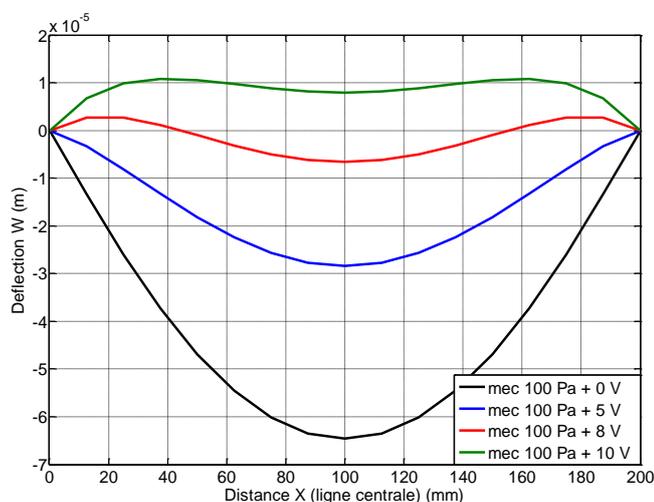


Fig.5.9. Déflexion de la ligne centrale (SSSS) - Recouvrement total

De cette figure, la déflexion maximale est au milieu est de 0.0646mm sous la charge mécanique seulement, puis réduite par les actionneurs à 0.00662mm pour une valeur du potentiel appliqué de 8V.

On remarque aussi que pour la même structure, les mêmes matériaux et même chargement mécanique, mais pour des conditions aux limites différentes (CFFF et SSSS), la déflexion maximale est de 3.7mm contre 0.0646mm, c'est due à l'augmentation de la rigidité pour le deuxième cas (SSSS).

b- Recouvrement partiel (Pastilles)

Deuxièmement, on utilise des pastilles avec des configurations de positions différentes comme le montre la figure (5.10).

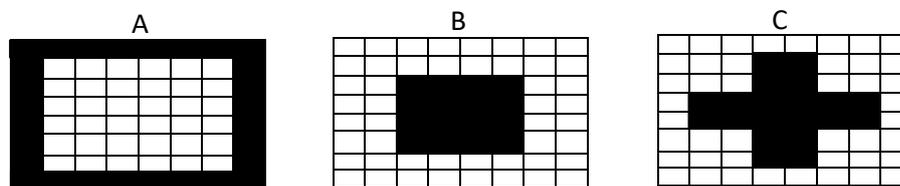


Fig.5.10. Configuration A, B et C des pastilles (SSSS)

La figure suivante présente la déflexion de la ligne centrale de la plaque pour différentes configurations de pastilles et pour des valeurs du potentiel de 0V et 10V.

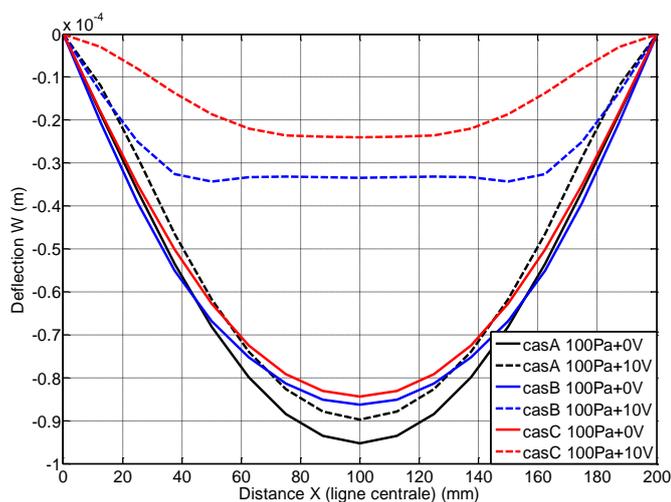


Fig.5.11. Déflexion de la ligne centrale (SSSS) – Pastilles

Les configurations B et C atténuent la déflexion contrairement à la configuration A, mais C est nettement meilleur que B, et la déflexion maximale au centre de la ligne moyenne (à $x=a/2$ et $y=b/2$) est passée de $8.438 \cdot 10^{-2}$ mm à $2.403 \cdot 10^{-2}$ mm.

La même remarque aussi que pour le cas (CFFF), la pastille peut atteindre presque les mêmes performances qu'une configuration totale, mais en utilisant plus de puissance de 10V (Fig.5.11) pour la pastille contre moins de 5V pour l'autre (Fig.5.9).

5.4. Control actif des vibrations

Le contrôle actif concerne la même structure, mais dans ce cas l'une des deux sous-couches piézoélectriques est prise comme capteur et l'autre comme actionneur, tout en utilisant deux algorithmes de contrôle (le LQR et le PID), ce qui constitue les éléments de base pour une structure intelligente.

En plus on introduit l'amortissement proportionnel pour tenir compte de la dissipation d'énergie (on prend $\bar{\alpha} = 0.001, \bar{\beta} = 0.0001$), aussi on traite différents types de conditions aux limites et de chargements mécaniques.

5.4.1. Control actif de la plaque encadrée (CFFF)

On reprend la structure de la figure (5.3.), avec conditions aux limites (CFFF). Par la suite on test quelques paramètres de contrôle sélectionnés à partir de la littérature Zhang2015 [20] pour les deux contrôleurs LQR et PID (voir Tab.5.6).

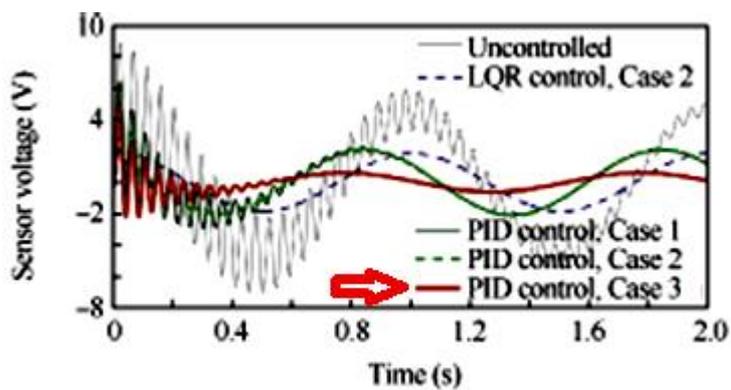
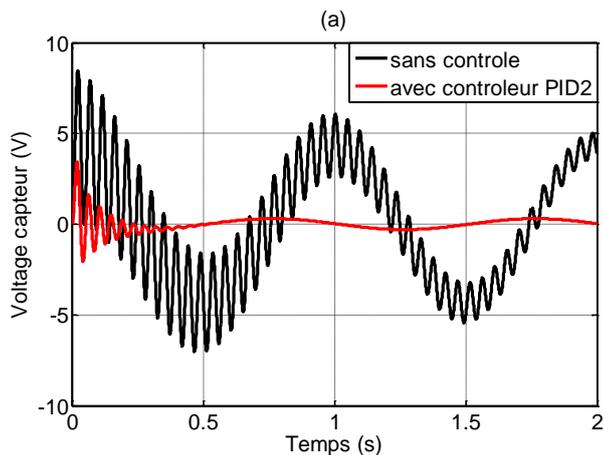
Tab.5.5. Paramètres de contrôle pour le LQR et PID

