

UNIVERSITE SAAD DAHLAB DE BLIDA

Faculté des Sciences

Département de mathématiques

MEMOIRE DE MAGISTER

en Mathématiques

Spécialité : Modélisation mathématique pour l'aide à la décision

IDENTIFICATION ET CONTROLE DES SYSTEMES INDETERMINEES NON LINEAIRES PAR LA METHODE COMBINEE ADOMIAN / ALIENOR

Par

Nadia Amel MESSAOUDI

devant le jury composé de :

F. Hannane	Professeur, U. de Blida	Président
A. Berrachedi	Professeur, U.S.T.H.B., Alger	Examineur
M. Blidia	Professeur, U. de Blida	Examineur
M. Bounekhla	Maître de conférences, U. de Blida	Examineur
S. Manseur	Chargé de cours, U. de Blida	Encadreur

Blida, Mai 2006

RESUME

Le but de ce travail est l'utilisation de la méthode décompositionnelle d'Adomian et de la méthode Alienor pour la résolution du problème d'identification paramétrique des systèmes compartimentaux et celui du contrôle optimal des systèmes indéterminés.

La première méthode permet la résolution analytique d'un système différentiel non linéaire sous forme de série convergente, et dépendant explicitement des paramètres du système.

La méthode Alienor consiste à exprimer les paramètres inconnus par des transformations réductrices, densifiant l'espace des paramètres par une courbe alpha dense et permet de remplacer le problème de minimisation d'une fonction à plusieurs variables par celui d'une fonction à une seule variable.

La combinaison des deux méthodes permet de ramener le problème d'identification paramétrique et celui du contrôle optimal des systèmes indéterminés à des problèmes de minimisation d'une fonction à une seule variable.

Des applications du problème d'identification au modèle biologique du virus immunitaire humain (VIH) et au modèle compartimental ont été traitées. Le problème de contrôle optimal du modèle indéterminé du VIH a été également considéré. Les résultats numériques obtenus par la méthode combinée Adomian/Alienor confirment l'efficacité de cette approche.

ABSTRACT

The aim of this work is coupling the Adomian and Alienor methods for parameters identification of compartmental systems and optimal control of unknown systems.

Adomian decomposition method will be used for solving the nonlinear differential system. The solution is an analytical function of time and is given in a series form explicitly dependent on the parameters of the system.

The Alienor method consists in reducing the multivariable problem into one variable problem. Alpha dense curves are used for approximating the space of parameters by a curve. The method consists in replacing the parameters appearing in the function multivariable in function of a single variable (reducing transformation Alienor).

The combination of the two methods allows to transform an identification problem and the one of optimal control of unknown systems into a minimization problem associated to a function of one variable.

Applications of identification problem to biological model of the human immunodeficiency virus (HIV) and to the compartmental model have been treated. The optimal control problem of the unknown HIV model has been notably considered.

The results obtained by the combined Adomian/Alienor method confirmed the efficiency of this approach.

ملخص

الهدف من هذا العمل هو استعمال الطرق "دوميون و البنور" من اجل حل إشكالية مطابقة المعاملات لجملة " المقصورات " و لمشكل التحكم الامثل للجمال الغير المعرفة.

الطريقة الأولى تسمح بالحل التحليلي للجمال الغير الخطية على شكل سلاسل متقاربة و ترتبط بكل وضوح

بمعاملات الجملة

الطريقة الثانية تتمثل في عرض المعاملات الغير معروفة بواسطة التحويلات المختصرة بتكثيف مجال

المعاملات مما يسمح باستبدال إشكالية تحسين دالة ذات عدة متغيرات بإشكالية تحسين دالة ذات متغير واحد.

مزوجة هاتين الطريقتين تسمح بالمرور من إشكالية مطابقة المعاملات و إشكالية التحكم الامثل إلى إشكالية خفض

دالة ذات متغير واحد.

اخذنا نماذج تطبيقية لإشكالية مطابقة المعاملات للجملة البيولوجية لفيروس السيدا و جملة " المقصورات "

و لإشكالية التحكم للجمال الغير المعرفة لنموذج الفيروس.

النتائج العددية التي تحصلنا عليها بفضل طريقة المزوجة بين "دوميون و البنور" تؤكد فعالية الطريقة المتبعة.

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je tiens à remercier Dieu tout puissant pour m'avoir préservé, donné la santé et guidé vers la connaissance et le savoir.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur Manseur Salah chargé de cours à l'université de Blida pour m'avoir encadré et guidé tout au long de ce mémoire et pour les précieux conseils qu'il ma prodigués. Il a fait preuve d'une grande disponibilité à l'aboutissement de ce mémoire.

Je remercie Monsieur Farouk HANNANE, professeur à l'université de Blida, d'avoir accepté d'être président du jury.

J'adresse mes remerciements à Monsieur Abdelhafid BERRACHEDI, professeur à l'université des sciences de la technologie Houari Boumediene et Monsieur Mustapha BLIDIA, professeur à l'université de Blida qui m'ont fait l'honneur d'accepter de juger mon travail.

Je remercie vivement Monsieur M'hamed BOUNEKHLA, maître de conférences à l'université de Blida pour avoir accepté d'être membre du jury.

Je remercie toutes les personnes qui m'ont aidé par leur soutien et leur encouragement à accomplir ce travail.

Je tiens enfin à présenter mes remerciements les plus chaleureux à ma famille et en particulier à mes parents. Je veux leur témoigner toute gratitude et ma reconnaissance pour leur soutien constant.

TABLE DES MATIÈRES

RESUME	01
REMERCIEMENTS	04
TABLES DES MATIERES	05
LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX	07
INTRODUCTION	10
CHAPITRE 1. PROBLEME D'IDENTIFICATION ET CONTROLE DE SYSTEMES BIOLOGIQUES	14
1.1. Introduction	14
1.2. Identification paramétrique des modèles	14
1.2.1. Méthodes d'optimisation	18
1.3. Contrôle optimal des systèmes indéterminés	25
CHAPITRE 2. LA METHODE DE DECOMPOSITION D'ADOMIAN	29
2.1. Introduction	29
2.2. Présentation de la méthode décompositionnelle	30
2.3. Principe de la méthode décompositionnelle pour des équations différen- tielles	35
2.3.1. Convergence de la méthode dans le cas des équations différentielles	36
2.3.2. Formule simple pour le calcul des polynômes d'Adomian pour une fonction à une seule variable	38
2.4. Principe de la méthode décompositionnelle d'Adomian pour les systèmes différentiels	46
2.4.1. Convergence de la méthode décompositionnelle dans le cas des systèmes différentiels	48
2.4.2. Formule simple pour le calcul des polynômes d'Adomian pour une fonction à deux variables	50

CHAPITRE 3. LA METHODE ALIENOR	60
3.1. Introduction	60
3.2. Transformation réductrice Alienor	61
3.3. Application à l'optimisation globale	70
3.3.1. Méthode de recherche du minimum global pour une fonction à une seule variable	72
3.3.2. Méthode d'optimisation globale pour une fonction à une seule variable basée sur l'O.P.O	73
CHAPITRE 4. IDENTIFICATION PARAMETRIQUE DES SYSTEMES COMPARTI- MENTAUX	84
4.1. Introduction	84
4.2. Application de la méthode combinée Adomian/Alienor au problème	84
4.3. Application au modèle biologique du VIH	88
4.3.1. Description du modèle VIH	88
4.3.2. Résolution du modèle VIH par la méthode d'Adomian	89
4.3.3. Résultats numériques	96
4.4. Application au modèle à deux compartiments	100
4.4.1. Description du modèle	100
4.4.2. Résolution du modèle avec paramètres fixés	101
4.4.3. Résultats numériques	102
CHAPITRE 5. CONTROLE OPTIMAL DES SYSTEMES INDETERMINEES	107
5.1. Introduction	107
5.2. Utilisation de la méthode combinée Adomian/Alienor	107
5.3. Application au modèle biologique VIH	109
5.3.1. Résultats numériques	110
CONCLUSION	116
APPENDICE	119
Liste des abréviations et symboles	119
REFERENCES	120

LISTE DES ILLUSTRATIONS GRAPHIQUES ET TABLEAUX

FIGURE 1.1	Organigramme représentant une méthode d'identification	17
FIGURE 2.1.	Courbe de la solution exacte x_e	39
FIGURE 2.2.	Superposition des courbes des solutions x_e (points) et ϕ_7 (lignes)	41
FIGURE 2.3.	Superposition des courbes des solutions x_e (points) et ϕ_{100} (lignes)	42
FIGURE 2.4.	Courbe de la solution exacte x_e	44
FIGURE 2.5.	Courbe de la solution ϕ_7	44
FIGURE 2.6.	Superposition des courbes des solutions x_e (points) et ϕ_7 (lignes)	45
FIGURE 2.7.	Superposition des courbes des solutions x_e (points) et ϕ_{30} (lignes)	45
FIGURE 2.8.	Modèle à deux compartiments	51
FIGURE 2.9.	Courbes des solutions du modèle compartimental obtenues par Runge-Kutta (+) et Adomain (lignes)	56
FIGURE 2.10.	Superposition des courbes des solutions obtenues par Runge-Kutta (+) et Adomain ϕ_{21} (lignes) du modèle compartimental	56
FIGURE 2.11.	Superposition des courbes de la solution exacte (points) et le rec- ollement des solutions (lignes)	58
FIGURE 2.12.	Superposition des courbes de la solution exacte (points) et le rec- ollement des solutions (lignes)	58
FIGURE 2.13.	Superposition des courbes des solutions du système compartimen- tal obtenues par le recollement des solutions (lignes) et par Runge-Kutta (points)	59
FIGURE 3.1.	Densification du pavé $[-1, 1]^2$ par la spirale d'Archimède	62
FIGURE 3.2.	Structure d'arbre de la transformation réductrice	63
FIGURE 3.3.	Courbe densifiant l'espace \mathbb{R}^2	66
FIGURE 3.4.	Courbe densifiant $[0, 1]^2$	66
FIGURE 3.5.	Courbe densifiant le pavé $[0, 1]^2$	67
FIGURE 3.6.	Courbe représentant $h(\theta)$	67
FIGURE 3.7.	Densification du pavé $[-4, 8] \times [-6, 7]$	68
FIGURE 3.8.	Courbe densifiant le pavé $[-1, 1]^2$	70
FIGURE 3.9.	Densification du pavé $[-1, 1]^3$	70

FIGURE 3.10. Courbe de $f_q(\theta)$	76
FIGURE 3.11. Courbe de $T_{f_q}^{0.0001}(\theta), \theta_0 = 0.27992$	78
FIGURE 3.12. Courbe de $T_{f_q^*}^{0.0001}(\theta)$	79
FIGURE 3.13. Courbe de $T_{f_r^*}^{0.0001}(\theta)$	79
FIGURE 3.14. Courbe de $T_{f_w^*}^{0.0001}(\theta)$	80
FIGURE 3.15. Courbe de $T_{f_{gr}^*}^{0.0001}(\theta)$	81
FIGURE 3.16. Courbe de $f_{\text{exp}}(\theta)$ sur l'intervalle $[-1, 1]$	82
FIGURE 3.17. Courbe de $T_{f_{\text{exp}}^*}^{0.0001}(\theta)$	82
FIGURE 4.1. Utilisation de la méthode d'Adomian dans le problème d'identification.	86
FIGURE 4.2. Superposition des courbes des solutions de x_1	95
FIGURE 4.3. Superposition des courbes des solutions de x_2	95
FIGURE 4.4. Superposition des courbes des solutions de x_3	96
FIGURE 4.5. Courbe de $T_{j^*}^{0.0001}(\theta)$ associée à la transformation 1, $\theta^*=0.00865$. .	98
FIGURE 4.6. Courbe de $T_{j^*}^{0.0001}(\theta)$ associée à la transformation 2, $\theta^*=0.7240$. .	98
FIGURE 4.7. Superposition des courbes expérimentales (points) avec les courbes estimées (lignes) par la méthode Adomian/transformation 1	100
FIGURE 4.8. Modèle à deux compartiments	100
FIGURE 4.9. Superposition des courbes des solutions obtenues par Adomian (lignes) et Runge-Kutta (points)	102
FIGURE 4.10. Courbe de $T_{j^*}^{0.0001}(\theta)$ associée à la transformation 1, $\theta^* = 0.0825$.	104
FIGURE 4.11. Courbe de $T_{j^*}^{0.0001}(\theta)$ associée à la transformation 2, $\theta^* = 0.053262$	104
FIGURE 4.12. Superposition des courbes expérimentales (points) avec les courbes estimées (lignes) par la méthode Adomian/transformation 2	106
FIGURE 5.1. Courbes de contrôle u^e (points), u^1 (lignes) et u^2 (+)	112
FIGURE 5.2. Superposition des courbes des solutions x_1 sans contrôle et avec contrôle optimal	113
FIGURE 5.3. Superposition des courbes des solutions x_2 sans contrôle et avec contrôle optimal	114
FIGURE 5.4. Superposition des courbes des solutions x_3 sans contrôle et avec contrôle optimal	114

TABLEAU 4.1.	Données expérimentales simulées du modèle VIH	97
TABLEAU 4.2.	Valeurs des paramètres obtenus par : Adomian/transformation1, Adomian/transformation2 et Adomian/Levenberg-Marquardt	99
TABLEAU 4.3.	Données expérimentales simulées du modèle compartimental	103
TABLEAU 4.4.	Valeurs des paramètres obtenus par : Adomian/transformation1, Adomian/transformation2 et Adomian/Levenberg-Marquardt	105
TABLEAU 5.1.	Valeurs des paramètres obtenus par : Adomian/Alienor	112

Introduction

Les chercheurs sont souvent contraints de prendre des décisions au sujet de phénomènes étudiés et dont ils ne connaissent leurs comportements qu'à partir des données expérimentales (mesures). Mais lorsqu'on s'intéresse à des problèmes complexes comme par exemple les problèmes de contrôles (commandes), on doit prévoir le comportement et l'évolution de ces processus. L'objectif est alors de proposer un modèle qui traduira fidèlement le fonctionnement du phénomène.

La première étape de processus de modélisation d'un système réel (biologique, industriel,...) consiste à faire des hypothèses sur la structure du modèle, c'est à dire de choisir un type de relation mathématiques adéquate liant les variables d'entrées et de sorties du système. Cette relation est représentée par un modèle paramétrique (fonction de transfert, système d'équations différentielles,...) ou non paramétrique (par exemple : les réponses fréquentielles ou temporelles,...) comportant des paramètres partiellement inconnus. Ces paramètres sont déterminés numériquement dans l'étape suivante dite *l'identification*. Elle signifie que, dans la plupart des cas des paramètres inconnus seront présents dans les modèles mathématiques et il nous faudra les déterminer (en d'autres termes : identifier) à partir des données expérimentales disponibles, en minimisant un certain critère (par exemple : moindre carrée, erreur quadratique moyenne, maximum de vraisemblance,...). Parmi les méthodes d'identification on peut citer les méthodes de maximum de vraisemblance, de sous-espace ou de fréquence [1].

Dans notre travail, nous nous intéressons à l'identification des modèles paramétriques représentés sous la forme d'un système d'équations différentielles en général non linéaires comportant plusieurs paramètres inconnus et constants que nous devons déterminer à partir de données expérimentales disponibles. Pour les identifier, souvent on se ramène à la minimisation d'une fonctionnelle d'erreur, exprimant la somme des carrés des écarts entre valeurs expérimentales (observées) et valeurs calculées en résolvant le système. La résolution numérique du système différentiel conduit à une fonctionnelle d'erreur qui dépend implicitement des paramètres. Cette fonctionnelle est à son tour minimisée. Les méthodes de minimisation du premier ou second ordre [2], [3], [4] s'appliquent

aisément aux systèmes différentiels linéaires car le gradient ou les dérivées secondes de la fonctionnelle d'erreur peuvent être calculés analytiquement. Dans le cas des systèmes différentiels non linéaires, le gradient et les dérivées secondes ne peuvent pas être déterminés d'une manière formelle. Ils sont donc calculés directement par dérivation numérique de la fonctionnelle d'erreur ou à l'aide des fonctions de sensibilité [1]. La précision de ces méthodes dépend du pas.

L'identification terminée, on aura un modèle mathématique reflétant un procédé biologique par exemple (fabrication d'antibiotiques, de médicaments en général,...) et on pourra faire intervenir les variables de contrôle en vue d'optimiser un certain critère (maximiser la production, minimiser la quantité de cellules infectées, ...) ce qu'on appelle problème de contrôle optimal.

D'autre part, on étudie le problème de contrôle optimal des systèmes indéterminés. On entend par indéterminé un système différentiel non linéaire qui comporte des paramètres inconnus et constants. Le contrôle n'est déterminé que si le système contrôlé est parfaitement connu. Généralement, on procède d'abord à l'identification paramétrique du système [5], [6], [7], [8], [9], [10], ensuite on aborde le problème de contrôle optimal [11], [12]. Il peut être résolu par des méthodes classiques comme le principe du Maximum de Pontryaguine [12], [4], [13] ou celles de la programmation dynamiques [12], [14]. Ces méthodes sont difficiles à appliquer sur des exemples pratiques. Notre motivation est de chercher le contrôle optimal du système en boucle ouverte qui est une fonction dépendant explicitement des paramètres inconnus et de la variable temps du système indéterminé sans passer par l'étape d'identification. Ceci peut être réalisé en minimisant une certaine fonction objective qui dépend explicitement des paramètres du système et de contrôle dont il faudra exprimer les solutions du système en fonction explicite de ces paramètres.

L'objectif de ce mémoire est l'utilisation de la méthode décompositionnelle d'Adomian ([15], [16], [12], [17], [18], [19], [20]) et la méthode Alienor ([21], [12], [17], [22], [23]) pour la résolution du problème d'identification paramétrique des systèmes compartimentaux et celui de contrôle optimal des système indéterminés.

La méthode décompositionnelle d'Adomian permet la résolution analytique d'un système différentiel non linéaire sous forme de série convergente, et dépendant explicitement des paramètres du système. Cette méthode est basée sur la recherche de

solution sous la forme d'une série et sur la décomposition en série de l'opérateur non linéaire en utilisant des polynômes appelés « polynômes d'Adomian ». Ces polynômes sont calculés par des formules récurrentes ([16], [12], [24]).

Les solutions du système différentiel données par la méthode décompositionnelle d'Adomian sont reportées dans la fonctionnelle d'erreur. Le problème d'identification devient alors un problème d'optimisation classique pour lequel il est possible d'utiliser une méthode d'optimisation globale pour déterminer les paramètres du système. Après avoir exprimé préalablement la fonction de contrôle sous forme de série de fonctions (polynomiales, spline, exponentielles,...) dans le système différentiel, la méthode décompositionnelle d'Adomian est utilisée pour la résolution. La solution donnée dépend explicitement des paramètres du système et de contrôle. Cette solution reportée dans la fonction objective nous conduit à une fonction dépendant de ces paramètres. Il en résulte que le problème de contrôle optimal des systèmes indéterminés devient un problème d'optimisation classique.

La méthode Alienor consiste à exprimer les paramètres inconnus, disons ' n ' par des transformations réductrices, densifiant l'espace des paramètres \mathbb{R}^n par une courbe et conduisant à l'approximation d'une fonction définie sur \mathbb{R}^n par une fonction définie sur \mathbb{R} . Cette méthode d'optimisation globale ramène la recherche des minima de fonction à plusieurs variables à la recherche des minima de fonction à une seule variable.

La combinaison des deux méthodes permet de ramener le problème d'identification paramétrique et celui du contrôle optimal des systèmes indéterminés à des problèmes de minimisation d'une fonction à une seule variable.

Des applications de la méthode combinée Adomian/Alienor ont été traitées pour la résolution du problème d'identification paramétrique d'un système biologique du Virus immunitaire humain VIH [25], [26], [27], [5] et un autre système compartimental [12], [28],[29] à deux compartiments dont les échanges sont non linéaires de type Michaelis-Menten. Les résultats numériques obtenus par l'estimation des paramètres sont satisfaisants. Une application de cette méthode pour la résolution du problème de contrôle optimal d'un système indéterminé du VIH [30] a été traitée. Les résultats numériques obtenus par la méthode combinée confirment l'efficacité de cette approche. On a utilisé comme langage de programmation le "Maple" qui est un logiciel de calcul formel.

Le contenu du mémoire est composé de cinq chapitres et d'une conclusion.

Le chapitre un, présente une position du problème d'identification paramétrique et du problème de contrôle optimal des systèmes indéterminés. Nous y rappelons quelques méthodes de minimisation de fonctions à plusieurs variables.

Le deuxième chapitre est consacré à la description de la méthode décompositionnelle d'Adomian (MDA) pour résoudre un système différentiel non linéaire. Nous présentons la MDA dans le cas général et dans le cas des d'équations différentielles. Cette méthode donne aux systèmes d'équations différentielles les solutions sous la forme de séries convergentes et permet d'exprimer explicitement des paramètres qui interviennent dans ces équations.

Le chapitre trois, aborde la méthode Alienor (MA) pour l'approximation des fonctions à plusieurs variables par des fonctions à une seule variable. Nous rappelons l'idée de base de cette méthode et son utilisation aux problèmes d'optimisations globales de fonctions multivariées. Nous présentons aussi des méthodes d'optimisation globale d'une fonction à une variable.

Le problème d'identification paramétrique des systèmes compartimentaux est donné au chapitre quatre. On montre comment utiliser la méthode combinée Adomian/Alienor à la résolution du problème. Des applications du problème ont été traitées au modèle biologique du virus immunitaire humain (VIH) et au modèle compartimental à deux compartiments où les échanges entre les compartiments sont non linéaires de type Michaelis-Menten.

Le chapitre cinq est consacré au problème de contrôle optimal des systèmes indéterminés. On donne une démarche qui utilise la méthode combinée Adomian/Alienor permettant de ramener ce problème à un problème de minimisation d'une fonction à une seule variable. On présente une application pour la résolution du problème d'un système indéterminé du VIH.

Nous terminons notre travail par une conclusion.

CHAPITRE 1

PROBLEME D'IDENTIFICATION ET CONTROLE DE SYSTEMES BIOLOGIQUES

1.1 Introduction

Nous allons décrire le problème d'identification paramétrique d'un phénomène réel (biologique, industriel, ...) représenté sous forme d'un système différentiel non linéaire comportant des paramètres qu'on suppose constants. On identifie ces paramètres par la minimisation d'une fonctionnelle d'erreur exprimant la somme des carrés des écarts entre les valeurs expérimentales disponibles et les valeurs calculées à partir de la résolution du système. L'identification terminée, on aura un modèle mathématique reflétant le phénomène réel, on peut agir à son contrôle, améliorer ces performances, etc...

Nous présentons aussi, le problème de contrôle optimal des systèmes indéterminés. On entend par indéterminé, un système comportant des paramètres inconnus supposés constants. On cherche le contrôle optimal d'un tel système en minimisant une certaine fonction objective. Nous invitons le lecteur à se référer aux ouvrages de Ljung [1] et de [31] Landau et al. pour avoir plus de détails concernant les techniques d'identification et aux ouvrages [32] et de Cherruault [12] pour ceux concernant les notions et les techniques liées au contrôle optimal.

1.2 Identification paramétrique des modèles

Une technique de modélisation dite "*l'analyse compartimentale*" [12] est très utilisée en biologie, biomédecine, pharmacologie, etc,... On s'en sert pour suivre l'évolution au cours du temps de substance biochimiques (médicaments, hormones, ...) et de leurs métabolites. La substance étudiée et ses transformés sont répartis en différents compartiments. Ces compartiments, qui sont des classes d'équivalence, sont définis à partir de propriétés physiques. Il va exister entre ces compartiments des échanges de

"matière". A partir du moment où la loi régissant ces échanges sera précisée (hypothèse d'échange), les équations différentielles du système seront obtenues en faisant un bilan de masse dans chacun des compartiments. On traduira en fait une loi de conservation de la masse dans chaque compartiment, autrement dit nous écrivons que : " la variation instantanée de quantité au niveau du compartiment i = somme des quantités entrant dans i , par unité de temps – somme des quantités sortant de i , par unité de temps ". Dans ce type de modélisation, la structure des lois (échanges) est connue mais des coefficients *inconnus* apparaissent dans les fonctions mathématiques traduisant ces lois, d'où l'obtention de modèles compartimentaux linéaires ou non.

Pour que ces modèles compartimentaux représentent sans ambiguïté le système biologique étudié, il sera nécessaire d'identifier (autrement dit de calculer) les paramètres inconnus à partir des données expérimentales disponibles. Leur détermination (identification) nécessite l'utilisation des méthodes d'optimisation, permettant la minimisation d'une fonctionnelle d'erreur.

Considérons un système biologique modélisé par les équations différentielles :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_p, \alpha_1, \dots, \alpha_q, t) \\ x_i(t=0) = \beta_i \quad , \quad i = 1, \dots, p, \quad \text{fixés} \end{cases} \quad (1.1)$$

où f_i sont des fonctions non linéaires connues et $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ sont des paramètres constants inconnus, à déterminer à partir d'observations :

$$Y = B.x \quad (1.2)$$

où $x = (x_1, \dots, x_p)^T$ est le vecteur d'état du système, B est une matrice $(l \times p)$ constante, connue appelée matrice *d'observation*.

Généralement, les conditions initiales du système différentiel (1.1) peuvent être précisées. Par exemple, en médecine, en pharmacologie et en biologie on administre souvent une quantité β_i de substance, de façon instantanée, dans le compartiments i .

La variable d'état $x_i(t)$ correspond à la quantité de substance chimique contenue dans le compartiment i à l'instant t , $i = 1, \dots, p$. Dans beaucoup de problèmes on est

amené à travailler non pas avec des quantités mais avec des concentrations. On passe des unes aux autres par les relations :

$$x_i = C_i V_i$$

où C_i est la concentration de substance dans le compartiment i et V_i le volume du compartiment i , qui peut généralement être supposé constant.

Les $\alpha_k, k = 1, \dots, q$ sont obtenus en minimisant la fonctionnelle d'erreur J :

$$J = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^l (Y_i(t_j) - Y_i^c(t_j))^2 \quad (1.3)$$

Dans (1.3), $Y_i(t_j)$ sont les grandeurs mesurées aux instants t_j , les t_j sont les m instants de mesures, Y_i^c représente la fonction $Y_i(t) = (B.x)_i$ calculée en résolvant le système (1.1) lorsque $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ sont fixés.

La minimisation de J par rapport à ces paramètres consiste à chercher $\alpha_1^*, \dots, \alpha_q^*$ qui réalisent le minimum de J . Le principe du schéma qui permet d'obtenir l'ensemble $\alpha_k^*, k = 1, \dots, q$ étant le suivant :

On choisit un ensemble $\alpha_k, k = 1, \dots, q$ arbitraire. On résout ensuite le système (1.1) et on calcule J . Si J est proche ou égal à zéro on a terminé et trouvé l'ensemble solution. Sinon, on modifie l'ensemble α_k (les méthodes de minimisation donnent des techniques pour changer les $\alpha_k, k = 1, \dots, q$) et on recommence le procédé jusqu'à ce que l'on trouve des $\alpha_k^*, k = 1, \dots, q$ réalisant le minimum de J . L'organigramme donné par la figure 1.1 permet de réaliser cet objectif :

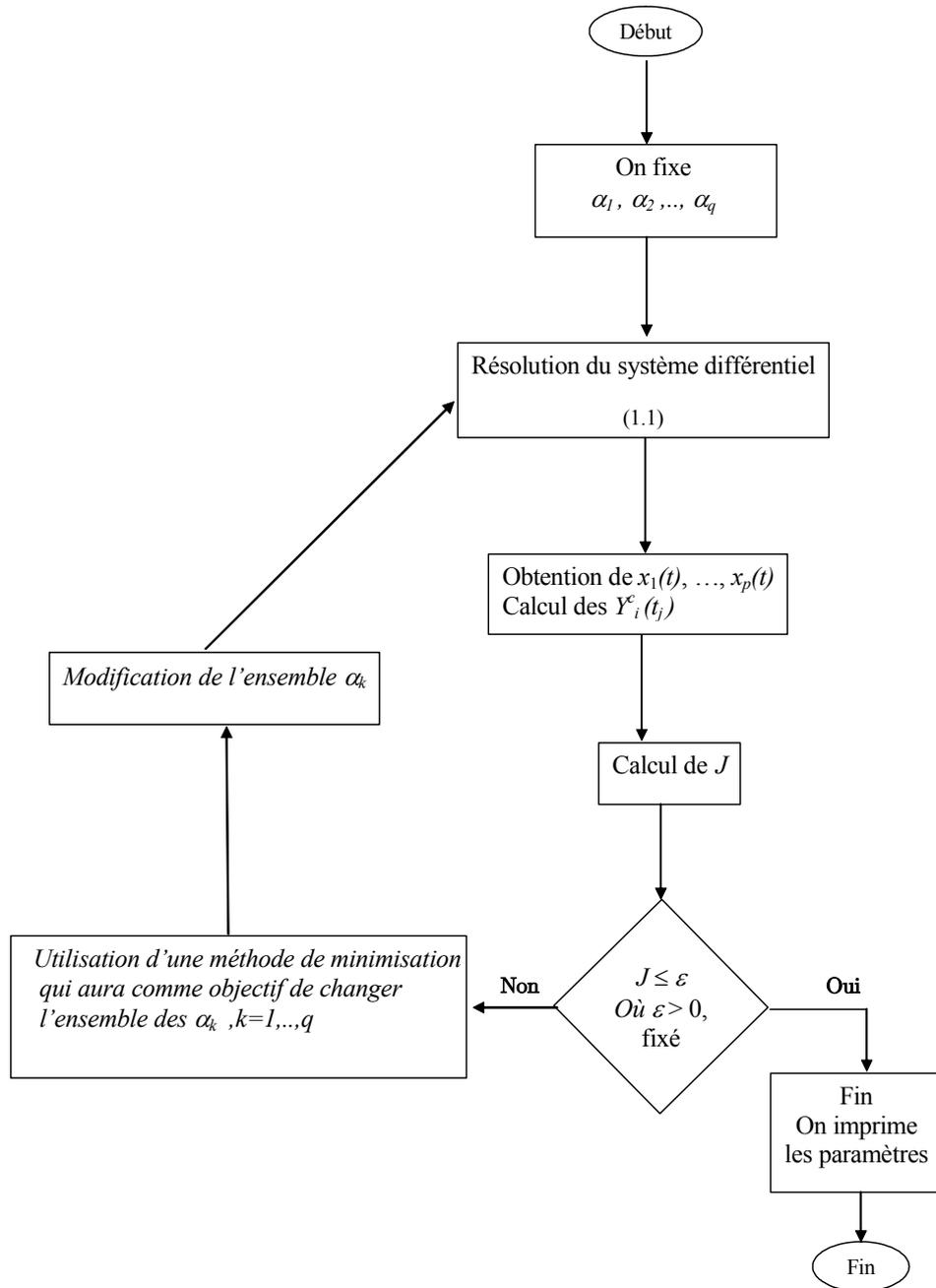


FIGURE 1.1. Organigramme représentant une méthode d'identification

Remarque 1.1. Comme J dépend implicitement des paramètres à identifier, ceci nous oblige à résoudre numériquement, un grand nombre de fois le système (1.1). Cette méthode numérique utilise une méthode d'optimisation qui aura comme objectif de choisir à chaque étape un nouvel ensemble $\alpha_k, k = 1, \dots, q$ qui fera décroître la fonctionnelle J par rapport à l'étape précédente. On obtient une solution approchée de notre problème d'identification à condition qu'au minimum, J soit égal à zéro (ou proche de zéro).

On démontre ainsi l'existence d'une solution mais on ne peut rien conclure quant à l'unicité. Les méthodes de minimisation du premier ou second ordre [2] s'appliquent aisément aux systèmes différentiels linéaires car le gradient ou les dérivées secondes de la fonctionnelle d'erreur peuvent être calculés analytiquement. Dans le cas des systèmes différentiels non linéaires, le gradient et les dérivées secondes ne peuvent pas être déterminés d'une manière formelle. Ils sont donc calculés directement par dérivation numérique de la fonctionnelle d'erreur ou à l'aide des fonctions de sensibilité [31]. A l'aide de la méthode décompositionnelle d'Adomian (voir chapitre 2) on peut exprimer Y_i^c en fonction explicite des paramètres à identifier. Il en résulte une fonctionnelle J dépendant explicitement des paramètres à identifier et l'on évitera ainsi la résolution du système différentiel à chaque étape de la méthode d'identification. Par conséquent, notre problème d'identification devient un problème de minimisation classique par rapport aux α_k , $k = 1, \dots, q$. Ce problème se ramène à un problème de minimisation de fonction à une variable par la méthode Alienor (voir chapitre 3).

Rappelons quelques méthodes d'optimisation d'une fonction à plusieurs variables.