Control type	\bar{Q}	\bar{R}	
LQR 1	1/5/5	1/8.5/8.5	
LQR 2	1/5/5	1/70/70	
Control type	K_p	K_i	K_d
PID 1	2	100	0.01
PID 2	2	400	0.03

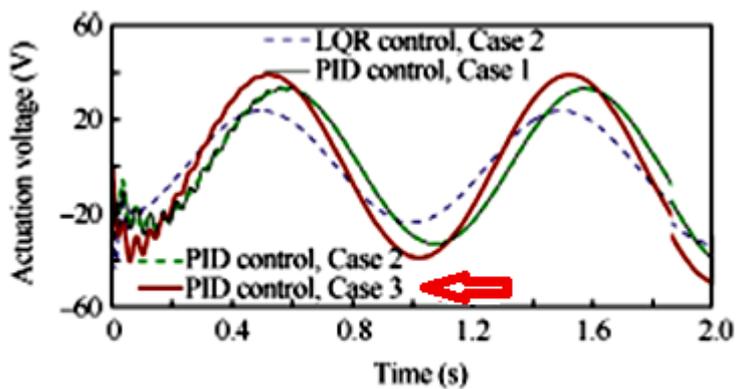
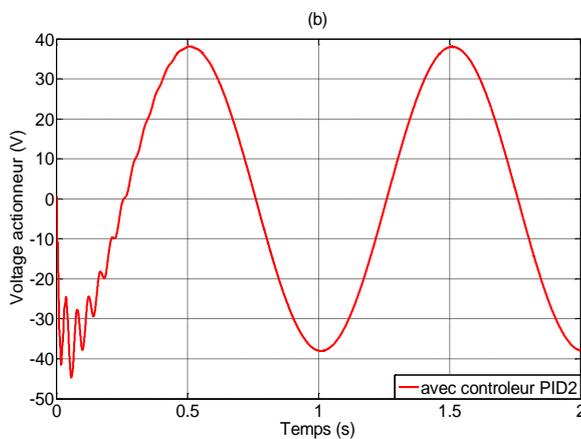
a- Recouvrement total avec une force harmonique-validation

Dans cette première étape du contrôle, on va tester notre programme dans le but de valider nos résultats avec ceux de la littérature.

La structure est excitée par une force harmonique de la forme $f(t) = \cos(2\pi t)$, cette force est appliquée au point P (P au côté libre de ligne centrale : $x=a$ et $y=b/2$). On utilise le contrôleur et les paramètres du PID2 (Tab.5.5), et on présente le signal du capteur et de l'actionneur ainsi que la déflexion du point P dans la figure suivante accompagne de ceux de la référence [20], on note que dans la référence pour les mêmes paramètres de contrôle c'est noté **PID control case 3**.



(a) Sensor signals under a harmonic force excitation [20]



(b) Control input signals under a harmonic force excitation [20]

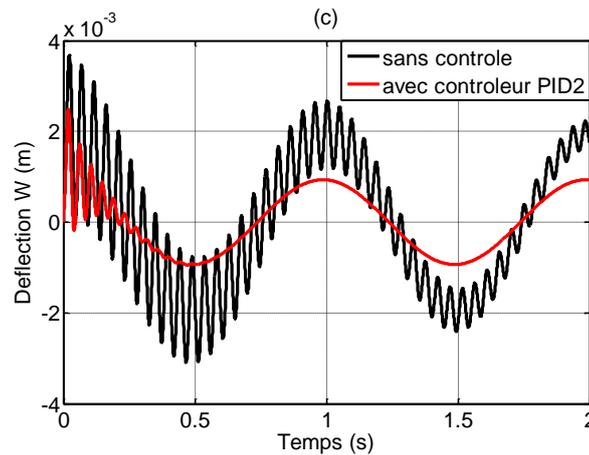


Fig.5.12.Reponse pour: Force harmonique, CFFF, Recouvrement Total

De la figure 5.12.(a), on remarque la grande différence entre le signal sans contrôle et avec contrôle, et le voltage du capteur (c'est l'image de déformation de la structure) avec contrôle qui a diminué considérablement. D'autre part, la figure (a) du présent travail (pour les mêmes paramètres de contrôle) est identique à la figure (a) de la référence [20]. Aussi, le signal de l'actionneur (figure (b)) du présent travail est en parfaite concordance avec celui de la figure (b) de [20].

Donc, ce qui valide nos résultats, et confirme le bon déroulement de notre programme pour le contrôle actif en plus du contrôle statique (en mode actionneur).

D'autre part, on remarque a partir de la figure (c) que le contrôleur supprime totalement les vibrations libres (réponse transitoire) après 0.3s, au même temps réduit considérablement les vibrations forcées (réponse permanente), et en comparant les déflexions maximales qui passent de 4mm (sans contrôle) à 1 mm (avec contrôle).

b-Recouvrement total avec force d'impulsion

Dans cette application, on reprend la même structure de la section précédente, mais cette fois-ci l'excitation extérieure est une force d'impulsion de 1 N au point P à partir de 0.1 s. Dans ce cas aussi, l'actionneur et le capteur recouvre totalement la surface. On présente le signal du capteur et de l'actionneur ainsi que la déflexion du point P sur la figure suivante.

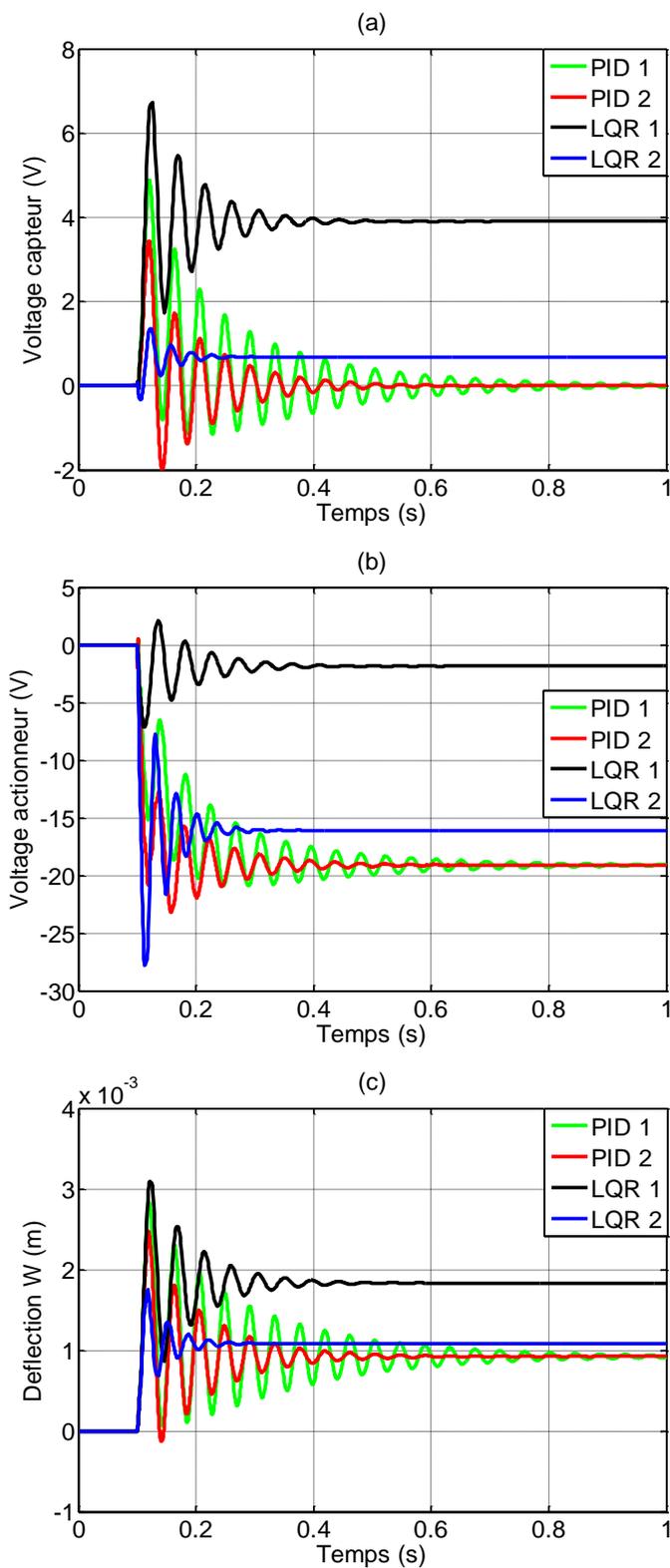


Fig.5.13.Reponse pour: Force d'impulsion, CFFF, Recouvrement Total

Sur la figure 5.13, on remarque que les contrôleurs LQR1 et LQR2 atténuent les vibrations libres, mais que seul LQR2 supprime légèrement les vibrations forcées.

En outre, on peut voir que les contrôleurs PID1 et PID2 amortissent également les vibrations libres et réduisent d'avantage les vibrations forcées que LQR2. Cependant, on peut remarquer que le PID2 réduit rapidement la vibration en peu de temps par rapport au PID1. Donc, on confirme l'importance des paramètres de contrôle sur l'efficacité des contrôleurs.

c- les patches (recouvrement partiel) avec force d'impulsion

Dans cette application, nous utilisons les patches de la configuration de position C qui ont donné les meilleurs résultats par rapport aux configurations A et B pour le contrôle statique (Fig.5.8).

La charge mécanique est également une force d'impulsion de 1 N appliquée au point P. Les contrôleurs LQR2 et PID2 sont utilisés pour le contrôle actif des vibrations.

Dans la section précédente, on a remarqué que les performances du LQR sont inférieures à ceux du PID relativement à leurs paramètres de contrôles respectifs (paramètres retenues de la littérature Tab.5.6), à cause de cette influence directe entre leurs performances et les paramètres de contrôle, ces derniers sont optimisés à l'aide de l'algorithme PSO afin d'améliorer les performances du contrôleur LQR.

Les paramètres de LQR2 et PID2 sont donnés dans le tableau (Tab.5.3), tandis que ceux de LQR-PSO sont calculés par l'algorithme PSO :

$$\bar{Q} = 1.528914266394741e-001,$$

$$\bar{R} = 2.373296423061706e-005$$

Les résultats obtenus sont illustrés sur la figure (Fig.5.14).