1.2.1 Méthodes d'optimisation

Résoudre un problème d'optimisation consiste à obtenir une solution optimale, c'est à dire minimisant (ou maximisant) la fonction objective. Selon la forme du problème d'optimisation, il peut y avoir une ou plusieurs solutions qui minimisent (ou maximisent) la fonction objective. Dans des cas simples, le problème peut être résolu analytiquement. Dans la plupart des cas réels, il faut envisager une résolution numérique qui peut nécessiter des temps de calcul importants. Tous les algorithmes d'optimisation procèdent en effet par itérations successives à partir d'une solution initiale, chaque itération devant améliorer la valeur de la fonction objective.

Une fois définie la fonction à optimiser, il s'agit de choisir une méthode adaptée au problème posé. Les méthodes d'optimisation peuvent être classées de différentes manières : nous les classerons en méthodes déterministes et méthodes non déterministes. Les méthodes déterministes sont généralement efficaces quand l'évaluation de la fonction est très rapide, ou quand la forme de la fonction est connue a priori. Les cas plus complexes (temps de calcul important, nombreux optima locaux, fonctions

non dérivables, fonctions fractales, fonctions bruitées,...) seront souvent traités plus efficacement par des méthodes non déterministes (les méthodes Monte Carlo, les méthodes hybrides, le recuit simulé, les algorithmes évolutionnaires). Dans notre travail on ne considère que les *méthodes déterministes*.

On veut résoudre le problème de minimisation :

$$\min_{\alpha_1, \dots, \alpha_q} J(\alpha_1, \dots, \alpha_q) \quad (1.4)$$

où J est une fonction continue sur \mathbb{R}^q , autrement dit on doit chercher des points $\alpha^* = (\alpha_1^*, \dots, \alpha_q^*)^t$ réalisant le minimum (local ou global) de J .

Sachant que J vérifie la condition de croissance à l'infini :

$$\lim_{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_q^2 \rightarrow \infty} J(\alpha_1, \dots, \alpha_q) = +\infty \quad (1.5)$$

La recherche des extrema d'une fonction J revient à résoudre un système de q équations à q inconnues, linéaire ou non :

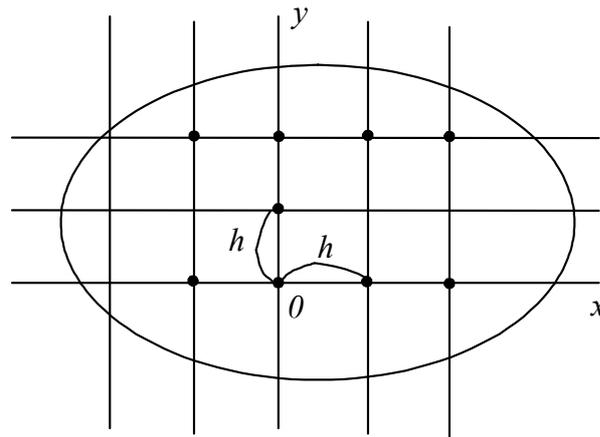
$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_i}(\alpha_1, \dots, \alpha_q) = 0, \quad i = 1, \dots, q$$

On peut donc utiliser des méthodes classiques telles que la méthode du Gradient ou la méthode de Gauss-Seidel [3]. En général, l'utilisation de ces méthodes nécessite comme étape préliminaire la localisation des extrema. Celle-ci peut être faite, par exemple, sur un graphique ou par une discrétisation finie de l'intervalle de recherche. La fonction à optimiser est évaluée en chacun des points de discrétisation. La valeur optimale est alors considérée comme une bonne approximation de l'optimum de la fonction. Cette méthode est brutale et le temps de calcul augmentera exponentiellement en fonction du nombre de variables.

Compte tenu de la forte non linéarité de la fonction J , celle ci présente de nombreux minima locaux. Ceci est particulièrement vrai pour des problèmes d'estimation issus de la biologie et de la biochimie. Des travaux ont été menés sur la recherche de méthodes qui diminuent l'erreur d'estimation : méthodes de pondération, optimisation de la matrice de sensibilité [31].

Il existe de nombreuses méthodes d'optimisation pour trouver le minimum d'une fonction à plusieurs variables J , on peut citer :

- Les méthodes analytiques, qui supposent que l'on puisse résoudre le système $\nabla J(\alpha) = 0$ où $\nabla J(\alpha) = \left(\frac{\partial J}{\partial \alpha_1}, \dots, \frac{\partial J}{\partial \alpha_q} \right)^t$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_q)^t$. Ceci est parfois difficile à résoudre en pratique.
- Les méthodes numériques de minimisation de fonctions à plusieurs variables consiste à faire un maillage de pas h dans K (K un ensemble fermé et borné est un compact de \mathbb{R}^q) ou dans \mathbb{R}^q . Pour $q = 2$:



On calcule la fonction J en tous les points du maillage (contenus dans K) et l'on retient le ou les points donnant la valeur minimale de J . On obtient ainsi des approximations de tous les minima globaux de J . L'approximation sera d'autant meilleure que le pas h sera choisi petit. L'inconvénient est que cette méthode est coûteuse en temps de calcul.

- Les méthodes du premier ordre telles que celles du Gradient, Gradient conjugué, de Partan, ..., nécessitent à chaque étape (itération) l'évaluation de $J(\alpha)$ et de $\nabla J(\alpha)$.
- Les méthodes du deuxième ordre comme celles de Newton, Newton modifiée, Levenberg-Marquardt, ..., qui requièrent l'évaluation de $J(\alpha)$, $\nabla J(\alpha)$ et le Hessien $\nabla^2 J(\alpha)$ à chaque étape de calcul où $\nabla^2 J(\alpha) = \frac{\partial^2 J}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j}$, $i = 1, \dots, q$ et $j = 1, \dots, q$.

Méthode du premier ordre

Rappelons la définition de la direction de descente et direction de la plus grande pente :

On cherche le minimum de $J(\alpha)$. Si J est continue et continûment différentiable, alors dans le voisinage proche de α on peut la développer en série de Taylor limitée au premier ordre.

$$J(\alpha + \Delta\alpha) = J(\alpha) + \Delta\alpha \nabla J(\alpha) \quad (1.6)$$

où $\nabla J(\alpha)$ est le gradient de $J(\alpha)$ en un point $\alpha \in \mathbb{R}^q$.

Si $\Delta\alpha \nabla J(\alpha) < 0$ alors $J(\alpha + \Delta\alpha) < J(\alpha)$ au point α , la direction de plus grande diminution de J est celle de $-\nabla J(\alpha)$, on dit aussi que c'est la direction de plus grande pente de J au point α .

Méthode du Gradient

La méthode du Gradient consiste à chercher le minimum α^* de la fonction $J(\alpha)$ par l'itération :

$$\alpha^{(k+1)} = \alpha^{(k)} - t^{(k)} \nabla J(\alpha^{(k)}) \quad (1.7)$$

elle passe d'un estimé $\alpha^{(k)}$ à l'estimé suivant $\alpha^{(k+1)}$ de α , en suivant la direction de plus grande pente de $J(\alpha)$ au point $\alpha^{(k)}$ $\nabla J(\alpha^{(k)})$ définit une direction de descente, $t^{(k)}$ est le pas de descente.

Choix du pas de descente $t^{(k)}$:

On peut chercher $t^{(k)}$ par la minimisation de $J(\alpha^{(k+1)})$:

$$\frac{d}{dt} (J(\alpha^{(k)} - t \nabla J(\alpha^{(k)})) = 0 \quad (1.8)$$

La recherche de la valeur de $t^{(k)}$ minimisant $J(\alpha^{(k+1)})$ faite sur la droite :

$$(\alpha^{(k)} - t \nabla J(\alpha^{(k)}))$$

est une recherche unidimensionnelle.

Comme on peut s'y attendre la méthode présentée par (1.7) et (1.8) peut demander un effort de calcul car il faudra à chaque itération k :

- Evaluer le gradient $\nabla J(\alpha^{(k)})$.
- Déterminer $t^{(k)}$ par une méthode de recherche unidimensionnelle (Dichotomie, Fibonacci, ...).

On se contente le plus souvent de choisir $t^{(k)}$ vérifiant :

$$J(\alpha^{(k+1)}) < J(\alpha^{(k)}) \quad (1.9)$$

L'algorithme du Gradient s'écrit :

<p>Etant donnés : $J(\alpha)$, l'estimé $\alpha^{(0)}$, ε, Nbr_iterMax , $k = 0$</p> <p>Début</p> <p>1) Calculer : $\alpha^{(k+1)} = \alpha^{(k)} - t^{(k)} \nabla J(\alpha^{(k)})$ avec $t^{(k)} = \underset{t>0}{agr \min} J(\alpha^{(k)} - t \nabla J(\alpha^{(k)}))$</p> <p>4) Si ($k < \text{Nbr_iterMax}$ et $\ \alpha^{(k+1)} - \alpha^{(k)}\ \geq \varepsilon$) alors $k = k + 1$ aller à l'étape 1)</p> <p>finsi</p> <p>5) Afficher ($\alpha^{(k+1)}$)</p> <p>Fin.</p>
Algorithme du Gradient

Méthode de second ordre

Méthode de Newton

La condition nécessaire du premier ordre pour que α^* soit un minimum s'écrit :

$$\nabla J(\alpha^*) = 0, \forall \alpha^* \in \mathbb{R}^q \quad (1.10)$$

Il s'agit d'un système de q équations à q inconnus. Ce système est linéaire ou non linéaire suivant le problème.

Si $\nabla J(\alpha)$ est continue et dérivable dans un voisinage proche de α^* , on peut écrire

$$\nabla J(\alpha^*) = \nabla J(\alpha + \Delta\alpha) = \nabla J(\alpha) + E \Delta\alpha \quad (1.11)$$

où $E = \nabla^2 J(\alpha)$ est le hessien de $J(\alpha)$.

$$\nabla^2 J(\alpha) = \frac{\partial^2 J}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j}, \quad i = 1, \dots, q \text{ et } j = 1, \dots, q$$

D'où avec les équations (1.10) et (1.11) et connaissant un estimé $\alpha^{(k)}$ proche de α^*

:

$$E^{(k)} \Delta\alpha^{(k)} = -\nabla J(\alpha^{(k)}) \quad (1.12)$$

La résolution du système linéaire (1.12) nous donne une direction de descente et l'on calcule :

$$\alpha^{(k+1)} = \alpha^{(k)} + \Delta\alpha^{(k)} \quad (1.13)$$

Remarque 1.2. Pour que $\Delta\alpha^{(k)}$ soit une direction de descente il faut que :

$$\Delta\alpha^{(k)t} \nabla J(\alpha^{(k)}) < 0 \quad (1.14)$$

D'où, des équations (1.12) et (1.14), on obtient :

$$\Delta\alpha^{(k)t} E^{(k)} \Delta\alpha^{(k)} > 0$$

c'est à dire, pour que $\Delta\alpha^{(k)}$ calculée par l'équation (1.12) soit une direction de descente, il faut que $E^{(k)}$ soit définie positive.

L'algorithme suivant résume la méthode de Newton :

<p>Etant donnés $J(\alpha)$, l'estimé $\alpha^{(0)}$, ε, Nbr_iterMax, $k = 0$</p> <p>Début</p> <p>1) Calculer : $\nabla J(\alpha^{(k)})$, $E = \nabla^2 J(\alpha^{(k)})$</p> <p>2) Résoudre le système linéaire : $E^{(k)} \Delta\alpha^{(k)} = -\nabla J(\alpha^{(k)})$</p> <p>3) Calculer : $\alpha^{(k+1)} = \alpha^{(k)} + \Delta\alpha^{(k)}$</p> <p>4) Si ($k < \text{Nbr_iterMax}$ et $\ \Delta\alpha^{(k)}\ \geq \varepsilon$) alors</p> <p style="padding-left: 40px;">$k = k + 1$</p> <p style="padding-left: 40px;">aller à l'étape 1)</p> <p style="padding-left: 20px;">finsi</p> <p>5) Afficher ($\alpha^{(k+1)}$)</p> <p>Fin.</p>
Algorithme de Newton

Comme $E^{(k)}$ doit être définie positive, on peut résoudre le système (1.12) par la méthode de Cholesky. Remarquons que la méthode de Newton nécessite l'évaluation du vecteur gradient, l'évaluation de la matrice hessienne et la résolution d'un système linéaire à chaque étape de calcul.

La méthode du Gradient est de convergence linéaire elle est donc lente relativement à la convergence quadratique de la méthode de Newton. Cependant, la méthode de Newton nécessite un très bon estimé $\alpha^{(0)}$, alors que la méthode du Gradient se contente généralement d'un estimé quelconque. Ce bon estimé peut être fourni par exemple par la méthode du Gradient.

La méthode de Levenberg-Marquardt décrite ci-dessous présente l'avantage de combiner les deux algorithmes en un seul.

Méthode de Levenberg-Marquardt

La méthode de Levenberg-Marquardt est une méthode itérative de minimisation de fonctions à plusieurs variables. On cherche le minimum de la fonction $J(\alpha_1, \dots, \alpha_q)$ par rapport à un vecteur des paramètres α . On adaptera cette méthode au problème d'identification où :

$$J = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^l (Y_i(t_j) - Y_i^c(t_j))^2 = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^l g_i^2(\alpha)$$

où $g_i(\alpha) = Y_i(t_j) - Y_i^c(t_j)$, $i = 1, \dots, l$

L'algorithme de Levenberg-Marquardt s'écrit :

Etant donnés $\lambda = 0.01$, l'estimé $\alpha^{(0)}$, ε , $g(\alpha)$, Nbr_iterMax, $k = 0$, Nbr_iter=0

Début

1) Calculer : $G_{(m \times q)} = \nabla g(\alpha^{(k)})$, $F_{(m \times 1)} = g(\alpha^{(k)})$,

$$A_{(q \times q)} = G^t G, B_{(1 \times q)} = -G^t F$$

2) Résolution du système linéaire par Cholesky : $(A^{(k)} + \lambda^{(k)} I_q) \Delta \alpha^{(k)} = B^{(k)}$

avec I_q : matrice d'identité ($q \times q$) et $\lambda^{(k)}$ un scalaire.

3) Calcul du nouvel estimé : $\alpha^{(k+1)} = \alpha^{(k)} + \Delta \alpha^{(k)}$

4) **Si** $J(\alpha^{(k)} + \Delta \alpha^{(k)}) < J(\alpha^{(k)})$ **alors**

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} / 10$$

$$\alpha^{(k+1)} = \alpha^{(k)} + \Delta \alpha^{(k)}$$

$$k = k + 1$$

Sinon $\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} * 10$

finsi

5) Nbr_iter=Nbr_iter+1

6) **Si** (Nbr_iter < Nbr_iterMax) **alors** aller à l'étape 1)

finsi

7) Afficher($\alpha^{(k+1)}$)

Fin.

Algorithme de Levenberg-Marquardt

Le paramètre λ appelé "le pas de réduction" permet d'adapter l'algorithme à la forme de la fonction objective et de réaliser un bon compromis entre la méthode de Newton (λ nul) qui converge rapidement au voisinage d'un minimum, et de la méthode du Gradient (λ grand).

On modifie le pas de réduction comme suit :

- Si la modification des paramètres provoque une diminution de la valeur de J , on accepte cette modification et on se rapproche de la direction de Newton en diminuant λ (par exemple par un facteur de 10).
- Si la modification des paramètres provoque une augmentation de J , on rejette cette modification et on se rapproche de la direction du Gradient en augmentant λ (par exemple par un facteur de 10), et on calcule une nouvelle modification des paramètres avec le nouveau pas.

En résumé, la méthode de Levenberg-Marquardt est une combinaison des deux méthodes Gradient et Newton. L'introduction du terme $\lambda^{(k)}I_q$ revient à forcer la matrice $(G^{(k)t}G^{(k)} + \lambda^{(k)}I_q)$ à être définie positive.

Définissons maintenant le deuxième problème traité dans ce travail.

1.3 Contrôle optimal des systèmes indéterminés

Considérons le modèle suivant décrit par un système d'équations différentielles non linéaire de la forme :

$$\begin{cases} \frac{dx_i(t)}{dt} = f_i(x, u, \alpha, t) \\ x_i(t=0) = \beta_i \quad i = 1, \dots, p \end{cases} \quad (1.15)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur d'état du système, $u(t) \in \mathbb{R}^l$ est le vecteur des contrôles (commandes) et $\alpha \in \mathbb{R}^q$ est le vecteur des paramètres inconnus du système. On désigne par f_i les fonctions non linéaires et par β_i les conditions initiales (généralement égaux à 0) supposées connues. On suppose que chaque composante de $u(t)$ est mesurable et bornée. C'est à dire admissible.

Supposons que le vecteur d'observation est donné par :

$$Y(t) = \eta(x, u)$$

où $Y(t)$ un vecteur de \mathbb{R}^m .

Le problème consiste à chercher un contrôle admissible $u(t)$ minimisant le critère défini par :

$$I = \int_0^T F(x, u) dt \quad (1.16)$$

où $x(t)$ et $u(t)$ doivent satisfaire le système (1.15), F est une fonction connue positive et $T > 0$ est le temps d'observation qui peut être fixé ou indéterminé.

Un tel contrôle (s'il existe) dépendrait du vecteur des paramètres inconnus α et du vecteur d'état x (ou de ce qu'on connaît, c'est à dire le vecteur d'observation Y), par exemple $u = u(x(t), \alpha)$ ou $u = u(Y(t), \alpha)$ s'appellerait *contrôle adaptatif en boucle fermée* ou *contrôle adaptatif en feed-back*.

Souvent, ce type de problème est résolu par des méthodes basées sur l'utilisation du théorème de Lyapounov, prouvant la stabilité du système en boucle fermée [33], la théorie de l'hyperstabilité et les concepts de positivité [34].

On cherche le contrôle sous forme $u = u(Y(t), \alpha(t))$ où $\alpha(t)$ est l'estimation du vecteur inconnu α à l'instant t . On peut choisir l'estimation $\alpha(t)$ comme suit :

Le contrôle obtenu, la fonction objective devient une fonction explicite de α qui est minimisée par rapport à α , en utilisant l'algorithme de gradient :

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\rho \nabla_{\alpha} I(t, \alpha), \quad \rho > 0$$

Pour résoudre un tel problème la démarche que nous préconisons de suivre est la suivante :

On exprimera chaque composante u_j de $u(t)$ sous forme :

$$u_j(t) = \sum_{k=1}^r \gamma_k^j \varphi_k(t), \quad j = 1, \dots, l \quad (1.17)$$

où γ_k^j sont des constantes à déterminer, $\varphi_k(t)$ sont des fonctions connues correspondant à l'approximation choisie : (polynomiale, spline, exponentielle,...). Le contrôle

$u(t)$ dépendant uniquement de la variable temps, s'appellera *contrôle en boucle ouverte*. Dans ce cas, le contrôle $u(t)$ qui minimise le critère (1.16) est dit *contrôle optimal*.

Reportons ces approximations de u_j (1.17) dans le système différentiel (1.15). Si l'on peut exprimer les solutions du système différentiel (1.15) $x_i(t)$, $i = 1, \dots, p$ en fonction des paramètres α_w et γ_k^j par une relation de la forme :

$$x_i = \mu_i(\alpha_1, \dots, \alpha_q, \gamma_k^1, \dots, \gamma_k^l), \quad i = 1, \dots, p \quad (1.18)$$

où μ_i est une fonction dépendant explicitement des paramètres α_w et γ_k^j et qui peut être déterminée par un raisonnement mathématique ou par un calcul formel (voir [35]).

L'utilisation de la méthode décompositionnelle d'Adomian (voir chapitre 2) donnera les solutions x_i de (1.15) en fonction explicite des paramètres α_w et γ_k^j .

En reportant (1.18) dans (1.16), le problème de minimisation (1.16) devient alors :

$$\underset{\alpha, \gamma_k^1, \dots, \gamma_k^l}{\text{Min}} \int_0^T F(\mu_1(\alpha, \gamma_k^1, \dots, \gamma_k^l), \dots, \mu_p(\alpha, \gamma_k^1, \dots, \gamma_k^l), \sum_{k=1}^r \gamma_k^1 \varphi_k(t), \dots, \sum_{k=1}^r \gamma_k^l \varphi_k(t)) dt \quad (1.19)$$

un problème de minimisation par rapport aux paramètres du système α_w et du contrôle γ_k^j .

Le problème de contrôle optimal des systèmes indéterminés devient un problème d'opti-misation classique puisque les variables par rapport auxquelles on minimise apparaissent explicitement dans la fonction objective. On peut réduire par la méthode Alienor (voir chapitre 3) ces paramètres à une fonction à une variable θ et le problème (1.19) est approché par un problème de minimisation à une seule variable.

Conclusion

- La méthode d'identification décrite plus haut (section 1.2) va impliquer la résolution du système différentiel (1.1) numériquement un grand nombre de fois (autant de fois que nous devons calculer $J(\alpha_1, \dots, \alpha_q)$ pour différentes valeurs de α_k , $k = 1, \dots, q$. Pour éviter cet inconvénient on peut utiliser la méthode décompositionnelle d'Adomian permettant d'exprimer Y_i^c en fonction explicite des paramètres à identifier. Il en résulte une fonctionnelle J dépendant explicitement de ces paramètres et l'on évitera ainsi la résolution du système différentiel à chaque étape de l'identification. Par conséquent, notre problème d'identification

devient un problème de minimisation classique par rapport aux α_k , $k = 1, \dots, q$. Il suffit de choisir une méthode de minimisation pour trouver le ou les points réalisant le minimum de J . A l'aide de la méthode Alienor qui transforme $J(\alpha_1, \dots, \alpha_q)$ en une fonction $J^*(\theta)$ dépendant d'une variable θ , on se ramène à la minimisation d'une fonction à une variable.

- Pour le problème de contrôle, l'utilisation de la méthode décompositionnelle d'Adomian permet d'exprimer les solutions du système différentiel (1.15) en fonction des paramètres α_w du système et γ_k^j de contrôle. Par conséquent, la fonction objective I redevient une fonction dépendant explicitement des paramètres α_w et γ_k^j . La fonction I devient une fonction à plusieurs variables à minimiser. La méthode Alienor permet alors de la transformer en une fonction à une seule variable, dont la minimisation est plus aisée.

Nous allons décrire dans ce qui suit, la méthode décompositionnelle d'Adomian (chapitre 2) et la méthode Alienor (chapitre 3). Ces méthodes seront utiles pour résoudre les problèmes posés dans ce chapitre.

CHAPITRE 2

LA METHODE DE DECOMPOSITION D'ADOMIAN

2.1 Introduction

De nombreux modèles réels (biologiques, automatiques, industriels, ...) sont décrits par des équations fonctionnelles non linéaires de différents types : différentielles, aux dérivées partielles, intégrales, intégro-différentielles, algébrique, etc,... Il ne sera pratiquement jamais possible de trouver une solution exacte de ces équations. Or, la simulation des modèles imposera la recherche d'une solution approchée de ces équations fonctionnelles. On dispose pour cela de méthodes numériques classiques comme la méthode des différences finies ou celle des éléments finis, mais leur principal inconvénient est qu'elles "discrétisent" l'espace et le temps, et ne donnent une approximation de la solution qu'en des points discrets. De plus, lorsque des paramètres interviennent dans les équations, ils n'apparaissent pas explicitement dans la solution numérique trouvée. Tous ces inconvénients n'existent pas dans le cadre de la méthode décompositionnelle qui a été inventée par G.Adomian (Etats Unis) au début des années 80 de manière empirique et sans fondements théoriques ([36], [37]). Cette méthode est basée sur la recherche de solution sous forme de série et sur la décomposition en séries de l'opérateur non linéaire. Ce faisant, on fait intervenir des polynômes, appelés *polynômes d'Adomian*, dont les éléments sont calculés récursivement. Dans le laboratoire MEDIMAT (université Paris VI) des travaux sur la convergence de la méthode d'Adomian ont été réalisés. D'abord Y.Cherruault [15] a proposé une nouvelle définition de la méthode et prouvé la convergence de la méthode de décomposition d'Adomian. Y.Cherruault et G.Adomian [38], ont proposé une nouvelle preuve de convergence de la méthode d'Adomian basée sur les propriétés des séries convergentes, puis par Lionel Gabet, Said Guellal et surtout Karim Abbaoui [39], [40]. En particulier la thèse de K. Abbaoui présentée en 1995 [16], contient un ensemble original et remarquable de résultats théoriques et pratiques sur la méthode d'Adomian, qui fait que l'on peut considérer la méthode décompositionnelle comme une méthode générale

pour la résolution des systèmes dynamiques non linéaires.

La méthode de décomposition d'Adomian (MDA) a été utilisée pour résoudre des équations intervenant dans le modèle de MARCHUK (immunologie), du modèle compartimental de la dégranulation des basophiles, d'identification et de contrôle optimal des systèmes biologiques [17], en théorie des microlasers, en mécanique des fluides et d'autres problèmes [16].

2.2 Présentation de la méthode décompositionnelle

Décrivons, la méthode sous sa forme initiale présentée par G.Adomian [36] :

Soit l'équation non linéaire :

$$F(x(t)) = g(t) \quad (2.1)$$

où F représente un opérateur non linéaire. g une fonction connue.

L'opérateur F possède des termes linéaires et non linéaires. Le terme linéaire est décomposé en $L + R$ où L est un opérateur linéaire inversible et R est le reste de l'opérateur linéaire. En pratique on choisit pour L l'opérateur d'ordre le plus élevé et qui soit facilement inversible.

L'équation (2.1) devient :

$$Lx + Rx + Nx = g \quad (2.2)$$

L'opérateur L étant inversible, on note L^{-1} son inverse :

$$L^{-1}Lx = L^{-1}g - L^{-1}Rx - L^{-1}Nx \quad (2.3)$$

On a l'expression équivalente :

$$x = \gamma + L^{-1}g - L^{-1}Rx - L^{-1}Nx \quad (2.4)$$

où γ est la fonction qui satisfait $L\gamma = 0$. Si l'équation (2.4) correspond à un problème de valeur initiale, l'opérateur L^{-1} est l'intégrale de 0 à t . Si L est un opérateur d'ordre deux, alors L^{-1} est l'opérateur d'intégration double défini par :

$$L^{-1}(\cdot) = \int_0^t \left(\int_0^s (\cdot) dv \right) ds$$

et $L^{-1}Lx = x - x(0) - tx'(0)$.

A partir des conditions initiales connues, l'équation (2.3) devient :

$$x = x(0) + tx'(0) + L^{-1}g - L^{-1}Rx - L^{-1}Nx \quad (2.5)$$

Pour un opérateur L d'ordre r où les conditions initiales sont fixées, le terme γ peut s'écrire sous forme générale :

$$\gamma = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{w_i t^i}{i!}$$

où $w_i = \left. \frac{d^i x}{dt^i} \right|_{t=0}$

La méthode décompositionnelle d'Adomian (MDA), consiste à chercher la solution (quand elle existe) sous la forme d'une série :

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \quad (2.6)$$

dite « *série solution* », et à décomposer le terme non linéaire $N(x)$ en série :

$$N(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (2.7)$$

où les A_n sont les « polynômes d'Adomian » qui dépendent uniquement de x_0, \dots, x_n et sont obtenus à partir des relations suivantes [16], [39], [40] :

$$v = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i x_i, \quad N\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i x_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i A_i \quad (2.8)$$

D'où

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[N\left(\sum_{i=0}^n \lambda^i x_i\right) \right]_{\lambda=0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.9)$$

où λ est un paramètre introduit par commodité.

Soit $f(x)$ une fonction non linéaire en x où $x = x_0 + \lambda x_1 + \lambda^2 x_2 + \dots$. L'équation (2.9) donne les polynômes d'Adomian :

$$\begin{cases} A_0 = f(x_0) \\ A_1 = x_1 \left(\frac{d}{dx_0} f(x_0) \right) \\ A_2 = x_2 \left(\frac{d}{dx_0} f(x_0) \right) + \frac{x_1^2}{2!} \left(\frac{d^2}{dx_0^2} f(x_0) \right) \\ A_3 = x_3 \left(\frac{d}{dx_0} f(x_0) \right) + x_1 x_2 \left(\frac{d^2}{dx_0^2} f(x_0) \right) + \frac{x_1^3}{3!} \left(\frac{d^3}{dx_0^3} f(x_0) \right) \\ \vdots \end{cases} \quad (2.10)$$

Reportons l'expression (2.6) et (2.7) dans (2.5), il vient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = x(0) + tx'(0) + L^{-1}g - L^{-1}R \sum_{n=0}^{\infty} x_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (2.11)$$

On pose $\gamma = x(0) + tx'(0)$. Le premier terme de la série x_0 est défini par $\gamma + L^{-1}g$.

Par conséquent, on peut écrire les relations :

$$\begin{cases} x_0 = \gamma + L^{-1}g \\ x_1 = -L^{-1}Rx_0 - L^{-1}A_0 \\ x_2 = -L^{-1}Rx_1 - L^{-1}A_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} = -L^{-1}Rx_n - L^{-1}A_n, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (2.12)$$

qui déterminent sans ambiguïté les termes x_n de la série solution puisque une fois les A_n calculés à l'aide de (2.9), les x_n sont déterminés puisque A_{n-1} ne dépend que de x_0, x_1, \dots, x_{n-1} qui sont calculés aux étapes précédentes.

Ainsi, la solution exacte de l'équation (2.5) :

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

est construite de manière récursive.

En pratique, il est difficile d'obtenir tous les termes de la série solution, aussi utilise-t-on une approximation de la solution sous la forme de série tronquée d'ordre s :

$$\phi_s = \sum_{n=0}^{s-1} x_n \quad (2.13)$$

La formule suivante a été proposée par G.Adomian pour le calcul des polynômes d'Adomian :

$$A_n(x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=0}^n c(n, j) f^{(j)}(x_0) \quad (2.14)$$

où $c(n, j)$ représente la somme de tous les produits (divisés par $m!$) des j termes x_i , dont la somme des indices i est égale à n , le nombre m étant le nombre de répétitions des mêmes termes dans le produit. Par exemple $c(3, 1)$ correspond seulement à x_3 , $c(3, 2)$ est x_1x_2 et $c(3, 3) = \frac{x_1^3}{3!}$.

Dans les travaux de G.Adomian rien n'est justifié quant à la convergence de série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ ou, ce qui revient au même, à celle de $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$. Des résultats de convergence

utilisant le théorème du point fixe ont été démontrés et l'on peut, en outre, estimer l'erreur lorsque l'on tronque la série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ [16]. Pour justifier la convergence de la MDA, on doit donner une autre formulation de la méthode. On peut utiliser les propriétés des séries substituées dans une autre série [12] (dont on suppose que l'opérateur N de l'Hilbert H dans lui même est une contraction $\|N\| \leq \delta < 1$). D'autres résultats de convergence sont donnés dans [16] et [43] qui ne font apparaître des hypothèses que sur $N(x_0)$ et ses dérivées $N^{(k)}(x_0)$ au sens de Fréchet. La convergence de la méthode d'Adomian nécessite la convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ ou celle de la série $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$. Sans hypothèses complémentaires sur N , il ne sera pas possible d'aborder sa convergence.

Dans [41] est donné une comparaison entre la méthode de Runge-Kutta et la MDA. K.Abbaoui et Y. Cherruault [42] ont employé la méthode de décomposition pour résoudre le problème de Cauchy. Ils ont également fourni des preuves de convergence en employant une nouvelle formulation des polynômes d'Adomian et ils ont comparé la MDA à la méthode de Picard [16].

L'exemple suivant montre la détermination des polynômes d'Adomian et la série solution.

Exemple 2.1. *Considérons l'équation suivante :*

$$\frac{d^2x}{dt^2} + K^2 \sin x = 0 \quad (2.15)$$

avec les conditions initiales $x(0) = \beta$, $x'(0) = 0$ et K est une constante donnée. L'équation (2.15) peut s'écrire :

$$Lx + Nx = 0$$

avec $Nx = K^2 \sin x$ et $L = \frac{d^2}{dt^2}$.

- On cherche la solution x sous forme :

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

On obtient :

$$x = \beta - L^{-1}Nx = \beta - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

où on a remplacé Nx par : $Nx = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$.

- En utilisant la formule (2.9), on donne les polynômes d'Adomian :

$$\begin{cases} A_0 = \sin x_0 \\ A_1 = x_1 (\cos x_0) \\ A_2 = x_2 (\cos x_0) - \frac{x_1^2}{2!} (\sin x_0) \\ A_3 = x_3 (\cos x_0) - x_1 x_2 (\sin x_0) - \frac{x_1^3}{3!} (\cos x_0) \end{cases}$$

Le schéma récursif suivant permet de déterminer les x_n :

$$\begin{cases} x_0 = \beta \\ x_{n+1} = -L^{-1} K^2 A_n, \quad n = 0, 1, \dots \end{cases}$$

Comme L^{-1} représente l'opérateur d'intégration double entre 0 et t , on obtient :

$$\begin{cases} x_0 = \beta \\ x_1 = \left(-\frac{K^2 t^2}{2!}\right) \sin \beta \\ x_2 = \left(\frac{K^4 t^4}{4!}\right) \sin \beta \cos \beta \\ x_3 = -\left(\frac{K^6 t^6}{6!}\right) (\sin \beta \cos^2 \beta - 3 \sin^3 \beta) \\ \vdots \end{cases}$$

et $\phi_s = \sum_{n=0}^{s-1} x_n$ est l'approximation de la série solution.