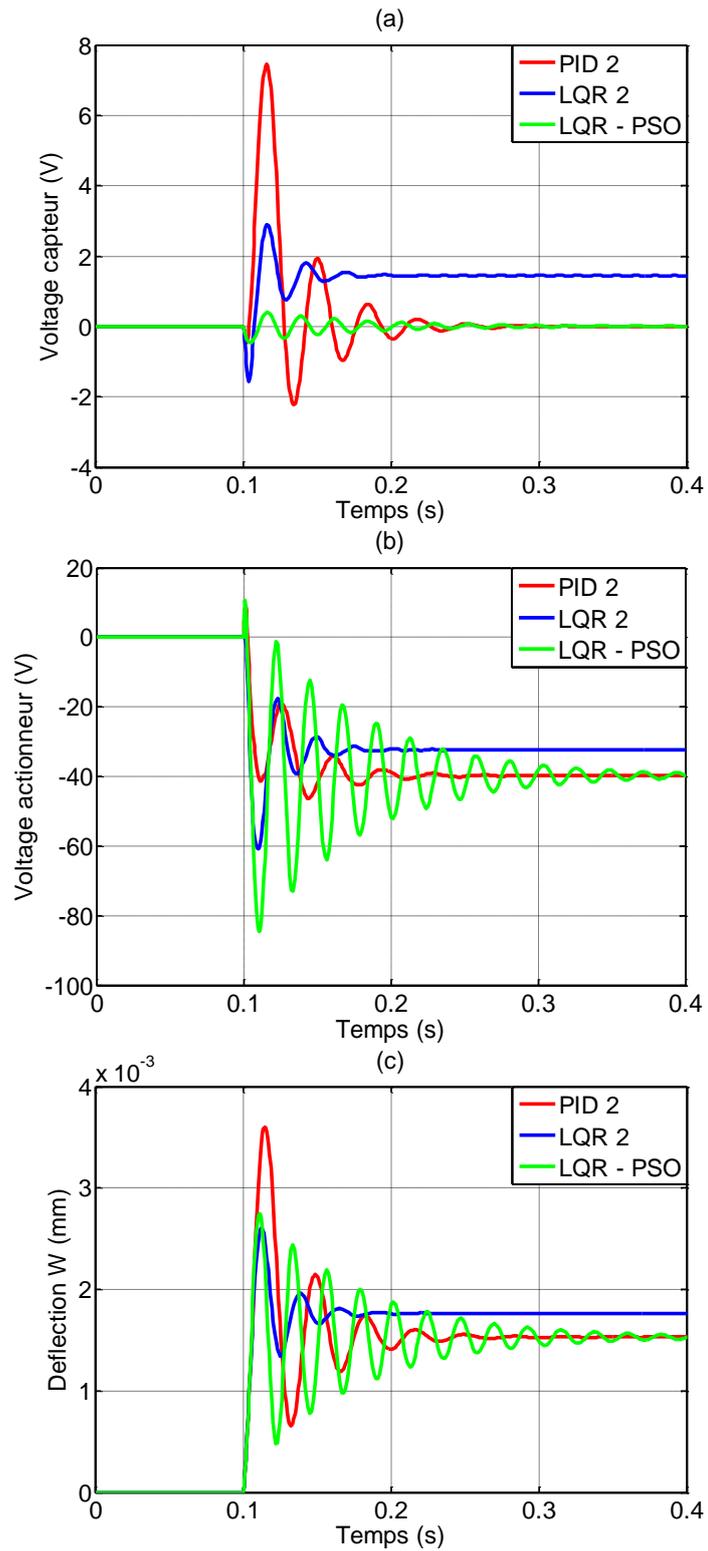


Fig.5.14.Reponse pour: Force d'impulsion, CFFF, Patches

(i) Les mêmes observations sont faites concernant le degré d'atténuation des vibrations libres et forcées à l'aide de patchs par rapport à celles utilisant le recouvrement total des couches piézoélectriques, donc les performances des contrôleurs LQR et PID sont semblable pour les cas du recouvrement total et partiel.

(ii) On remarque également que les performances des patchs en configuration C sont aussi bonnes que celles du cas du recouvrement total malgré un rapport de dimensions de surfaces de 1/3, mais on utilise plus de puissance pour le contrôle, qui est d'une valeur de 40 V (Fig.5.13-b) contre moins de 20 V (Fig.5.12-b).

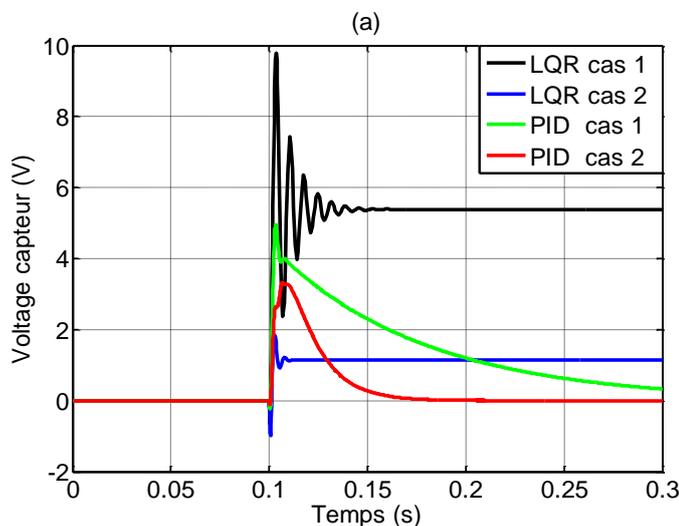
(iii) Le contrôleur PID2 atténue mieux les vibrations forcées que le LQR2, mais l'utilisation des paramètres du LQR optimisés par l'algorithme PSO (LQR-PSO) a donné presque les mêmes performances que celles du contrôleur PID2.

5.4.2. Contrôle actif de la plaque en appuis simples (SSSS)

On reprend la même structure précédente avec les mêmes données des matériaux, même séquences d'empilement et le même chargement mécanique, d'une force d'impulsion de 1 N au point PP a partir de 0.1 s (PP: milieu de la ligne centrale), mais avec des conditions aux limites différentes (SSSS).

a-Recouvrement total (SSSS)

Dans ce cas, l'actionneur et le capteur recouvre totalement la surface. On présente le signal du capteur et de l'actionneur ainsi que la déflexion du point PP sur les figures suivantes.