La méthode de décomposition rapporte rapidement les solutions convergentes de série en quelques itérations pour des équations fonctionnelles déterministes et stochastiques, linéaires et non linéaires. L'avantage de cette méthode est qu'elle fournit un schéma récursif pour résoudre un problème, c'est à dire sans linéarisation ni discrétisation de l'espace et du temps.

Un problème majeur dans les applications technologiques réside dans la recherche d'une solution acceptable des systèmes non linéaires ou stochastiques modélisés par des équations différentielles ou aux dérivées partielles avec conditions initiales ou aux limites. Dans ces équations, des opérateurs fortement non linéaires apparaissent et pour lesquels l'utilisation des méthodes mathématiques classiques se révèlent lourdes. C'est pourquoi nous allons appliquer la MDA, en particulier pour la résolution des systèmes d'équations différentielles non linéaires.

On adopte les notations suivantes :

Pour $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ et $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose :

$$\begin{aligned} |k| &= k_1 + \dots + k_n \\ |nk| &= k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n \\ k! &= k_1! \dots k_n! \\ x^k &= x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} \\ f^{(n)}(x_0) &= \frac{d^n}{dx^n} [f(x)]_{x=x_0} \end{aligned}$$

2.3 Principe de la méthode décompositionnelle pour des équations différentielles

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) + g(t) \\ x(t=0) = x_0^* \end{cases} \quad (2.16)$$

où f est une fonction *non linéaire* connue et g une fonction également connue.

La MDA [12],[39] consiste à transformer l'équation (2.16) sous *forme canonique*. Pour cela, il suffit de faire une intégration par rapport à t du fait que L est l'opérateur différentiel du premier ordre. Posons :

$$L^{-1}(\cdot) = \int_0^t \cdot ds$$

on obtient :

$$x(t) = x_0^* + L^{-1}f(x) + L^{-1}g(t) \quad (2.17)$$

On cherche la solution x sous la forme :

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \quad (2.18)$$

et l'on décompose $f(x)$ le terme non linéaire en série :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (2.19)$$

Les A_n étant les polynômes d'Adomian donnés par la formule :

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} f \left(\sum_{i=0}^n \lambda^i x_i \right) \Bigg|_{\lambda=0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.20)$$

En reportant (2.18) et (2.19) dans (2.17) on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = x_0^* + L^{-1}g(t) + L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (2.21)$$

qui conduit aux formules déterminants les x_n :

$$\begin{cases} x_0 = x_0^* + L^{-1}g \\ x_1 = L^{-1}A_0(x_0) \\ \vdots \\ x_{n+1} = L^{-1}A_n(x_0, \dots, x_n) \end{cases} \quad (2.23)$$

En pratique, nous utiliserons une série tronquée :

$$\phi_s = \sum_{n=0}^{s-1} x_n$$

2.3.1 Convergence de la méthode dans le cas des équations différentielles

Pour une suite $x_n(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i x_i$, on définit $f(x_n(\lambda))$ par [15] :

$$f(x_n(\lambda)) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i A_i$$

Nous avons le résultat suivant :

Théorème 2.2. [12]. *Si la fonction f est indéfiniment dérivable, alors les polynômes A_n sont donnés par les formules :*

$$\begin{cases} A_0(x_0) = f(x_0) \\ A_n(x_0, \dots, x_n) = \sum_{|nk|=n} f^{(|k|)}(x_0) \frac{x^k}{k!}, \quad n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.24)$$

L'utilisation des formules (2.24) devient difficile lorsque l'on cherche les k_i (pour $i \geq 3$) solutions de l'équation $|nk| = n$. Le résultat suivant permet de surmonter cette difficulté.

Corollaire 2.3. [12],[16], [39]. *Les polynômes A_n sont donnés par les formules :*

$$\begin{cases} A_0(x_0) = f(x_0) \\ A_n(x_0, \dots, x_n) = \sum_{|\alpha|=n} f^{(\alpha_1)}(x_0) \frac{x_1^{(\alpha_1-\alpha_2)}}{(\alpha_1-\alpha_2)!} \cdots \frac{x_{n-1}^{(\alpha_{n-1}-\alpha_n)}}{(\alpha_{n-1}-\alpha_n)!} \frac{x_n^{(\alpha_n)}}{(\alpha_n)!} \\ \text{pour } n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.25)$$

où $(\alpha_i)_{i=1,2,\dots,n}$ est une suite décroissante.

Les formules (2.25) représentent des formules simples pour le calcul des polynômes d'Adomian pour une fonction à une seule variable.

Corollaire 2.4. [12],[16], [39]. Si, dans le théorème précédent, on pose $x_i = a_i t^i$ dans la formule (2.24), on obtient alors

$$A_n(x_0, \dots, x_n) = t^n A_n(a_0, \dots, a_n) \quad (2.26)$$

Revenons à l'équation différentielle (2.16) pour laquelle il devient possible de justifier la convergence de la méthode d'Adomian dans le cas d'une équation différentielle.

Théorème 2.5. [12], [16], [39]. Si f est indéfiniment dérivable en x_0^* et si g est développable en série entière au voisinage de $t_0 = 0$ alors la solution de l'équation différentielle (2.16) est donnée par le schéma :

$$\begin{cases} x_0 = x_0^* \\ x_{n+1} = L^{-1}A_n + L^{-1}\beta_n t^n, \quad n = 0, 1, \dots \\ \text{où } \beta_n = g^{(n)}(0)/n! \end{cases} \quad (2.27)$$

et la série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ coïncide avec la série entière suivante :

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n / n!$$

où les c_n sont donnés par les relations de récurrence :

$$\begin{cases} c_0 = x_0^* \\ c_1 = f(c_0) + g(0) \\ c_{n+1} = \sum_{|nk|=n} \frac{n!}{(1!)^{k_1} (2!)^{k_2} \dots (n!)^{k_n}} \frac{c^k}{k!} f^{(|k|)}(c_0) + g^{(n)}(0) \end{cases} \quad (2.28)$$

On en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 2.6. [12],[16], [39]. Si $g = 0$ alors nous avons :

$$A_n = \frac{x^{n+1}(0) t^n}{n!} \quad (2.29)$$

De plus, si $f^{(k)}(x_0) \leq M$ pour tout entier k , la série solution de l'équation différentielle est absolument convergente dans l'intervalle $[-1/M, 1/M]$ et l'on a :

$$|x_n| \leq \frac{M^n t^n}{n} \quad (2.30)$$

La méthode décompositionnelle d'Adomian est plus générale que la méthode de Taylor puisque les deux schémas (2.23) et (2.27) donnent des séries avec des termes différents. Mais les deux méthodes sont identiques si $g = 0$.

Avant de passer à la généralisation de ces résultats à des systèmes différentiels nous donnons une formule simple de calcul des polynômes d'Adomian.

2.3.2 Formule simple pour le calcul des polynômes d'Adomian pour une fonction à une seule variable

En utilisant la suite décroissante $(\alpha_i)_{i=1,2,\dots,n}$ de la formule (2.25). Les polynômes d'Adomian se calculent facilement pour n'importe quel ordre n .

A l'aide d'un programme informatique, on peut déterminer les $(\alpha_i)_{i=1,2,\dots,n}$ solutions de l'équation :

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = n \\ \text{avec } \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n \end{cases} \quad (2.31)$$

Pour $n = 5$, les solutions sont :

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

La liste suivante représente les polynômes d'Adomian pour $n = 0, 1, \dots, 5$:

$$\begin{aligned} A_0 &= f(x_0) \\ A_1 &= x_1 f^{(1)}(x_0) \\ A_2 &= f^{(1)}(x_0) x_2 + \frac{1}{2} f^{(2)}(x_0) x_1^2 \\ A_3 &= f^{(1)}(x_0) x_3 + f^{(2)}(x_0) x_1 x_2 + \frac{1}{6} f^{(3)}(x_0) x_1^3 \\ A_4 &= f^{(1)}(x_0) x_4 + f^{(2)}(x_0) (x_1 x_3 + \frac{1}{2} x_2^2) + \frac{1}{2} f^{(3)}(x_0) x_1^2 x_2 + \frac{1}{24} f^{(4)}(x_0) x_1^4 \\ A_5 &= f^{(1)}(x_0) x_5 + f^{(2)}(x_0) (x_1 x_4 + x_2 x_3) + \frac{1}{2} f^{(3)}(x_0) (x_1^2 x_3 + x_1 x_2^2) \\ &\quad + \frac{1}{6} f^{(4)}(x_0) x_1^3 x_2 + \frac{1}{120} f^{(5)}(x_0) x_1^5 \end{aligned}$$

L'exemple suivant permet d'illustrer la MDA dans le cas d'une équation différentielle.

Exemple 2.7. *Considérons l'équation suivante :*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^2 \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad (2.32)$$

L'équation (2.32) a une solution unique, si $x(t_0) = 0 \implies x(t) = 0, \forall t$.

Et si $x(t_0) = x_0$ alors la solution exacte est :

$$x_e(t) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} + t_0 - t}$$

Or, ici $t_0 = 0$ et $x_0 = 1$, donc :

$$x_e(t) = \frac{1}{1-t}$$

où l'intervalle d'existence est $]-\infty, 1[$. La courbe de la solution exacte est représentée par la figure 2.1 suivante :

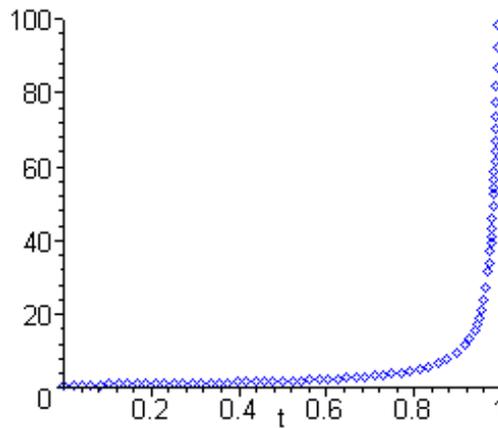


FIGURE 2.1. Courbe de la solution exacte x_e

Commençons par écrire l'équation (2.32) sous forme canonique. L'opérateur linéaire étant :

$$L = \frac{d}{dt}$$

et le terme non linéaire :

$$f(x) = x^2$$

L'équation (2.32) peut s'écrire :

$$x(t) = x(t=0) + L^{-1}f(x) \quad (2.33)$$

où $L^{-1}(\cdot) = \int_0^t \cdot dv$

La MDA consiste à chercher la solution sous forme :

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

et de décomposer le terme non linéaire $f(x)$ en série :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

où les A_n sont les polynômes d'Adomian.

En utilisant la condition initiale donnée dans (2.32), l'équation (2.33) devient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = 1 + L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \quad i = 0, 1, \dots \quad (2.34)$$

Pour $f(x) = x^2$, utilisant les polynômes d'Adomian listés dans la section (2.3.2), on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 = x_0^2 \\ A_1 = 2x_0x_1 \\ A_2 = 2x_0x_2 + x_1^2 \\ A_3 = 2x_0x_3 + 2x_1x_2 \\ A_4 = 2x_0x_4 + 2(x_1x_3 + \frac{1}{2}x_2^2) \\ A_5 = 2x_0x_5 + 2(x_1x_4 + x_2x_3) \end{array} \right.$$

Le premier terme de la série étant :

$$x_0 = 1$$

Les termes x_n , $n \geq 1$ sont déterminés par la relation récursive suivante :

$$x_n(t) = \int_0^t A_{n-1} ds, \quad n = 1, 2, \dots$$

Les six premiers termes de la série solution sont donc :

$$\begin{aligned} x_1 &= \int_0^t A_0 ds = \int_0^t (1)^2 ds = t \\ x_2 &= \int_0^t A_1 ds = \int_0^t 2.(1.s) ds = t^2 \\ x_3 &= \int_0^t A_2 ds = \int_0^t ((2.1.s^2) + s^2) ds = t^3 \\ x_4 &= \int_0^t A_3 ds = \int_0^t ((2.1.s^3) + (2.s.s^2)) ds = t^4 \\ x_5 &= \int_0^t A_4 ds = \int_0^t ((2.1.s^4) + 2.(s.s^3 + \frac{1}{2}(s^2)^2)) ds = t^5 \end{aligned}$$

$$x_6 = \int_0^t A_5 ds = \int_0^t ((2.1.s^5) + 2.(s.s^4 + s^2.s^3)) ds = t^6$$

Les x_n représentent le développement à l'ordre n de la solution *exacte* donnée par :

$$x_e(t) = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n, \text{ si } |t| < 1$$

Une solution approchée de la série solution à l'ordre 7 est donnée :

$$\phi_7(t) = \sum_{n=0}^6 x_n = 1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6$$

La figure suivante représente la superposition des courbes des solutions exacte $x_e(t)$ et approchée $\phi_7(t)$:

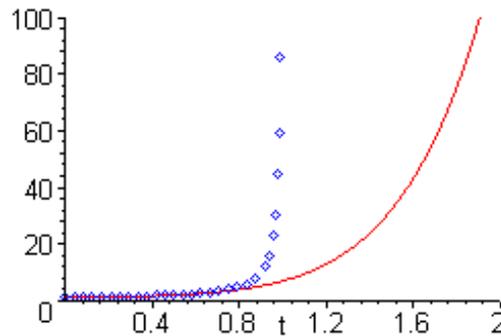


FIGURE 2.2. Superposition des courbes des solutions x_e (points) et ϕ_7 (lignes)

On remarque une superposition parfaite des solutions exacte et approchée sur l'intervalle $[0, 0.75]$.

En augmentant l'ordre de la série tronquée, on s'approche plus de la solution exacte. On fait varier l'ordre de la série tronquée s , $1 \leq s \leq 100$, pour comparer la superposition des courbes de la solution exacte et la solution approchée $\phi_s(t)$. On constate que pour "s" suffisamment grand, l'effort fourni par l'ordinateur est grand et la superposition des courbes des solution exacte et approchée $\phi_{100}(t)$ est meilleure :

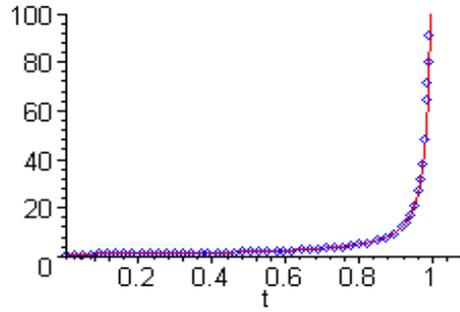


FIGURE 2.3. Superposition des courbes des solutions x_e (points) et ϕ_{100} (lignes)

Exemple 2.8. *Considérons l'équation suivante :*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - x^2 \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad (2.35)$$

La solution exacte est :

$$x_e(t) = \frac{1}{(2 - e^{-t})}$$

Ecrivons l'équation (2.35) sous forme canonique. L'opérateur linéaire :

$$L = \frac{d}{dt}$$

et le terme non linéaire :

$$f(x) = x^2$$

L'équation (2.35) peut s'écrire :

$$x(t) = x(t=0) + L^{-1}x - 2 L^{-1}f(x) \quad (2.36)$$

où $L^{-1}(\cdot) = \int_0^t \cdot ds$

On cherche la solution sous la forme :

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

et on décompose le terme non linéaire $f(x)$ en série :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

où les A_n sont les polynômes d'Adomian.

En utilisant la condition initiale donnée dans (2.35), l'équation (2.36) devient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = 1 + L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} x_n - 2 L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (2.37)$$

Pour $f(x) = x^2$, utilisant les polynômes d'Adomian listés dans la section (2.3.2), on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 = x_0^2 \\ A_1 = 2x_0x_1 \\ A_2 = 2x_0x_2 + x_1^2 \\ A_3 = 2x_0x_3 + 2x_1x_2 \\ A_4 = 2x_0x_4 + 2(x_1x_3 + \frac{1}{2}x_2^2) \\ A_5 = 2x_0x_5 + 2(x_1x_4 + x_2x_3) \end{array} \right.$$

On donne le premier terme de la série :

$$x_0 = 1$$

Les termes x_n , $n \geq 1$ sont déterminés par la relation récursive :

$$x_n(t) = \int_0^t x_{n-1} ds - 2 \int_0^t A_{n-1} ds, \quad n = 1, 2, \dots$$

On donne alors les six premiers termes de la série solution :

$$\begin{aligned} x_1 &= \int_0^t x_0 ds - 2 \int_0^t A_0 ds = \int_0^t 1 ds - 2 \int_0^t (1)^2 ds = -t \\ x_2 &= \int_0^t x_1 ds - 2 \int_0^t A_1 ds = \int_0^t -s ds + 2 \int_0^t 2(1s) ds = \frac{3}{2}t^2 \\ x_3 &= \int_0^t x_2 ds - 2 \int_0^t A_2 ds = \int_0^t \frac{3}{2}s^2 ds - 2 \int_0^t ((-s)^2 + 2(1\frac{3}{2}s^2)) ds = \frac{-13t^3}{6} \\ x_4 &= \int_0^t x_3 ds - 2 \int_0^t A_3 ds = \int_0^t \left(\frac{-13s^3}{6}\right) ds - 2 \int_0^t \left(2\left(\frac{-13s^3}{6}\right) + 2(-s)\left(\frac{3}{2}s^2\right)\right) ds = \\ &= \frac{25}{8}t^4 \\ x_5 &= \int_0^t x_4 ds - 2 \int_0^t A_4 ds = \\ &= \int_0^t \left(\frac{25}{8}s^4\right) ds - 2 \int_0^t \left(2\left(\frac{25}{8}s^4\right) + 2\left((-s)\left(\frac{-13s^3}{6}\right)\right) + \left(\frac{3}{2}s^2\right)^2\right) ds = \frac{-541t^5}{120} \\ x_6 &= \int_0^t x_5 ds - 2 \int_0^t A_5 ds = \int_0^t \frac{-541s^5}{120} ds - 4 \int_0^t \left(\begin{array}{l} \left(\frac{-541s^5}{120}\right) + \\ \left((-s)\left(\frac{25}{8}s^4\right)\right) + \\ \left(\left(\frac{3}{2}s^2\right)\left(\frac{-13s^3}{6}\right)\right) \end{array} \right) ds \\ &= \int_0^t \frac{1561}{40} s^5 ds = \frac{1561}{240} t^6 \end{aligned}$$

La solution approchée d'ordre sept est :

$$\phi_7(t) = \sum_{n=0}^6 x_n = 1 - t + \frac{3}{2}t^2 - \frac{13}{6}t^3 + \frac{25}{8}t^4 - \frac{541}{120}t^5 + \frac{1561}{240}t^6$$

- La courbe qui représente la solution exacte est illustrée dans la figure suivante :

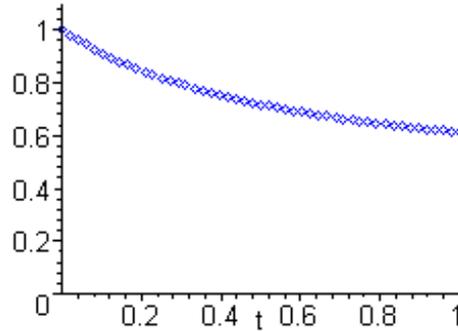


FIGURE 2.4. Courbe de la solution exacte x_e

Quand $t \rightarrow \infty$, on remarque que la courbe tend vers $\frac{1}{2}$.

- La solution approchée $\phi_7(t)$ est donnée par la figure suivante :

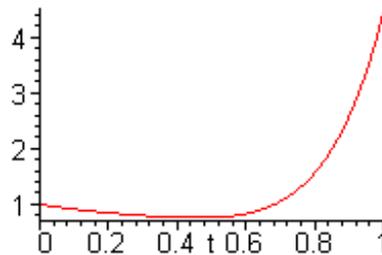


FIGURE 2.5. Courbe de la solution ϕ_7

- La figure suivante représente la superposition des courbes des solutions exacte $x_e(t)$ et approchée $\phi_7(t)$ donnée par la MDA :

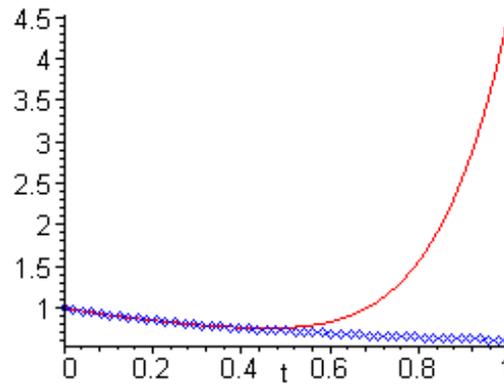


FIGURE 2.6. Superposition des courbes des solutions x_e (points) et ϕ_7 (lignes)

On remarque une superposition parfaite des solutions sur l'intervalle $[0, 0.4]$.

Lorsqu'on augmente l'ordre de la série tronquée on s'approche de la solution exacte. La superposition des courbes de la solution exacte et la solutions approchée $\phi_s(t)$ obtenues par la MDA pour s , $0 \leq s \leq 30$ montre une superposition de la solution ϕ_{30} et la solution exacte $x_e(t)$ est parfaite sur l'intervalle $[0, 0.6]$.

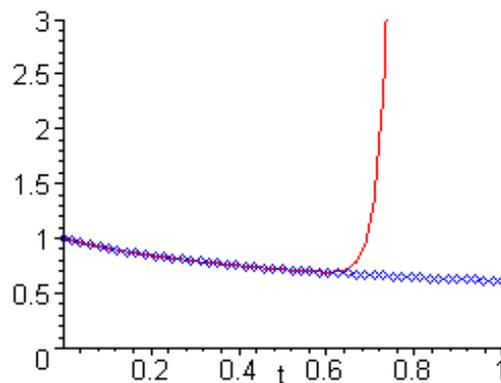


FIGURE 2.7. Superposition des courbes des solutions x_e (points) et ϕ_{30} (lignes)

Cependant au delà de $t = 0.6$, on remarque que $\phi_{30}(t)$ est supérieur à la condition initiale fixée à 1. La superposition des courbes des solutions exacte et approchée $\phi_{30}(t)$ confirme l'efficacité de la MDA sur des intervalles relativement réduits. Ceci permet de conclure que la MDA fournit pour un ordre de troncature de série petit, la solution approchée sur des petits intervalles, plus l'ordre de la série est grand plus la solution approchée coïncide avec la solution exacte sur des intervalles plus grands mais l'effort fourni par l'ordinateur est assez grand.

2.4 Principe de la méthode décompositionnelle d'Adomian pour les systèmes différentiels

Considérons le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_p) + g_i \\ x_i(t=0) = x_{i0}^* \quad , \quad i = 1, \dots, p \end{cases} \quad (2.38)$$

où f_i sont des termes non linéaires et g_i sont des fonctions connus.

On cherche la solution sous la forme :

$$x_i = \sum_{n=0}^{\infty} x_{in} \quad , \quad i = 1, \dots, p \quad (2.39)$$

Les termes non linéaires f_i sont décomposés comme suit :

$$f_i(x_1, \dots, x_p) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{in} \quad (2.40)$$

où les A_{in} polynômes d'Adomian [12] dépendent de $x_{01}, \dots, x_{n1}, \dots, x_{0p}, \dots, x_{np}$. On les obtient à partir des formules de définition de A_n , soit :

$$A_{in}(x_{01}, \dots, x_{n1}, x_{02}, \dots, x_{n2}, \dots, x_{0p}, \dots, x_{np}) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} f_i(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0p}) \Big|_{\lambda=0} \quad (2.41)$$

où les x_i sont pris sous la forme :

$$x_1 = \sum_{i=0}^n \lambda^i x_{i1}, \quad x_2 = \sum_{i=0}^n \lambda^i x_{i2}, \quad \dots, \quad x_p = \sum_{i=0}^n \lambda^i x_{ip}. \quad (2.42)$$

où λ est un paramètre introduit par commodité.

En passant à la forme canonique $L^{-1}(\cdot) = \int_0^t \cdot ds$ et en utilisant (2.39) et (2.40) on obtient les relations :

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_{in} = x_{i0}^* + L^{-1}g_i + L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_{in} \quad , \quad i = 1, \dots, p \quad (2.43)$$

qui donnent les x_{in} à l'aide des formules :

$$\begin{cases} x_{i0} = x_{i0}^* + L^{-1}g_i \\ x_{i1} = L^{-1}A_{i0} \\ x_{i2} = L^{-1}A_{i1} \\ \vdots \\ x_{in+1} = L^{-1}A_{in} \end{cases} \quad , \quad i = 1, \dots, p \quad \text{et} \quad n \in \{0, 1, \dots\} \quad (2.44)$$

Les A_{in} sont donnés par les formules (voir [12],[16], [24]) suivantes pour une fonction à p variables, indéfiniment différentiable :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{i0}(x_{01}, \dots, x_{0p}) = f_i(x_{01}, \dots, x_{0p}) \\ A_{in}(x_{01}, \dots, x_{n1}, \dots, x_{1p}, \dots, x_{np}) = \sum_{\text{somme}=n} \frac{x_{11}^{k_{11}}}{k_{11}!} \cdots \frac{x_{1n}^{k_{1n}}}{k_{1n}!} \cdots \frac{x_{p1}^{k_{p1}}}{k_{p1}!} \cdots \frac{x_{pn}^{k_{pn}}}{k_{pn}!} \cdot \\ \left(\frac{\partial^{k_{11}+\dots+k_{1n}+\dots+k_{p1}+\dots+k_{pn}}}{\partial x_1^{k_{11}+\dots+k_{1n}} \cdots \partial x_p^{k_{p1}+\dots+k_{pn}}} f_i(x_{01}, \dots, x_{np}) \right), \\ \text{où } \text{somme} = k_{11} + \dots + nk_{1n} + \dots + k_{p1} + \dots + nk_{pn} \end{array} \right. \quad (2.45)$$

On ne peut pas calculer tous les termes de la série $\sum_{n=0}^{\infty} x_{in}$, alors on se contentera d'une solution approchée à partir de la série tronquée d'ordre s :

$$\phi_{i,s} = \sum_{n=0}^{s-1} x_{in}, \quad i = 1, \dots, p \quad (2.46)$$

Les polynômes d'Adomian pour $p = 2$ sont :

$$A_n(y_0, \dots, y_n, z_0, \dots, z_n) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} f(y, z)|_{\lambda=0} \quad (2.47)$$

où

$$y = \sum_{i=0}^n \lambda^i y_i, \quad z = \sum_{i=0}^n \lambda^i z_i \quad (2.48)$$

qui conduit au

Théorème 2.9. [12]. *Si la fonction f est indéfiniment dérivable, nous aurons les formules de A_n suivantes :*

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0(y_0, z_0) = f(y_0, z_0) \\ A_n(y_0, \dots, y_n; z_0, \dots, z_n) = \sum_{p_1+2p_2+\dots+np_n+q_1+\dots+nq_n=n} \frac{y_1^{p_1}}{p_1!} \cdots \frac{y_n^{p_n}}{p_n!} \frac{z_1^{q_1}}{q_1!} \cdots \frac{z_n^{q_n}}{q_n!} \\ \frac{\partial^{p_1+\dots+p_n+q_1+\dots+q_n}}{\partial y^{p_1+\dots+p_n} \partial z^{q_1+\dots+q_n}} f(y_0, z_0) \end{array} \right. \quad (2.49)$$

En posant :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 = \alpha_1 - \alpha_2 \\ p_2 = \alpha_2 - \alpha_3 \\ \vdots \\ p_{n-1} = \alpha_{n-1} - \alpha_n \\ p_n = \alpha_n \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} q_1 = \beta_1 - \beta_2 \\ q_2 = \beta_2 - \beta_3 \\ \vdots \\ q_{n-1} = \beta_{n-1} - \beta_n \\ q_n = \beta_n \end{array} \right.$$

on obtient les formules du :

Corollaire 2.10. [12]. *En se servant des hypothèses du théorème précédant, les polynômes A_n seront donnés par les expressions :*

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0(y_0, z_0) = f(y_0, z_0) \\ A_n(y_0, \dots, y_n; z_0, \dots, z_n) = \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n + \beta_1 + \dots + \beta_n = n} \frac{y_1^{(\alpha_1 - \alpha_2)}}{(\alpha_1 - \alpha_2)!} \cdots \frac{y_n^{(\alpha_n)}}{(\alpha_n)!} \frac{z_1^{(\beta_1 - \beta_2)}}{(\beta_1 - \beta_2)!} \cdots \frac{z_n^{(\beta_n)}}{(\beta_n)!} \\ \frac{\partial^{\alpha_1 + \beta_1}}{\partial y^{\alpha_1} \partial z^{\beta_1}} f(y_0, z_0) \end{array} \right. \quad (2.50)$$

où les (α_i) et les (β_i) sont deux suites décroissantes.

Ces formules sont aisément généralisables à p variables.

2.4.1 Convergence de la méthode décompositionnelle dans le cas des systèmes différentiels

Les résultats obtenus dans le cas d'une équation différentielle [12] peuvent être généralisés pour des systèmes différentiels. En particulier nous avons les théorèmes suivants :

Théorème 2.11. [12]. *Si $x_{in} = a_{in}t^i$, alors les polynômes d'Adomian vérifient les relations*

$$A_{in}(x_{01}, \dots, x_{n1}; \dots; x_{0p}, \dots, x_{np}) = t^n A_{in}(a_{01}, \dots, a_{n1}; \dots; a_{0p}, \dots, a_{np}) \quad (2.51)$$

Théorème 2.12. [12]. *Si les f_i sont indéfiniment dérivables en x_{i0}^* et les g_i développables en série entière au voisinage de $t_0 = 0$, les solutions du système différentiel (2.38) données par le schéma suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{i0} = x_{i0}^* \\ x_{in+1} = L^{-1}A_{in} + L^{-1}\beta_{in}t^n, \quad n = 0, 1, \dots \\ \text{où } \beta_{in} = g_i^{(n)}(0)/n! \end{array} \right. \quad (2.52)$$

sont de la forme :

$$x_i = \sum_{n=0}^{\infty} c_{in}t^n/n! \quad (2.53)$$

où les c_{in} sont donnés par les formules récurrentes :

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{i0} = x_{i0}^* \\ c_{i1} = f_i(c_{10}, c_{20}, \dots, c_{p0}) + g_i(0) \\ c_{in+1} = g_i^{(n)}(0) + \sum_{\text{somme}=n} \frac{n!}{(1!)^{k_{11}+\dots+k_{p1}} \dots (n!)^{k_{1n}+\dots+k_{pn}}} \cdot \frac{c_{11}^{k_{11}}}{k_{11}!} \cdot \frac{c_{1n}^{k_{1n}}}{k_{1n}!} \cdot \frac{c_{p1}^{k_{p1}}}{k_{p1}!} \cdot \frac{c_{pn}^{k_{pn}}}{k_{pn}!} \\ \left(\frac{\partial^{k_{11}+\dots+k_{1n}+\dots+k_{p1}+\dots+k_{pn}}}{\partial x_1^{k_{11}+\dots+k_{1n}} \dots \partial x_p^{k_{p1}+\dots+k_{pn}}} \right) f_i(x_{01}, \dots, x_{0p}) \\ \text{où somme} = k_{11} + \dots + nk_{1n} + \dots + k_{p1} + \dots + nk_{pn} \end{array} \right. \quad (2.54)$$

pour $i = 1, \dots, p$.

On en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 2.13. [12]. Si les g_i sont nulles, les solutions du système différentiel (2.38) sont données par (2.52), (2.53) avec les expressions donnant les c_{in} , $g_i(0)$ et $g_i^n(0)$ pour tout n et tout $i = 1, \dots, p$. Cela entraîne, de plus, que la méthode d'Adomian coïncide avec la méthode de Runge-Kutta pour n'importe quel ordre (dans le cas où les g_i sont nulles).

Remarque 2.14. Si $g_i = 0$ pour $i = 1, \dots, p$, les deux schémas (2.44) et (2.52) donnent la même solution $x_i = \sum_{n=0}^{\infty} c_{in} t^n / n!$, où c_{in} sont donnés par (2.54). Cela provient du fait que les méthodes de Runge-Kutta sont déduites du développement de Taylor et elles découlent des relations (2.54) lorsque les $g_i \equiv 0$. Contrairement aux méthodes décompositionnelles, la technique de Runge-Kutta implique le calcul de $f(x, y)$, dans le cas d'une fonction de deux variables, en un grand nombre de points de \mathbb{R}^2 (de \mathbb{R}^p dans le cas général) et l'on ne trouve la solution que sur un ensemble discret de $[0, \infty[$. De plus, les méthodes de Runge-Kutta ne permettent pas de suivre facilement l'évolution des erreurs. Par contre, la méthode décompositionnelle permet d'obtenir la solution sous forme de fonction explicite de la variable temps (t) et l'on peut estimer l'erreur commise en tronquant la série solution. Cette méthode est plus générale que celle de Runge-Kutta. En outre, les deux méthodes, pour le même ordre et le même pas de discrétisation donnent rigoureusement la même solution (ce qui a été vérifié numériquement [16]).