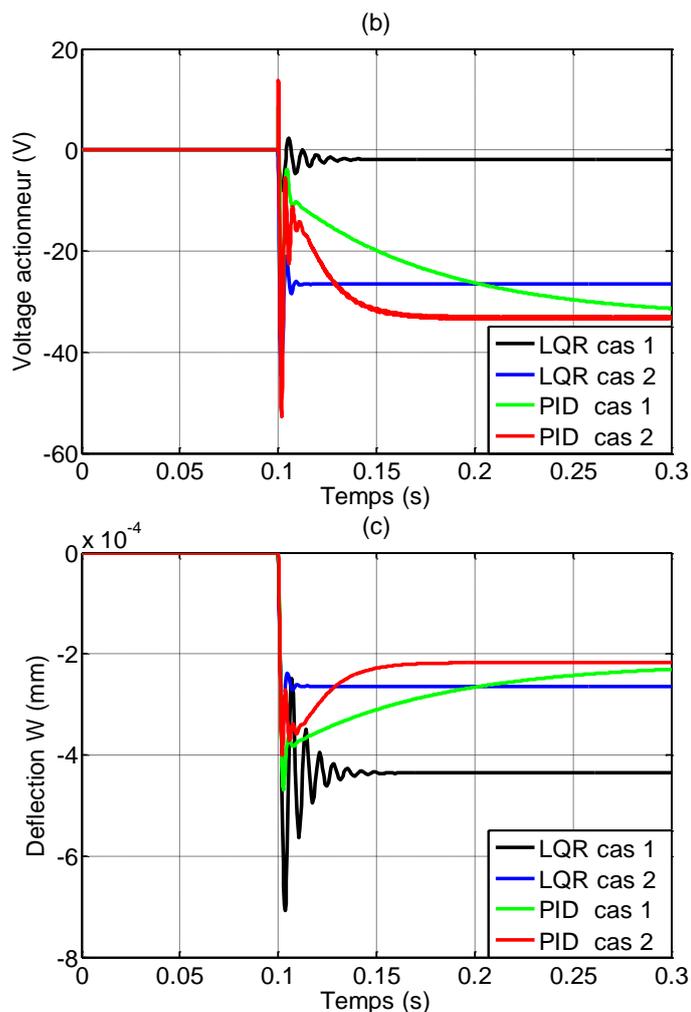


Fig.5.15.Reponse pour: Force d'impulsion, SSSS, Recouvrement Total

La même remarque aussi que pour le cas (CFFF), les contrôleurs LQR1 et LQR2 atténuent les vibrations libres, mais que seul LQR2 supprime légèrement les vibrations forcées. En outre, on peut voir que les contrôleurs PID1 et PID2 amortissent également les vibrations libres et réduisent davantage les vibrations forcées que LQR2.

b-Patches (recouvrement partiel) (SSSS)

Maintenant nous utilisons les patches de la configuration C qui ont donné les meilleurs résultats par rapport à A et B pour le contrôle statique (Fig.5.11).

Pour le même chargement mécanique, et pour les mêmes paramètres de LQR2 et PID2 (Tab.5.3), par contre ceux de LQR-PSO sont calculés de nouveau par l'algorithme PSO, avec :

$$\bar{Q} = 7.118923359311599e-001, \quad \bar{R} = 9.677403173762278e-005$$

Les résultats obtenus sont illustrés sur la figure (Fig.5.15).

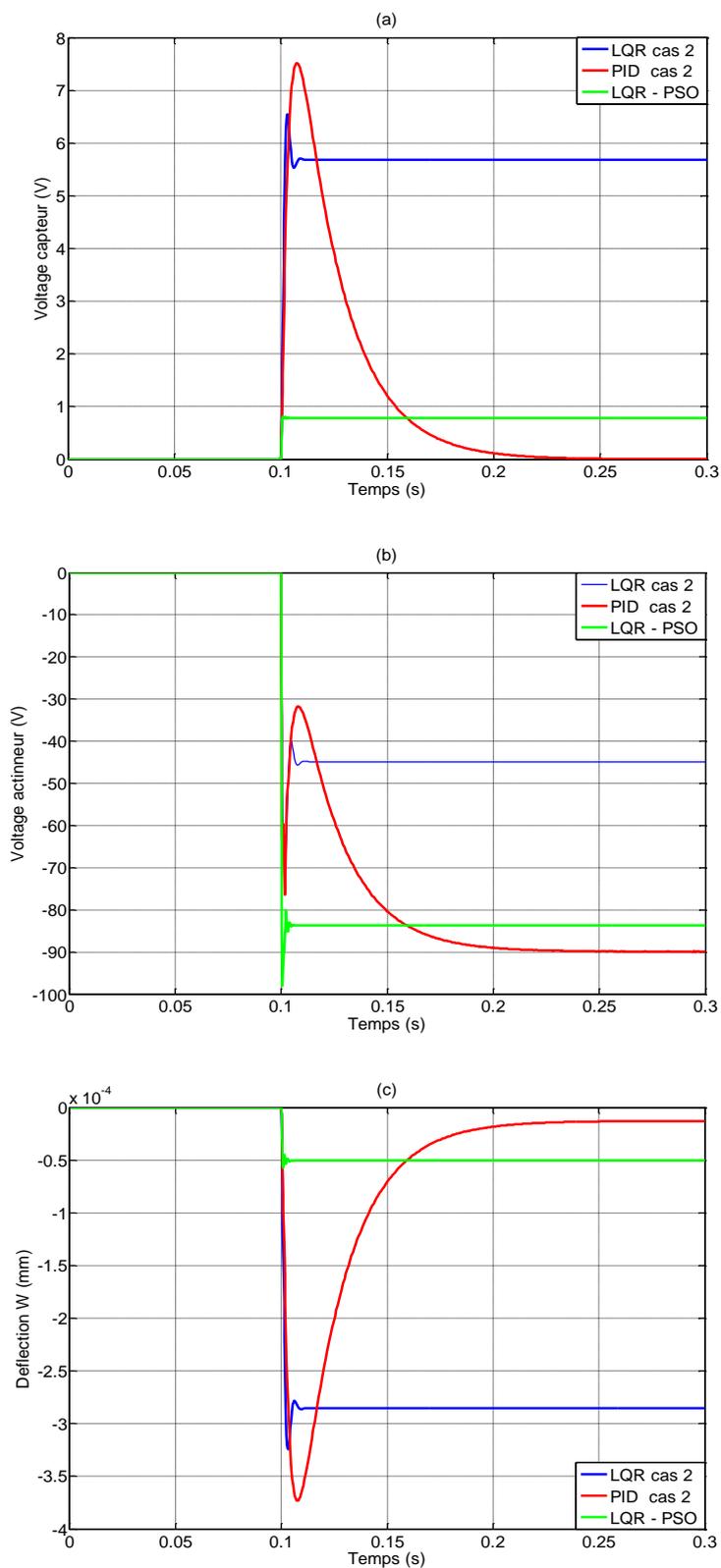


Fig.5.16.Reponse pour: Force d'impulsion, SSSS, Patches

De la figure précédente, on remarque que les performances des patchs en configuration C sont aussi bonnes que celles du cas du recouvrement total malgré un rapport de dimension de surface de $1/3$, mais utilise plus de puissance pour le contrôle, qui est d'une valeur de 100 V (Fig.5.12-b) contre moins de 50 V (Fig.5.11-b).

D'autre part, l'optimisation des paramètres du contrôleur LQR par l'algorithme PSO (LQR-PSO) a donnée des résultats meilleurs et comparables avec ceux du PID2.

Conclusion :

La validation de notre programme du modèle régissant une plaque sous différentes configuration est faite avec succès pour :

- l'analyse modale d'une plaque monocouche isotrope et composite
- le contrôle statique en mode actionneur pour différentes types de conditions limites, de chargement et pour deux configurations de recouvrement des couches piézoélectriques total et partiel (pastilles)
- le contrôle actif des vibrations, aussi pour différentes types de conditions limites, de chargement et pour deux configurations total et partiel tout en utilisant deux contrôleurs le LQR et le PID
- pour augmenter des performances du contrôleur LQR, on a optimisé ses paramètres de contrôle en utilisant l'algorithme d'optimisation PSO.

CONCLUSION GENERALE

Le but de ce travail était de formuler un modèle d'éléments finis d'une plaque sandwich incorporant des éléments piézoélectriques et qui regroupe tout les éléments de base de la structure intelligente permettant le contrôle statique (mode actionneur) et actif des vibrations. La formulation a été répartie sur les chapitres 2, 3 et 4.

Après l'exposition des principes fondamentaux nécessaires à la compréhension des phénomènes mis en jeu, notamment concernant les matériaux piézoélectriques, les structures intelligentes et sur le contrôle actif des vibrations. C'est les équations régissant le comportement d'une plaque élastique isotrope, composite et piézoélectrique en se basant sur les hypothèses de Mindlin qui sont présentées, puis la modélisation d'une plaque sandwich piézoélectrique, faisant référence à une structure intelligente qui est présentée. Cette dernière se compose d'un cœur homogène élastique (isotrope ou composite) intercalé entre deux couches piézoélectriques réalisant respectivement les fonctions de capteur et actionneur.

Tout d'abord, on a effectué une analyse modale d'une plaque monocouche et sandwich sans éléments piézoélectriques. Les fréquences propres ont été calculé par notre programme et comparé avec celles des articles et du logiciel Ansys.

Deuxièmement, une analyse statique (en mode actionneur) exploitant les actionneurs en recouvrement total pour l'atténuation des vibrations est étudiée et validé avec les articles. Différentes configurations de pastilles (recouvrement partiel) A, B et C ont été testées pour obtenir le meilleur emplacement pour une meilleure atténuation. La structure a été testée pour différentes conditions aux limites (CFFF) et (SSSS).

Par contre, pour le contrôle actif des vibrations, on a utilisé les deux contrôleurs LQR et PID. Ce type de contrôle a été étudié pour différents chargements mécanique et différentes conditions aux limites tout en tenant compte de l'amortissement structural.

Premièrement, on a constaté que les deux types de contrôleurs (LQR et PID) suppriment les vibrations libres avec succès, mais avec l'ascendant du second (PID) sur le premier par rapport à la période de l'atténuation.

D'autre part, pour les vibrations forcées, les performances du PID sont nettement meilleures comparées à celles du LQR. Mais, après optimisation des paramètres du contrôle du LQR utilisant l'algorithme PSO, on a remarqué l'augmenter des performances du LQR pour atteindre presque le même niveau de ceux du contrôleur PID.

Nous remarquons également que les performances des pastilles en configuration de surface et position judicieuse (C dans les applications) sont aussi bonnes que celles du recouvrement total des couches piézoélectriques malgré un rapport de surfaces inférieur à 1/3, mais il faut noter que la pastille nécessite plus de puissance (potentiel) pour une atténuation comparable.

Suite aux résultats très encourageant de cette simulation numérique, on peut dire que le modèle actuel est un outil efficace pour étudier la conception des systèmes de contrôle des vibrations, en mode actionneur et en mode actif.

En perspective :

- ❖ Après le couplage électromécanique, c'est l'étude du couplage fluide-structure pour tester l'influence du contrôle des vibrations sur l'atténuation des bruits rayonnés qui prend de l'importance.
- ❖ L'idée d'intercalé une couche amortissante dans le sandwich pour voir l'efficacité de la combinaison contrôle actif-passif (contrôle hybride) sur l'atténuation des vibrations, est intéressante à développer.
- ❖ Aussi voir le comportement de la plaque sandwich piézoélectrique en cas de décollement entre les couches, est un aspect très intéressant à explorer.

LISTE DES SYMBOLES

u : déplacement membrane dans la direction x

v : déplacement membrane dans la direction y

w : déplacement transversal.

θ_x : rotation totale par rapport à x et y

θ_y : rotation totale par rapport à y

$[L]$: opérateur de localisation des variables

$[D_u]$: opérateur différentiel des déplacements

$\{\sigma_{mf}\}$: contraintes dues aux effets membrane et flexion

$\{\sigma_c\}$: contraintes dues aux cisaillement

$\{\varepsilon_{mf}\}$: déformations dues aux effets membrane et flexion

$\{\varepsilon_c\}$: déformations dues aux cisaillement

$\{F\}$: forces volumiques

$\{f\}$: forces surfaciques

$\{P\}$: forces ponctuelles

E_1 : Module de Young longitudinal

E_2 : Module de Young transversal

G_{12} : Module de cisaillement longitudinal

G_{13}, G_{23} : Modules de cisaillement transversaux

ν_{12}, ν_{21} : Coefficients de Poisson

$[Q]$: est la matrice de rigidité réduite exprimée dans les axes principaux (1,2,3)

$[T]$: est la matrice de changement de base des contraintes

$[T']$: est la matrice de changement de base des déformations

$[\bar{Q}]$: est la matrice de rigidité réduite d'un composite unidirectionnel

$\{D\}$: vecteur des déplacements électriques

$\{\varepsilon\}$: vecteur de déformations

$\{E\}$: vecteur des champs électriques

$[e]$: matrice des constantes piézoélectriques

$[d]$: matrice de permittivité électrique

E_c : énergie cinétique

E_p : énergie potentielle

$\{\bar{u}\}$: vecteur de déplacements nodaux

$[J]$: matrice Jacobiene de la transformation des coordonnées cartésiennes aux coordonnées naturelle, et inversement.

$\{\phi\}$: vecteur des potentiels électriques

$\{\bar{\phi}\}$: vecteur des potentiels électriques nodaux

$[N_\phi]$: matrice d'interpolation pour le potentiel

$[M]_{ele}$: matrice de masse élémentaire

$[K_{uu}]$: matrice de rigidité élastique

$[K_{\phi u}]_e = [K_{u\phi}]_e^T$: est la composante piézoélectrique

$[K_{\phi\phi}]$: Matrice de rigidité diélectrique

$[C]$: matrice amortissement

α : coefficient de proportionnalité de la masse

β : coefficient de proportionnalité de la rigidité

$\{q\}$: vecteur de déplacement modal

$\{X(t)\}$: les variables d'état ou vecteur d'état

$\{Y(t)\}$: vecteur de sortie

$\{u(t)\}$: vecteur d'entrée ou de commande

$[A]$: matrice d'état du système

$[B]$: matrice de commande

G : le gain du contrôle optimale

Q : la matrice de pondération (sortie)