2.4.2 Formule simple pour le calcul des polynômes d'Adomian pour une fonction à deux variables

La formule (2.50) permet de calculer facilement les polynômes d'Adomian pour une fonction à deux variables. En utilisant les deux suites décroissantes (α_i) et les (β_i) , $i = 1, \dots, n$. Tous les entiers solutions de :

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_n + \beta_1 + \dots + \beta_n = n$$

avec

$$\begin{cases} \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n \\ \beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_n \end{cases}$$

sont calculés par un programme informatique. Par exemple pour $n = 3$, on a :

$$\begin{array}{cccccc} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

En introduisant les notations :

$$\left. \frac{\partial^{\nu+\mu}}{\partial \nu \partial \mu} f(y(\lambda), z(\lambda)) \right|_{\lambda=0} = f_{\nu, \mu}(y_0, z_0) \quad (2.55)$$

On peut lister les A_n pour $n = 0, 1, 2, 3$.

$$\begin{aligned}
A_0 &= f_{0.0}(y_0, z_0) \\
A_1 &= y_1 f_{1.0}(y_0, z_0) + z_1 f_{0.1}(y_0, z_0) \\
A_2 &= y_2 f_{1.0}(y_0, z_0) + z_2 f_{0.1}(y_0, z_0) + \frac{1}{2!} y_1^2 f_{2.0}(y_0, z_0) + \frac{1}{2!} z_1^2 f_{0.2}(y_0, z_0) + \\
&\quad y_1 z_1 f_{1.1}(y_0, z_0) \\
A_3 &= y_3 f_{1.0}(y_0, z_0) + y_3 f_{0.1}(y_0, z_0) + y_1 y_2 f_{2.0}(y_0, z_0) + z_1 z_2 f_{0.2}(y_0, z_0) \\
&\quad + (y_1 z_2 + y_2 z_1) f_{1.1} + \frac{1}{3!} y_1^3 f_{3.0}(y_0, z_0) + \frac{1}{3!} z_1^3 f_{0.3}(y_0, z_0) + \frac{1}{2!} y_1^2 z_1 f_{2.1}(y_0, z_0) + \\
&\quad \frac{1}{2!} y_2 z_1^2 f_{1.2}(y_0, z_0)
\end{aligned}$$

Donnons un exemple pour illustrer la MDA dans le cas d'un système différentiel.

Exemple 2.15.

Prenons l'exemple d'un modèle compartimental à deux compartiments reliés entre eux dans les deux sens avec un échange non linéaire et un échange linéaire du compartiment 1 avec l'extérieur selon la figure ci-dessous :

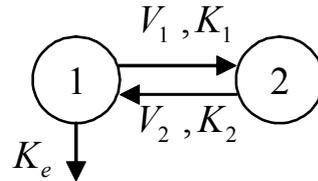


FIGURE 2.8. Modèle à deux compartiments

En pharmacologie le compartiment 1 représente le compartiment sanguin et le compartiment 2 celui où agit la substance chimique (foie, poumons, reins,...).

L'échange du compartiment 1 vers le compartiment 2 et (ou) le compartiment 2 vers le compartiment 1 est non linéaire de type *Michaelis- Menten*. Ce type d'élimination est une fonction non linéaire de la forme :

$$f_i(x_i) = \frac{V_i x_i}{K_i + x_i}, \quad i = 1, 2$$

où $f_i(x_i)$ représente la capacité limitée d'excitation d'une substance contenue dans un compartiment i , où V_i et K_i sont les constantes de *Michaelis-Menten* avec V_i le volume du compartiment i et $x_i(t)$ représente la quantité ou la concentration de la substance chimique dans un compartiment i à l'instant t .

- L'échange du compartiment 1 vers le compartiment 2 et (ou) le compartiment 2 vers le compartiment 1 est non linéaire.
- K_e : constante d'échange linéaire du compartiment 1 avec l'extérieur.

Le modèle ci-dessous se traduit par le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = - \left(K_e + \frac{V_1}{K_1+x_1} \right) x_1 + \frac{V_2}{K_2+x_2} x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{V_1}{K_1+x_1} x_1 - \frac{V_2}{K_2+x_2} x_2 \\ x_1(0) = \beta, \quad x_2(0) = 0, \quad \text{où } \beta \text{ donné} \end{cases} \quad (2.56)$$

où les conditions initiales correspondent à une administration instantanée (injection) d'une quantité β de substance chimique à l'instant 0, dans le premier compartiment,

La forme canonique associée au système (2.56) est la suivante :

$$\begin{cases} x_1 = \beta - K_e L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} x_{1n} - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_{1n} + L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} \\ x_2 = L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_{1n} - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} \end{cases} \quad (2.57)$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} x_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} x_{1n}, \quad x_2 = \sum_{n=0}^{\infty} x_{2n}, \\ f_1(x_1) &= \frac{V_1 x_1}{K_1 + x_1} = \sum_{n=0}^{\infty} A_{1n}, \quad f_2(x_2) = \frac{V_2}{K_2 + x_2} x_2 = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} \end{aligned}$$

où les A_{1n} , A_{2n} sont les polynômes d'Adomian associés aux termes non linéaires :

$$f_1(x_1) = \frac{V_1 x_1}{K_1 + x_1} \text{ et } f_2(x_2) = \frac{V_2}{K_2 + x_2} x_2 \text{ respectivement}$$

En utilisant la formule simple présentée dans la section (2.4.2) qui donne les A_{in} , pour $i = 1, 2$, on obtient :

$$\begin{aligned} A_{i0} &= f_i(x_{i0}) = \frac{V_i}{K_i+x_{i0}} x_{i0} \\ A_{i1} &= x_{i1} f_i^{(1)}(x_{i0}) = x_{i1} \frac{V_i K_i}{(K_i+x_{i0})^2} \\ A_{i2} &= x_{i2} f_i^{(1)}(x_{i0}) + \frac{x_{i1}^2}{2!} f_i^{(2)}(x_{i0}) = x_{i2} \frac{V_i K_i}{(K_i+x_{i0})^2} - x_{i1}^2 \frac{V_i K_i}{(K_i+x_{i0})^3} \\ A_{i3} &= x_{i3} f_i^{(1)}(x_{i0}) + x_{i1} x_{i2} f_i^{(2)}(x_{i0}) + \frac{x_{i1}^3}{3!} f_i^{(3)}(x_{i0}) \\ &= x_{i3} \frac{V_i K_i}{(K_i+x_{i0})^2} - 2x_{i1} x_{i2} \frac{V_i K_i}{(K_i+x_{i0})^3} + x_{i1}^3 \frac{V_i K_i}{(K_i+x_{i0})^4} \\ &\vdots \end{aligned}$$

et ainsi de suite.

solutions approchées à l'ordre s pour $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont données par :

$$\phi_{1,s} = \sum_{n=0}^{s-1} x_{1n}, \quad \phi_{2,s} = \sum_{n=0}^{s-1} x_{2n}$$

où les termes x_{1n}, x_{2n} sont obtenus à partir du schéma récursif suivant :

$$\begin{cases} x_{10} = \beta, & x_{20} = 0 \\ x_{1n} = K_e L^{-1} x_{1(n-1)} - L^{-1} A_{1(n-1)} + L^{-1} A_{2(n-1)}, & n = 1, 2, \dots \\ x_{2n} = L^{-1} A_{1(n-1)} - L^{-1} A_{2(n-1)} \end{cases} \quad (2.58)$$

Les premiers termes des solutions approchées sont donnés par :

$$\begin{aligned} x_{10} &= \beta \\ x_{20} &= 0 \end{aligned}$$

Les polynômes d'Adomian A_{10}, A_{20} associés aux termes non linéaires sont :

$$\begin{cases} A_{10} = f_1(x_{10}) = \frac{V_1}{K_1+x_{10}} x_{10} = \frac{V_1}{K_1+\beta} \beta \\ A_{20} = f_2(x_{20}) = \frac{V_2}{K_2+x_{20}} x_{20} = 0 \end{cases}$$

de la relation (2.58) on obtient les solutions x_{11}, x_{21} :

$$\begin{aligned} x_{11} &= -K_e \int_0^t x_{10} du - \int_0^t A_{10}(u) du + \int_0^t A_{20}(u) du \\ &= -K_e \int_0^t \beta du - \int_0^t \frac{V_1}{K_1+\beta} \beta du + \int_0^t 0 du \end{aligned}$$

$$x_{11} = -K_e \beta t - \frac{V_1}{K_1+\beta} \beta t$$

$$\begin{aligned} x_{21} &= \int_0^t A_{10}(u) du - \int_0^t A_{20}(u) du \\ &= \int_0^t \frac{V_1}{K_1+\beta} \beta du - \int_0^t 0 du \end{aligned}$$

$$x_{21} = \frac{V_1}{K_1+\beta} \beta t$$

On calcule les polynômes d'Adomian A_{11}, A_{21} par :

$$\begin{cases} A_{11} = x_{11} f_1^{(1)}(x_{10}) = x_{11} \frac{V_1 K_1}{(K_1+x_{10})^2} = - \left(K_e \beta - \frac{V_1 \beta}{K_1+\beta} \right) \frac{V_1 K_1}{(K_1+\beta)^2} t \\ A_{21} = x_{21} f_2^{(1)}(x_{20}) = x_{21} \frac{V_2 K_2}{(K_2+x_{20})^2} = \frac{V_1 \beta}{K_1+\beta} \frac{V_2 K_2}{K_2^2} t \end{cases}$$

pour avoir les solutions x_{12} et x_{22} :

$$\begin{aligned} x_{12} &= -K_e \int_0^t x_{11} du - \int_0^t A_{11}(u) du + \int_0^t A_{21}(u) du \\ &= -K_e \int_0^t \left(-K_e \beta - \frac{V_1}{K_1 + \beta} \beta \right) u du - \int_0^t \left(\left(K_e \beta - \frac{V_1 \beta}{K_1 + \beta} \right) \frac{V_1 K_1}{(K_1 + \beta)^2} \right) u du + \\ &\int_0^t \frac{V_1 \beta}{K_1 + \beta} \frac{V_2 K_2}{(K_2)^2} u du \\ x_{12} &= \left(-K_e \beta + \frac{V_1 \beta}{K_1 + \beta} \left(K_e - \frac{K_1 K_e}{K_1 + \beta} + \frac{V_1 K_1}{(K_1 + \beta)^2} + \frac{V_2 K_2}{K_2^2} \right) \right) \frac{t^2}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{22} &= \int_0^t A_{11}(u) du - \int_0^t A_{21}(u) du \\ &= \int_0^t \left(- \left(K_e \beta - \frac{V_1 \beta}{K_1 + \beta} \right) \frac{V_1 K_1}{(K_1 + \beta)^2} \right) u du - \int_0^t \frac{V_1 \beta}{K_1 + \beta} \frac{V_2 K_2}{K_2^2} u du \\ x_{22} &= \frac{V_1 \beta}{K_1 + \beta} \left(\frac{K_1 K_e}{(K_1 + \beta)} - \frac{V_1 K_1}{(K_1 + \beta)^2} - \frac{V_2 K_2}{K_2^2} \right) \frac{t^2}{2} \end{aligned}$$

On détermine A_{12} et A_{22} :

$$\begin{aligned} A_{12} &= x_{12} f_1^{(1)}(x_{10}) + \frac{x_{11}^2}{2!} f_1^{(2)}(x_{10}) = x_{12} \frac{V_1 K_1}{(K_1 + x_{10})^2} - x_{11}^2 \frac{V_1 K_1}{(K_1 + x_{10})^3} \\ &= \left(\frac{V_1 K_1}{(K_1 + \beta)^2} \left(-K_e \beta + \frac{V_1 \beta}{K_1 + \beta} \left(K_e - \frac{K_1 K_e}{K_1 + \beta} + \frac{V_1 K_1}{(K_1 + \beta)^2} + \frac{V_2 K_2}{K_2^2} \right) \right) - \right. \\ &\quad \left. \left(2 \frac{V_1 K_1}{(K_1 + \beta)^3} \left(-K_e \beta - \frac{V_1}{K_1 + \beta} \beta \right)^2 \right) \right) \frac{t^2}{2} \\ A_{22} &= x_{22} f_2^{(1)}(x_{20}) + \frac{x_{21}^2}{2!} f_2^{(2)}(x_{20}) = x_{22} \frac{V_2 K_2}{(K_2 + x_{20})^2} - x_{21}^2 \frac{V_2 K_2}{(K_2 + x_{20})^3} \\ &= \left(\frac{V_2 K_2}{(K_2)^2} \frac{V_1 \beta}{K_1 + \beta} \left(\frac{K_1 K_e}{(K_1 + \beta)} - \frac{V_1 K_1}{(K_1 + \beta)^2} - \frac{V_2 K_2}{K_2^2} \right) - 2 \frac{V_2 K_2}{(K_2)^3} \left(\frac{V_1 \beta}{K_1 + \beta} \right)^2 \right) \frac{t^2}{2} \end{aligned}$$

Les termes x_{13} et x_{23} :

$$\begin{aligned} x_{13} &= \left(\begin{aligned} x_{13} &= -K_e \int_0^t x_{12} du - \int_0^t A_{12}(u) du + \int_0^t A_{22}(u) du \\ &= K_e \beta - \frac{V_1 \beta K_1 e}{K_1 + \beta} \left(K_e - \frac{K_1 K_e}{K_1 + \beta} + \frac{V_1 K_1}{(K_1 + \beta)^2} + \frac{V_2 K_2}{K_2^2} \right) - \\ &\quad \left(\frac{V_1 K_1}{(K_1 + \beta)^2} \right) \left(-K_e \beta + \frac{V_1 \beta}{K_1 + \beta} \left(K_e - \frac{K_1 K_e}{K_1 + \beta} + \frac{V_1 K_1}{(K_1 + \beta)^2} + \frac{V_2 K_2}{K_2^2} \right) \right) \\ &\quad + \left(\frac{V_1 K_1}{(K_1 + \beta)} \right) \left(-K_e \beta - \frac{V_1}{K_1 + \beta} \beta \right) \end{aligned} \right) \frac{t^3}{3!} \\ x_{23} &= \int_0^t A_{12}(u) du - \int_0^t A_{22}(u) du \\ x_{23} &= \left(\left(\left(\frac{V_1 K_1}{(K_1 + \beta)^2} \right) \left(-K_e \beta + \frac{V_1 \beta}{K_1 + \beta} \left(K_e - \frac{K_1 K_e}{K_1 + \beta} + \frac{V_1 K_1}{(K_1 + \beta)^2} + \frac{V_2 K_2}{K_2^2} \right) \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left(2 \frac{V_1 K_1}{(K_1 + \beta)^3} \left(-K_e \beta - \frac{V_1}{K_1 + \beta} \beta \right)^2 \right) \right) - \\ &\quad \left(\frac{V_2 K_2}{(K_2)^2} \frac{V_1 \beta}{K_1 + \beta} \left(\frac{K_1 K_e}{(K_1 + \beta)} - \frac{V_1 K_1}{(K_1 + \beta)^2} - \frac{V_2 K_2}{K_2^2} \right) - 2 \frac{V_2 K_2}{(K_2)^3} \left(\frac{V_1 \beta}{K_1 + \beta} \right)^2 \right) \right) \frac{t^3}{3!} \end{aligned}$$

Les solutions d'approximation $x_1(t)$ et $x_2(t)$ à l'ordre 4 sont :

$$\begin{aligned}\phi_{1,4} &= \sum_{n=0}^3 x_{1n} \\ &= x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} \\ &= \beta - \left(\frac{K_e \beta +}{\frac{V_1}{K_1 + \beta} \beta} \right) t + \left(-K_e^2 \beta + \frac{V_1 \beta}{K_1 + \beta} \left(\frac{K_e - \frac{K_1 K_e}{K_1 + \beta} +}{\frac{V_1 K_1}{(K_1 + \beta)^2} + \frac{V_2 K_2}{K_2^2}} \right) \right) \frac{t^2}{2} + \frac{1}{6} [\dots] t^3\end{aligned}$$

de même pour $x_2(t)$

$$\begin{aligned}\phi_{2,4} &= \sum_{n=0}^3 x_{2n} \\ &= x_{20} + x_{21} + x_{22} + x_{23} \\ &= \frac{V_1}{K_1 + \beta} \beta t + \frac{V_1 \beta}{K_1 + \beta} \left(\frac{K_1 K_e}{(K_1 + \beta)} - \frac{V_1 K_1}{(K_1 + \beta)^2} - \frac{V_2 K_2}{K_2^2} \right) \frac{t^2}{2} + \frac{1}{6} [\dots] t^3\end{aligned}$$

On fixe les paramètres $\beta = V_1 = K_1 = V_2 = K_2 = 1$ et $K_e = 0$, on obtient :

$$f_1(x_1) = \frac{x_1}{1 + x_1}, \quad f_2(x_2) = \frac{x_2}{1 + x_2}$$

Les termes x_{1n} et x_{2n} , $n = 0, \dots, 3$ sont :

$$x_{10} = \beta = 1$$

$$x_{20} = 0$$

$$x_{11} = -\frac{1}{2}t$$

$$x_{21} = \frac{1}{2}t$$

$$x_{12} = \frac{5}{16}t^2$$

$$x_{22} = -\frac{5}{16}t^2$$

$$x_{13} = -\frac{13}{64}t^3$$

$$x_{23} = \frac{13}{64}t^3$$

d'où les séries tronquées d'ordre 4 :

$$\phi_{1,4} = 1 - \frac{1}{2}t + \frac{5}{16}t^2 - \frac{13}{64}t^3, \text{ pour les } x_{1n}$$

et

$$\phi_{2,4} = \frac{1}{2}t - \frac{5}{16}t^2 + \frac{13}{64}t^3, \text{ pour les } x_{2n}$$

La figure suivante représente les courbes des solutions obtenues par la résolution du système différentiel (2.56) à l'aide de la méthode de Runge-Kutta (plus) et la méthode d'Adomian (lignes) :

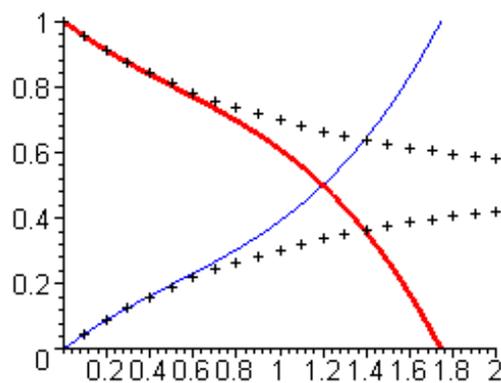


FIGURE 2.9. Courbes des solutions du modèle compartimental obtenues par Runge-Kutta (+) et Adomian (lignes)

D'après la figure (2.9), on remarque une superposition parfaite des courbes des solutions sur l'intervalle $[0, 0.4]$. En augmentant l'ordre de la série tronquée, afin de balayer un grand intervalle, pour $s \geq 20$ suffisamment grand, l'effort fourni par l'ordinateur est grand.

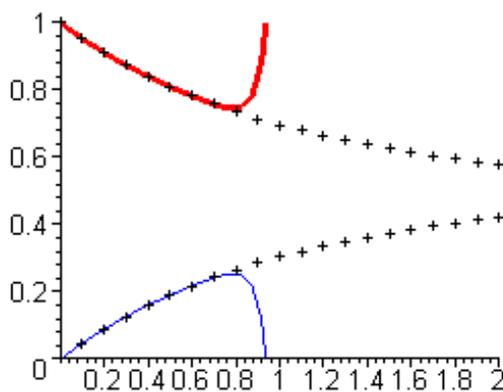


FIGURE 2.10. Superposition des courbes des solutions obtenues par Runge-Kutta (+) et Adomian ϕ_{21} (lignes) du modèle compartimental

Il est clair que les courbes des solutions du modèle compartimental sont bien superposées sur l'intervalle $[0, 0.7]$.

On va présenter dans le paragraphe suivant une approche qui permet d'obtenir des solutions sur des intervalles plus grands.

Extension et suggestion pour la méthode décompositionnelle d'Adomian

Nous avons remarqué que la méthode d'Adomian fournit pour un ordre de troncature de série petit, la solution approchée sur des petits intervalles. Plus l'ordre de la série est grand plus la solution approchée coïncide avec la solution exacte sur des intervalles plus grands. D'un autre coté l'effort fourni par l'ordinateur est grand. Pour pallier à ce problème, on propose une technique dite "de recollement des solutions". Elle permet pas à pas, en réitérant l'application de la méthode décompositionnelle de s'approcher de la solution exacte.

Le principe de la technique est le suivant :

Les séries $x_i = \sum_{j=0}^{\infty} x_{i,j}$, $i = 1, \dots, p$ sont convergentes sur $I_0 = [t_0, t_1]$, où $t_0 = 0$ et t_1 est la borne supérieure pour laquelle la solution obtenue par la MDA coïncide avec la solution exacte.

On peut considérer que la restriction notée x_i à I_0 est la solution du problème (P_0) :

$$P_0 \begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n, t) + g_i, & t \in [t_0, t_1], t_0 = 0 \\ x_i(t_0) = x_{i,0}^* & , i = 1, \dots, p \end{cases}$$

On note $x_{i,j}^{(0)}$ les restrictions à I_0 des fonctions x_i obtenues par les relations récurrentes (2.44) (ou par (2.23) dans le cas d'équation différentielle) et par $\phi_{is}^{(0)}(t) = \sum_{j=0}^{s-1} x_{i,j}^{(0)}$, $i = 1, \dots, p$, les solutions approchées du problème P_0 .

On cherche les solutions x_i , $i = 1, \dots, p$ sur $I_1 =]t_1, t_2[$ telle que :

$$P_1 \begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n, t) + g_i, & t \in [t_1, t_2] \\ x_i(t_1) = \phi_{is}^{(0)}(t_1), & i = 1, \dots, p \end{cases}$$

Ainsi, définissons le problème P_k .

Trouver x_i , $i = 1, \dots, p$ sur l'intervalle $I_k =]t_k, t_{k+1}[$ telles que :

$$P_k \begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n, t) + g_i & t \in [t_k, t_{k+1}] \\ x_i(t_k) = \phi_{is}^{(k-1)}(t_k), & i = 1, \dots, p \end{cases}$$

où $\phi_{is}^{(k-1)} = \sum_{j=0}^{s-1} x_{i,j}^{(k-1)}$, $i = 1, \dots, p$ sont les séries solutions tronquées du problème P_k obtenues par la MDA.

On définit le pas de recollement h par :

$$h = \underset{0 \leq j \leq r}{\text{Min}} |t_j - t_{j+1}|$$

où r est le nombre de recollements effectués pour balayer l'intervalle $[0, T]$.

Appliquons cette technique aux exemples précédemment présentés.

Pour l'exemple 2, avec un pas de recollement égal à $\frac{1}{100}$ et l'ordre de la série tronquée étant 4, on a la courbe suivante :

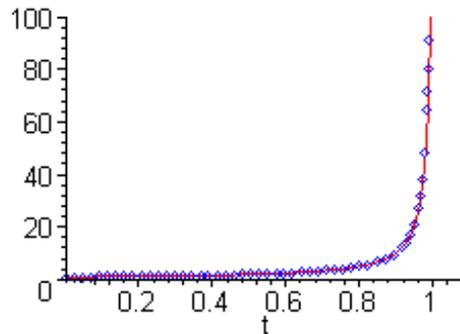


FIGURE 2.11. Superposition des courbes de la solution exacte (points) et le recollement des solutions (lignes)

La technique de recollement appliquée à l'exemple 3, avec un pas de recollement égal à $\frac{1}{10}$ et l'ordre de la série tronquée égal à 7 pour balayer l'intervalle $[0, 20]$, on obtient la courbe suivante :

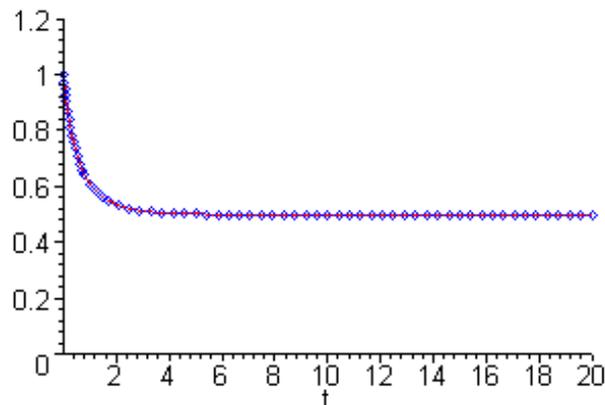


FIGURE 2.12. Superposition des courbes de la solution exacte (points) et le recollement des solutions (lignes)

Pour l'exemple 4, avec l'ordre de la série égale à 4 et le pas $\frac{2}{10}$, pour balayer l'intervalle $[0, 7]$, on obtient la courbe suivante :

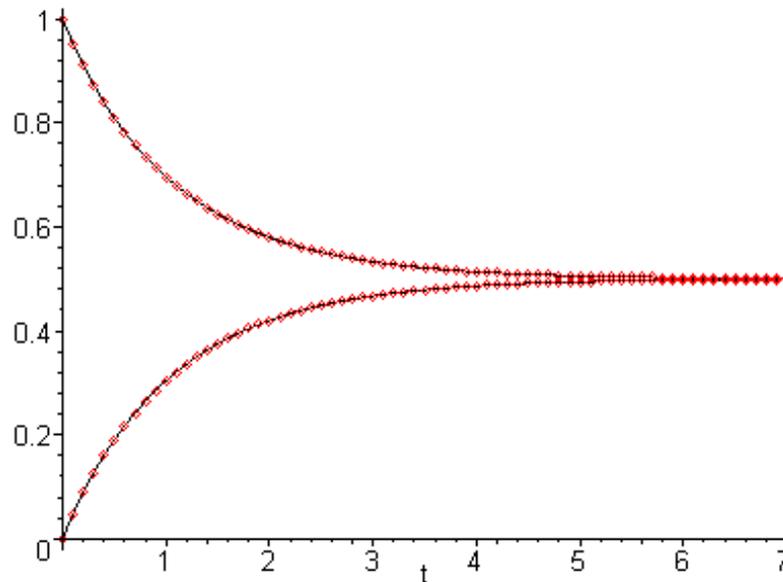


FIGURE 2.13. Superposition des courbes des solutions du système compartimental obtenues par le recollement des solutions (lignes) et par Runge-Kutta (points)

Conclusion

Nous avons présenté la méthode d'Adomian dans le cas général et dans le cas particulier des équations différentielles. Elle fournit des solutions sous forme de séries convergentes qui dépendent explicitement des paramètres des équations différentielles et de la variable temps t .

La MDA fournit la solution approchée sur des petits intervalles avec l'ordre de la série tronquée petit. Pour balayer des intervalles plus larges, on doit augmenter l'ordre de la série tronquée, ceci nécessite un grand effort de calcul de l'ordinateur. C'est l'inconvénient majeur de cette méthode, ce qui nous a conduit à proposer une technique " *de recollement des solutions*". L'avantage de cette technique est de donner les solutions dans des intervalles plus larges.

CHAPITRE 3

LA METHODE ALIENOR

3.1 Introduction

La plupart des problèmes d'optimisation nécessitent la recherche d'extremum absolu et rarement, un extremum local suffit. La minimisation d'une fonction convexe par les méthodes locales peuvent être utiles puisque le minimum local coïncide avec le minimum global. La minimisation d'une fonction à plusieurs variables par des méthodes d'optimisation numériques donnent une approximation du minimum. Ces méthodes sont coûteuses en temps de calcul et dans leurs complexité ([45],[46]).

Contrairement aux méthodes classiques d'optimisation d'une fonction de plusieurs variables, disons " n " variables, nous allons présenter la méthode d'optimisation globale, baptisée Alienor proposée par Y.Cherruault et A.Guiliez en 1982 [21], [47], [48]. Cette méthode permet de ramener la minimisation d'une fonction multivariable à celle d'une fonction à une seule variable. Cette méthode originale est basée sur l'utilisation d'une transformation réductrice permettant de construire des courbes qui " α -densifient" (que nous définirons plus tard) l'espace \mathbb{R}^n . Ces courbes " α -denses" ont un rapport avec les courbes qui "remplissent l'espace" (courbes de Péano, ...) ou celles des objets fractales de Benoit Mandelbrot [49], [50].

L'idée de base de la méthode Alienor (MA) consiste à exprimer n variables à l'aide d'une seule, autrement dit à remplir l'espace \mathbb{R}^n à l'aide d'une courbe. Ici dans le cadre de cette méthode, le problème de minimisation d'une fonction à plusieurs variables continues est ramené, grâce à une transformation réductrice, à un problème de minimisation d'une fonction à une seule variable. Cependant, le bon choix des transformations dépend non seulement de l'expérience d'utilisateur mais aussi du problème à résoudre. L'application de cette méthode aux problèmes concrets prouve sont efficacité [12],[51], [7].

3.2 Transformation réductrice Alienor

Soient deux variables réelles x_1, x_2 . En coordonnées polaires elles s'écrivent :

$$\begin{aligned}x_1 &= r \cos \theta \\x_2 &= r \sin \theta, \theta \geq 0\end{aligned}\tag{3.1}$$

On obtient deux nouvelles variables r et θ que nous relierons grâce à la spirale d'Archimède d'équation $r = a\theta$, $\theta \geq 0$ où a est un paramètre positif destiné à tendre vers 0.

Ainsi les relations (3.1) deviennent :

$$\begin{aligned}x_1 &= a\theta \cos \theta \\x_2 &= a\theta \sin \theta, \theta \geq 0\end{aligned}\tag{3.2}$$

et nous avons exprimé x_1 et x_2 à l'aide d'une unique variable θ , $\theta \geq 0$.

En fait (3.2) est la restriction du plan \mathbb{R}^2 à la spirale d'Archimède $r = a\theta$.

Donnons maintenant la définition de la α -densité .

Définition 3.1. *Un sous ensemble E de \mathbb{R}^n est dit α -dense dans \mathbb{R}^n si $\forall w \in \mathbb{R}^n, \exists \theta \in E$ tel que : $d(w, \theta) \leq \alpha$, où d est la distance euclidienne de \mathbb{R}^n .*

Si E est défini par :

$$x_i = h_i(\theta), i = 1, \dots, n$$

alors $h(\theta) = (h_1(\theta), \dots, h_n(\theta))$ est appelé courbe α -dense.

Avec cette définition, on peut justifier le :

Lemme 3.2. [12]. *La spirale d'Archimède d'équation $r = a\theta$, $\theta \geq 0$ est πa -dense dans \mathbb{R}^2 .*

Y.Cherruault ([12]) a montré que la courbe définie par :

$$h : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\theta \mapsto h(\theta) = (h_1(\theta), h_2(\theta)) \text{ est } \pi a - \text{dense dans } \mathbb{R}^2.$$

où $h_1(\theta) = a\theta \cos \theta$ et $h_2(\theta) = a\theta \sin \theta$.

Donnons une autre définition de la α -densité.

Définition 3.3. Soit α un nombre réel positif. Une courbe h de \mathbb{R}^n définie par :

$$h : A = [0, M] \longrightarrow \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$$

est dite α -dense dans $\prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ si pour tout $w \in \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ il existe $\theta \in A$ tel que :

$$d(w, h(\theta)) \leq \alpha$$

où d est la distance euclidienne de \mathbb{R}^n .

La figure suivante, montre que la spirale d'Archimède E est une approximation du pavé $[-1, 1] \times [-1, 1]$:

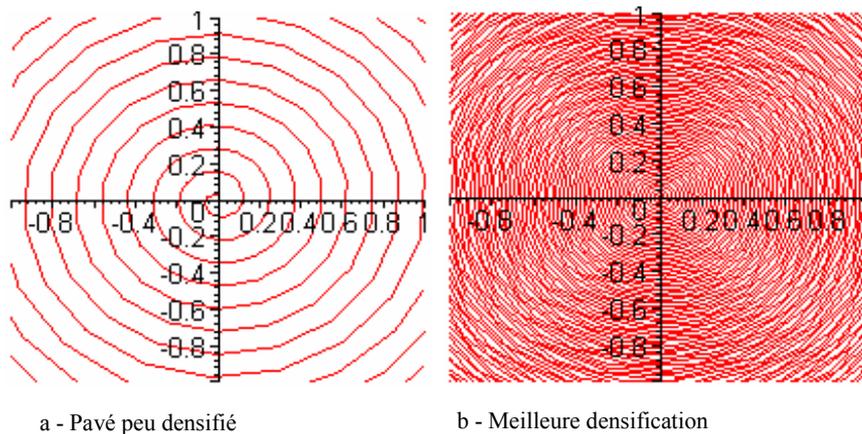


FIGURE 3.1. Densification du pavé $[-1, 1]^2$ par la spirale d'Archimède

Dans la figure 3.1.a, on a fixé $a = 0.02$ et $\theta \in [0, 100]$, et pour la figure 3.1.b, on prend $a = 0.003$ et $\theta \in [0, 520]$.

Remarque 3.4. *Entre deux spires successives et sur n'importe quel rayon passant par l'origine, on a une distance égale à $2\pi a$.*

On peut généraliser cette transformation à n variables x_1, x_2, \dots, x_n . Il suffit de relier les variables deux à deux pour aboutir à la fin (structure d'arbre) à une unique variable θ .