R : le vecteur de commande (entrée)

REFERENCES

- 1 Forward R. and Liu C., "Electronic damping of resonances in gimbal structures", 22nd Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, (1981).
- 2 Bailey T. and Hubbard J., "Distributed piezoelectric-polymer active control of a cantilevered beam", *J. of Guidance Control and Dynamics*, 8 : 605–611, (1985).
- 3 Crawley E. F., de Luis J., "Use of Piezoelectric Actuators as Elements of Intelligent Structures", *AIAA Journal*, 25(10) : 1373-1385, (1987).
- 4 Crawley E. F., Lazarus K. B., "Induced Strain Actuation of Isotropic and Anisotropic Plates", *AIAA Journal*, 29(6) : 944-951, (1991).
- 5 Hagood N.W., Chung W.H., and von Flotow A., "Modelling of piezoelectric actuator dynamics for active structural control", *J. of intelligent Materials, Systems, and Structures*, 1 : 327–354, (1990).
- 6 Dosch J. J., Inman D.J., and Garcia E., "A self-sensing actuator for collocated control", *J. of Intelligent Material Systems and Structures*, 3(1) : 166–185, (1992).
- 7 Hagood N.W. and Anderson E.H., "Simultaneous sensing and actuation using piezoelectric materials", *SPIE Conference on Active and Adaptive Optical Components*, 15 : 1540–1543, (1991).
- 8 Dimitriadis E. K., Fuller C. R., Rogers C. A., "Piezoelectric Actuators for Distributed Vibration Excitation of Thin Plates", *Journal of Vibration and Acoustics*, 113 : 100-107, (1991).
- 9 Her S. C., Liu C. Y., "The deflection of a simply supported plate induced by piezoelectric actuators", *Journal of Mechanical Science and Technology*, 21: 1745-1751, (2007).
- 10 Hwang W. S., Park H. C., "Finite element modeling of piezoelectric sensors and actuators", *AIAA Journal*, 31(5) : 930-937, (1993).
- 11 Lam K. Y., Peng X. Q., Liu G. R., Reddy J. N., "Finite element model for piezoelectric composite laminates", *Smart Mater*, 6 : 583-591, (1997).

- 12 Liu G. R., Penk X. Q., Lam K. Y., Tani J., "Vibration control simulation of laminated composite plates with integrated piezoelectrics", *Journal of Sound and Vibration*, 220 (5) : 827-846, (1999).
- 13 Wang S. Y., Quek S. T., Ang K. K., "Vibration control of smart piezoelectric composite plates", *Smart Materials and Structures*, 10 (4) : 637–644, (2001).
- 14 Wang S.Y., Quek S.T., Ang K. K., "Dynamic stability analysis of finite element modeling of piezoelectric composite plates", *International Journal of Solids and Structures*, 41 : 745–764, (2004).
- 15 Ang K. K., Wang S. Y., Quek S. T., "Weighted energy linear quadratic regulator vibration control of piezoelectric composite plates", *Smart Materials and Structures*, 11 : 98–106, (2002).
- 16 Mahieddine A., "Effets de la piézoélectricité et de l'amortissement structural dans le cas des poutres, des coques et des plaques – Contrôle actif", Thèse de doctorat de l'université de l'USTO, Oran, Avril (2011).
- 17 Narwal K., Chhabra, C., "Analysis of simple supported plate for active vibration control with piezoelectric sensors and actuators", *IORS Journal Of Mechanical and Civil Engineering*, Volume 1, Issue 1: 26-39, (2012).
- 18 Zemirline A., "Contribution à l'analyse et l'étude dynamique des poutres, plaques et coques en considérant les effets de l'amortissement structural, de la temperature et de la piézoélectricité", Thèse de Doctorat, USDB de Blida1, (2015).
- 19 Bendine K., Boukhoulda B. F., Nouari M., Satla Z., "Structural Modeling and Active Vibration Control of Smart FGM Plate through ANSYS", *International Journal of Computational Methods*, Vol. 14, No. 2, 1750042, (2017).
- 20 Zhang S., Schmidt R., Xiansheng Q., "Active vibration control of piezoelectric bonded smart structures using PID algorithm", *Chinese journal of aeronautics*, 28 (1) : 305-313, (2015).
- 21 Bandyopadhyay B., Manjunath T.C., Umapathy M., "Modeling, Control and Implementation of Smart Structures", Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2007).
- 22 BOUDAUD H., "Modélisation de l'amortissement actif-passif des structures sandwichs", Thèse de doctorat, Université Paul Verlaine-Metz, (2007).

- 23 HAJJAJI A., "Caractérisation multi échelle et lois de comportement dans les matériaux ferroélectriques", Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, (2007).
- 24 Ducarne J., "Modélisation et optimisation de dispositifs non-linéaires d'amortissement de structures par systèmes piézoélectriques commutés", Thèse de doctorat, Conservatoire National des Arts et Métiers, France, (2009).
- 25 SIMON L., "Elaboration et caractérisation de films épais piézoélectriques sérigraphies sur alumine, silicium, aciers inoxydables et vitrocéramiques", Thèse de doctorat, L'institut national des sciences appliquées de Lyon, (2002).
- 26 BOUCHER E., "Elaboration et caractérisation des céramiques PZT Bi-Substituées et modélisation non-linéaire de leur comportement en contrainte et en champ électrique", Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, (2002).
- 27 ELHADROUZ T., BENZINEB T., PATOOR E., "Micromechanical model for ferroelectric and ferroelectric single crystals. Smart Structures and Materials 2004: Active Materials: Behavior and Mechanics", Proceedings of the SPIE, Volume 5387, pp. 346-353, (2004).
- 28 Kamil M., "MODÉLISATION PAR ÉLÉMENTS FINS DE MATÉRIAUX INTELLIGENTS : APPLICATION EN CONTRÔLE ACTIF DE MBRATIONS DES STRUCTURES AÉRONAUTIQUES", Thèse de maitrise en science, UNIVERSITÉ LAVAL QUÉBEC, (2001).
- 29 Reza Moheimani S.O. and Andrew J., "Fleming" Piezoelectric Transducers for Vibration Control", Springer-Verlag London Limited, (2006).
- 30 AREIAS TRINDADE M., "CONTROLE HYBRIDE ACTIF-PASSIF DES VIBRATIONS DE STRUCTURES PAR DES MATERIAUX PIEZOELECTRIQUES ET VISCOELASTIQUES : POUTRES SANDWICH/MULTICOUCHES INTELLIGENTES", Thèse de Doctorat, CONSERVATOIRE NATIONAL DES ARTS ET MÉTIERS, France, (2000).
- 31 Tiersten, H. F., "Linear Piezoelectric Plate Vibration", Plenum Press, New York, (1969).
- 32 Lee C. K., "Theory of laminated piezoelectric plates for the design of distributed sensors/actuators. part I : Governing equations and reciprocal