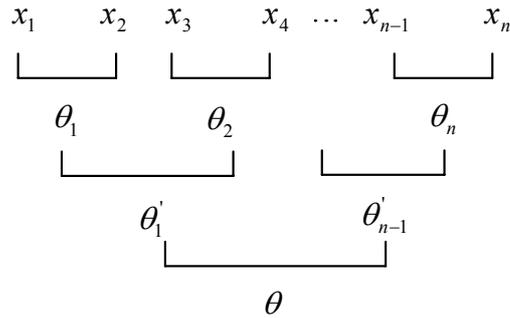


FIGURE 3.2. Structure d'arbre de la transformation réductrice

Par exemple, pour trois variables x_1, x_2, x_3 , on va d'abord relier x_1 et x_2 à l'aide d'une spirale d'équation $r = a\theta_1$, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} x_1 &= a\theta_1 \cos \theta_1 \\ x_2 &= a\theta_1 \sin \theta_1 \end{aligned} \quad (3.3)$$

puis on relie les deux variables θ_1 et x_3 à l'aide de $r = a\theta$, ce qui implique :

$$\begin{aligned} \theta_1 &= a\theta \cos \theta \\ x_3 &= a\theta \sin \theta \end{aligned} \quad (3.4)$$

Il est alors clair que x_1, x_2 et x_3 s'expriment à l'aide de θ . En effet on a :

$$\begin{aligned} x_1 &= a^2 \theta \cos \theta \cos(a\theta \cos \theta) \\ x_2 &= a^2 \theta \cos \theta \sin(a\theta \cos \theta) \\ x_3 &= a\theta \sin \theta \quad , \quad \theta \geq 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

D'une façon générale, on obtient des relations $x_i = h_i(\theta)$, $\theta \geq 0$ avec des h_i faisant intervenir les fonctions trigonométriques en sinus et cosinus. Les fonctions $h_i(\theta)$ sont de classe C^∞ .

Remarque 3.5. *Seule la dernière variable θ de la transformation réductrice peut être supposée positive ou nulle. Les variables intermédiaires θ_i devront être de signe quelconque si l'on veut densifier l'espace tout entier.*

Le résultat de densification suivant généralise le lemme précédent.

Théorème 3.6. [12]. *Tout point de \mathbb{R}^n peut être approché par au moins un point de la transformation réductrice Alienor. La qualité de l'approximation dépend du choix de "a". Autrement dit, soit (x_1, x_2, \dots, x_n) un point de \mathbb{R}^n , il existe au moins un $\theta^* \in \mathbb{R}^+$, tel que si $x_i^* = h_i(\theta^*)$ on ait : $|x_i - x_i^*| < \varepsilon$, $i = 1, \dots, n$ où ε est choisi à l'avance, pourvu que "a" soit petit.*

La démonstration de ce théorème se trouve dans [12].

Remarque 3.7. *Ce résultat prouve la densification de la spirale généralisée définie par $x_i = h_i(\theta)$, $i = 1, \dots, n$ dans l'espace \mathbb{R}^n . Contrairement au cas $n = 2$ où il était possible de préciser la qualité de densification (calcul de α), on ne peut pas dans le cas général ($n > 2$) préciser avec quel approximation la spirale généralisée densifie le plan.*

Des méthodes dérivées d'Alienor, permettant de préciser la qualité de l'approximation, des propriétés et des remarques sur la construction et la génération des courbes α -denses du domaine \mathbb{R}^n sont présentées dans [12], [17]. Des résultats théoriques (voir [17]) permettent de construire des transformations réductrices de la forme (3.2) et qui soient $\sqrt{n-1}\alpha$ -denses dans \mathbb{R}^n en précisant des hypothèses sur les fonctions h_i (la continuité de $A \longrightarrow \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$, surjectives, $\alpha > 0$ supposé petit, les fonctions h_i atteignent leurs bornes sur tout intervalle fermé de longueur θ_i où θ_i est une suite de nombres >0 , $i = 1, \dots, n$, etc,...).

La transformation réductrice d'Alienor a une structure d'arbre (voir la figure 3.2), où à chaque étape on réduit par un coefficient 2 le nombre de variable. Si, par exemple nous avons 2^s variables, il y aurait s étages de transformations. Dans le cas général, si s est le nombre d'étages de la transformation Alienor, on peut montrer [17] que le temps de calcul d'un minimum global d'une fonction $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ par cette méthode est un : $O(c^s)$ où $c = 1/a$. D'autres approches ont été proposées par des chercheurs du

laboratoire MEDIMAT (H.Ammar et O.Bendiab) et des classes très générales de transformations réductrices sont proposées ([12], [23], [52], [53]). Ces méthodes générales permettent de générer des courbes α -denses et des classes de transformations minimisant le temps de calcul du minimum global (voir [17]).

Il est important de noter, que l'utilisation des courbes α -denses (3.2) n'est pas souhaitable pour un grand nombre de variables $n \geq 20$. Dans ce cas on peut se référer aux transformations réductrices données par Y.Cherruault [12] :

$$h_i(\theta) = a\theta \cos \alpha_i \theta, \quad \theta \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.6)$$

où $(\alpha_i)_{i \geq 1}$ (avec $\alpha_1 = 1$) sont choisis de sorte que $\alpha_i \gg \alpha_{i-1}$. La courbe $h(\theta) = (h_1(\theta), \dots, h_n(\theta))$ correspondante à cette transformation est α -dense dans \mathbb{R}^n .

La transformation réductrice donnée par Konfé et al [52]:

$$h_i(\theta) = \cos(\omega_i \theta + \rho_i), \quad \theta \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.7)$$

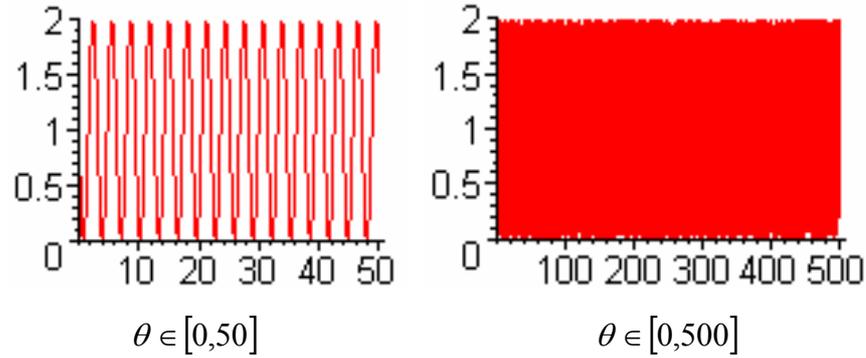
où ω_i et ρ_i sont des suites décroissantes. Cette transformation réductrice est α -dense dans $[-1, 1]^n$. D'autres exemples de transformations réductrices sont présentées dans [12], [53].

Exemples de transformations réductrices

1. Considérons la transformation réductrice suivante définie par :

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta \\ x_i &= h_i(\theta) = 1 - \sin(2^{i-1}\theta), \quad \theta \geq 0, \quad i = 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3.8)$$

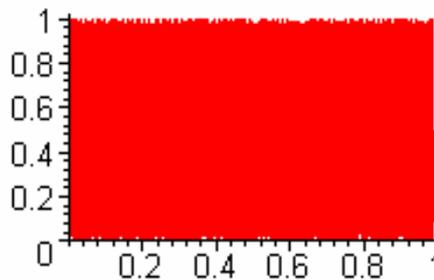
La courbe $h(\theta) = (h_1(\theta), \dots, h_n(\theta))$ ou bien la transformation réductrice (3.8) est α -dense dans \mathbb{R}^n . Pour $n = 2$, on a :

FIGURE 3.3. Courbe densifiant l'espace \mathbb{R}^2

Pour ramener cette courbe à densifier le pavé $[0, 1]^2$, on pose :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\theta}{\theta_{\max}} \\ x_i &= \frac{1}{2} (1 - \sin 2^{i-1} \theta) , \theta \in [0, \theta_{\max}] , i = 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3.9)$$

On obtient pour $n = 2$:

FIGURE 3.4. Courbe densifiant $[0, 1]^2$

Où $\theta \in [0, 500]$.

2. La transformation suivante définie par :

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta \\ x_i &= h_i(\theta) = \frac{1}{2} (1 - \cos m^{i-1} \pi \theta) , \theta \geq 0 , i = 2, \dots, n , \text{ avec } m = 2 \text{ ou } 3 \end{aligned} \quad (3.10)$$

est α -dense dans $[0, 1]^n$ avec une densité $\frac{1}{m} \sqrt{n-1}$.

Pour $n = 2$, on a :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\theta}{\theta_{\max}} \\ x_2 &= h_2(\theta) = \frac{1}{2}(1 - \cos 3\pi\theta), \quad \theta \in [0, 110] \end{aligned} \quad (3.11)$$

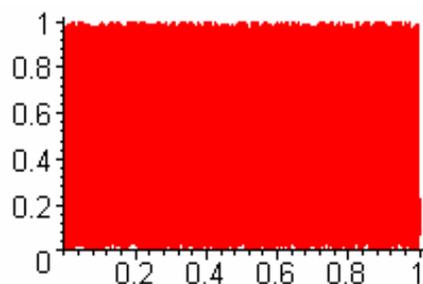


FIGURE 3.5. Courbe densifiant le pavé $[0,1]^2$

3. La transformation suivante [52] :

$$x_i = h_i(\theta) = \cos(\omega_i\theta + \rho_i), \quad \theta \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.12)$$

où ω_i et ρ_i sont des suites décroissantes.

Pour $n = 2$, on définit la courbe $h(\theta) = (h_1(\theta), h_2(\theta))$ par :

$$\begin{aligned} x_1 &= h_1(\theta) = \cos(5\theta + 1) \\ x_2 &= h_2(\theta) = \cos(5.1\theta + 1.1) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Cette courbe est représentée par la figure suivante :

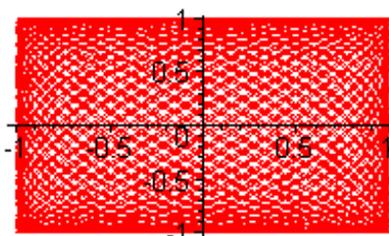


FIGURE 3.6. Courbe représentant $h(\theta)$

avec $\theta \in [0, 100]$.

Si l'ensemble des variables est un hyperrectangle $B = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$, la transformation (3.12) ne permet pas de densifier l'hyperrectangle. Pour éviter cet inconvénient, on peut utiliser la transformation définie par la fonction Q :

$$Q : B = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \longrightarrow [-1, 1]^n$$

$$\text{telle que} \quad y_i = Q(x_i) = \frac{1}{2}[(b_i - a_i)x_i + b_i + a_i], \text{ pour } i = 1, \dots, n$$

qui permet de se ramener à l'ensemble des variables de $[-1, 1]^n$.

Par exemple, on prend deux variables pour densifier le pavé $[-4, 8] \times [-6, 7]$.

On trace la courbe définie par : $h(\theta) = (h_1(\theta), h_2(\theta))$

où :

$$h_1(\theta) = \frac{1}{2}[12(\cos(3\theta + 1)) + 4]$$

$$h_2(\theta) = \frac{1}{2}[13(\cos(3.1\theta + 1.1)) + 1]$$

On obtient la figure suivante :

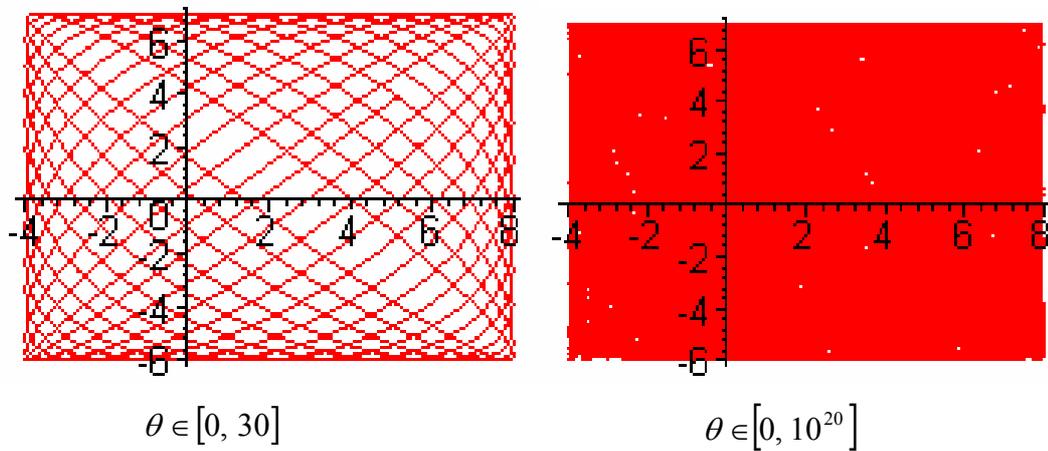


FIGURE 3.7. Densification du pavé $[-4, 8] \times [-6, 7]$

Si on veut une densification meilleur d'un pavé, on augmente l'intervalle de variation de la variable θ .

Extension et suggestion

La transformation suivante est proposée par Y.Cherruault [12] :

$$h_i(\theta) = a\theta(\cos \alpha_i \theta), \theta \geq 0, i = 1, \dots, n$$

où $(\alpha_i)_{i \geq 1}$ (avec $\alpha_1 = 1$) sont choisis de sorte que $\alpha_i \gg \alpha_{i-1}$.

On remarque que lorsque n augmente, les α_i tendent vers l'infini et le calcul de $\cos(\infty)$ devient impossible. Pour cela Y.Cherruault a proposé une autre transformation [53] :

$$x_i = h_i(\theta) = \cos \alpha_i \theta, \theta \geq 0, i = 1, \dots, n$$

qui est α -dense dans $[-1, 1]^n$, où les α_i sont bien choisis.

Quand n est grand, les α_i sont donnés [53] par :

$$\alpha_1 = 1$$

$$\alpha_2 > \alpha_1$$

$$(\alpha_i)_i \text{ suite lentement croissante } (i \geq 3)$$

On propose l'utilisation de la suite de Fibonacci définie par :

$$F_0 = 1, F_1 = 1$$

$$F_{j+1} = F_j + F_{j-1}, j = 1, 2, \dots$$

Le choix des α_i est donné par :

$$\alpha_1 = F_1$$

$$\alpha_i = \frac{F_i + 0.9}{F_i + 1}, i = 2, \dots, n$$

La transformation proposée à l'aide de la suite de Fibonacci est α -dense dans $[-1, 1]^n$.

On prend l'exemple de densification dans \mathbb{R}^2 :

$$x_1 = \cos \theta$$

$$x_2 = \cos(0.966\theta), \theta \in [0, 1200]$$

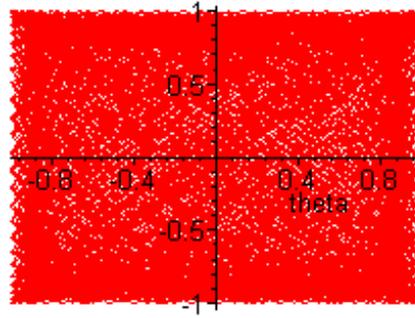


FIGURE 3.8. Courbe densifiant le pavé $[-1, 1]^2$

Pour \mathbb{R}^3 avec $\theta \in [0, 1000]$, on a :

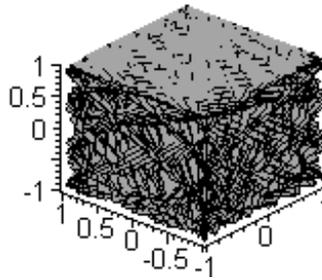


FIGURE 3.9. Densification du pavé $[-1, 1]^3$

On peut ramener cette transformation à densifier un pavé $\prod_{i=1}^n [-a_i, a_i]$, on propose la transformation :

$$y_i = Q(x_i) = a_i x_i, \quad i = 1, \dots, n$$

3.3 Application à l'optimisation globale

Notre objectif consiste à utiliser une transformation réductrice pour résoudre des problèmes d'optimisations globales en se basant sur l'approximation des fonctions de n variables par des fonctions d'une seule variable.

Soit à résoudre le problème :

$$\underset{x_1, x_2, \dots, x_n}{Min} \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (3.14)$$

où f est une fonction continue sur \mathbb{R}^n .

On cherche un (ou des) point(s) réalisant le minimum global de f sachant qu'elle vérifie la condition de croissance à l'infini :

$$\lim_{x_1^2 + \dots + x_n^2 \rightarrow \infty} f(x_1, \dots, x_n) = +\infty \quad (3.15)$$

Exprimant x_1, x_2, \dots, x_n par :

$$x_i = h_i(\theta), \quad \theta \geq 0 \quad \text{pour} \quad i = 1, \dots, n \quad (3.16)$$

où $h_i(\theta) \in C^\infty$ sont des fonctions définies dites *transformation réductrice*, telles que $h(\theta) = (h_1(\theta), \dots, h_n(\theta))$ soit une courbe α -dense. Ceci nous permet de remplacer la fonction $f(x_1, \dots, x_n)$ par $f^*(\theta)$ qui correspond à :

$$f^*(\theta) = f(h_1(\theta), h_2(\theta), \dots, h_n(\theta)) \quad (3.17)$$

où $f^*(\theta)$ est une fonction à une seule variable. Le problème de minimisation (3.14) est alors ramené au problème de minimisation à une seule variable :

$$\underset{\theta \in [0, \theta_{\max}]}{\text{Min}} f^*(\theta) \quad (3.18)$$

On ait donc conduit à chercher le ou les minima d'une fonction à une seule variable $f^*(\theta)$. On ne pourra le faire que sur un intervalle fermé et borné $[0, \theta_{\max}]$. Cet intervalle dépendra du fermé et borné de \mathbb{R}^n (généralement un pavé $\prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$) sur lequel on cherche les minima de $f(x_1, \dots, x_n)$.

Nous donnons un résultat qui justifie que le problème de minimisation (3.18) est une approximation du problème (3.14).

Théorème 3.8. [12]. *Tous les minima de $f(x_1, \dots, x_n)$ peuvent être approchés par des minima de $f^*(\theta)$. La réciproque est fautive en ce sens que tous les minima de $f^*(\theta)$ ne sont pas des approximations de minima de f .*

Remarque 3.9. *Ce résultat signifie, en particulier que $f^*(\theta)$ introduit des minima parasites dont il faudra se débarrasser, car c'est la restriction de f à la courbe h . Tout minimum relativement à h n'est pas forcément un minimum relativement à \mathbb{R}^n , du fait*

que h est strictement contenue dans \mathbb{R}^n . Ce théorème montre que toute solution du problème (3.14) peut être approchée par une solution du problème (3.18), puisque la courbe $h \subset \mathbb{R}^n$ et la meilleure approximation sera donnée pour un α petit. Pour que le minimum du problème (3.14) soit approché par le minimum du problème (3.18), il suffit de déterminer le minimum global de $f^*(\theta)$ par des méthodes de minimisation d'une fonction à une seule variable.

Il est possible de voir que si θ^* est une solution du problème (3.18), alors la solution :

$$x_i^* = h_i(\theta^*), \quad i = 1, \dots, n$$

est une approximation du problème (3.14).

3.3.1 Méthode de recherche du minimum global pour une fonction à une seule variable

La recherche du minimum global de $f^*(\theta)$ sur $[0, \theta_{\max}]$ s'effectue de la façon suivante :

- Le θ_{\max} borne supérieur de l'intervalle d'exploration.
- On choisit un pas $\Delta\theta$ (qui peut être amené à varier en fonction de θ) pour balayer l'intervalle $[0, \theta_{\max}]$.
- On construit les points de discrétisation $k.\Delta\theta$, $k = 0, \dots, N$ avec $N.\Delta\theta = \theta_{\max}$. Le minimum global (ou au moins une approximation) est trouvé en résolvant le problème :

$$\underset{k}{\text{Min}} f^*(k.\Delta\theta), \quad k = 0, \dots, N \quad (3.19)$$

On trouvera ainsi un ou plusieurs k^* réalisant le minimum de f . Ce dernier problème peut être résolu par un programme informatique.

Dans le cadre de cette méthode, la difficulté vient des points suivants :

- Le pas $\Delta\theta$ doit être choisi comme fonction décroissante de θ (ce qui va augmenter le nombre de points à considérer) .

- L'intervalle $[0, \theta_{\max}]$ sur lequel on doit chercher les minima globaux de $f^*(\theta)$ est tel que θ_{\max} est une fonction croissante de n que l'on sait trouver :

Théorème 3.10. [12]. Pour n quelconque $\theta_{\max} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2}}{2n^s}$ où s est le nombre d'étages de la transformation, défini par les inégalités : $2^{s-1} < n \leq 2^s$.

Le paramètre θ_{\max} dépendra de la transformation réductrice et il existe d'autres formules permettant de calculer ce paramètre (voir [12]).

Dans ce qui suit on va présenter une méthode de recherche de minimum global d'une fonction à une seule variable [54]. Cette méthode utilise un opérateur d'optimisation appelé " Opérateur qui préserve l'optimisation" (en anglais Optimisation Preserving Operators) il est noté par O.P.O.

3.3.2 Méthode d'optimisation globale pour une fonction à une seule variable basée sur l'O.P.O

La méthode Alienor telle qu'elle est définie précédemment, permet d'approcher les minima d'une fonction à plusieurs variables par les minima d'une fonction à une seule variable obtenue sur un intervalle I_0 .

Les courbes h sont α -denses, définies sur I_0 et peuvent être injectives et de classe C^∞ . La minimisation d'une fonction $f(\theta)$ à une variable θ peut avoir un ou des minima (globaux ou locaux).

La méthode proposée par G.Mora, Y.Cherruault et A.Benabidallah en 2003 [54] permet d'éliminer les points extremums autres que le minimum global. C'est à dire de considérer que les points $\theta \in I_0$ où $I_0 = [0, \theta_{\max}]$, pour lesquels le minimum global est atteint :

$$f(\theta) = \text{Min}(f(\theta) : \theta \in I_0)$$

Ceci peut être réalisé par l'utilisation d'un opérateur T_f (qu'on définit par la suite) appelé " Opérateur qui préserve l'optimisation", noté par O.P.O. Cet opérateur d'optimisation transforme la fonction $f(\theta)$ en T_f pour lequel le minimum global de T_f est aisément calculé.

On va donner quelques définitions nécessaires pour définir l'O.P.O.

On considère des fonctions objectives définies sur I_0 et possédant au plus un nombre fini de points de discontinuité.

Soit $C_*(I_0)$ l'ensemble des fonctions définies sur I_0 . L'opérateur d'optimisation T_f est défini sur cet ensemble

Soit le sous ensemble $\Delta_L(I_0) \subset C_*(I_0)$ de toutes les fonctions réelles Lipschitzienne de constante $L > 0$.

Etant donnée $f(\theta) \in C_*(I_0)$, le sous ensemble de I_0 des points extremums correspond à l'ensemble des solutions réalisables (ESR) qu'on note par S_f .

Le sous ensemble de I_0 des points extremums de T_f est noté par S_{T_f} .

Soit Θ une fonction Heaviside définie comme étant une fonction caractéristique de l'ensemble des réels positifs.

Donnons maintenant la définition de l'O.P.O.

Définition 3.11. Soit F un sous ensemble de $C_*(I_0)$. Une application $T : F \rightarrow C_*(I_0)$ est dite Opérateur qui préserve l'optimisation" (O.P.O), si pour tout $f \in F$, $T(f)$ noté T_f satisfait :

- i) $S_{T_f} \subset S_f$
- ii) Les sous ensembles S_{T_f} et S_f ont au moins un minimum en commun pour T_f et f respectivement.

Proposition 3.12. [54]. Une fonction g strictement croissante $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur l'espace $C_*(I_0)$ un O.P.O par une loi de composition : $T_f = g \circ f$ pour tous $f \in C_*(I_0)$. Par exemples dans l'espace $C_*(I_0)$, les opérateurs T_f définis pour tout $f \in C_*(I_0)$:

- $T_f = af + b$, avec $a > 0$, b nombres réels.
- $T_f = \exp(f)$
- $T_f = \text{arctg}(f)$ sont des (O.P.O).

Remarque 3.13. La classe d'O.P.O ainsi définie, nécessite l'utilisation d'une fonction continue strictement croissante. De plus, dans le théorème 3.14 cette fonction doit être bijective.

Le théorème suivant donne des propriétés de l'O.P.O.

Théorème 3.14. [54]. Soit t_0 un point arbitraire d'un intervalle I_0 , D est une constante et Θ une fonction Heaviside. Chaque fonction bijective $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$ de classe C^1 avec $\Phi' \neq 0$ définit un O.P.O sur un sous ensemble $\Delta_L(I_0)$ de toutes les fonctions Lipschitzienne de constante L par la formule suivante :

$$T_f^\varepsilon(\theta) = \Phi^{-1} [\varepsilon + \Phi (f(\theta) - f(\theta_0) + D)] + \frac{1}{\varepsilon} t \Theta [f(\theta) - f(\theta_0)]$$

avec $f \in \Delta_L(I_0)$, $t \in I$ et $0 < \varepsilon < 1$ suffisamment petit .

• De plus :

i) T_f converge vers f , sauf pour une constante dans l'ensemble :

$$L_f(f(\theta_0)) = \{\theta \in \mathbb{R} / f(\theta) \leq f(\theta_0)\}$$

ii) Tous les extremums de T_f^ε sont dans $L_f(f(\theta_0))$.

La preuve de ce théorème se trouve dans [54].

Le minimum (local ou global) est atteint pour chaque solution θ vérifiant l'équation :

$$T_f^\varepsilon(\theta) = 0 \tag{3.20}$$

Soit θ_0 un point de l'intervalle $I_0 = [0, \theta_{\max}]$. L'application de l'opérateur $T_f^\varepsilon(\theta)$ permet d'éliminer chaque point θ vérifiant :

$$f(\theta) \geq f(\theta_0) \tag{3.21}$$

A l'aide d'un processus récursif, on obtient un θ^* tel que $T_f^\varepsilon(\theta^*) = 0$. Par conséquent $f(\theta^*)$ atteint son minimum global en θ^* .

D'autres types d'O.P.O sont proposés dans [55].

On va résoudre quelques exemples de problème de minimisation d'une fonction à plusieurs variables par la méthode Alienor, utilisant l'O.P.O.

Exemple 3.15. Considérons le problème de minimisation d'une fonction quadratique à deux variables ($n = 2$) :

$$f_q(x_1, x_2) = 4(x_1^2 + x_2^2) - 2x_1x_2 - 6(x_1 + x_2) \tag{3.22}$$

On cherche $X^* = (x_1^*, x_2^*)$ qui minimise la fonction f_q .

La solution analytique vaut $X^* = (1, 1)^t$ et la valeur de la fonction objective est $f_q(X^*) = -6$.

L'utilisation des méthodes d'optimisation classiques (Gradient, Gradient conjugué, Newton) nécessitent un certain nombre d'itérations. La solution obtenue par la méthode du Gradient est donnée après trois itérations et par la méthode du Gradient conjugué et celle de Newton en deux itérations. En appliquant la méthode Alienor à ce problème d'optimisation, il faut définir :

La transformation réductrice :

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta \\ x_2 &= \frac{1}{2}(1 - \cos(3\pi\theta)) \end{aligned} \quad (3.23)$$

puis remplacer (3.23) dans (3.22), on obtient une fonction d'une seule variable θ :

$$f_q(\theta) = 4\theta^2 + 4 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(3\pi\theta) \right)^2 - 2\theta \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(3\pi\theta) \right) - 6\theta - 3 + 3 \cos(3\pi\theta)$$

La courbe de $f_q(\theta)$ montre qu'elle admet plusieurs minima :

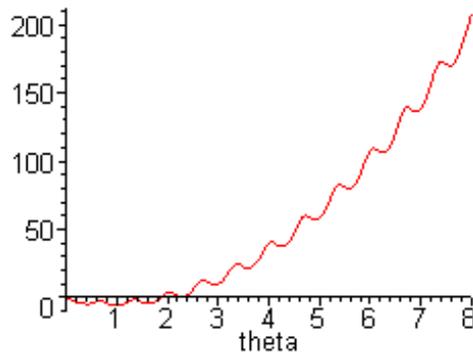
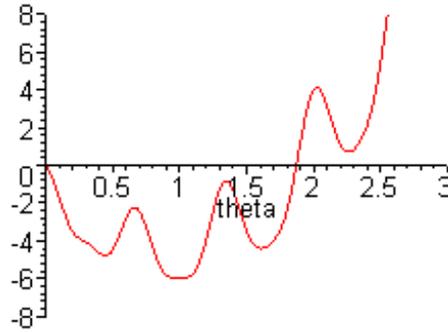


FIGURE 3.10. Courbe de $f_q(\theta)$

On remarque que le minimum global se situe entre $[0, 2]$ puisque la valeur de la

fonction objective est minimale.



En appliquant la procédure de minimisation d'une fonction à une seule variable, le minimum obtenu :

$$x_1^* = 1$$

$$x_2^* = 0.9999942928$$

$$\text{et la valeur de } f_q(X^*) = -6.000000001$$

On peut utiliser la méthode d'optimisation globale d'une fonction à une seule variable basée sur l'O.P.O pour minimiser le problème (3.22). L'opérateur s'écrit :

$$T_{f_q}^\varepsilon(\theta) = \ln[\varepsilon + \exp((4\theta^2 + 4(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(3\pi\theta))^2 - 2\theta(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(3\pi\theta)) - 6\theta - 3 + 3\cos(3\pi\theta)) - (4\theta_0^2 + 4(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(3\pi\theta_0))^2 - 2\theta(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(3\pi\theta_0)) - 6\theta_0 - 3 + 3\cos(3\pi\theta_0)) + D] + \frac{1}{\varepsilon}\theta \text{Heaviside}\left(\frac{4\theta^2 + 4(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(3\pi\theta))^2 - 2\theta(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(3\pi\theta)) - 6\theta - 3 + 3\cos(3\pi\theta)}{6\theta - 3 + 3\cos(3\pi\theta)}\right) - \left(\frac{4\theta_0^2 + 4(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(3\pi\theta_0))^2 - 2\theta_0(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(3\pi\theta_0)) - 6\theta_0 - 3 + 3\cos(3\pi\theta_0)}{6\theta_0 - 3 + 3\cos(3\pi\theta_0)}\right)$$

On prend $D = 0$ et $\varepsilon = 10^{-4}$.

Dans la recherche du minimum, on fixe la fonction $f_q(\theta_0)$ à une constante choisie à partir de la courbe de $f_q(\theta)$. Ensuite on cherche θ_0 qui annule $T_{f_q}^\varepsilon(\theta)$ et vérifie $f_q(\theta_0)$ égale ou proche à cette constante. Cette procédure est réitérée jusqu'à l'obtention du minimum global.

L'O.P.O de f_q correspondant est donné par la formule suivante :

$$T_{f_q}^{0.0001}(\theta) = \ln[0.0001 + \exp(f_q(\theta) - f_q(\theta_0))] + 10000.\theta.\text{Heaviside}[f_q(\theta) - f_q(\theta_0)]$$

On coupe la courbe de la fonction $f_q(\theta_0) = -4$, ceci signifie que $T_{f_q}^\varepsilon(\theta)$ converge vers $f_q(\theta)$ pour tout θ_0 tel que $f_q(\theta)$ est inférieur ou égal à -4 . On néglige tous les points $(\theta, f_q(\theta))$ où $f_q(\theta)$ est supérieur à -4 .

$$T_{f_q}^{0.0001}(\theta) = \ln[0.0001 + \exp(f_q(\theta) + 4)] + 10000.\theta.\text{Heaviside}[f_q(\theta) + 4]$$

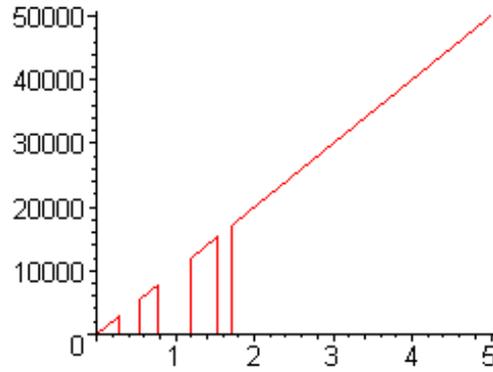


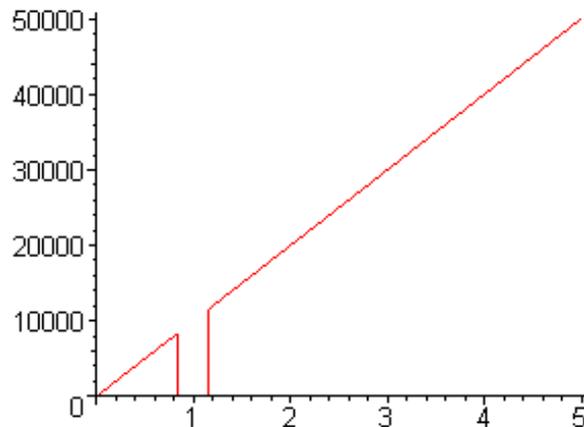
FIGURE 3.11. Courbe de $T_{f_q}^{0.0001}(\theta)$, $\theta_0 = 0.27992$

La figure suivante représente $T_{f_q}^{0.0001}(\theta)$ pour $f_q(\theta_0) = -4$:

L'opérateur $T_{f_q}^{0.0001}(\theta)$ augmente pour une certaine valeur $\bar{\theta}$. Toutes les valeurs de θ qui satisfont $T_{f_q}^{0.0001}(\theta) = 0$ sont des solutions (locales ou globales) du problème (3.22).

Soit W l'ensemble des solutions lorsque $Card(W) > 1$, on améliore la recherche en coupant à chaque fois afin d'avoir $Card(W) = Min_i (Card(W_i))$.

On coupe la courbe à $f_q(\theta) = -5$. On obtient la courbe suivante :



avec $\theta_0 = 0.83072$.

Finalement, on coupe la courbe à $f_q(\theta) = -6$.

On trouve pour :

$$GlobMin_{\theta \in [0, 1.16]} f_q^*(\theta^*) = f_q^*(1.0001) = -6.000000001$$

Le minimum global est :

$$x_1^* = 1.0001 \quad , \quad x_2^* = 0.9999963214$$

La courbe correspondant à l'optimum global θ^* obtenu par $T_{f_q^*}^{0.0001}(\theta)$ est donnée par la figure suivante :

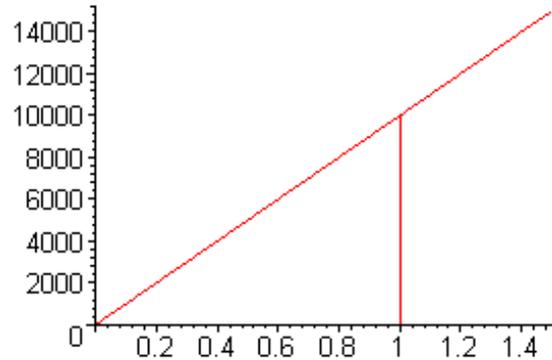


FIGURE 3.12. Courbe de $T_{f_q^*}^{0.0001}(\theta)$

Exemple 3.16. *Considérons la fonction Rosenbrock ($n=2$) :*

$$f_r(x_1, x_2) = 100(x_2^2 - x_1)^2 + (1 - x_2)^2 \quad (3.24)$$

Pour $-5 \leq x_i \leq 5$, $i = 1, 2$. Le minimum global est atteint pour $(x_1^*, x_2^*) = (1, 1)$ et la valeur de la fonction :

$$f_r^*(x_1^*, x_2^*) = 0$$

En utilisant la transformation (3.23) associée à l'O.P.O, on obtient :

$$f_r^*(x_1^*, x_2^*) = 1.1526 \times 10^{-6} \text{ et } (x_1^*, x_2^*) = (1.0001, 0.9999963214)$$

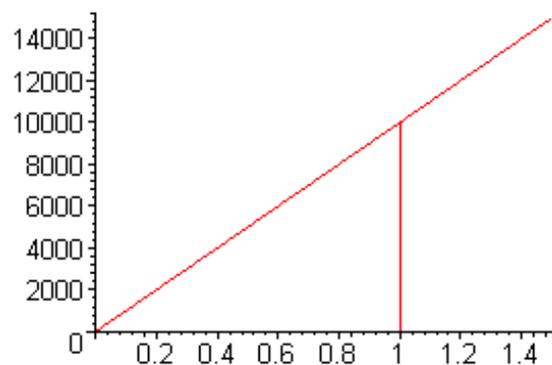


FIGURE 3.13. Courbe de $T_{f_r^*}^{0.0001}(\theta)$

Exemple 3.17. Soit le problème de minimisation de la fonction Wood ($n = 4$):

$$f_w(x_1, x_2, x_3, x_4) = 100(x_2^2 - x_1)^2 + (1 - x_2)^2 + 90(x_4 - x_3^2)^2 + (1 - x_3^2)^2 + 10.1(x_2 - 1)^2 + 10.1(x_4 - 1)^2 + 19.8(x_2 - 1)(x_4 - 1) \quad (3.25)$$

Pour $-1 \leq x_i \leq 1, i = 1, \dots, 4$. Le minimum global est atteint pour $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*) = (1, 1, 1, 1)$ et la valeur de la fonction :

$$f_w^*(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*) = 0$$

En utilisant la transformation réductrice :

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta \\ x_i &= \frac{1}{2}(1 - \cos 3^{i-1}\pi\theta), \quad i = 2, 3, 4 \end{aligned}$$

Le minimum global obtenu par la méthode d'optimisation basée sur l'O.P.O est :

$$x_1^* = 0.9980$$

$$x_2^* = 0.9998605544$$

$$x_3^* = 0.9987454568$$

$$x_4^* = 0.9887468528$$

et la valeur de la fonction : $f_w^*(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*) = 0.008496$

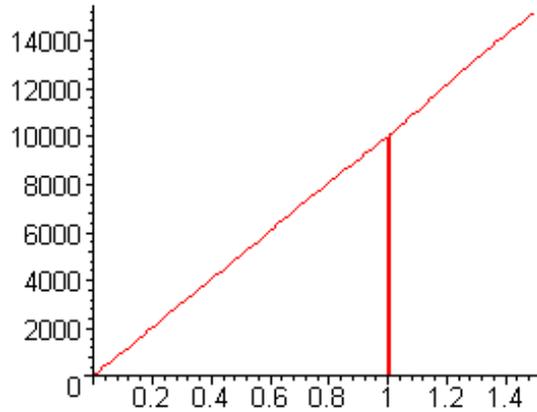


FIGURE 3.14. Courbe de $T_{f_w^*}^{0.0001}(\theta)$

Exemple 3.18. La fonction de Greenwank ($n = 50$) définit par :

$$f_{gr} = \sum_{i=1}^n \left(x_i^2 - \frac{1}{10} \cos(5\pi x_i) \right) \quad (3.25)$$

Pour $-1 \leq x_i \leq 1, i = 1, \dots, n$. Le minimum global est égal à :

$$f_{gr}^*(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = -\frac{n}{10}$$

il est atteint pour $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = (0, 0, \dots, 0)$.

En utilisant la transformation réductrice :

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta \\ x_i &= \frac{1}{2}(1 - \cos 3^{i-1}\pi\theta), \quad i = 2, \dots, 50 \end{aligned}$$

L'O.P.O associé à cette transformation réductrice conduit au minimum global :

$$x_1^* = \theta^* \text{ et les } x_i^* = \frac{1}{2}(1 - \cos 3^{i-1}\pi\theta^*), \quad i = 2, \dots, 50 \text{ avec } \theta^* = 0$$

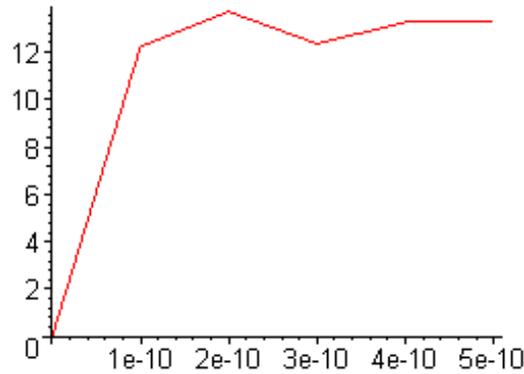


FIGURE 3.15. Courbe de $T_{f_{gr}^*}^{0.0001}(\theta)$

Exemple 3.19. *Considérons le problème de minimisation de la fonction exponentielle ($n=10$) suivante :*

$$f_{\text{exp}}(x_1, \dots, x_{10}) = \exp\left(\frac{-1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i^2\right) \quad (3.26)$$

Pour $-1 \leq x_i \leq 1, i = 1, \dots, n$. Le minimum est atteint pour $x_i^* = 1$ et $f(x_1^*, \dots, x_{10}^*) = \exp(-1)$.

En utilisant la transformation réductrice :

$$x_i = \cos(\alpha_i \theta), \quad i = 1, \dots, 10$$

où :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= F_1 \\ \alpha_i &= \frac{F_i + 0.9}{F_i + 1}, \quad i = 2, \dots, n \end{aligned}$$

où F_i désigne les constantes de la suite de Fibonacci.

La courbe de $f_{\text{exp}}(\theta)$ est donnée par la figure suivante :

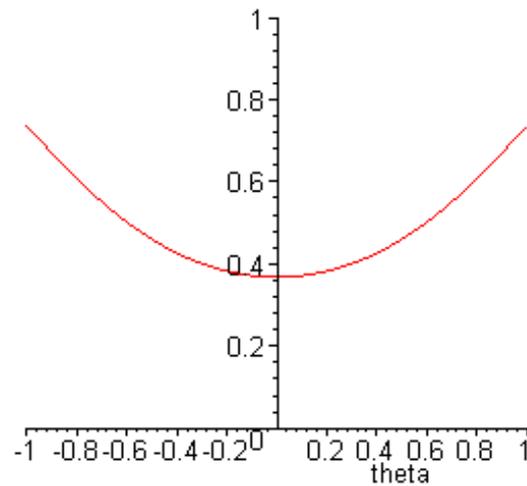


FIGURE 3.16. Courbe de $f_{\text{exp}}(\theta)$ sur l'intervalle $[-1, 1]$

Le minimum global obtenu par l'O.P.O est :

$$x_1^* = \cos(\alpha_i \theta^*), \quad i = 1, \dots, 10 \quad \text{avec} \quad \theta^* = 0 \quad \text{et} \quad f_{\text{exp}}(\theta^*) = 0.36788$$

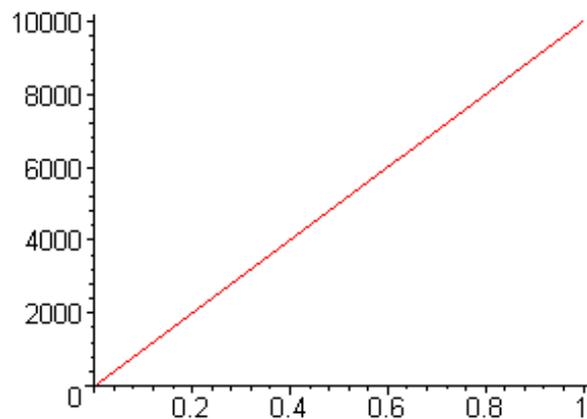


FIGURE 3.17. Courbe de $T_{f_{\text{exp}}^*}^{0.0001}(\theta)$

Conclusion

Nous avons vu que la méthode Alienor ramène le problème de minimisation d'une fonction à plusieurs variables à un problème de minimisation d'une fonction à une seule variable. Ceci est réalisé en exprimant chaque variable par une fonction dite transformation réductrice et qui dépend d'une variable θ . A l'aide de la suite de

Fibonacci, on a proposé un choix des α_i associé à la transformation réductrice $x_i = \cos(\alpha_i \theta)$. Cette transformation est α -dense dans $[-1,1]^n$.

Des exemples de problèmes de minimisation de fonction à plusieurs variables ont été traités par la méthode Alienor. Le problème de minimisation d'une fonction à une seule variable est résolu par une méthode d'optimisation basée sur l'O.P.O. Cette méthode s'intéresse seulement au minimum global.

CHAPITRE 4

IDENTIFICATION PARAMETRIQUE DES SYSTEMES

COMPARTIMENTAUX

4.1 Introduction

Nous présentons la méthode combinée Adomian/Alienor appliquée au problème d'identification paramétrique des systèmes compartimentaux. On décrit le modèle biologique du VIH et le modèle compartimental à deux compartiments qu'on utilise comme application au problème. Les résultats numériques donnés par l'utilisation de la méthode combinée Adomian/Alienor sont comparés à ceux obtenus par l'utilisation de la méthode de Levenberg-Marquardt.

4.2 Application de la méthode combinée Adomian/Alienor au problème

Le problème d'identification des paramètres devient un problème d'optimisation d'une fonction à une seule variable par la combinaison de la méthode décompositionnelle d'Adomian et la méthode Alienor.

On veut déterminer les paramètres $(\alpha_1, \dots, \alpha_q)$ du système différentiel :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_p, \alpha_1, \dots, \alpha_q, t) \\ x_i(t=0) = x_{i,0}^* \quad , \quad i = 1, \dots, p, \quad \text{fixés} \end{cases} \quad (4.1)$$

à partir d'observations :

$$Y = B.x \quad (4.2)$$

où $x = (x_1, \dots, x_p)^T$ est le vecteur d'état du système, B est une matrice d'observation $(l \times p)$.

Les $\alpha_k, k = 1, \dots, q$ sont obtenus en minimisant la fonctionnelle d'erreur J :

$$J = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^l (Y_i(t_j) - Y_i^c(t_j))^2 \quad (4.3)$$

où $Y_i(t_j)$ sont les données expérimentales et t_j désignent les m instants de mesures (connus). Ainsi $Y_i^c = x_i^c$ est la fonction x_i résultant de la résolution du système (4.1) par la méthode décompositionnelle d'Adomian sous la forme de séries tronquées (d'ordre s) :

$$x_i^c = \sum_{j=0}^{s-1} v_j^i(\alpha_1, \dots, \alpha_q, t) \quad (4.4)$$

où les termes v_j^i de la série décompositionnelle font intervenir explicitement les $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ et la variable temps t .

Reportons les expressions (4.4), dans la fonctionnelle (4.3), l'expression $x_i^c, i = 1, \dots, p$ fera intervenir les $\alpha_k, k = 1, \dots, q$. Il résulte que J est une fonction explicite des paramètres à identifier. D'où le problème :

$$\min_{\alpha_1, \dots, \alpha_q} J(\alpha_1, \dots, \alpha_q) \quad (4.5)$$

qui est un problème de minimisation classique par rapport aux paramètres $\alpha_1, \dots, \alpha_q$.

L'organigramme 1 (voir chapitre 1, section 2) de la méthode d'identification devient :

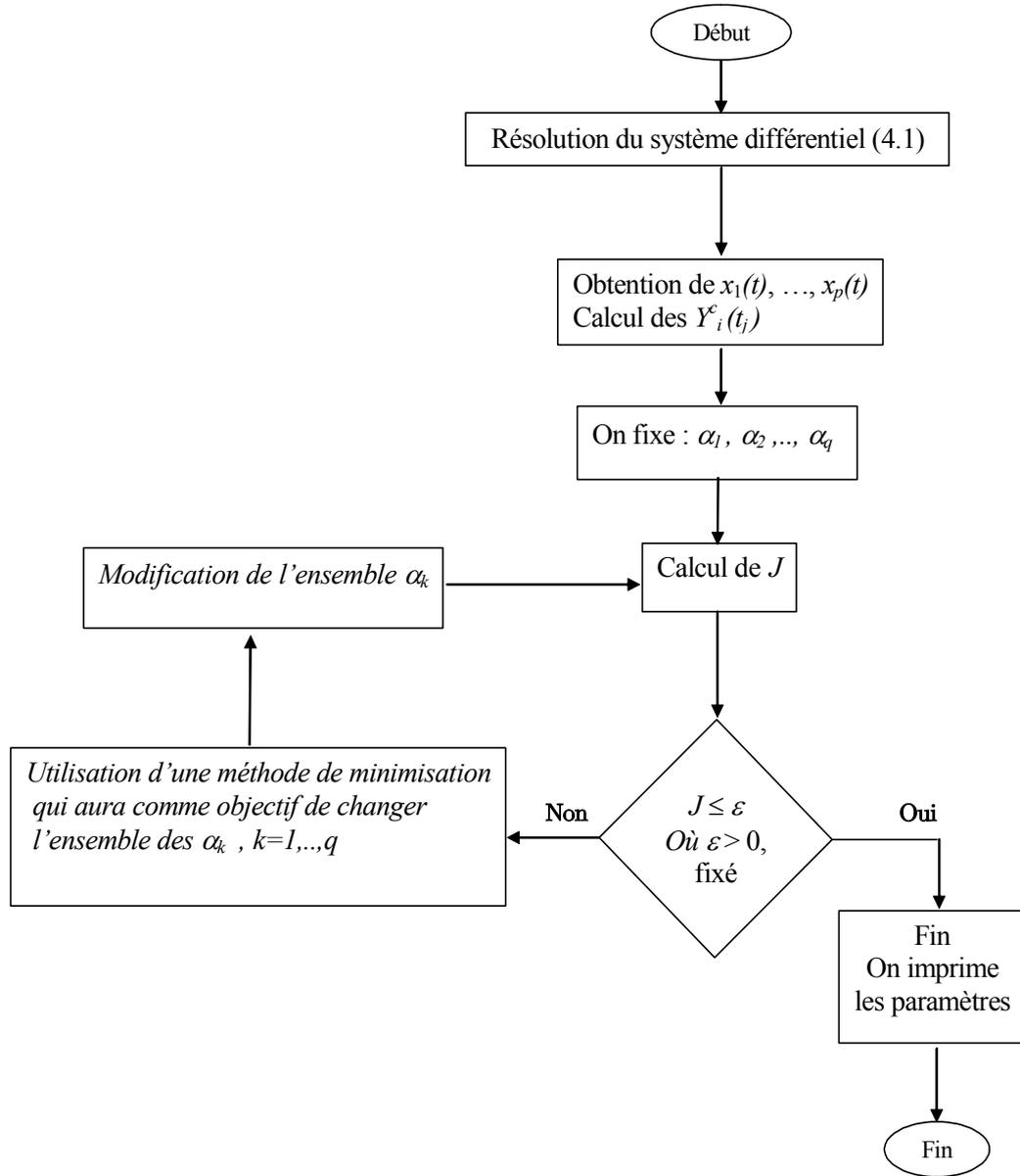


FIGURE 4.1. Utilisation de la méthode d'Adomian dans le problème d'identification

On cherchera le minimum global de J par la méthode Alienor, en utilisant la transformation réductrice :

$$\alpha_k = h_k(\theta), \quad \theta \geq 0, \quad k = 1, \dots, q \quad (4.6)$$

où les $h_k(\theta) \in C^\infty$ sont des fonctions définies choisies de manière à α -densifier l'espace \mathbb{R}^q , en d'autres termes la courbe h est α -dense où $h(\theta) = (h_1(\theta), \dots, h_q(\theta))$. Par conséquent, la fonctionnelle $J(\alpha_1, \dots, \alpha_q)$ est approchée par une fonction $J^*(\theta)$ de

l'unique variable θ :

$$J^*(\theta) = J(h_1(\theta), \dots, h_q(\theta)) \quad (4.7)$$

Le problème de recherche de minimum global de J est alors approché par :

$$\min_{\theta} J^*(\theta) \quad (4.8)$$

où $\theta \in [0, \theta_{\max}]$, $J^*(\theta)$ est une fonction continue sur un domaine fermé et borné, elle possède au moins un minimum dans $[0, \theta_{\max}]$. Y.Cherruault [17], a montré que toute solution du problème (4.8) est une approximation de la solution de (4.5) puisque $h \subset \mathbb{R}^q$ et la qualité de l'approximation dépendent de α (le coefficient de densité) qui devra être petit. Il suffit de chercher le minimum global de $J^*(\theta)$ par des méthodes de minimisation d'une fonction à une seule variable.

Le résultat suivant, permettant de préciser l'existence et l'unicité de la solution du problème d'identification des α_k , $k = 1, \dots, q$.

Théorème 4.1. [17]. *Si la fonctionnelle $J^*(\theta)$ admet un minimum global unique θ^* satisfaisant $J^*(\theta^*)$ (ou proche de zéro) alors le problème d'identification admet une solution unique et l'on obtiendra le "meilleur" modèle possible.*

- *Si $J^*(\theta)$ possède plusieurs minima globaux vérifiant $J^*(\theta^*) = 0$ (ou proche de zéro) alors le problème d'identification n'admet pas de solution unique (on a seulement l'existence de solution).*
- *Si $J^*(\theta)$ possède un ou plusieurs minima globaux vérifiant $J^*(\theta^*) \neq 0$ alors le modèle mathématique n'est pas compatible avec les données expérimentales.*

Il est facile d'obtenir le minimum d'une fonction à une seule variable par l'opérateur "Optimisation Preserving Operators" (O.P.O) proposé par Mora ,Cherruault et Ben-abidallah en 2003 (voir [54]) permettant d'éviter la recherche de minima locaux et de s'intéresser au minimum global seulement.

On obtient θ^* qui implique la solution de notre problème d'identification, les valeurs des paramètres minimisant J seront données par les relations :

$$\alpha_k^* = h_k(\theta^*), \quad k = 1, \dots, q \quad (4.9)$$

Des applications de problème d'identification ont été traitées au modèle de VIH et au modèle à deux compartiments décrivant l'évolution d'une substance chimique dans un organisme humain.

4.3 Application au modèle biologique du VIH

4.3.1 Description du modèle VIH

Le système biologique de la dynamique du virus immunodéficientaire humain (Human Immunodeficiency Virus HIV) est représenté par le modèle suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = S - dx_1 - \beta x_1 x_3 \\ \dot{x}_2 = \beta x_1 x_3 - \mu_1 x_2 \\ \dot{x}_3 = kx_2 - \mu_2 x_3 \end{cases} \quad (4.10)$$

Ce système est proposé par Nowak et Bangham [25], comportant trois équations différentielles ordinaires non linéaires décrivant explicitement la variation des variables $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, en fonction de temps $t \in \mathbb{R}^+$. Ces variables représentent respectivement, le nombre (quantité) de cellules CD4+T saines, le nombre de cellules CD4+T infectées et la charge virale.

Les paramètres du système sont :

S : taux de production des cellules saines, d : taux de mortalité des cellules saines, β : taux d'infection des cellules saines CD4 par le virus HIV, μ_1 : taux de mortalité naturelle des cellules infectées, k : taux de production du virus, μ_2 : taux de déclin naturel du virus.

La première équation caractérise la variation des cellules CD4+T saines dans l'organisme, la quantité des cellules saines se reproduit selon un taux S fixé. Ces cellules sont attaquées par un virus produit par d'autres cellules de même type, un tel taux de diminution doit décroître avec la quantité CD4+T existante de $-dx_1(t)$. De plus,

comme ces cellules interagissent avec le virus VIH, leur taux de reproduction décroît selon le terme $-\beta x_1(t) x_3(t)$.

La deuxième équation va décrire l'accroissement des cellules CD4+T infectées par le virus. La croissance des cellules CD4+T infectées est proportionnelle à la quantité des cellules saines qui sont susceptibles d'être infectées par le virus, et elle sera diminuée par la quantité des cellules détruites $\mu_1 x_2(t)$.

La troisième équation traduit la variation de la concentration du virus libre. Il est produit par les cellules CD4+T infectées en $kx_2(t)$ et diminue à un taux de $-\mu_2 x_3(t)$.

4.3.2 Résolution du modèle VIH par la méthode d'Adomian

Considérons le système dynamique du virus VIH :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = S - dx_1 - \beta x_1 x_3 \\ \dot{x}_2 = \beta x_1 x_3 - \mu_1 x_2 \\ \dot{x}_3 = kx_2 - \mu_2 x_3 \end{cases} \quad (4.11)$$

La méthode décompositionnelle d'Adomian appliquée au système (4.11) consiste à :

- 1- Ecrire le système (4.11) sous forme canonique
- 2- Déterminer les polynômes d'Adomian A_j associés au terme non linéaire :

$$N = f(x_1, x_3) = x_1 x_3 = \sum_{j=0}^{\infty} A_j$$

- 3- Chercher les séries solutions $x_i = \sum_{j=0}^{\infty} x_{ij}$, $i = 1, 2, 3$.

Les conditions initiales données sont :

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 1 \\ x_2(0) &= \frac{1}{5} \\ x_3(0) &= \frac{4}{5} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Ecrivant le système (4.11) sous la forme canonique, on obtient :

$$\begin{cases} x_1 = x_1(0) + L^{-1}S - dL^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} x_{1j} - \beta L^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} A_j \\ x_2 = x_2(0) + \beta L^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} A_j - \mu_1 L^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} x_{2j} \\ x_3 = x_3(0) + kL^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} x_{2j} - \mu_2 L^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} x_{3j} \end{cases} \quad (4.13)$$

Utilisons la formule de calcul des polynômes d'Adomian A_j pour une fonction à deux variables (voir chapitre 2. Section 2.4.2), on aura :

$$\begin{aligned}
A_0 &= f_{0.0}(x_{10}, x_{30}) \\
&= x_{10}x_{30} \\
A_1 &= x_{11}f_{1.0}(x_{10}, x_{30}) + x_{31}f_{0.1}(x_{10}, x_{30}) \\
&= (x_{11}x_{30} + x_{10}x_{31}) \\
A_2 &= x_{12}f_{1.0}(x_{10}, x_{30}) + x_{32}f_{0.1}(x_{10}, x_{30}) + \frac{1}{2!} \left[\begin{array}{c} x_{11}^2 f_{2.0}(x_{10}, x_{30}) + \\ x_{31}^2 f_{31}(x_{10}, x_{30}) \end{array} \right] + \\
& x_{11}x_{31}f_{1.1}(x_{10}, x_{30}) \\
&= (x_{12}x_{30} + x_{10}x_{32} + x_{11}x_{31}) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

et ainsi de suite ...

La première équation d'état du système (4.13) est une équation différentielle du premier ordre comportant un terme linéaire $g = S$, ce qui implique :

$$x_{10} = x_1(0) + L^{-1}S$$

Le système (4.13) peut s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{10} = x_1(0) + L^{-1}S, \quad x_{20} = x_2(0), \quad x_{30} = x_3(0) \\ x_{1j} = -dL^{-1}x_{1j-1} - \beta L^{-1}A_{j-1} \\ x_{2j} = \beta L^{-1}A_{(j-1)} - \mu_1 L^{-1}x_{2(j-1)} \\ x_{3j} = kL^{-1}x_{2(j-1)} - \mu_2 L^{-1}x_{3(j-1)}, \quad j = 1, 2, \dots \end{array} \right. \quad (4.14)$$

on bien :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{10} = x_1(0) + L^{-1}S, \quad x_{20} = x_2(0), \quad x_{30} = x_3(0) \\ x_{1j+1} = -dL^{-1}x_{1j} - \beta L^{-1} \sum_{l=0}^j x_{1l}x_{3(j-l)} \\ x_{2j+1} = \beta L^{-1} \sum_{l=0}^j x_{1l}x_{3(j-l)} - \mu_1 L^{-1}x_{2j} \\ x_{3j+1} = kL^{-1}x_{2j} - \mu_2 L^{-1}x_{3j}, \quad j = 0, 2, \dots \end{array} \right. \quad (4.15)$$

Une solution approchée à l'ordre s pour les séries solutions $x_i(t)$, $i = 1, 2, 3$:

$$\phi_{1s} = \sum_{j=0}^{s-1} x_{1j}, \quad \phi_{2s} = \sum_{j=0}^{s-1} x_{2j}, \quad \phi_{3s} = \sum_{j=0}^{s-1} x_{3j}$$

où les termes x_{1j} , x_{2j} , x_{3j} sont obtenus à partir des formules (4.14).

En utilisant les conditions initiales (4.12), on obtient :

$$x_{10} = 1 + St$$

$$x_{20} = \frac{1}{5}$$

$$x_{30} = \frac{4}{5}$$

Le polynôme d'Adomian A_0 associé au terme non linéaire est :

$$A_0 = f(x_{10}, x_{30}) = x_{10}x_{30} = \frac{4}{5}(1 + St)$$

Les x_{1j} , x_{2j} , x_{3j} des séries tronquées ϕ_{is} , $i = 1, 2, 3$, à l'ordre 4 sont déterminés à partir des formules (4.14) :

$$\begin{aligned} x_{11} &= -d \int_0^t x_{10} du - \int_0^t A_0(u) du = -d \int_0^t (1 + Su) du - \beta \int_0^t \frac{4}{5} (1 + Su) du \\ &= -d \left(t + S \frac{t^2}{2} \right) - \frac{4}{5} \beta \left(t + S \frac{t^2}{2} \right) \end{aligned}$$

$$x_{11} = - \left(d + \frac{4}{5} \beta \right) t - \left(dS + \frac{4}{5} S \beta \right) \frac{t^2}{2}$$

$$\begin{aligned} x_{21} &= \beta \int_0^t A_0(u) du - \mu_1 \int_0^t x_{20} du \\ &= \beta \int_0^t \frac{4}{5} (1 + Su) du - \mu_1 \int_0^t \frac{1}{2} du \end{aligned}$$

$$x_{21} = \left(\frac{4}{5} \beta - \frac{1}{5} \mu_1 \right) t + \frac{2}{5} \beta S t^2$$

$$\begin{aligned} x_{31} &= k \int_0^t x_{20} du - \mu_2 \int_0^t x_{30} du \\ &= k \int_0^t \frac{1}{5} du - \mu_2 \int_0^t \frac{4}{5} du \end{aligned}$$

$$x_{31} = \left(\frac{1}{5} k - \frac{4}{5} \mu_2 \right) t$$

Pour le polynôme d'Adomian A_1 , on obtient :

$$A_1 = (x_{11}x_{30} + x_{10}x_{31})$$

$$= \left(\frac{4}{5} x_{11} + (1 + St) x_{31} \right)$$

$$= \left(\frac{4}{5} \right) \left(- \left(d + \frac{4}{5} \beta \right) t - \left(dS + \frac{4}{5} S \beta \right) \frac{t^2}{2} \right) + (1 + St) \left(\frac{1}{5} k - \frac{4}{5} \mu_2 \right) t$$

Les x_{12} , x_{22} , x_{32} sont :

$$\begin{aligned}
x_{12} &= -d \int_0^t x_{11} du - \int_0^t A_1(u) du \\
&= -d \int_0^t \left[-\left(d + \frac{4}{5}\beta\right)u - \left(dS + \frac{4}{5}S\beta\right)\frac{u^2}{2} \right] du - \\
&\quad \beta \int_0^t \left[\left(\frac{4}{5}\right) \begin{pmatrix} -\left(d + \frac{4}{5}\beta\right)u - \\ \left(dS + \frac{4}{5}S\beta\right)\frac{u^2}{2} \end{pmatrix} + (1 + Su) \left(\frac{1}{5}k - \frac{4}{5}\mu_2\right)u \right] du \\
&= \left[\frac{d}{2} \left(d + \frac{4}{5}\beta\right) - \frac{2}{5}\beta \left(-d - \frac{4}{5}\beta\right) - \frac{\beta}{2} \left(\frac{1}{5}k - \frac{4}{5}\mu_2\right) \right] t^2 + \left[\begin{array}{l} \frac{d}{6} \left(dS + \frac{4}{5}\beta S\right) + \\ \frac{2}{15}\beta \left(dS + \frac{4}{5}\beta S\right) - \\ \frac{\beta}{3} \left(\frac{1}{5}kS - \frac{4}{5}S\mu_2\right) \end{array} \right] t^3 \\
x_{22} &= \beta \int_0^t A_1(u) du - \mu_1 \int_0^t x_{21} du \\
&= \left[\frac{2}{5}\beta \left(-d - \frac{4}{5}\beta\right) + \frac{\beta}{2} \left(\frac{1}{5}k - \frac{4}{5}\mu_2\right) - \frac{\mu_1}{2} \left(\frac{4}{5}\beta - \frac{\mu_1}{5}\right) \right] t^2 + \left[\begin{array}{l} \frac{2}{15}\beta \left(-dS - \frac{4}{5}\beta S\right) + \\ \frac{\beta}{3} \left(\frac{1}{5}Sk - \frac{4}{5}S\mu_2\right) - \\ \frac{2}{15}\mu_1\beta S \end{array} \right] t^3 \\
x_{32} &= k \int_0^t x_{21} du - \mu_2 \int_0^t x_{31} du \\
&= \left(\frac{1}{2}k \left(\frac{4}{5}\beta - \frac{1}{5}\mu_1\right) - \frac{1}{2}\mu_2 \left(\frac{1}{5}k - \frac{4}{5}\mu_2\right)\right) t^2 + \frac{2}{15}\beta S t^3
\end{aligned}$$

Le polynôme d'Adomian A_2 associé à la non linéarité est :

$$A_2 = (x_{12}x_{30} + x_{10}x_{32} + x_{11}x_{31})\beta = \left(\frac{4}{5}x_{12} + (1 + St)x_{32} + x_{11}x_{31}\right)\beta$$