- relationships“, Journal of the Acoustical American Society, 87 :1144–1158, (1990).
- 33 TZOU H. S., “PIEZOELECTRIC SHELLS“, Kluwer Academic Publishers, (1993).
 - 34 ANDRÉ PREUMONT, “Vibration Control of Active Structures“, Kluwer Academic Publishers, (2004).
 - 35 Forward R. and Liu C., “Electronic damping of resonances in gimbal structures“, 22nd Structures : Structural Dynamics and Materials Conference, (1981).
 - 36 Nicolas RIZET, “CONTROLE ACTIF DE VIBRATIONS UTILISANT DES MATERIAUX PIEZO-ELECTRIQUES“, Thèse de Doctorat, L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON, (1999).
 - 37 Berthelot. J. M., “ Matériaux composites”. Comportement Mécanique et Analyse des Structures, Edition Massom, (1992).
 - 38 Yi-Yuan Yu, “Vibrations of Elastic Plates“, Springer-Verlag New York Inc, (1996).
 - 39 Mindlin R. D. edited by Jiashi Yang, “An Introduction to the Mathematical Theory of Vibrations of Elastic Plates“, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., (2006).
 - 40 Batoz J. L. ,Dhatt G., “Modelisation des structures par elements finis“, Hermes, Paris, (1990).
 - 41 JACK R. VINSON, “Plate and Panel Structures of Isotropic, Composite and Piezoelectric Materials, Including Sandwich Construction“, Springer, (2005).
 - 42 Liu G. R., Quek S. S., “The Finite Element Method“, Elsevier Science Ltd, (2003).
 - 43 Imbert, J. F., ”Analyse des structures par éléments finis“, CEPADUES Editions, (1991).
 - 44 Rachid Tiberkak, “Effets de choc sur le délaminage des matériaux composites“, Ecole Nationale Polytechnique, Alger, (2008).
 - 45 Samanta B., Ray M. C. and Bhattacharyya R., “Finite Element Model for Active Control of Intelligent Structures“, AIAA JOURNAL, Vol. 34, No. 9, September, (1996).
 - 46 ANDRÉ PREUMONT, “Vibration Control of Active Structures“, Kluwer Academic Publishers, (2004).

- 47 Ballas R.G., "Piezoelectric Multilayer Beam Bending Actuators", Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2007).
- 48 Dhatt G., Touzot G. Lefrançois E., "Méthode des éléments finis", Hermes Science, LAVOISIER, (2005).
- 49 Hinton E. Owen D.R.J., "Finite element software for plates and shells", Pineridge Press Limited, (1984).
- 50 Bath K. J., Wilson E. L., "Numerical methods in finite element analysis", Prentice-Hall INC., (1976).
- 51 KERUR S. B. and ANUP GHOSH, "ACTIVE VIBRATION CONTROL OF COMPOSITE PLATE USING AFC ACTUATOR AND PVDF SENSOR", International Journal of Structural Stability and Dynamics, Vol. 11, No. 2, 237-255, (2011).
- 52 Madjid EZZRAIMI, Rachid TIBERKAK, Abdelkader MELBOUS, Said RECHAK, "LQR and PID Algorithms for Vibration Control of Piezoelectric Composite Plates", MECHANIKA, Volume 24 (5) : 734-740, (2018).
- 53 *Emmanuel BOYERE*, 'Modélisation de l'amortissement en dynamique linéaire', *Code_Aster, Clé : R5.05.04*.
- 54 Ahmad AL MAJID, "DISSIPATION DE L'ENERGIE EN MECANIQUE VIBRATOIRE", Thèse de Doctorat, L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON, (2002).
- 55 He X.Q., Ng T.Y., Sivashanker S., Liew K.M., "Active control of FGM plates with integrated piezoelectric sensors and actuators", International Journal of Solids and Structures, 38, 1641-1655, (2001).
- 56 Pascal DE BOE, "Les éléments piézo-laminés appliqués à la dynamique des structures", These de Doctorat, UNIVERSITÉ DE LIÈGE FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES, (2003).
- 57 Gergely Takács and Boris Rohal'-Ilkiv, "Model Predictive Vibration Control", Springer-Verlag London Limited, (2012).
- 58 Woo-Seok Hwang and Hyun Chul Park, 'Finite Element Modeling of Piezoelectric Sensors and Actuators', AIAA JOURNAL, Vol. 31, No. 5, May (1993).
- 59 Ramesh Kumar K. and Narayanan S., "The optimal location of piezoelectric actuators and sensors for vibration control of plates", SMART MATERIALS AND STRUCTURES, 16, 2680–2691, (2007).

- 60 Ray M. C., "Optimal Control of Laminated Shells Using Piezoelectric Sensor and Actuator Layers", AIAA JOURNAL, Vol. 41, No. 6, June (2003).
- 61 Tarapada Roy & Debabrata Chakraborty, 'Genetic algorithm based optimal design for vibration control of composite shell structures using piezoelectric sensors and actuators', Int J Mech Mater Des, 5 : 45–60, (2009).
- 62 Kennedy j. Eberhat R., "Particle Swarm Optimization", IEEE, 0-7803-2768-3/95, (1995).
- 63 Maxime BOMBRUN Abdoulaye SENE « L'optimisation par essaim particulaire pour des problèmes d'ordonnancement », ISIMA, Rapport, (2011).
- 64 Clerc M., Siarry P., "Une nouvelle métaheuristique pour l'optimisation difficile : la méthode des essaims particulaires", J3eA, Vol. 3 – 7, (2004).
- 65 Qinghai Bai, "Analysis of Particle Swarm Optimization Algorithm", Computer and Information Science, Vol. 3, No 1, (2010).
- 66 Daniel Bratton James Kennedy, "Defining a Standard for Particle Swarm Optimization", IEEE, 1-4244-0708-7/07, (2007).
- 67 WHITNEY J. M., "Shear Correction Factors for Orthotropic Laminates Under Static Load", Journal of Applied Mechanics, Mars, (1973).