Pour x_{13} , x_{23} et x_{33} , on obtient :

$$\begin{aligned}
x_{13} &= -d \int_0^t x_{12} du - \int_0^t A_2(u) du \\
&= \left(\begin{array}{l} \frac{-1}{3}d \left(\left(\frac{-d}{2} \left(-d - \frac{4}{5}\beta\right)\right) - \frac{2}{5}\beta \left(-d - \frac{4}{5}\beta\right) - \frac{1}{2}\beta \left(\frac{1}{5}k - \frac{4}{5}\mu_2\right)\right) - \frac{4}{15}\beta \\ \left(\begin{array}{l} \frac{-d}{2} \left(-d - \frac{4}{5}\beta\right) - \frac{2}{5}\beta \left(-d - \frac{4}{5}\beta\right) - \\ \frac{\beta}{2} \left(\frac{1}{5}k - \frac{4}{5}\mu_2\right) - \frac{\beta}{3} \left(\frac{k}{2}\frac{4\beta}{5} - \frac{1}{6}k\mu_1\right) \\ - \frac{\mu_2}{2} \left(\frac{1}{5}k - \frac{4}{5}\mu_2\right) \\ - \frac{\beta}{3} \left(\frac{1}{5}k - \frac{4}{5}\mu_2\right) \left(-d - \frac{4}{5}\beta\right) \end{array} \right) \end{array} \right) t^3 + \\
&\quad \left(\begin{array}{l} \frac{-d}{4} \left(\frac{-d}{6} \left(-dS - \frac{4}{5}\beta S\right) - \frac{2}{15}\beta \left(-dS - \frac{4}{5}\beta S\right) - \frac{1}{3}\beta \left(\frac{1}{5}\beta S - \frac{4}{5}S\mu_2\right)\right) - \\ \frac{4}{20}\beta \left(\frac{-d}{6} \left(-dS - \frac{4}{5}\beta S\right) - \frac{2}{15}\beta \left(-dS - \frac{4}{5}\beta S\right) - \frac{1}{3}\beta \left(\frac{1}{5}\beta S - \frac{4}{5}S\mu_2\right)\right) - \\ \frac{1}{8}\beta \left(\frac{1}{5}k - \frac{4}{5}\mu_2\right) \left(-dS - \frac{4}{5}\beta S\right) - \frac{2}{15.4}\beta^2 S - \\ \frac{1}{4}\beta \left(\frac{kS}{2} \left(\frac{4}{5}\beta - \frac{1}{5}\mu_1\right)\right) - \frac{\mu_2 S}{2} \left(\frac{1}{5}k - \frac{4}{5}\mu_2\right) \end{array} \right) t^4 - \\
&\quad \left(\frac{2}{15.5}\beta^2 S^2\right) t^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{23} &= \beta \int_0^t A_2(u) du - \mu_1 \int_0^t x_{22} du \\
&= \left(\begin{array}{l} \frac{4}{15}\beta \left(\frac{-d}{2} \left(-d - \frac{4}{5}\beta \right) - \frac{2}{5}\beta \left(\frac{1}{5}k - \frac{4}{5}\mu_2 \right) - \frac{1}{2}\beta \left(\frac{1}{5}k - \frac{4}{5}\mu_2 \right) \right) + \\ \frac{1}{3}\beta \left(\frac{k}{2} \left(\frac{4}{5}\beta - \frac{1}{5}\mu_1 \right) - \frac{\mu_2}{2} \left(\frac{1}{5}k - \frac{4}{5}\mu_2 \right) + \left(\frac{1}{5}k - \frac{4}{5}\mu_2 \right) \left(-d - \frac{4}{5}\beta \right) \right) - \\ \frac{1}{3}\mu_1 \left(\frac{2}{5}\beta \left(-d - \frac{4}{5}\beta \right) + \frac{1}{2}\beta \left(\frac{1}{5}k - \frac{4}{5}\mu_2 \right) - \frac{1}{2}\mu_1 \left(\frac{4}{5}\beta - \frac{1}{5}\mu_1 \right) \right) \end{array} \right) t^3 + \\
&\left(\begin{array}{l} \frac{4}{5.4}\beta \left(\frac{-d}{6} \left(-ds - \frac{4}{5}\beta S \right) - \frac{2}{15}\beta \left(-dS - \frac{4}{5}\beta S \right) - \frac{1}{3}\beta \left(\frac{1}{5}kS - \frac{4}{5}\mu_2 S \right) \right) + \\ \frac{1}{8}\beta \left(\frac{1}{5}k - \frac{4}{5}\mu_2 \right) \left(-ds - \frac{4}{5}\beta S \right) + \frac{2}{15.4}\beta^2 S + \\ \frac{1}{4}\beta \left(\frac{kS}{2} \left(\frac{4}{5}\beta - \frac{1}{5}\mu_1 \right) - \frac{\mu_2 S}{2} \left(\frac{1}{5}k - \frac{4}{5}\mu_2 \right) \right) - \\ \frac{1}{4}\mu_1 \left(\frac{2\beta}{15} \left(-dS - \frac{4}{5}\beta S \right) + \frac{\beta}{3} \left(\frac{kS}{5} - \frac{4}{5}S\mu_2 \right) - \frac{2}{15}\mu_1 \beta S \right) \end{array} \right) t^4 + \\
&\left(\frac{2}{15.4}\beta^2 S^2 \right) t^5 \\
x_{33} &= k \int_0^t x_{22} du - \mu_2 \int_0^t x_{32} du \\
&= \left(\begin{array}{l} \frac{1}{3}k \left(\frac{2}{5}\beta \left(\begin{array}{l} -d- \\ \frac{4}{5}\beta \end{array} \right) + \frac{1}{2}\beta \left(\frac{1}{5}k - \frac{4}{5}\mu_2 \right) - \frac{1}{2}\mu_1 \left(\begin{array}{l} \frac{4}{5}\beta- \\ \frac{1}{5}\mu_1 \end{array} \right) \right) - \\ \frac{1}{3}\mu_2 \left(\begin{array}{l} \frac{k}{2} \left(\frac{4}{5}\beta - \frac{1}{5}\mu_1 \right) \\ -\frac{\mu_2}{2} \left(\frac{1}{5}k - \frac{4}{5}\mu_2 \right) \end{array} \right) \end{array} \right) t^3 + \\
&\left(\begin{array}{l} \frac{1}{4}k \left(\begin{array}{l} \frac{2}{15}\beta \left(-dS - \frac{4}{5}\beta S \right) + \\ \frac{1}{3}\beta \left(\frac{1}{5}kS - \frac{4}{5}S\mu_2 \right) - \frac{2}{15}\beta S\mu_1 \end{array} \right) + \\ -\frac{2}{15.4}\beta S k \mu_2 \end{array} \right) t^4
\end{aligned}$$

L'approximation à l'ordre 4 des séries solutions est donnée :

pour les x_{1j}

$$\begin{aligned}
\phi_{14} &= \sum_{j=0}^3 x_{1j} = x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} \\
&= 1 + St + - \left(d + \frac{4}{5}\beta \right) t - \left(dS + \frac{4}{5}S\beta \right) \frac{t^2}{2} + \dots
\end{aligned}$$

pour les x_{2j}

$$\begin{aligned}
\phi_{24} &= \sum_{j=0}^3 x_{2j} = x_{20} + x_{21} + x_{22} + x_{23} \\
&= \frac{1}{5} + \left(\frac{4}{5}\beta - \frac{1}{5}\mu_1 \right) t + \frac{2}{5}\beta St^2 + \dots
\end{aligned}$$

pour les x_{3j}

$$\begin{aligned}\phi_{34} &= \sum_{j=0}^3 x_{3j} = x_{30} + x_{31} + x_{32} + x_{33} \\ &= \frac{4}{5} + \left(\frac{1}{5}k - \frac{4}{5}\mu_2\right)t + \left(\frac{1}{2}k \left(\frac{4}{5}\beta - \frac{1}{5}\mu_1\right) - \frac{1}{2}\mu_2 \left(\frac{1}{5}k - \frac{4}{5}\mu_2\right)\right)t^2 + \dots\end{aligned}$$

La MDA appliquée au modèle VIH donne les solutions sous forme de séries où les paramètres du modèle apparaissent explicitement dans les termes des séries $x_{ij}(t)$ qui sont des fonctions continues des paramètres $(S, d, \beta, \mu_1, \mu_2, k)$ et la variable temps t .

Solutions du modèle VIH par la méthode d'Adomian avec paramètres fixés

Les paramètres et les conditions initiales du modèle (4.11) sont donnés [25] comme suit :

$$\begin{array}{lll}x_1(0) = 1 & S = 1 & \mu_1 = 0.8 \\ x_2(0) = 0.2 & d = 0.8 & \mu_2 = 0.01078 \\ x_3(0) = 0.8 & \beta = 1 & k = 1\end{array}$$

En substituant ces valeurs numériques dans les solutions tronquées ϕ_{i4} , $i = 1, 2, 3$, on obtient :

$$\begin{aligned}\phi_{14} &= \sum_{j=0}^3 x_{2j} = x_{20} + x_{21} + x_{22} + x_{23} \\ &= 1 - 0.600t + 0.3844t^2 - 0.2731t^3 - 0.2200t^4 - 0.2666t^5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_{24} &= \sum_{j=0}^3 x_{2j} = x_{20} + x_{21} + x_{22} + x_{23} \\ &= 0.2 + 0.6400t - 0.4004t^2 + 0.2773t^3 + 0.19868t^4 + 0.0266t^5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_{34} &= \sum_{j=0}^3 x_{3j} = x_{30} + x_{31} + x_{32} + x_{33} \\ &= 0.8 + 0.1911t + 0.3189t^2 - 0.1346t^3 - 0.0644t^4\end{aligned}$$

Les figures suivantes représentent les courbes des solutions obtenues par la MDA (lignes) et ceux donnés par Runge-Kutta (points) :

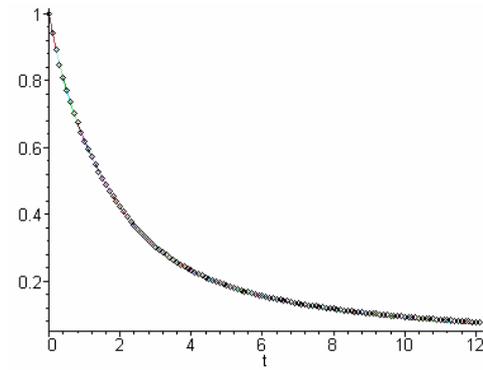


FIGURE 4.2. Superposition des courbes des solutions de x_1

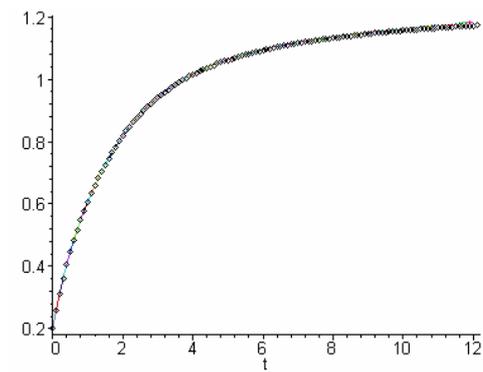


FIGURE 4.3. Superposition des courbes des solutions de x_2

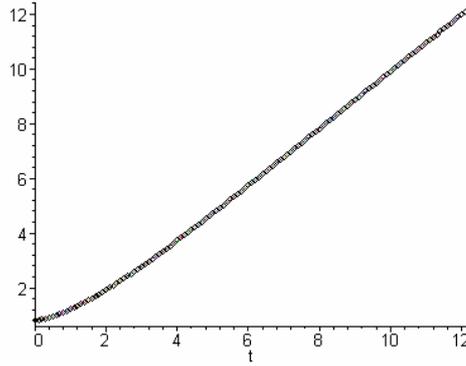


FIGURE 4.4. Superposition des courbes des solutions de x_3

4.3.3 Résultats numériques

Notre objectif consiste à identifier les paramètres S , d , β , μ_1 , μ_2 et k du modèle (4.11) à partir des conditions initiales et des données expérimentales.

On suppose que les paramètres exacts et les conditions initiales du modèle [25] sont donnés comme suit :

$$\begin{array}{lll} x_1(0) = 1 & S = 1 & \mu_1 = 0.8 \\ x_2(0) = 0.2 & d = 0.8 & \mu_2 = 0.01078 \\ x_3(0) = 0.8 & \beta = 1 & k = 1 \end{array}$$

Il est possible de mesurer la quantité des cellules CD4+T saines $x_1(t)$ et la charge virale $x_3(t)$:

$$\begin{aligned} Y_1(t_j) &= x_1(t_j) \\ Y_2(t_j) &= x_3(t_j) \end{aligned}$$

où t_j désignent les m instants de mesure fixés.

On peut considérer la quantité des cellules CD4+T saines $x_1(t_j)$ et la charge virale $x_3(t_j)$ calculées à partir des paramètres exacts en dix instants de mesures fixés, comme données expérimentales, où $x_1(t)$ et $x_3(t)$ sont des solutions tronquées à l'ordre 4 obtenues par la résolution du système (4.11) à l'aide de la méthode Adomian lorsqu'on fixe les paramètres. Le tableau suivant résume les données expérimentales :

TABLEAU 4.1. Données expérimentales simulées du modèle VIH

t_j	x_1	x_2	x_3
0	1	.8	.2
0.1	.9435489268	.8221620740	.2602932065
0.2	.8928317485	.8498048272	.3145282515
0.3	.8453776856	.8818883429	.3651247144
0.4	.7981239041	.9172180453	.4150430293
0.5	.7473835154	.9544447001	.4678164847
0.6	.6888135759	.9920644141	.5275832241
0.7	.6173830875	1.028418636	.5991182459
0.8	.5273409977	1.061694154	.6878654024
0.9	4121841986	1.089923099	.7999694015
1	.2646255282	1.110982945	.9423078052

On sait que les paramètres S , d , β , μ_1 , μ_2 et k sont obtenus en minimisant la fonctionnelle d'erreur :

$$J = \sum_{j=1}^m [(x_1(t_j) - x_1^c(t_j))^2 + (x_3(t_j) - x_3^c(t_j))^2] \quad (4.16)$$

où x_1^c et x_3^c désignent les fonctions x_1 et x_3 obtenues par la méthode Adomian. La simulation est faite en rapportant dans la fonction J les solutions tronquée x_1^c et x_3^c obtenues par la méthode Adomian à l'ordre 4 et dépendant explicitement des paramètres S , d , β , μ_1 , μ_2 , k .

Pour la minimisation de la fonctionnelle J par la méthode Alienor, on utilise deux transformations réductrices, à savoir :

1. Transformation 1 :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \theta \\ \alpha_i &= h_i(\theta) = (1 - \sin 2^{i-1}\theta), \quad i = 2, \dots, q \end{aligned} \quad (4.17)$$

2. Transformation 2 :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \theta \\ \alpha_i &= h_i(\theta) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2^{i-1}\pi\theta), \quad i = 2, \dots, q \end{aligned} \quad (4.18)$$

En utilisant la transformation 1 et 2, on pose :

Pour la transformation 1	Pour la transformation 2
$\mu_2 := \theta$	$S := \theta$
$k := 1 - \sin(2\theta)$	$d := 1/2 - 1/2\cos(6.28\theta)$
$S := 1 - \sin(4\theta)$	$\beta := 1/2 - 1/2\cos(12.56\theta)$
$\beta := 1 - \sin(8\theta)$	$\mu_2 := 1/2 - 1/2\cos(25.12\theta)$
$d := 1 - \sin(16\theta)$	$\mu_1 := 1/2 - 1/2\cos(50.24\theta)$
$\mu_1 := 1 - \sin(32\theta)$	$k := 1/2 - 1/2\cos(100.48\theta)$

Le minimum global θ^* de $J(\theta)$ associé à la transformation 1 et 2 est calculé par l'O.P.O, il est représenté par les figures suivantes respectivement :

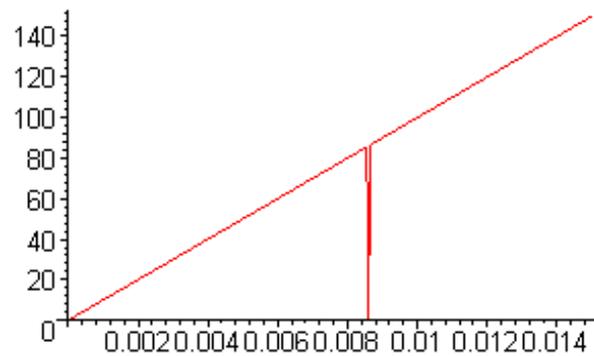


FIGURE 4.5. Courbe de $T_{J^*}^{0.0001}(\theta)$ associée à la transformation 1, $\theta^*=0.00865$

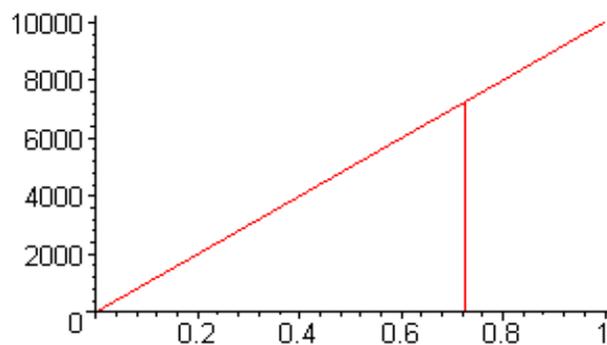


FIGURE 4.6. Courbe de $T_{J^*}^{0.0001}(\theta)$ associée à la transformation 2, $\theta^*=0.7240$

Le tableau suivant résume les résultats de la simulation obtenus par les transformations 1 et 2 et par la méthode itérative de Levenberg-Marquardt.

TABLEAU 4.2. Valeurs des paramètres obtenus par : Adomian/transformation 1, Adomian/transformation2 et Adomian/Levenberg-Marquardt

Paramètres	Transformation 1	Transformation 2	Levenberg-Marquardt
S	0.9654	0.724	1.007
d	0.862	0.582	0.7561
β	0.93	0.97	1.059
μ_1	0.726	0.3785	0.854
μ_2	0.00865	0.1058	0.0066
k	0.98	0.9409	0.9771
Valeur de J	0.000907	0.02036	0.05984

On a choisi le vecteur des paramètres de départ de la méthode itérative :

$$\text{Vect}_1 = [S, d, \beta, \mu_1, \mu_2, k] = [0.1, 0.4, 0.5, 0.01, 0.4, 0.01].$$

La distance entre la courbe simulée $C(S, d, \beta, \mu_1, \mu_2, k)$ et les points expérimentales est prise au sens d'erreur J donnée par la formule (4.16). On cherche à minimiser cette fonctionnelle pour déterminer les paramètres $S, d, \beta, \mu_1, \mu_2, k$ donc la meilleure courbe $C^*(S, d, \beta, \mu_1, \mu_2, k)$ d'approximation des données expérimentales.

Discussion :

On a simulé le problème avec deux transformations réductrices et une méthode itérative. On remarque sur le tableau 4.2 que les paramètres identifiés sont proches des paramètres exacts. Ces paramètres sont reportés dans les solutions du modèle VIH afin de les comparer avec les données expérimentales. On note que la méthode de Levenberg-Marquardt dépend du choix de vecteur des paramètres de départ, lorsque il est choisi arbitrairement, cette méthode ne donne pas de bons résultats .

D'après ces résultats, on constate que l'augmentation ou la diminution de l'un des paramètres influe sur les autres et par conséquent sur les solutions du modèle.

La comparaison des courbes des données expérimentales (en points) avec les courbes simulées (en lignes) des cellules CD4+T saines x_1 , des cellules CD4+T infectées x_2 et la charge virale x_3 sont illustrées par la figure (4.7). La superposition des courbes montre que les paramètres identifiés par la transformation 1 sont meilleurs.

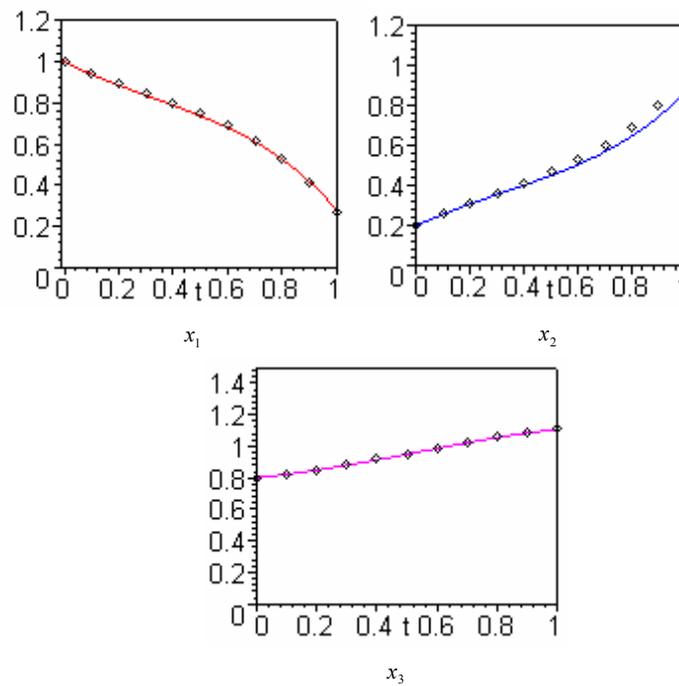


FIGURE 4.7. Superposition des courbes expérimentales (points) avec les courbes estimées (lignes) par la méthode Adomian/transformation1

4.4 Application au modèle à deux compartiments

4.4.1 Description du modèle

Considérons le modèle compartimental de la figure, ci après :

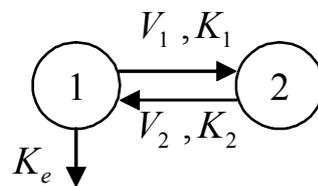


FIGURE 4.8. Modèle à deux compartiments

Ce modèle à deux compartiments est souvent utilisé en pharmacocinétique pour suivre l'évolution d'une substance chimique (médicament) dans un organisme humain [12] :

Le compartiment 1 est le compartiment sanguin et le compartiment 2 est le compartiment où agit la substance (cœur, foie, poumons, tumeur,...).

Le modèle à deux compartiments de la figure (4.8) est traduit par le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = - \left(K_e + \frac{V_1}{K_1+x_1} \right) x_1 + \frac{V_2}{K_2+x_2} x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{V_1}{K_1+x_1} x_1 - \frac{V_2}{K_2+x_2} x_2 \\ x_1(0) = \beta, \quad x_2(0) = 0, \quad \text{où } \beta \text{ fixé} \end{cases} \quad (4.19)$$

où les conditions initiales correspondent à une administration instantanée (injection) d'une quantité β de substance chimique à l'instant 0 dans le premier compartiment, $x_i(t)$ représente la concentration de la substance chimique dans un compartiment i à l'instant t .

L'échange du compartiment 1 vers le compartiment 2 et ou le compartiment 2 vers le compartiment 1 est non linéaire de type *Michaelis- Menten*. Ce type d'élimination est une fonction non linéaire de la forme :

$$f_i(x_i) = \frac{V_i x_i}{K_i + x_i}, \quad i = 1, 2$$

où V_i et K_i sont les constantes de *Michaelis-Menten*.

K_e : la constante d'élimination ou d'échange du compartiment 1 avec l'extérieur.

4.4.2 Résolution du modèle avec paramètres fixés

On suppose que les paramètres exacts et les conditions initiales du modèle sont donnés comme suit :

$$\begin{aligned} x_1(0) = 1 \quad V_1 = 0.32 \quad K_1 = 0.52 \\ x_2(0) = 0 \quad V_2 = 0.12 \quad K_2 = 0.13 \\ K_e = 0.004 \end{aligned}$$

La résolution du modèle (4.19) par la méthode décompositionnelle d'Adomian donnent les séries solutions x_1, x_2 (voir chapitre 2. Exemple 1.4).

Lorsqu'on fixe les paramètres, les solutions tronquées à l'ordre 4 sont données par :

$$\begin{aligned} \phi_{14} &= \sum_{j=0}^3 x_{1j} = x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1. - .2145t + .1053t^2 - .1391t^3 \\ \phi_{24} &= \sum_{j=0}^3 x_{2j} = x_{20} + x_{21} + x_{22} + x_{23} = .2105t - .10489t^2 + .1389t^3 \end{aligned}$$

La superposition des courbes des solutions tronquées (lignes) et les solutions données par Runge-Kutta (points) sont présentées dans la figure suivante :

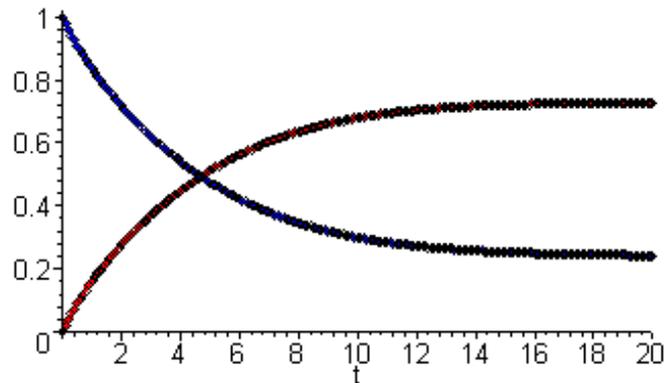


FIGURE 4.9. Superposition des courbes des solutions obtenues par Adomian (lignes) et Runge-Kutta (points)

4.4.3 Résultats numériques

Notre objectif consiste à identifier les paramètres V_1, V_2, K_1, K_2 et K_e du modèle (4.19) à partir des conditions initiales et des données expérimentales.

On suppose que les paramètres exacts et les conditions initiales du modèle sont donnés comme suit :

$$\begin{aligned} x_1(0) = 1 \quad V_1 = 0.32 \quad K_1 = 0.52 \\ x_2(0) = 0 \quad V_2 = 0.12 \quad K_2 = 0.13 \\ K_e = 0.004 \end{aligned}$$

Il est possible de mesurer la concentration de substance dans le premier compartiment $x_1(t)$:

$$Y_1(t_j) = x_1(t_j)$$

où t_j désignent les m instants de mesure.

On peut considérer la concentration d'une substance dans le premier compartiment $x_1(t_j)$ calculée à partir des paramètres exacts en dix instants de mesures fixés, comme données expérimentales, où $x_1(t)$ est la solution tronquée à l'ordre 4 obtenue par la résolution du système (4.19) à l'aide de la méthode Adomian lorsqu'on fixe les paramètres.

TABLEAU 4.3. Données expérimentales simulées du modèle compartimental

t_j	x_1	x_2
0	1	0
0.1	.9794614533	.2014269681e-1
0.2	.9601946010	.3902143766e-1
0.3	.9413647303	.5747009290e-1
0.4	.9221371282	.7632253291e-1
0.5	.9016770817	.9641262804e-1
0.6	.8791498780	.1185742487
0.7	.8537208041	.1436412652
0.8	.8245551472	.1724475478
0.9	.7908181941	.2058269671
1	.7516752321	.2446133933

Le tableau 4.3 résume les concentrations de substance x_1 et x_2 dans le premier et le deuxième compartiment respectivement :

On sait que les paramètres V_1, V_2, K_1, K_2 et K_e sont obtenus en minimisant la fonctionnelle d'erreur :

$$J = \sum_{j=0}^m (x_1(t_j) - x_1^c(t_j))^2 \quad (4.20)$$

où x_1^c désigne la fonction x_1 résultant de la résolution du système par la méthode Adomian tronquée à l'ordre 4 et dépendant explicitement des paramètres V_1, V_2, K_1, K_2 et K_e .

La méthode Alienor permet d'approcher J par $J^*(\theta)$ fonction d'une seule variable θ , à minimiser. Pour la minimisation de la fonctionnelle J on utilise les deux transformations réductrices (4.17) et (4.18).

On pose :

Pour la transformation 1	Pour la transformation 2
$V_2 := \theta$	$V_2 := \theta$
$K_1 := 1 - \sin(2\theta)$	$K_e := 1/2 - 1/2\cos(2\pi\theta)$
$K_2 := 1 - \sin(4\theta)$	$K_2 := 1/2 - 1/2\cos(4\pi\theta)$
$V_1 := 1 - \sin(8\theta)$	$V_1 := 1/2 - 1/2\cos(8\pi\theta)$
$K_e := 1 - \sin(16\theta)$	$K_1 := 1/2 - 1/2\cos(16\pi\theta)$

L'utilisation de l'OPO T_{J^*} associé à la transformation 1 et 2 donnera le minimum global représenté par les figures suivantes respectivement :

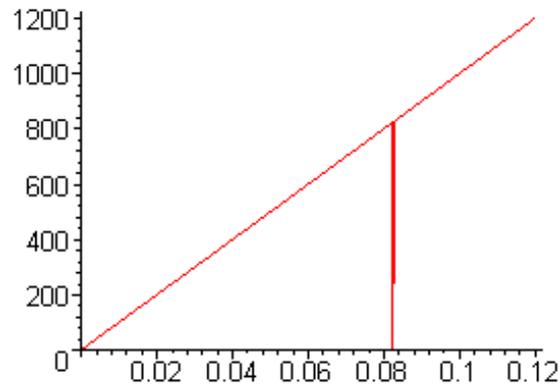


FIGURE 4.10. Courbe de $T_{J^*}^{0.0001}(\theta)$ associée à la transformation 1, $\theta^* = 0.0825$

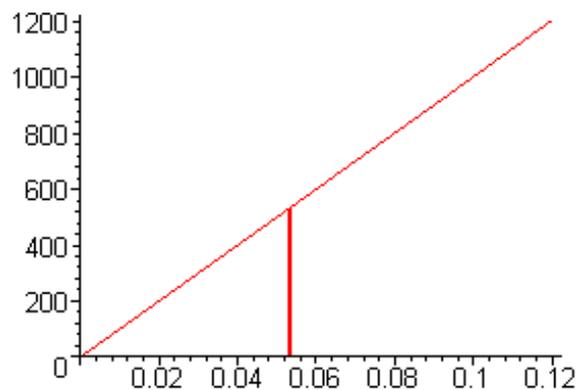


FIGURE 4.11. Courbe de $T_{J^*}^{0.0001}(\theta)$ associée à la transformation 2, $\theta^* = 0.053262$

Le tableau suivant résume les résultats de la simulation obtenus par les transformations 1, 2 et par la méthode itérative de Levenberg-Marquardt :

TABLEAU 4.4. Valeurs des paramètres obtenus par : Adomian/ transformation1, Adomian/transformation2 et Adomian/Levenberg-Marquardt

Paramètres	Transformation 1	Transformation 2	Levenberg-Marquardt
V_1	0.3868	0.3846	0.3057
V_2	0.0825	0.0532	0.1594
K_1	0.8357	0.9467	0.3548
K_2	0.6759	0.1077	0.1761
K_e	0.0312	0.0277	0.0040
Valeur de J	0.00209	0.000461	0.0019

On a choisi le vecteur des paramètres de départ de la méthode itérative :

$$Vect_2 = [V_1, V_2, K_1, K_2, K_e] = [0.91, 0.82, 0.1, 0.5, 0.01].$$

Discussion :

On a déterminé les paramètres du modèle avec l'utilisation de deux transformations réductrices et une méthode itérative. Ces paramètres sont reportés dans les solutions du modèle compartimental afin de les comparer avec les données expérimentales. D'après les résultats présentés dans le tableau 4.4, on constate que la valeur de J est petite par rapport à celle obtenue par Levenberg-Marquardt.

On note que la méthode de Levenberg-Marquardt dépend du choix du vecteur des paramètres de départ, lorsqu'il est choisi arbitrairement, cette méthode ne donne pas de bons résultats.

La comparaison des courbes des données expérimentales (en points) avec les courbes simulées (en lignes) de la concentration de substance dans le premier compartiment x_1 et la concentration de substance dans le deuxième compartiment x_2 est illustrée dans la figure ci-dessous. La superposition des courbes montre que les paramètres identifiés par la transformation 2 sont meilleurs.

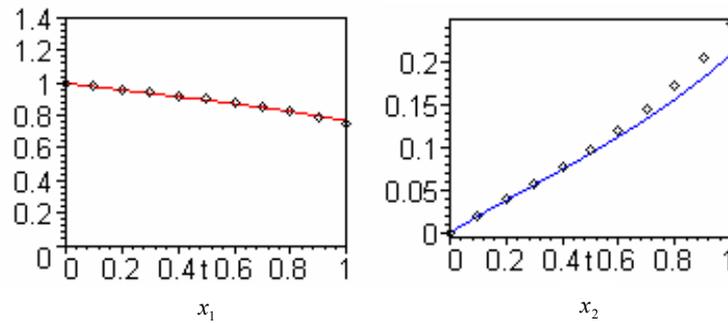


FIGURE 4.12. Superposition des courbes expérimentales (points) avec les courbes estimées (lignes) par la méthode Adomian/transformation 2

Conclusion

On a considéré le problème d'identification des modèles compartimentaux qui consiste à déterminer les paramètres du modèle par la minimisation d'une fonctionnelle d'erreur. Ce problème est ramené à un problème d'optimisation d'une fonction à une seule variable par la combinaison des deux méthodes Adomian et Alienor. La résolution du modèle par la méthode décompositionnelle d'Adomian permet de remplacer la fonctionnelle d'erreur à minimiser, qui dépend implicitement des paramètres inconnus, par une fonctionnelle explicitement dépendante des paramètres à identifier. La méthode Alienor appliquée à cette fonctionnelle nous ramène à un problème de minimisation d'une fonction à une seule variable.

La simulation du modèle VIH et du modèle compartimental montre que la méthodologie proposée permet d'obtenir des résultats satisfaisants et confirme les résultats obtenus par des méthodes classiques [27], [28].

Une fois que les inconnus du modèle sont identifiés, nous pouvons envisager de contrôler (commander) le modèle compartimental ou autre, de façon à optimiser certains critères, par exemple maintenir la concentration de médicament dans la tumeur autour d'une valeur souhaitée. Le contrôle n'est déterminé que si le système contrôlé est parfaitement connu (identifié). Lorsqu'on possède des modèles exprimés par des systèmes différentiels non linéaires qui comportent des paramètres inconnus, ce type de problème est appelé contrôle optimal des systèmes indéterminés.

CHAPITRE 5

CONTROLE OPTIMAL DES SYSTEMES INDETERMINEES

5.1 Introduction

Notre objectif consiste à chercher le contrôle optimal d'un modèle indéterminé, sans avoir à identifier le modèle. La détermination du contrôle optimal est réalisée, en combinant la méthode décompositionnelle d'Adomian et la méthode Alienor qui permet de ramener le problème de minimisation d'une fonction dépendant explicitement des paramètres du modèle et du contrôle à un problème de minimisation d'une fonction à une seule variable. Une application au modèle indéterminé du Virus Immunitaire Humain (VIH) est considérée.

5.2 Utilisation de la méthode combinée Adomian/Alienor

On procédera de la manière suivante :

Le problème consiste à déterminer le contrôle $u(t)$ minimisant le critère :

$$I = \int_0^T F(x, u) dt \quad (5.1)$$

sachant que x et u doivent satisfaire le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx_i(t)}{dt} = f_i(x, \alpha, u, t) + g \\ x_i(t=0) = \beta_i \quad , \quad i = 1, \dots, p \end{cases} \quad (5.2)$$

On représente chaque composante $u_j(t)$ de vecteur du contrôle $u(t)$ par :

$$u_j(t) = \sum_{k=1}^r \gamma_k^j \varphi_k(t), \quad j = 1, \dots, l \quad (5.3)$$

où γ_k^j sont des constantes à déterminer, $\varphi_k(t)$ sont des fonctions connues correspondant à l'approximation choisie : (polynomiale, spline, exponentielle,...).

Le système différentiel (5.2) est résolu par la méthode décompositionnelle d'Adomian, après avoir exprimé le vecteur de contrôle $u(t)$ par les approximations (5.3). La méthode d'Adomian donnera les solutions approchées $x_i(t)$, $i = 1, \dots, p$ sous la forme de séries tronquées (à l'ordre s) :

$$x_i(t) = \sum_{j=0}^{s-1} v_j^i(\alpha_1, \dots, \alpha_q, \gamma_k^1, \dots, \gamma_k^l, t), \quad i = 1, \dots, p \quad (5.4)$$

où chaque solution $x_i(t)$ est fonction explicite des paramètres du système α_w , des paramètres du vecteur de contrôle γ_k^j et de la variable temps t .

En reportant les expressions (5.4) dans la fonction (5.1), on obtient le problème de minimisation :

$$I = \underset{\alpha_1, \dots, \alpha_q, \gamma_k^1, \dots, \gamma_k^l}{\text{Min}} \int_0^T F(\sum v_j^1(\alpha_1, \dots, \alpha_q, \gamma_k^1, \dots, \gamma_k^l, t), \dots, \sum v_j^p(\alpha_1, \dots, \alpha_q, \gamma_k^1, \dots, \gamma_k^l, t), \sum \gamma_k^1 \varphi_k(t), \dots, \sum \gamma_k^l \varphi_k(t)) dt \quad (5.5)$$

qui est un problème de minimisation par rapport aux paramètres α_w et γ_k^j , soit $q+r.l$ variables. Ces paramètres peuvent être réduits par Alienor à une seule variable θ . On définit les transformations réductrices pour les paramètres du vecteur de contrôle par :

$$\gamma_k^i = \psi_k^i(\theta), \quad i = 1, \dots, l \quad \text{et} \quad k = 1, \dots, r \quad (5.6)$$

et

$$\alpha_w = \delta_w(\theta), \quad w = 1, \dots, q \quad (5.7)$$

pour les paramètres du système.

Les transformations $\psi_k^i(\theta)$ et $\delta_w(\theta)$ sont choisies de sorte qu'elles densifient l'espace $\mathbb{R}^{q+r.l}$.

En substituant (5.6) et (5.7) dans la fonction (5.5), le problème de recherche de minimum global (5.5) est approché par un problème de minimisation d'une fonction à une seule variable :

$$\underset{\theta}{\text{Min}} I^*(\theta) \quad (5.8)$$

où :

$$I^*(\theta) = \int_0^T F\left(\sum v_j^1(\delta_1(\theta), \dots, \delta_q(\theta), \psi_k^1(\theta), \dots, \psi_k^l(\theta), t), \dots, \sum v_j^p(\delta_1(\theta), \dots, \delta_q(\theta), \psi_k^1(\theta), \dots, \psi_k^l(\theta), t), \sum \psi_k^1(\theta)\varphi_k(t), \dots, \sum \psi_k^l(\theta)\varphi_k(t)\right) dt$$

La fonction $I^*(\theta)$ est une fonction continue sur un domaine fermé et borné, elle admet au moins un minimum dans $\theta \in [0, \theta_{\max}]$. Y.Cherruault [17], a montré que toute solution du problème (5.8) est une approximation de la solution de (5.5), par conséquent le problème d'existence et de l'unicité du vecteur de contrôle et celui des paramètres est ramené à chercher le minimum global de $I^*(\theta)$ par des méthodes de minimisation d'une fonction à une seule variable.

5.3 Application au modèle biologique VIH

Le modèle du VIH est représenté par le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = S - dx_1 - \beta x_1 x_3 \\ \dot{x}_2 = \beta x_1 x_3 - \mu_1 x_2 \\ \dot{x}_3 = kx_2 - \mu_2 x_3 \end{cases} \quad (5.9)$$

Le système (5.9) comporte trois équations différentielles ordinaires non linéaires décrivant explicitement la variation des variables $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, en fonction de temps $t \in \mathbb{R}^+$. Ces variables représentent respectivement, le nombre (quantité) de cellules CD4+T saines, celui de cellules CD4+T infectées et la charge virale.

Les paramètres du système sont : S : taux de production des cellules saines, d : taux de mortalité des cellules saines, β : taux d'infection des cellules saines CD4 par le virus HIV, μ_1 : taux de mortalité naturelle des cellules infectées, k : taux de production du virus, μ_2 : taux de déclin naturel du virus.

Ce modèle a été décrit (voir chapitre 3, section 3) et on suppose que les paramètres $S, d, \beta, \mu_1, \mu_2, k$ sont inconnus. On cherche à déterminer la dose thérapeutique optimale associée au modèle en minimisant une certaine fonction objective.

Dans la thérapie du virus VIH, on remarque que de grandes doses thérapeutiques peuvent détruire les cellules saines avec risque d'effets secondaires, tandis que les faibles doses n'auront pas d'effet sur le virus. D'où la nécessité de chercher une thérapie

optimale, permettant de réduire la quantité du virus dans le sang tout en évitant le risque d'effets secondaires. Ceci peut se faire en agissant sur le taux d'infection des cellules saines par le virus, c'est à dire on prendra comme contrôle le terme $\beta(t) = \beta(1 - u(t))$, avec $0 \leq u(t) \leq 1$.

L'objectif sera donc de minimiser la fonctionnelle suivante :

$$I = x_3^2(T) + A \int_0^T u^2(t) dt \quad (5.10)$$

sachant que x_3 et u sont solutions de (5.9). $T > 0$ étant le temps de traitement fixé par le staff médical. A est une constante de pondération qui varie selon la résistance du patient au traitement.

Le but est de chercher la quantité optimale $u^*(t)$ tel que :

$$u^*(t) = \text{Min}(1, u(t)) \quad (5.11)$$

On note que $u(t) = 1$, représente l'utilisation de la dose maximale et $u(t) = 0$ représente l'absence de traitement.

On considère les trois fonctions de contrôle suivantes :

$$\begin{aligned} u^e(t) &= \gamma_1 e^{-\gamma_2 t} \\ u^1(t) &= -\gamma_3 t + \gamma_4 \\ u^2(t) &= -\gamma_5 t^2 + \gamma_6 t + \gamma_7 \end{aligned} \quad (5.12)$$

avec $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6$ et γ_7 des paramètres à déterminer en minimisant le critère (5.10).

Le système muni de son contrôle est résolu par la méthode d'Adomian, la solution obtenue, fonction des paramètres du système et de contrôle, est reportée dans le critère qui, à son tour, est minimisé par la méthode Alienor.

5.3.1 Résultats numériques

On cherche à déterminer les paramètres $S, d, \beta, \mu_1, \mu_2, k$ du modèle contrôlé (5.9) et les paramètres du contrôle en minimisant le critère (5.10).

On suppose que les conditions initiales du modèle [25] sont données comme suit :

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0.2, \quad x_3(0) = 0.8$$

On considère trois fonctions de contrôle (5.12), avec $0 \leq u^j(t) \leq 1$. $j = 1, 2$ et e .

On reporte chacun des contrôles u^e, u^1, u^2 dans le système (5.9), puis on résout le système par la méthode décompositionnelle d'Adomian. Les solutions tronquées à l'ordre 4 du système dépendent explicitement de $S, d, \beta, \mu_1, \mu_2, k$ et des paramètres du contrôle.

Après substitution de la solution $x_3(t)$ et du contrôle $u^j(t)$ dans la fonctionnelle (5.10), celle ci est minimisée par la méthode Alienor avec la transformation :

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \theta \\ \xi_i &= (1 - \sin 2^{i-1}\theta), i = 2, \dots, n\end{aligned}\quad (5.13)$$

où n est le nombre de paramètres et les ξ_i correspondent aux paramètres du système et de contrôle.

En utilisant la transformation (5.13), on pose :

$u^e(t)$	$u^1(t)$	$u^2(t)$
$d := \theta$	$d := \theta$	$d := \theta$
$\gamma_1 := 1 - \sin(2\theta)$	$\mu_1 := 1 - \sin(2\theta)$	$\gamma_5 := 1 - \sin(2\theta)$
$S := 1 - \sin(2^2\theta)$	$\beta := 1 - \sin(2^2\theta)$	$S := 1 - \sin(2^2\theta)$
$\beta := 1 - \sin(2^3\theta)$	$k := 1 - \sin(2^3\theta)$	$\gamma_7 := 1 - \sin(2^3\theta)$
$\mu_2 := 1 - \sin(2^4\theta)$	$\mu_2 := 1 - \sin(2^4\theta)$	$\mu_1 := 1 - \sin(2^4\theta)$
$\gamma_2 := 1 - \sin(2^5\theta)$	$\gamma_3 := 1 - \sin(2^5\theta)$	$\gamma_6 := 1 - \sin(2^5\theta)$
$k := 1 - \sin(2^6\theta)$	$\gamma_4 := 1 - \sin(2^6\theta)$	$k := 1 - \sin(2^6\theta)$
$\mu_1 := 1 - \sin(2^7\theta)$	$S := 1 - \sin(2^7\theta)$	$\mu_2 := 1 - \sin(2^7\theta)$
		$\beta := 1 - \sin(2^8\theta)$

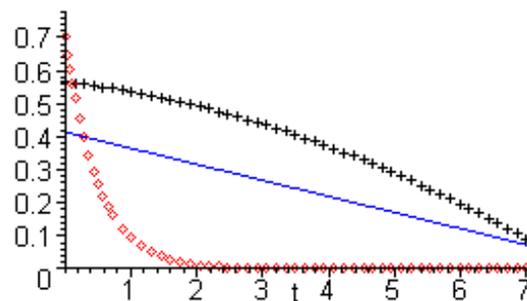
Les résultats obtenus par la méthode combinée Adomian/Alienor pour différentes fonctions de contrôle sont résumés dans le tableau suivant :

TABLEAU 5.1. Valeurs des paramètres obtenus par : Adomian/Alienor

Paramètres	$u^1(t)$	$u^2(t)$	$u^e(t)$
S	1.949	1.222	0.4297
d	0.432	0.8414	0.1517
μ_1	0.2395	0.219	0.4620
μ_2	0.4118	0.226	0.3448
k	1.3092	1.42	1.2802
β	0.0123	0.019	0.0631
γ_3	0.0486	-	-
γ_4	0.4138	-	-
γ_5	-	0.006	-
γ_6	-	0.02	-
γ_7	-	0.56	-
γ_1	-	-	0.7012
γ_2	-	-	1.9899
Valeur de I	0.7841	1.14	0.1236

On remarque que l'augmentation ou la diminution de l'un des paramètres influe sur les autres et par conséquent sur les solutions du modèle. Le taux d'infection β des cellules saines par le virus est minimal, ce qui signifie que la charge virale va diminuer. Le taux de mortalité des cellules saines d doit être inférieur aux taux de mortalité μ_1 et μ_2 . En effet, les cellules saines survivent plus que les cellules infectées.

On donne les courbes des différentes fonctions de contrôle par la figure suivante :

FIGURE 5.1. Courbes de contrôle u^e (points), u^1 (lignes) et u^2 (+)

La comparaison des courbes des données expérimentales sans contrôle obtenues en

fixant les paramètres ($S = 1$, $d = 0.8$, $\beta = 1$, $\mu_1 = 0.8$, $\mu_2 = 0.01078$, $k = 1$) avec les courbes obtenues après contrôle pour les cellules CD4+T saines x_1 , les cellules CD4+T infectées x_2 et la charge virale x_3 sont illustrées par les figures (5.2), (5.3) et (5.4). On remarque que les trois fonctions de contrôle donnent des résultats satisfaisants dans le sens qu'elles diminuent la charge virale. La valeur optimale du critère est atteinte pour $u^e(t) = \gamma_1 e^{-\gamma_2 t}$.

La figure 5.2, représente la comparaison de la quantité des cellules CD4+T saines x_1 , sans contrôle et avec contrôle optimal pour les différentes fonctions de contrôle. On remarque qu'elle reste à un niveau acceptable avec l'administration de la thérapie optimale pour u^1 , u^2 et u^e .

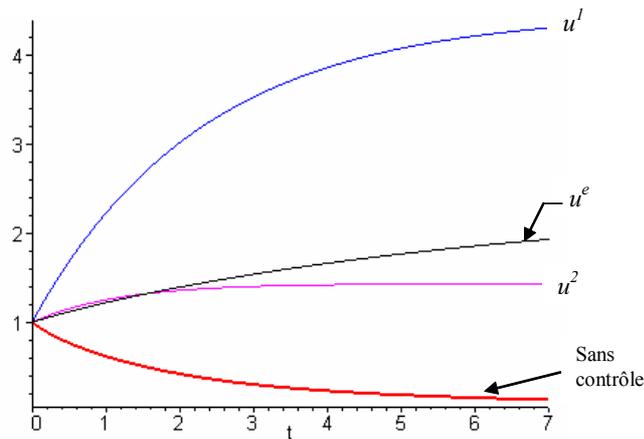


FIGURE 5.2. Superposition des courbes des solutions x_1 sans contrôle et avec contrôle optimal

La figure 5.3, donne la comparaison de la quantité des cellules CD4+T infectées x_2 de la thérapie optimale et sans traitement. On constate qu'elle diminue et reste à un niveau acceptable avec l'administration de la thérapie optimale pour u^1 , u^2 et u^e .

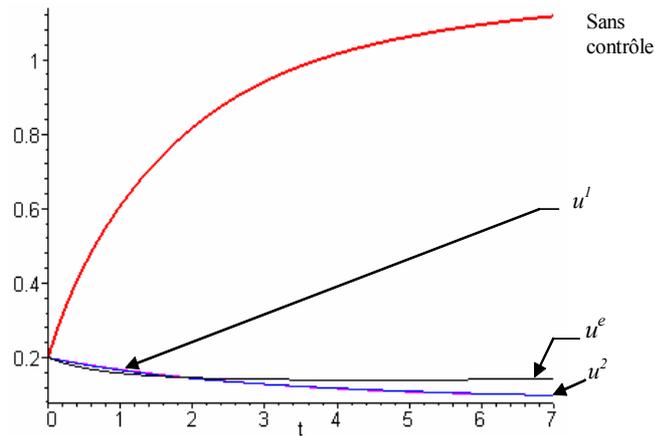


FIGURE 5.3. Superposition des courbes des solutions x_2 sans contrôle et avec contrôle optimal

La figure 5.4, illustre la comparaison de la charge virale du VIH x_3 de la thérapie optimale et sans contrôle. Elle diminue avec l'administration de la thérapie optimale pour u^e, u^1 et u^2 .

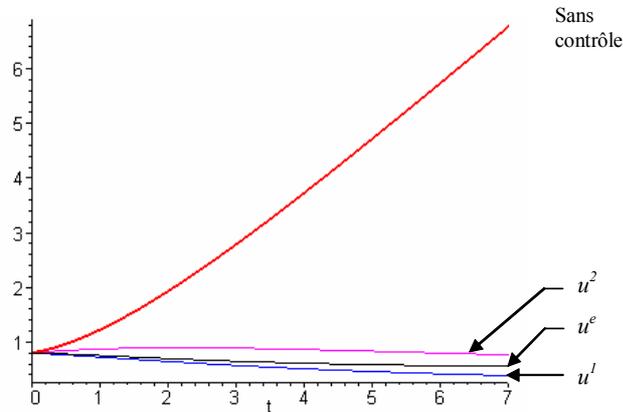


FIGURE 5.4. Superposition des courbes de solutions x_3 sans contrôle et avec contrôle optimal

Concernant le choix de la thérapie optimale appliquée à un patient, le biologiste est libre dans son choix, en se basant sur :

- La valeur de la fonction objective.
- les taux de mortalité ou d'infection.
- La courbe de contrôle.

Conclusion

Le problème de contrôle optimal des systèmes non linéaires indéterminés a été étudié, en utilisant une méthodologie basée sur l'utilisation des méthodes Adomian et Alienor. La combinaison de ces deux méthodes permet de ramener le problème de contrôle des systèmes indéterminés à un problème d'optimisation d'une fonction à une seule variable. Une application au problème de recherche de la thérapie optimale du modèle immunitaire du VIH est réalisée. A partir des données expérimentales d'un patient, on peut déterminer les paramètres et le contrôle optimal correspondant. Ces résultats peuvent être utilisés pour le traitement de tout patient présentant les mêmes symptômes. La comparaison des solutions obtenues par la méthode combinée Adomian/Alienor avec les données expérimentales du modèle donne des résultats satisfaisants.

Conclusion

Les mathématiciens ont toujours été à l'avant garde de la recherche aussi bien fondamentale que pratique en développant plusieurs théories. Dès que l'on cherche à comprendre et à maîtriser un phénomène issu du réel, nous sommes confrontés au problème de la modélisation mathématique qui va impliquer l'utilisation d'une méthode de résolution d'équations fonctionnelles et celle d'optimisation globale pour déterminer le modèle qui reflète le mieux la réalité. Ce faisant, nous nous intéressons à ces méthodes mathématiques qui interviennent dans l'élaboration et l'utilisation des modèles.

Dans ces deux domaines nous avons décrit deux méthodes générales :

Pour la résolution d'équations fonctionnelles non linéaires nous avons présenté la méthode décompositionnelle d'Adomian. Elle est basée sur une décomposition de l'opérateur non linéaire à l'aide de polynômes dits d'Adomian. Des formules simples ont été proposées pour construire des logiciels calculant les séries solutions des équations (ou des systèmes d'équations fonctionnelles). La programmation de la méthode pour la résolution des équations différentielles et des équations aux dérivées partielles se fait à l'aide des logiciels de calcul formel, par exemple MAPLE. C'est ainsi que, même les systèmes compartimentaux non linéaires peuvent être résolus avec l'approximation souhaitée, grâce à cette méthode qui a comme avantage de ne discrétiser ni l'espace ni le temps et donne les solutions en fonction explicite des paramètres qui interviennent dans ces équations.

La méthode d'optimisation globale, Alienor, est basée sur une idée qui consiste à remplacer les fonctions de " n " variables par des fonctions d'une variable pour lesquelles on sait trouver les extremums absolus. Cette méthode a un rôle important pour l'identification des modèles et leur contrôle.

Le travail que nous avons mené au cours de ce mémoire a eu pour but de proposer une méthodologie combinant la méthode décompositionnelle d'Adomian et la méthode Alienor, pour la résolution de problème d'identification paramétrique des systèmes compartimentaux et celui de contrôle optimal des systèmes indéterminés.

Nous avons considéré le problème d'identification paramétrique des systèmes compartimentaux qui consiste à chercher un modèle paramétrique exprimé sous forme d'un système différentiel non linéaire et comportant des paramètres inconnus que nous devons identifier à partir des données expérimentales disponibles. Pour les identifier, on se ramène à la minimisation d'une fonctionnelle d'erreur entre les grandeurs expérimentales issues du modèle réel et les grandeurs calculées en résolvant le système.

Ensuite, nous avons étudié le problème de contrôle optimal des systèmes indéterminés. Un système indéterminé est représenté par un système différentiel non linéaire comportant des paramètres inconnus, pour lequel on cherche le contrôle optimal qui minimise une certaine fonction objective.

On a montré que la méthode décompositionnelle d'Adomian permet de ramener les problèmes d'identification paramétrique et de contrôle optimal des systèmes indéterminés à des problèmes d'optimisation classiques. En effet, les fonctions à optimiser deviennent des fonctions dépendant explicitement des paramètres et des contrôles.

L'utilisation de la méthode combinée Adomian/Alienor pour la résolution de ces problèmes nous a permis de les réduire à des problèmes de minimisation d'une fonction à une seule variable.

Le travail qui nous a été proposé avait pour objectifs :

- Premièrement, de faire l'identification paramétrique des modèles par la méthode combinée Adomian/Alienor d'un modèle biologique du VIH et d'un autre modèle compartimental à deux compartiments.
- Deuxièmement, de déterminer le contrôle optimal d'un modèle indéterminé de VIH en minimisant une certaine fonction objective. Ce contrôle correspond à une fonction dépendant explicitement des paramètres inconnus et de la variable temps. Il est obtenu par la méthode combinée Adomian/Alienor.

Les perspectives que nous envisageons dans le prolongement de ce travail s'articulent autour des points suivants :

- * Considérer des systèmes aux dérivées partielles avec conditions aux limites.
- * Considérer des systèmes différentiels non linéaires bruités ou comportant des paramètres variables du temps.

- * Réaliser des logiciels d'identification paramétrique des systèmes dynamiques.
- * Considérer le problème de contrôle adaptatif des systèmes non linéaires.

Enfin, nous espérons que ce modeste travail contribuera à l'avancement de la recherche dans ce domaine et aidera les futurs chercheurs dans leurs travaux.

APPENDICE
LISTE DES SYMBOLES ET DES ABREVIATIONS

A_n	: polynômes d'Adomian
B	: Matrice d'observation constante
K_e	: coefficient d'échange avec l'extérieur
K_i, V_i	: constantes de Michaelis-Menten
L	: opérateur différentiel
L^{-1}	: l'inverse de l'opérateur différentiel
MDA	: Méthode décompositionnelle d'Adomian
MA	: Méthode Alienor
N	: terme non linéaire
$O.P.O$: Opérateur qui préserve l'optimisation
T_f	: l'opérateur préservant l'optimisation de la fonction f
T	: temps d'observation
Y	: variable observée (sortie)
$c(n, j)$: coefficients des polynômes d'Adomian
$h(\theta)$: la courbe densifiant l'espace \mathbb{R}^n
u	: variable de contrôle
\dot{x}	: variable d'état
$\prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$: pavé de \mathbb{R}^n
$\nabla J(\alpha)$: le gradient de $J(\alpha)$
$\nabla^2 J(\alpha)$: le hessien de $J(\alpha)$.
$\Delta\theta$: le pas de la méthode Alienor
ϕ_{is}	: série tronquée de la solution x_i à l'ordre s
λ	: constante
γ	: fonction

RÉFÉRENCES

- [1] Ljung, L., “System identification : Theory for the user”, Information and system sciences series, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ,(1987).
- [2] Luenberger, D.G., “Introduction to linear and non linear programming”, Addition Wesley, (1973).
- [3] Boumahrat, M. Goudron, A., “Méthodes Numériques Appliquées”, OPU, Alger, (1993).
- [4] Culioli, J, C., “Introduction à l’optimisation”, Edition Marketing, (1994).
- [5] Manseur, S., Messaoudi, N., “Identification des Paramètres d’un Système Immunitaire du HIV par la Méthode Combinée Adomian/Alienor”, 2 ème colloque international sur l’optimisation et les systèmes d’information Cosi ’05, (12-14 Juin 2005), Béjaïa, Algérie.
- [6] Benvenuti, L., De Santis, A., Farina, L., “On model consistency in compartmental systems identification”, Automatica, V. 38, (2002), 1969-1976.
- [7] Zaidi, Z., Manseur S., Cherruault, Y., Meulemans, A., “Identification of an Anticancerous Drug Model in Brain Tissues Using Adomian / Alienor Methods”, Kybernetes, V. 34, n^o7/8, (2005), 1187-1199.
- [8] Walter, E., Pronzato, L., “Identification de modèles paramétriques à partir de données expérimentales”, Masson, (1994).
- [9] Kamoun, M., Ksouri, M., Gabsi, S., Maalej, A., “Identification des paramètres d’un refroidisseur à grilles de cimenterie”, RAIRO, APII, JESA, V. 30, n^o 6, (1996), 877-895.
- [10] Söderstrom, T, and Stoica., “ System Identification”, Prentice Hall, Hemel Hempstead, U.K, (1989).
- [11] Manseur, S., Attalah, K., Cherruault, Y., “ Optimal control of chemotherapy of HIV model using the couled Adomian/Alienor methods”, Kybernetes, V.34, n^o 7/8, (2005), 1200-1210.

- [12] Cherruault.Y., “Modèles et méthodes mathématiques pour les sciences du vivant”, Presses Universitaires de France (P.U.F), Paris, (1998).
- [13] Cherruault, Y., “Biomathématiques”, Coll. que sais- je? No 2052. Presses Universitaires de France (P.U.F), , Paris, (1983).
- [14] Bellman, T., “ Dynamic programming”, Princeton university press, (1965).
- [15] Cherruault, Y., “Convergence of Adomian’s Method”. *Kybernetes*, V. 18, n^o 2, (1989), 31-38.
- [16] Abbaoui, K., “Les fondements mathématiques de la méthode décompositionnelle d’Adomian et application à la résolution de problèmes issus de la biologie et de la médecine”. Thèse de l’Université Paris VI. Laboratoire MEDIMAT, (1995).
- [17] Cherruault, Y., “Optimisation, méthodes locales et globales”, Presses Universitaires de France (P.U.F), Paris, (1999).
- [18] Cherruault, Y., “Convergence of decomposition methods and application to biological systems”, *International journal of Bio-medical Computing*, V. 36, (1994), 193-197.
- [19] Abbaoui, K., Cherruault, Y., and D’nour, M.N., “The decomposition method applied to differentiel systems”, *Kybernetes*, V. 24, n^o.8, (1995), 32-40.
- [20] Cherruault, Y., Adomian, G., Abbaoui, K. and Rach, R., “Further remarks on convergence of decomposition method”, *International Journal of Bio-Medical Computing*, Vol.38, (1995). 89-93.
- [21] Cherruault, Y. and Guillez, A., “Une méthode pour la recherche du minimum global d’une fonctionnelle”, *C.R.A.S, Paris T296, Série I*, (1983), 175-178.
- [22] Mora, G., Cherruault, Y.and Ziadi, A., “Functional Equations Generating Space-Densifying Curves”. *Comput. and Maths. with Applications*. V. 39, (2000), 45-55.
- [23] Ziadi, A., Cherruault, Y. and Mora, G., “Global Optimization : A New Variant of the Alienor Method”.*Comput. Maths with Applications*, V. 41, (2001), 63-71.

- [24] Khelifa, S., “Equations aux dérivées partielles et méthode décompositionnelle d’Adomian”. Thèse de Doctorat Es sciences. Université H.Boumedienne, Algeries, (2002).
- [25] Nowak, M, A., Bangham, R.M., “Population dynamics of immune responses to persistent viruses”, *Sciences*, V. 272, (1996). 74-79.
- [26] Bonhoeffer, S., May, R M., Shaw, G M., Nowak, M.A., “ Virus dynamics and drug therapy”, *Proceeding of national academy of sciences of the United States of America*, V. 94, Issue 13, (24 Juin 1997), 6971-6976.
- [27] Xiaohua, X., “ Estimation of HIV/AIDS parameters”, *Automatica* ,Vol. 39, (2003), 1983-1988.
- [28] Deeba, E.Y and Khuri S.A , “The solution of Nonlinear Compartmental Models”, *Mathl.Comput. Modelling*, V. 25, n^o 5, (1996), 85-100.
- [29] Messaoudi, N., Manseur, S., “Parameter Identification of Nonlinear Compartmental Systems using Adomian Method”, to appear.
- [30] Manseur, S., Messaoudi, N., “Contrôle optimal des systèmes indéterminés par la méthode combinée Adomian/Alienor. Application au modèle immunitaire du VIH”, 6ième Conférence Francophone de MOdélisation et SIMulation - MOSIM’06 - du 3 au 5 Avril 2006 - Rabat - Maroc. "Modélisation, Optimisation et Simulation des Systèmes : Défis et Opportunités".
- [31] Landau, I. D., Besançon Voda, A., “Identification des systèmes”, Hermès science publications, (2001).
- [32] Sastry, S and Bodson, M., “Adaptive Control : Stability, Convergence, and Robustness”, Prentice-Hall Advanced Reference Series (Engineering), (1994).
- [33] Haddad, W, M., Hayakawa, T., “Adaptive control for nonlinear nonnegative dynamical systems”, *Automatica* V. 40, (2004). 1637-1642.
- [34] Astrom, K. J., Wittenmark., B., “Adaptive Control”, Addison, Wesley, Publishing, (1989).

- [35] Manseur, S., Cherruault, Y., “Adomian method for solving adaptive control problem”, *Kybernetes*, V. 34, n^o 7/8, (2005). 992-998.
- [36] Adomian, G., “Nonlinear Stochastic operators equations”, Academic Press, (1986).
- [37] Adomian, G., “Nonlinear Stochastic Systems Theory and Applications to physic”, Kluwer Academic, (1989).
- [38] Cherruault, Y., Adomian, G., “Decomposition methods: A new proof of convergence”, *Math. Comput. Modelling*, V. 18, (1993), 103-106.
- [39] Abbaoui, K., Cherruault, Y., “Convergence of Adomian’s method applied to differential equations”, *Computers Math applic*, V. 28, n^o 5, (1994), 103-109.
- [40] Abbaoui, K., Cherruault, Y., “New ideas for proving convergence of decomposition methods”, *Computers Math. Applic*, V. 29, n^o 7, (1995), 103-108.
- [41] Guellal, S., Grimalt, P., Cherruault, Y., “Numerical study of Lorentz’s equation by the Adomian method”, *Comput. Math. Appl.*, V.33, n^o 3, (1997), 25-29.
- [42] Abbaoui, K., Cherruault, Y., “The decomposition method applied to the cauchy problem”, *Kybernetes*, V. 28 n^o1, (1999), 68-74.
- [43] Abbaoui, K., Cherruault, Y., “New ideas for proving convergence of decomposition methods”. *Computers Math Applic*. V. 29, n^o 7, (1995), 103-103.
- [44] Luca, B., and Lorenzo, F., “Positive and Compartmental Systems”, *IEEE Transactions on Automatic control*, V. 47, n^o 2, (2002), 370-373.
- [45] Glowinski, R., Lions, J.L., “Computing methods in applied sciences and engineering”, North-Holland, Amsterdam, (1980).
- [46] Törn, A. and Silinskas, A., “Global optimisation”, Springer-Verlag, Heildenberg, New York, (1988).
- [47] Cherruault, Y., “New deterministic methods for global optimization and application to biomedecine”, *Int J, Biomed, Comp.* V. 27, (1991), 215-229.

- [48] Cherruault, Y., “Global optimization in biology and medicine”, *Mathl, Comput Modelling*, V. 18, n^o 6, (1994), 119-132.
- [49] Ammar, H., “La méthode d’optimisation globale multidimensionnelle Alienor, Solution analytique d’un modèle de diffusion de la streptavidine et la DTPA-Biotine en immunoscintigraphie cardiaque en deux étapes”, Thèse de l’université Paris VI, (5 octobre 1995).
- [50] Barnsley, S., “Fractals everywhere”, Acad, Press, (1988).
- [51] Bellagoun, A., Cherruault, Y., Meulemans, A., “Modelling and identification of drug diffusion in brain”, *Mathl, Comput*, V. 17, n^o 9, (1993), 101-105.
- [52] Konfé, B.O., Cherruault, Y., Benneouala, T., “A global Optimisation method for large number of variables (Variants of Alienor Method)”, *Kybernetes*, V. 34, n^o 7/8 , (2005), 1070-1083.
- [53] Cherruault, Y., Mora, G., “Optimisation globale : Théorie des courbes α -denses”, *Economica*, (2005).
- [54] Mora. G., Cherruault, Y., Benabidallah, A., “Global optimisation-preserving operators”, *Kybernetes*, V. 32, n^o. 9/10, (2003), 1473-1480.
- [55] Konfé, B.O., Cherruault, Y., Some, B., Benneouala, T., “A new optimisation preserving operator : applied to global optimisation”, *Kybernetes*, V. 34, n^o 7/8, (2005), 1112-1124.